与 Hermite 多项式和广义 Laguerre 多项式 相关联的双正交多项式系统

许艳

东北财经大学数学学院, 大连 116025

E-mail: yan_xu@dufe.edu.cn

收稿日期: 2017-01-19; 接受日期: 2018-05-23; 网络出版日期: 2020-03-23

辽宁省高等学校优秀人才支持计划 (批准号: LJQ2015035) 资助项目

摘要 生成函数刻画了正交多项式的很多重要性质. 本文的主要目的是根据生成函数的特点研究正交多项式类之间的渐近关系. 本文拓展了 Lee 及其合作者的工作, 构造一类双正交多项式系统, 并由此构造出分别渐近于 Hermite 多项式和广义 Laguerre 多项的函数列; 给出渐近于 Hermite 多项式和广义 Laguerre 多项的函数列的判定定理. 作为这些性质的应用, 可以直接获得若干正交多项式和组合多项式的渐近表示, 从而验证了揭示超几何多项式渐近关系的 Askey 格式成立.

关键词 Hermite 多项式 Laguerre 多项式 Appell 序列 Askey 格式 B 样条 Bernoulli 多项式 Euler 多项式

MSC (2010) 主题分类 42C05, 33C45, 41A15, 11B68

1 引言

概率型的 Hermite 多项式定义为

$$e^{xz - \frac{z^2}{2}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{H_m(x)}{m!} z^m, \quad z \in \mathbb{C}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1.1)$$

由此得到 Hermite 多项式的 Cauchy 型积分表示

$$H_m(x) = \frac{m!}{2i\pi} \oint e^{xz - \frac{z^2}{2}} z^{-(m+1)} dz. \quad (1.2)$$

Hermite 多项式也可以由 Gauss 函数 $G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ 的导函数通过 $(-1)^m G^{(m)}(x) = H_m(x)G(x)$ ($m = 0, 1, \dots$) 关系得到. 因此, Hermite 多项式的正则关系

$$\frac{1}{m!} \int_{-\infty}^{\infty} H_m(x) H_n(x) G(x) dx = \delta_{m,n}$$

英文引用格式: Xu Y. Biorthogonal polynomial systems associate with Hermite polynomials and generalized Laguerre polynomials (in Chinese). Sci Sin Math, 2020, 50: 513–526, doi: 10.1360/SSM-2020-0074

可以看成是 Gauss 函数导函数 $\{(-1)^n G^{(n)} : n = 0, 1, \dots\}$ 与 Hermite 多项式 $\{\frac{H_m}{m!} : m = 0, 1, \dots\}$ 之间的双正交关系.

自从 1864 年 Hermite 的开创性论文 [1] 提出 Hermite 多项式以来, 对 Hermite 多项式的研究已经深入到物理学、数学和工程学的很多重要的领域. 在过去的十几年中, 对一类分别由 Hermite 多项式和广义 Laguerre 多项式所表示的重要多项式的渐近性质的研究, 逐渐引起了人们的关注. 著名的超几何多项式的 Askey 格式揭示了多组正交多项式之间的渐近关系^[2-4]. 其中 Askey 格式的底层揭示了一大类正交多项式: Gegenbauer、Laguerre、Charlier、Jacobi、Meixner-Pollaczek、Meixner、Krawtchouk 和 Hahn 型 (参见文献 [5-9]) 之间的渐近关系, 并且这些渐近形式皆由 Hermite 多项式或者 Laguerre 多项式所表示. 因而研究渐近于 Hermite 多项式和 Laguerre 多项式的函数列的判定性质显得尤为重要. 文献 [3, 10] 给出了超几何正交多项式及其 q -模拟之间的渐近关系. 文献 [11-13] 进一步考虑了一类诸如广义 Bernoulli 多项式、Euler 多项式和 Buchholz 多项式等组合多项式的渐近表示. 类似于 Gauss 函数与 Hermite 多项式之间的正交关系, Lee^[14] 和 Gao 等^[15] 基于具有紧支撑的尺度函数和 Appell 序列, 构造了一类新型双正交系统. 特别地, 由均匀 B 样条所生成的 Appell 多项式为 Bernoulli 多项式, 从而标准化的 Bernoulli 多项式渐近于 Hermite 多项式. Goh 等^[16] 将上述结果推广至 Sobolev 空间并且基于 Appell 多项式的实函数级数展开, 构造了新的尺度空间和小波变换.

然而, 由于小波变换与超几何多项式的渐近分析这两个学科相距甚远, 这些问题之间的相互关联并没有引起学者们的足够重视. 因此, 本文的主要目的是将过去各自独立发展了 40 多年的学科建立起相互关联. 我们将 Lee 的结果推广到一类非尺度函数空间, 利用正交多项式的生成函数的逼近性质, 构造新的双正交多项式系统, 为 Askey 格式和其他重要的组合多项式渐近性质的研究提供新的理论视角; 给出若干以 Hermite 多项式和广义 Laguerre 多项式为渐近形式的多项式类的判定定理.

本文余下内容安排如下. 第 2 节给出与 Hermite 多项式相关联的双正交多项式系统的理论框架, 给出 Bernoulli 多项式、Euler 多项式和 B 样条函数之间的渐近关系, 也给出一类与 Hermite 多项式相关联的超几何正交多项式的渐近关系. 第 3 节给出与广义 Laguerre 多项式相关联的双正交多项式系统的理论框架, 从而验证了 Askey 格式中若干类超几何多项式的渐近关系. 虽然本文中的若干超几何多项式渐近性质在文献 [9, 10] 中有所讨论, 但是本文利用生成函数的逼近性质, 构造渐近于广义 Laguerre 多项式的函数列, 从而得到渐近于 Laguerre 多项式并且给出具有双正交性质的多项式系统的判定定理. 本文给出的理论框架是研究正交多项式渐近性质的全新视角, 利用生成函数的渐近性质, 系统地给出了几乎所有 Askey 格式中底层多项式的渐近关系, 因而有别于文献 [9, 10] 中针对个别多项式渐近性质的逐一验证.

2 逼近于 Hermite 多项式的双正交多项式系统

令 $C^\infty(\mathbb{R})$ 表示无限可微函数空间. 如果 $\phi : C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个线性泛函, 我们记作 $\langle \phi, \nu \rangle = \phi(\nu)$, $\nu \in C^\infty(\mathbb{R})$. 线性泛函 ϕ 是连续的, 当且仅当存在 $\mathbb{R}$ 的紧子集 K 、常数 $C > 0$ 和整数 $k \geq 0$, 使得

$$|\langle \phi, \nu \rangle| \leq C \max_{j \leq k} \sup_{x \in K} |\nu^{(j)}(x)|.$$

具有紧支集的广义函数空间记作 $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$, 因而, 紧支集的可积函数和可测函数属于 $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$. 如果 f 是一个紧支集的可积函数, 则与其关联的特殊函数仍然记作 f , 定义为

$$\langle f, \nu \rangle := \int_{\mathbb{R}} \nu(x) f(x) dx, \quad \nu \in C^\infty(\mathbb{R}).$$

如果 m 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的紧支集测度, 则与之相关的的广义函数, 仍然记作 m , 定义为

$$\langle m, \nu \rangle := \int_{\mathbb{R}} \nu(x) dm(x), \quad \nu \in C^\infty(\mathbb{R}).$$

对于任意的 $\phi \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$, 存在任意 n 阶导数 $\phi^{(n)}$, 定义为

$$\langle \phi^{(n)}, \nu \rangle = (-1)^n \langle \phi, \nu^{(n)} \rangle, \quad n = 0, 1, \dots$$

若紧支集的特殊函数 $\phi \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$, 则对于任意整数 $n \geq 0$, 有

$$\langle \phi^{(n)}, e^{(\cdot)z} \rangle = (-1)^n \langle \phi, z^n e^{(\cdot)z} \rangle = (-1)^n z^n \widehat{\phi}(iz).$$

当 $\widehat{\phi}(0) \neq 0$ 时, 在 0 的邻域内有

$$\left\langle (-1)^n \phi^{(n)}, \frac{e^{(\cdot)z}}{\widehat{\phi}(iz)} \right\rangle = z^n. \quad (2.1)$$

由 ϕ 的紧支集性质可知, $\widehat{\phi}$ 是解析函数. 因此有如下的生成函数所定义的多项式序列 P_m :

$$\frac{e^{xz}}{\widehat{\phi}(iz)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{P_m(x)}{m!} z^m. \quad (2.2)$$

根据 (2.1) 和 (2.2), 对于任意的整数 $n \geq 0$, 有

$$z^n = \sum_{m=0}^{\infty} \left\langle (-1)^n \phi^{(n)}, \frac{P_m(x)}{m!} \right\rangle z^m, \quad (2.3)$$

并且由此定义了如下双正交关系:

$$\left\langle (-1)^n \phi^{(n)}, \frac{P_m(x)}{m!} \right\rangle = \delta_{m,n}. \quad (2.4)$$

令 $\tilde{\phi}_N$ 为 ϕ_N 的标准化形式, 即

$$\tilde{\phi}_N(x) = \sigma_N \phi_N(\sigma_N x + \mu_N),$$

其中 μ_N 和 σ_N^2 分别为 ϕ_N 的均值和方差. 从而可以定义双正交多项式 $P_{N,m}$ 的标准化形式 $\tilde{P}_{N,m}$ ($m = 0, 1, \dots$) 如下:

$$\tilde{P}_{N,m} = \sigma_N^{-m} P_{N,m}(\sigma_N x + \mu_N),$$

并且由此得到了标准化的双正交关系

$$\left\langle (-1)^n \tilde{\phi}_N^{(n)}, \frac{\tilde{P}_{N,m}(x)}{m!} \right\rangle = \delta_{m,n}, \quad \forall m, n \geq 0. \quad (2.5)$$

双正交系统 $\{(-1)^n \phi^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$ 和 $\{P_m(x)/m!\}_{m=0}^{\infty}$ 给出了 $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ 中的一种双正交展开形式

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \left\langle (-1)^m \phi^{(m)}, f \right\rangle \frac{P_m(x)}{m!} = \sum_{m=0}^{\infty} \langle \phi, f^{(m)} \rangle \frac{P_m(x)}{m!}. \quad (2.6)$$

一大类的经典级数展开 (如 Taylor 级数 Euler-Maclaurin 展开和 Lidstone 级数^[17]) 皆包含于这种展开形式之中. 如果考虑将 ϕ 取作 Gauss 密度函数, 即 $G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$, 虽然它不具有紧支集的性质, 但是上述过程仍然适用. 在这种情况下, 相应的序列 $P_m(x)$ 变为 Hermite 多项式. 双正交关系 (2.4) 为以 Gauss 函数为权函数的正则关系. 因而, 展开 (2.6) 是经典的 Hermite 展开.

定义 2.1 多项式序列 $P_m(x)$ ($m \in \mathbb{N}$) 是 Appell 序列, 如果对于 m 次多项式 $P_m(x)$, 有

$$P'_m(x) = mP_{m-1}.$$

对 (2.2) 两边关于 x 求导数并且对比 z^m 的系数, 则有

$$P'_m(x) = mP_{m-1}(x), \quad m = 1, 2, \dots, \quad (2.7)$$

从而得知 $P_m(x)$ 是 Appell 多项式序列.

令 $\{\phi_N\}$ 为 $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$ 中存在一阶和二阶矩, 并且为积分非零的紧支集分布序列. 因为 ϕ_N 具有紧支集的性质, 所以 $\widehat{\phi}_N$ 为解析函数. 现在考虑一族由如下生成函数所生成的双正交多项式序列 $\{P_{N,m} : m = 0, 1, \dots, N = 1, 2, \dots\}$:

$$\frac{e^{xz}}{\widehat{\phi}_N(iz)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{P_{N,m}(x)}{m!} z^m. \quad (2.8)$$

令 $\tilde{\phi}_N$ 为 ϕ_N 的标准化形式, 即

$$\tilde{\phi}_N(x) = \sigma_N \phi_N(\sigma_N x + \mu_N),$$

其中 μ_N 和 σ_N^2 分别为 ϕ_N 的均值和方差. 从而可以定义双正交多项式 $P_{N,m}$ 的标准化形式 $\tilde{P}_{N,m}$ ($m = 0, 1, \dots$) 如下:

$$\tilde{P}_{N,m} = \sigma_N^{-m} P_{N,m}(\sigma_N x + \mu_N),$$

并且由此得到了标准化的双正交关系

$$\left\langle (-1)^n \tilde{\phi}_N^{(n)}, \frac{\tilde{P}_{N,m}(x)}{m!} \right\rangle = \delta_{m,n}, \quad \forall m, n \geq 0. \quad (2.9)$$

因而, 由文献 [14, 引理 4.1] 可以得到 $\tilde{P}_{N,m}$ 的生成函数为

$$\frac{e^{xz}}{\widehat{\tilde{\phi}}_N(iz)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\tilde{P}_{N,m}(x)}{m!} z^m. \quad (2.10)$$

从而得知 $P_m(x)$ 是 Appell 多项式序列. 利用上述事实, 有如下定理.

定理 2.1 ^[18] 对于任意的正整数 N , $\phi_N \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ 存在一阶和二阶矩, 并且 $\widehat{\phi}_N(0) = 1$. 对于充分大的 N , $\widehat{\phi}_N(iz) \rightarrow e^{\frac{z^2}{2}}$ 在 $|z| < r$ 上局部一致收敛.

令 $\tilde{P}_{N,m}(x)$ ($m = 0, 1, \dots$) 为由函数 $\tilde{\phi}_N$ 所生成的双正交多项式,

$$\frac{e^{xz}}{\widehat{\tilde{\phi}}_N(iz)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\tilde{P}_{N,m}(x)}{m!} z^m, \quad (2.11)$$

则对于 $m = 0, 1, \dots$, 当 $N \rightarrow \infty$ 时, $\tilde{P}_{N,m}(x)$ 局部一致收敛于 Hermite 多项式.

证明 由于 $\widehat{\phi}_N(0) = 1$, 因此可以取原点附近的邻域 U 使得对于所有的 $z \in U$, 有 $|\widehat{\phi}_N(iz)| \geq \frac{1}{2}$ 且 $|e^{\frac{z^2}{2}}| \geq \frac{1}{2}$. 取 U 中的一个以 0 为圆心、 s 为半径的圆 C , 使得 $s < r$ 且对于任意正数 A 和 M , 存在正整数 N_0 , 使得对于任意 $N > N_0$ 有 $\delta_N > M$ 且有下式成立:

$$|\widehat{\phi}_N(iz) - e^{\frac{z^2}{2}}| \leq \frac{A}{\sigma_N}, \quad |z| < r. \quad (2.12)$$

注意到

$$\frac{e^{xz}}{\widehat{\phi}_N(iz)} - \frac{e^{xz}}{e^{\frac{z^2}{2}}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\tilde{P}_{N,m}(x) - H_m(x)}{m!} z^m. \quad (2.13)$$

对 (2.13) 中的 Taylor 级数应用 Cauchy 积分公式可知,

$$\tilde{P}_{N,m}(x) - H_m(x) = \frac{m!}{2\pi i} \oint_C \frac{e^{xz} (e^{\frac{z^2}{2}} - \widehat{\phi}(iz))}{z^{m+1} \widehat{\phi}(iz) e^{\frac{z^2}{2}}} dz.$$

因此,

$$|\tilde{P}_{N,m}(x) - H_m(x)| \leq \frac{m!}{2\pi} \oint_C \frac{|e^{xz}| |e^{\frac{z^2}{2}} - \widehat{\phi}_N(iz)|}{r^{m+1} |\widehat{\phi}_N(iz)| |e^{\frac{z^2}{2}}|} |dz| \leq \frac{m!}{2\pi} \oint_C \frac{e^{x\operatorname{Re}(z)} \frac{A}{\sigma_N}}{r^{m+1} |\widehat{\phi}_N(iz)| |e^{\frac{z^2}{2}}|} |dz| \leq \frac{4(m!)e^{rx}A}{\sigma_N r^m}.$$

当 $N \rightarrow \infty$ 时, 有 $\sigma_N \rightarrow \infty$, 则对于 m , 在紧支集上一致有 $\tilde{P}_{N,m}(x) \rightarrow H_m(x)$. $\square$

将定理 2.1 推广到任意生成函数, 得到如下定理.

定理 2.2 ^[18] 令 $\{\tilde{P}_{N,m}(x) : m = 0, 1, \dots\}$ 是由如下规则定义的多项式序列:

$$\frac{\tilde{f}_N(x, z)}{\widehat{\phi}_N(iz)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\tilde{P}_{N,m}(x) z^m}{m!}.$$

若存在正常数 r, A 和 B , 使得对于 $|z| < r$ 和充分大的 N , 有 $|\tilde{f}_N(x, z) - e^{xz}| \leq \frac{B}{\sigma_N}$ 和 $|\widehat{\phi}_N(iz) - e^{-\frac{z^2}{2}}| \leq \frac{A}{\sigma_N}$, 则当 $N \rightarrow \infty$ 时, 对于 $m = 0, 1, \dots$, $\tilde{P}_{N,m}(x)$ 局部一致收敛到 Hermite 多项式 $H_m(x)$.

注 2.1 当 $\tilde{f}_N(x, z) = e^{xz}$ 时, 定理 (2.2) 退化为定理 (2.1).

定理 2.1 表明了由渐近于 Gauss 分布的函数族可以构造一类逼近于 Hermite 多项式的 Appell 多项式序列. 文献 [18] 讨论了由定理 2.1 所推导出的一大类重要的组合多项式和正交多项式的渐近性质. 例如, 广义 Bernoulli 多项式、广义 Euler 多项式、广义 Buchholz 多项式、广义 Laguerre 多项式和广义 Ultraspherical (Gegenbauer) 多项式渐近于 Hermite 多项式的性质. 上述性质在很多文献中都有逐一验证. 但是利用定理 2.1, 我们可以直接系统地推导出上述所有的渐近关系, 从而验证了超几何多项式的 Askey 格式的底层, 详细论述可参见文献 [18].

作为上述理论的实例, 我们可以验证由 B 样条函数所生成 Appell 多项式序列恰为广义 Bernoulli 多项式, 从而, 广义 Bernoulli 多项式与 B 样条的导函数之间构成了一组双正交系统. 利用 B 样条函数的渐近于 Gauss 函数的性质, 验证且标准化之后的 Bernoulli 多项式的渐近形式为 Hermite 多项式. 由二项分布生成的 Appell 序列为 Euler 多项式, 从而 Euler 多项式与二项分布的导函数之间构成一组双正交系统, 且标准化之后的 Euler 多项式渐近于 Hermite 多项式. 我们给出了一类渐近于 Hermite 多项式的双正交系统的构造方法.

2.1 广义 Bernoulli 多项式、广义 Euler 多项式和 B 样条函数

N 阶 B 样条函数记作 $B_N(\cdot)$, 由其递归关系定义为

$$B_1(x) = \begin{cases} 1, & \text{若 } x \in [0, 1), \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

并且对于 $N \geq 1$, 有

$$B_N = B_1 * B_{N-1},$$

其中 $*$ 为如下定义的卷积算子: 对于 $L^2(\mathbb{R})$ 中的任意函数 f 和 g ,

$$(f * g)(t) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-y)g(y)dy.$$

$B_N(x)$ 的 Fourier 变换定义为

$$\widehat{B}_N(\omega) = \left(\frac{1 - e^{-i\omega}}{i\omega} \right)^N, \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

$B_N(x)$ 满足如下的尺度方程:

$$B_N(x) = 2 \sum_{j=0}^N \frac{1}{2^N} \binom{N}{j} B_N(2x - j), \quad (2.14)$$

其中 $\psi_N(k) := \frac{1}{2^N} \binom{N}{k}$. 等价地, (2.14) 可以由频率域上的 Fourier 变换表示为

$$\widehat{B}_N(\omega) = \widehat{\psi}_N\left(\frac{\omega}{2}\right) \widehat{B}_N\left(\frac{\omega}{2}\right),$$

其中 $\widehat{\psi}_N(\omega) = \left(\frac{1+e^{-i\omega}}{2}\right)^N$.

B 样条的渐近性质的研究由来已久. 最早可以追溯到 1904 年物理学家 Sommerfeld 的研究工作. Sommerfeld^[19] 证明了 B 样条点态收敛于 Gauss 函数. 1992 年, Unser 等^[20] 证明了 L^p 空间中, 标准化的 B 样条函数随着阶数的增大而收敛于 Gauss 函数的性质. 2004 年, Chen 等^[21] 考虑了渐近于正态分布的尺度函数的收敛阶. 2008 年, Brinks^[22] 将 Unser 的结果推广到了 B 样条的导函数, 得到了 L^p 空间中, B 样条函数点态收敛于 Gauss 函数的导函数的性质. 2011 年, Xu 和 Wang^[23] 证明了 B 样条函数及其导函数在 L^p 空间中点态收敛的逼近阶, 并且建立了 B 样条函数、Euler 数以及 Hermite 多项式之间的渐近关系. 2016 年, Goh 等^[16] 将文献 [23] 的结果推广至 Sobolev 空间, 从而给出了 L^p 模下的局部一致收敛性. 由于 B 样条函数逼近于 Gauss 函数^[14, 20–23], 因而在尺度函数空间中它们也经常用来替代 Gauss 滤波^[24].

下面的定理给出了 B 样条函数及其导函数在 L^p 空间中的点态收敛性质.

定理 2.3^[23] 令 $k \in \mathbb{N}$, 对于 $N > k + 2$, B 样条函数的 k 阶导数 $B_N^{(k)}$, 点态收敛于 Gauss 函数的 k 阶导函数

$$\left(\frac{N}{12}\right)^{\frac{k+1}{2}} B_N^{(k)}\left(\sqrt{\frac{N}{12}}x + \frac{N}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} D^k \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) + O\left(\frac{1}{N}\right), \quad (2.15)$$

并且

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{N}{12}\right)^{\frac{k+1}{2}} B_N^{(k)}\left(\sqrt{\frac{N}{12}}x + \frac{N}{2}\right) \right\} = \frac{(-1)^k}{\sqrt{2\pi}} H_k(x) G(x), \quad (2.16)$$

其中极限为 $L^p(\mathbb{R})$ ($p \in [2, \infty)$) 中的点态收敛.

广义 m 次 N 阶 Bernoulli 多项式和 Euler 多项式分别记作 $B_m^N(z)$ 和 $E_m^N(z)$, 定义为

$$\frac{\omega^N e^{\omega z}}{(e^\omega - 1)^N} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_m^N(z)}{m!} \omega^m, \quad |\omega| < 2\pi, \quad (2.17)$$

$$\frac{2^N e^{\omega z}}{(e^\omega + 1)^N} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{E_m^N(z)}{m!} \omega^m, \quad |\omega| < \pi, \quad (2.18)$$

其中 z 为复数.

根据上述 Bernoulli 多项式的生成函数, 由标准化的 N 阶均匀 B 样条所生成的 Appell 多项式序列恰好是广义 N 阶 Bernoulli 多项式. 从而根据定理 2.1, 当 $N \rightarrow \infty$ 时, 广义 N 阶 Bernoulli 多项式收敛到 Hermite 多项式.

例 2.1 标准化的 N 阶 Bernoulli 多项式 $B_m^N(z)$ 与 Hermite 多项式之间有如下的渐近关系:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{12}{N} \right)^{\frac{m}{2}} B_m^N \left(\sqrt{\frac{N}{12}} z + \frac{N}{2} \right) = H_m(z).$$

证明 N 阶均匀 B 样条 B_N 满足如下尺度方程:

$$B_N(x) = 2 \sum_{j=0}^N \frac{1}{2^N} \binom{N}{j} B_N(2x - j),$$

其中面具 $\psi_N(k) := \frac{1}{2^N} \binom{N}{k}$. B_N 的 Fourier 变换为

$$\hat{B}_N(\omega) = \left(\frac{1 - e^{-i\omega}}{i\omega} \right)^N, \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

等价地, (2.14) 可以有如下 Fourier 变换:

$$\hat{B}_N(\omega) = \hat{\psi}_N\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{B}_N\left(\frac{\omega}{2}\right),$$

其中面具的 Fourier 变换为 $\hat{\psi}_N(\omega) = \left(\frac{1+e^{-i\omega}}{2} \right)^N$.

从 B 样条 B_N 的 Fourier 变换可知,

$$\hat{B}_N(i\omega) = \left(\frac{e^\omega - 1}{\omega} \right)^N. \quad (2.19)$$

众所周知, 二项分布有如下渐近性质:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{[x_N]} \frac{1}{2^N} \binom{N}{k} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt, \quad (2.20)$$

其中 $x_N = \sqrt{N}x/2 + N/2$. 令 $\sigma_N = \sqrt{N}x/2$ 且 $\mu_N = N/2$, 则标准的二项分布 $\tilde{\psi}_N(x) := \sigma_N \psi_N(\sigma_N x + \mu_N)$ 一致收敛到 Gauss 函数 $G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$. 由标准化的二项分布所生成的 Appell 多项式序列恰好是广义 N 阶 Euler 多项式. 从而根据定理 2.1, 当 $N \rightarrow \infty$ 时, 广义 N 阶 Euler 多项式收敛到 Hermite 多项式且与二项分布构成一组双正交系统. $\square$

例 2.2 N 阶 Euler 多项式 $E_m^N(z)$ 与 Hermite 多项式之间有如下的渐近关系:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{N} \right)^{\frac{m}{2}} E_m^N \left(\frac{\sqrt{N}}{2} z + \frac{N}{2} \right) = H_m(z). \quad (2.21)$$

证明 由 $\psi_N(x)$ Fourier 变换, 有

$$\widehat{\psi}_N(i\omega) = \left(\frac{e^\omega + 1}{2} \right)^N. \quad (2.22)$$

由二项分布 $\psi_n(k) := \frac{1}{2^n} \binom{n}{k}$ 所生成的 Appell 多项式恰好为 Euler 多项式 $E_m^N(z)$, $m = 0, 1, \dots$, 从而与 $\psi_N(z)$ 的导函数具有双正交的关系

$$\left\langle (-1)^n \psi_N^{(n)}(z), \frac{E_m^N(z)}{m!} \right\rangle = \delta_{m,n}. \quad (2.23)$$

根据定理 2.1, 标准化的广义 Euler 多项式随着 $N \rightarrow \infty$ 收敛到 Hermite 多项式,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{N} \right)^{\frac{m}{2}} E_m^N \left(\frac{\sqrt{N}}{2} z + \frac{N}{2} \right) = H_m(z). \quad (2.24)$$

证毕. $\square$

3 逼近于广义 Laguerre 多项式的双正交多项式系统

Laguerre 多项式 $L_n(x)$ 可看成是 Laguerre 微分方程的解,

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0, \quad n \geq 0,$$

也可以看成是以 $w(x) = e^{-x}$ 为权函数的正交多项式. 因而, Laguerre 多项式具有如下的 Rodrigues 表示:

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n). \quad (3.1)$$

Laguerre 多项式的生成函数为

$$(1-z)^{-1} e^{\frac{-zx}{1-z}} = \sum_{m=0}^{\infty} L_m(x) z^m, \quad |z| \leq 1. \quad (3.2)$$

广义 Laguerre 多项式, 记作 $L_m^{(\alpha)}$, 是一类以 $w(x) = x^\alpha e^{-x}$ 为权函数的正交多项式. 广义 Laguerre 多项式生成函数为

$$(1-z)^{-\alpha-1} e^{\frac{-zx}{1-z}} = \sum_{m=0}^{\infty} L_m^{(\alpha)}(x) z^m, \quad |z| \leq 1. \quad (3.3)$$

广义 Laguerre 多项式有如下的 Rodrigues 表示:

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{x^{-\alpha} e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^{n+\alpha}), \quad (3.4)$$

其中, 当 $\alpha = 0$ 时, 有 $L_n^{(0)}(x) = L_n(x)$.

$L_n^{(\alpha)}(x)$ 的显式公式^[25] 为

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{(\alpha+1)_n}{n!} \sum_{j=0}^n \frac{(-n)_j}{(\alpha+1)_j} \frac{x^j}{j!}, \quad (3.5)$$

其中, 对于 $n = 1, 2, 3, \dots$, 有 $(\alpha)_n = \prod_{i=1}^n (\alpha + i - 1)$, $(\alpha)_0 = 1$. 当 $\alpha = 0$ 时, 广义 Laguerre 多项式 $L_n^{(\alpha)}(x)$ 的显式公式变为

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{x^k}{k!}. \quad (3.6)$$

经过简单的计算, 我们可以得到下面的性质.

性质 3.1 Laguerre 多项式 $L_n(x)$ 有如下的递归关系:

$$L'_n(x) = L'_{n-1}(x) - L_{n-1}(x). \quad (3.7)$$

广义 Laguerre 多项式的双正交关系包含于

$$\int_0^\infty L_m^{(\alpha)}(x) L_n^{(\alpha)}(x) x^\alpha e^{-x} dx = \frac{\Gamma(\alpha + n + 1)}{n!} \delta_{mn}, \quad \alpha > -1. \quad (3.8)$$

上式可以看成是导函数 $\{\frac{d^n}{dx^n} \frac{x^{\alpha+n} e^{-x}}{\Gamma(\alpha+n+1)}\}$ 与 Laguerre 多项式 $\{L_m^{(\alpha)} : m = 0, 1, \dots\}$ 的双正交关系

$$\left\langle L_m^{(\alpha)}, \frac{d^n}{dx^n} \frac{x^{\alpha+n} e^{-x}}{\Gamma(\alpha+n+1)} \right\rangle = \delta_{m,n}. \quad (3.9)$$

推论 3.1 广义 Laguerre 多项式 $L_m^N(x)$ 与 Hermite 多项式有如下的渐近关系:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (-1)^m (2N)^{-m/2} L_m^{(N)}(x\sqrt{2N} + N) = \frac{1}{m!} H_m(x).$$

证明 将广义 Laguerre 多项式的生成函数作适当变换, 可以得到标准化的广义 Laguerre 多项式的生成函数

$$\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m (2N)^{-m/2} L_m^{(N)}(x\sqrt{2N} + N) z^m = \left(1 + \frac{z}{\sqrt{2N}}\right)^{-N-1} e^{\frac{\sqrt{N}z}{\sqrt{2}}} e^{\frac{zx}{1+z/\sqrt{2N}}}.$$

令 $\tilde{f}_N(x, z) = e^{\frac{zx}{1+z/\sqrt{2N}}}$, $\hat{\phi}_N(iz) = (1 + \frac{z}{\sqrt{N}})^{N+1} e^{\frac{-\sqrt{N}z}{\sqrt{2}}}$, 对于 $N \rightarrow \infty$, 有

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{f}_N(x, z) &= e^{zx}, \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \hat{\phi}_N(iz) &= e^{\frac{z^2}{2}}. \end{aligned}$$

根据定理 2.2, 有

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (-1)^m (2N)^{-m/2} L_m^{(N)}(x\sqrt{2N} + N) = \frac{1}{m!} H_m(x).$$

证毕. □

本节考虑一类由函数族 $\phi(x, \alpha, \omega)$ 生成的渐近于广义 Laguerre 多项式 $L_m^{(\alpha)}(x)$ 的双正交多项式系统 $\{P_m(x, \alpha, \omega) : m = 0, 1, \dots\}$.

考虑紧支集分布 $\phi \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$, 令 $\hat{\phi}$ 表示 ϕ 的 Laplace 变换. 对于任意正整数 $n \geq 0$, 有

$$\langle \phi^{(n)}, (1-z)^n e^{\frac{-zx}{1-z}} \rangle = \langle \phi(x), z^n e^{\frac{-zx}{1-z}} \rangle = z^n \hat{\phi}\left(\frac{z}{1-z}\right). \quad (3.10)$$

如果 $\widehat{\phi}(0) \neq 0$, 在 0 点附近有

$$\left\langle \phi^{(n)}, \frac{(1-z)^n e^{-\frac{zx}{1-z}}}{\widehat{\phi}(\frac{z}{1-z})} \right\rangle = z^n. \quad (3.11)$$

由于 ϕ 是紧支集, $\widehat{\phi}$ 为解析函数. 因此可以由如下的生成函数定义一类多项式序列:

$$\frac{(1-z)^n e^{-\frac{zx}{1-z}}}{\widehat{\phi}(\frac{z}{1-z})} = \sum_{m=0}^{\infty} P_m(x) z^m. \quad (3.12)$$

对于任意整数 $n \geq 0$, 由 (3.11) 和 (3.12) 得到

$$z^n = \sum_{m=0}^{\infty} \langle \phi^{(n)}, P_m(x) \rangle z^m, \quad (3.13)$$

从而能够给出如下的双正交关系:

$$\langle \phi^{(n)}, P_m(x) \rangle = \delta_{m,n}. \quad (3.14)$$

对 (3.12) 两边关于 x 微分, 然后比较等式两边关于 z^m 的系数, 能够得到

$$P'_m(x) = P'_{m-1}(x) - P_{m-1}(x), \quad m = 1, 2, \dots \quad (3.15)$$

(3.15) 中所蕴含的关系类似于 Laguerre 多项式的性质 3.1,

$$L'_m(x) = L'_{m-1}(x) - L_{m-1}(x).$$

引理 3.1 如果 $\phi(x, \alpha) = \frac{x^{\alpha+n} e^{-x}}{\Gamma(\alpha+n+1)}$, 则 $\phi(x, \alpha)$ 的 Laplace 变换为 $\widehat{\phi}(z, \alpha) = \frac{1}{(z+1)^{\alpha+n+1}}$. 因而, 由 $\phi(x, \alpha)$ 生成的双正交多项式为广义 Laguerre 多项式.

证明 由于 $\phi(x, \alpha)$ 的 Laplace 变换为 $\widehat{\phi}(z, \alpha) = \frac{1}{(z+1)^{\alpha+n+1}}$, 因而有 $\widehat{\phi}(\frac{z}{1-z}, \alpha) = (1-z)^{\alpha+n+1}$. 由 (3.11) 可知, 在零点附近的如下关系成立:

$$\left\langle \phi^{(n)}(x, \alpha), \frac{(1-z)^n e^{-\frac{zx}{1-z}}}{\widehat{\phi}(\frac{z}{1-z}, \alpha)} \right\rangle = z^n. \quad (3.16)$$

对于任意的 $|z| \leq 1$, 有

$$\frac{(1-z)^n e^{-\frac{zx}{1-z}}}{\widehat{\phi}(\frac{z}{1-z}, \alpha)} = (1-z)^{-\alpha-1} e^{-\frac{zx}{1-z}} = \sum_{m=0}^{\infty} L_m^{(\alpha)}(x) z^m.$$

因此,

$$z^n = \left\langle \phi^{(n)}(x, \alpha), \frac{(1-z)^n e^{-\frac{zx}{1-z}}}{\widehat{\phi}(\frac{z}{1-z}, \alpha)} \right\rangle = \left\langle \phi^{(n)}(x, \alpha), \sum_{m=0}^{\infty} L_m^{(\alpha)}(x) z^m \right\rangle.$$

因而, 由函数 $\phi(x, \alpha) = \frac{x^{\alpha+n} e^{-x}}{\Gamma(\alpha+n+1)}$ 生成的双正交多项式为广义 Laguerre 多项式. $\square$

定理 3.1 令 $\phi(x, \alpha, \omega)$ 满足 $\widehat{\phi}(0, \alpha, \omega) = 1$, 并且对于 $c \in [0, \infty]$,

$$\lim_{\omega \rightarrow c} \phi(x, \alpha, \omega) = \frac{x^{\alpha+n} e^{-x}}{\Gamma(\alpha+n+1)} \quad (3.17)$$

在 $\mathbb{R}$ 中局部一致收敛.

令 $\{P_m(x, \alpha, \omega) : m = 0, 1, \dots\}$ 为如下生成函数所生成的多项式序列:

$$\frac{(1-z)^n e^{-\frac{zx}{1-z}}}{\widehat{\phi}\left(\frac{z}{1-z}, \alpha, \omega\right)} = \sum_{m=0}^{\infty} P_m(x, \alpha, \omega) z^m,$$

则对于任意 $m = 0, 1, \dots$, 当 $\omega \rightarrow c$ 时, $P_m(x, \alpha, \omega)$ 在 $\mathbb{R}$ 上局部一致收敛到 $L_m^{(\alpha)}(x)$.

证明 由于 $\widehat{\phi}(0, \alpha, \omega) = 1$, 我们可以选择原点附近的一个小邻域 U , 使得对于所有的 $z \in U$, 有 $|\widehat{\phi}(\frac{z}{1-z}, \alpha, \omega)| \geq \frac{1}{2}$ 和 $|(1-z)^{\alpha+1}| \geq \frac{1}{2}$ 成立. 在 U 中取一个以原点 0 为圆心、半径为 r 的小圆盘 C , 使得 (3.17) 成立. 根据引理 3.1, (3.17) 等价于 $\widehat{\phi}(\frac{z}{1-z}, \alpha, \omega)$ 局部一致收敛于 $(1-z)^{\alpha+n+1}$.

因而, 存在常数 $0 < r < 1$ 和 c , 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 δ , 当 $|\omega - c| < \delta$ 时, 有如下估计:

$$\left| \widehat{\phi}\left(\frac{z}{1-z}, \alpha, \omega\right) - (1-z)^{\alpha+n+1} \right| \leq \varepsilon, \quad |z| < r. \quad (3.18)$$

Taylor 级数的系数

$$\frac{(1-z)^n e^{-\frac{zx}{1-z}}}{\widehat{\phi}\left(\frac{z}{1-z}, \alpha, \omega\right)} - \frac{e^{-\frac{zx}{1-z}}}{(1-z)^{\alpha+1}} = \sum_{m=0}^{\infty} (P_m(x, \alpha, \omega) - L_m^{(\alpha)}(x)) z^m \quad (3.19)$$

可以由 Cauchy 积分公式表示为

$$\begin{aligned} P_m(x, \alpha, \omega) - L_m^{(\alpha)}(x) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C e^{-\frac{zx}{1-z}} \frac{(1-z)^{\alpha+n+1} - \widehat{\phi}\left(\frac{z}{1-z}, \alpha, \omega\right)}{z^{m+1} \widehat{\phi}\left(\frac{z}{1-z}, \alpha, \omega\right) (1-z)^{\alpha+1}} dz, \\ |P_m(x, \alpha, \omega) - L_m^{(\alpha)}(x)| &\leq \frac{1}{2\pi} \oint_C |e^{-\frac{zx}{1-z}}| \frac{|(1-z)^{\alpha+n+1} - \widehat{\phi}\left(\frac{z}{1-z}, \alpha, \omega\right)|}{r^{m+1} |\widehat{\phi}\left(\frac{z}{1-z}, \alpha, \omega\right)| |(1-z)^{\alpha+1}|} dz \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{e^{x \operatorname{Re}(\frac{-z}{1-z}) \varepsilon}}{r^{m+1} |\widehat{\phi}\left(\frac{z}{1-z}, \alpha, \omega\right)| |(1-z)^{\alpha+1}|} dz \\ &\leq 4e^{x \operatorname{Re}(\frac{-z}{1-z}) \varepsilon}. \end{aligned}$$

因而, 对于任意的 m , 当 ω 趋近于 c 时, $P_m(x, \alpha, \omega)$ 局部一致收敛于广义 Laguerre 多项式 $L_m^{(\alpha)}(x)$. $\square$

类似于定理 2.2, 我们可以将定理 3.1 推广到如下定理.

定理 3.2 令 $\phi(x, \alpha, \omega)$ 满足 $\widehat{\phi}(0, \alpha, \omega) = 1$, 并且对于 $c \in [0, \infty]$, 在 $\mathbb{R}$ 上 $\lim_{\omega \rightarrow c} \phi(x, \alpha, \omega) = \frac{e^{-x} x^{n+\alpha}}{\Gamma(\alpha+n+1)}$ 和 $\lim_{\omega \rightarrow c} f(x, z, \omega) = e^{-\frac{zx}{1-z}} (1-z)^n$ 局部一致收敛. 令 $\{P_m(x, \alpha, \omega) : m = 0, 1, \dots\}$ 为如下生成函数所定义的多项式序列:

$$\frac{f(x, z, \omega)}{\widehat{\phi}\left(\frac{z}{1-z}, \alpha, \omega\right)} = \sum_{m=0}^{\infty} P_m(x, \alpha, \omega) z^m,$$

则对于任意 $m = 0, 1, \dots$, 当 $\omega \rightarrow c$ 时, $P_m(x, \alpha, \omega)$ 在 $\mathbb{R}$ 上局部一致收敛于广义 Laguerre 多项式 $L_m^{(\alpha)}(x)$.

作为定理 3.2 的应用, 我们能够得到 Meixner-Pollaczek 多项式和 Meixner 多项式渐近于广义 Laguerre 多项式.

对于 Meixner-Pollaczek 多项式, 有生成函数

$$F(x, z) = (1 - e^{i\omega} z)^{-\lambda + ix} (1 - e^{-i\omega} z)^{-\lambda - ix} = \sum_{n=0}^{\infty} P_m^{(\lambda)}(x; \omega) z^m. \quad (3.20)$$

推论 3.2 令 Meixner-Pllaczek 多项式中的 $\lambda = \frac{1}{2}(\alpha + 1)$, $x \rightarrow -\frac{1}{2}\omega^{-1}x$ 并且 $\omega \rightarrow 0$, 则有如下渐近关系:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} P_n^{\frac{\alpha+1}{2}}\left(\frac{-x}{2\omega}; \omega\right) = L_n^{(\alpha)}(x).$$

证明 将 Meixner-Pllaczek 多项式的生成函数 (3.20) 作适当的变换, 令 $\lambda = \frac{1}{2}(\alpha + 1)$, 则有如下形式的生成函数:

$$\sum_{m=0}^{\infty} P_n^{\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}\left(\frac{-x}{2\omega}; \omega\right) z^m = [(1 - ze^{i\omega})(1 - ze^{-i\omega})]^{-\frac{\alpha+1}{2}} \left(\frac{1 - ze^{i\omega}}{1 - ze^{-i\omega}}\right)^{-\frac{ix}{2\omega}}.$$

令 $\hat{\phi}\left(\frac{z}{1-z}, \alpha, \omega\right) = [(1 - ze^{i\omega})(1 - ze^{-i\omega})]^{-\frac{\alpha+1}{2}} (1 - z)^n$, 则有

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow 0} \hat{\phi}\left(\frac{z}{1-z}, \alpha, \omega\right) &= \lim_{\omega \rightarrow 0} [(1 - ze^{i\omega})(1 - ze^{-i\omega})]^{-\frac{\alpha+1}{2}} (1 - z)^n \\ &= \lim_{\omega \rightarrow 0} [1 - 2z \cos \omega + z^2]^{-\frac{\alpha+1}{2}} (1 - z)^n = (1 - z)^{\alpha+n+1}. \end{aligned}$$

另一方面, 我们有

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow 0} \left(\frac{1 - ze^{i\omega}}{1 - ze^{-i\omega}}\right)^{-\frac{ix}{2\omega}} &= \lim_{\omega \rightarrow 0} \left(1 + z \frac{e^{-i\omega} - e^{i\omega}}{1 - ze^{-i\omega}}\right)^{-\frac{ix}{2\omega}} \\ &= \lim_{\omega \rightarrow 0} \left(1 + z \frac{e^{-i\omega} - e^{i\omega}}{1 - ze^{-i\omega}}\right)^{\frac{1 - e^{-i\omega}}{-2iz \sin \omega} \cdot \frac{zx \sin \omega}{(1 - ze^{-i\omega})\omega}} = e^{\frac{zx}{1-z}}. \end{aligned}$$

根据定理 3.1, 有

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} P_n^{\frac{\alpha+1}{2}}\left(\frac{-x}{2\omega}; \omega\right) = L_n^{(\alpha)}(x).$$

证毕. □

Meixner 多项式 $M_n(x; \beta, c)$ 的生成函数为

$$\left(1 - \frac{z}{c}\right)^x (1 - z)^{-\beta-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta)_n}{n!} M_n(x; \beta, c) z^n.$$

推论 3.3 令 Meixner 多项式中 $\beta = \alpha + 1$, $x \rightarrow \frac{cx}{1-c}$ 并且 $c \rightarrow 1$, 则有如下的渐近关系成立:

$$\lim_{c \rightarrow 1} M_n\left(\frac{cx}{1-c}; \alpha + 1, c\right) = \frac{L_n^{(\alpha)}(x)}{L_n^{(\alpha)}(0)}.$$

证明 将 Meixner 多项式的生成函数的公式作适当的变换, 令 $\beta = \alpha + 1$, 则有如下形式的生成函数:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha + 1)_n}{n!} M_n\left(\frac{cx}{1-c}; \alpha + 1, c\right) z^n &= \left(1 - \frac{z}{c}\right)^{\frac{cx}{1-c}} (1 - z)^{-\alpha-1-\frac{cx}{1-c}} \\ &= \left(\frac{1 - \frac{z}{c}}{1 - z}\right)^{\frac{cx}{1-c}} (1 - z)^{-\alpha-1} \\ &= \left(1 + \frac{z(c-1)}{c(1-z)}\right)^{\frac{cx}{1-c}} (1 - z)^{-\alpha-1} \end{aligned}$$

$$= \left(1 + \frac{z(c-1)}{c(1-z)}\right)^{\frac{(1-z)c}{z(c-1)} \frac{-zx}{1-z}} (1-z)^{-\alpha-1}.$$

由于 $\lim_{c \rightarrow 1} (1 + \frac{z(c-1)}{c(1-z)})^{\frac{(1-z)c}{z(c-1)} \frac{-zx}{1-z}} = e^{-\frac{z}{1-z}x}$, 则由定理 3.1, 有

$$\lim_{c \rightarrow 1} (\alpha+1)_n M_n \left(\frac{cx}{1-c}; \alpha+1, c \right) = L_n^{(\alpha)}(x).$$

由于 $L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{(\alpha+1)_n}{n!} \sum_{j=0}^n \frac{(-n)_j x^j}{(\alpha+1)_j j!}$, 则 $L_n^{(\alpha)}(0) = (\alpha+1)_n$. 因而, 有下式成立:

$$\lim_{c \rightarrow 1} M_n \left(\frac{cx}{1-c}; \alpha+1, c \right) = \frac{L_n^{(\alpha)}(x)}{L_n^{(\alpha)}(0)}.$$

证毕. □

致谢 作者对审稿专家所提出的宝贵建议表示衷心的感谢. 感谢富布赖特基金会在作者访学期间的支持.

参考文献

- 1 Hermite C. Sur un nouveau développement en série de fonctions. C R Math Acad Sci Paris, 1864, 58: 93–100
- 2 Temme N M, López J L. The Askey scheme for hypergeometric orthogonal polynomials viewed from asymptotic analysis. J Comput Appl Math, 2001, 133: 623–633
- 3 Koekoek R, Swarttouw R F. The Askey-scheme of hypergeometric orthogonal polynomials and its q -analogue. ArXiv:math/9602214, 1996
- 4 Temme N M, López J L. The role of Hermite polynomials in asymptotic analysis. In: Special Functions. River Edge: World Scientific Publishing, 1999, 339–350
- 5 Temme N M. Polynomial asymptotic estimates of Gegenbauer, Laguerre, and Jacobi polynomials. In: Asymptotic and Computational Analysis. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, vol. 124. New York-Basel: Marcel Dekker, 1990, 455–476
- 6 Temme N M. Asymptotic estimates for Laguerre polynomials. Z Angew Math Phys, 1990, 41: 114–126
- 7 López J L, Temme N M. Convergent asymptotic expansions of Charlier, Laguerre and Jacobi polynomials. Proc Roy Soc Edinburgh Sect A, 2004, 134: 537–555
- 8 López J L, Temme N M. Approximation of orthogonal polynomials in terms of Hermite polynomials. Methods Appl Anal, 1999, 6: 131–146
- 9 Ferreira C, López J L, Sinusía E P. Asymptotic relations between the Hahn-type polynomials and Meixner-Pollaczek, Jacobi, Meixner and Krawtchouk polynomials. J Comput Appl Math, 2008, 217: 88–109
- 10 Ferreira C, López J L, Mainar E. Asymptotic relations in the Askey scheme for hypergeometric orthogonal polynomials. Adv Appl Math, 2003, 31: 61–85
- 11 Dominici D. Asymptotic analysis of the Askey-scheme I: From Krawtchouk to Charlier. Cent Eur J Math, 2007, 5: 280–304
- 12 López J L, Temme N M. Hermite polynomials in asymptotic representations of generalized Bernoulli, Euler, Bessel, and Buchholz polynomials. J Math Anal Appl, 1999, 239: 457–477
- 13 Wong R, Zhang J M. Asymptotic expansions of the generalized Bessel polynomials. J Comput Appl Math, 1997, 85: 87–112
- 14 Lee S L. Approximation of Gaussian by scaling functions and biorthogonal scaling polynomials. Bull Malays Math Sci Soc (2), 2009, 32: 261–282
- 15 Gao X J, Lee S L, Sun Q Y. Eigenvalues of Scaling operators and a characterization of B-splines. Proc Amer Math Soc, 2006, 134: 1051–1057
- 16 Goh S S, Goodman T N T, Lee S L. Appell sequences, continuous wavelet transforms and series expansions. Appl Comput Harmon Anal, 2017, 43: 317–345
- 17 Whittaker J M. On Lidstone's series and two-point expansions of analytic functions. Proc Lond Math Soc (3), 1934, 36: 451–469
- 18 许艳. 渐近于 Hermite 多项式的双正交系统. 中国科学: 数学, 2014, 44: 409–422

- 19 Sommerfeld A. Eine besondere anschauliche Ableitung des Gaussischen Fehlergesetzes. In: Festschrift Ludwig Boltzmann Gewidmet. Leipzig: Springer, 1904, 848–859
- 20 Unser M, Aldroubi A, Eden M. On the asymptotic convergence of B-spline wavelets to Gabor functions. *IEEE Trans Inform Theory*, 1992, 38: 864–872
- 21 Chen L H Y, Goodman T N T, Lee S L. Asymptotic normality of scaling functions. *SIAM J Math Anal*, 2004, 36: 323–346
- 22 Brinks R. On the convergence of derivatives of B-splines to derivatives of the Gaussian function. *Comput Appl Math*, 2008, 27: 79–92
- 23 Xu Y, Wang R H. Asymptotic properties of B-splines, Eulerian numbers and cube slicing. *J Comput Appl Math*, 2011, 236: 988–995
- 24 Wang Y P, Lee S L. Scale-space derived from B-splines. *IEEE Trans Pattern Anal Mach Intell*, 1998, 20: 1040–1055
- 25 Dunkl C F, Xu Y. *Orthogonal Polynomials of Several Variables*. Cambridge: Cambridge University Press, 2001

Biorthogonal polynomial systems associate with Hermite polynomials and generalized Laguerre polynomials

Yan Xu

Abstract Many important properties of orthogonal polynomials depend on the study of their generating functions. Extending the work of Lee and his co-authors, a large class of biorthogonal polynomials are generated by the sequences of functions approximating the generating functions of the Hermite polynomials and Laguerre polynomials respectively. As the applications, the asymptotic relation between several hypergeometric orthogonal polynomials in the Askey scheme and some important combinatorial polynomials can be derived from the systems and the theorems directly.

Keywords Hermite polynomial, Laguerre polynomial, Appell sequence, Askey scheme, B-splines, Bernoulli polynomial, Euler polynomial

MSC(2010) 42C05, 33C45, 41A15, 11B68

doi: 10.1360/SSM-2020-0074