Forelli-Rudin 型定理和一类与超几何函数相关的积分算子

周立芳, 卢金*

湖州师范学院数学系, 湖州 313000

E-mail: lfzhou@zjhu.edu.cn, luking@zjhu.edu.cn

收稿日期: 2018-01-07; 接受日期: 2018-03-14; 网络出版日期: 2019-04-16; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11501198, 11801172, 11771139 和 11571105) 和浙江省自然科学基金 (批准号: LY16A010012) 资助项目

摘要 借助超几何函数与 Schur 检验等理论知识, 本文讨论了一类与超几何函数相关的积分算子在 $L^p(0, 1)$ 上的有界性与精确范数. 主要结果的建立不仅为全纯 Forelli-Rudin 型定理与调和 Forelli-Rudin 型定理搭建了桥梁, 而且也深化了对 Bergman 投影和 Berezin 变换的认识.

关键词 超几何函数 Bergman 投影 Berezin 变换 精确范数

MSC (2010) 主题分类 47B38, 47G10

1 引言

用 $\mathbb{B}_n$ 表示 $\mathbb{C}^n$ 中的开单位球, dv 表示单位球 $\mathbb{B}_n$ 上的正规化 Lebesgue 测度, 满足 $v(\mathbb{B}_n) = 1$. 设 $b > -1$, Forelli-Rudin 定理起源于 Forelli 和 Rudin^[1] 对一类积分算子的研究, 即

$$(\mathbb{I}_b f)(z) = \frac{\Gamma(n+b+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(b+1)} \int_{\mathbb{B}_n} \frac{(1-|w|^2)^b}{(1-\langle z, w \rangle)^{n+1+b}} f(w) dv(w).$$

当 $b = 0$ 时, 算子 $\mathbb{I}_0$ 是我们熟知的全纯 Bergman 投影. Forelli 和 Rudin^[1] 给出了该类积分算子在 $L^p(\mathbb{B}_n, dv)$ 上的有界性. Kolaski^[2] 对上述 Forelli-Rudin 定理给出了一个新的观点, 指出当 $1 < p < \infty$ 时, 算子 $\mathbb{I}_b$ 是从加权 $L^p(\mathbb{B}_n, dv_b)$ 空间到加权全纯 Bergman 空间 $A^p(\mathbb{B}_n, dv_b)$ 上的有界算子, 并且算子 $\mathbb{I}_b$ 是从加权 $L^2(\mathbb{B}_n, dv_b)$ 到 $A^2(\mathbb{B}_n, dv_b)$ 的正交投影, 即加权全纯 Bergman 投影, 其中 $dv_b(z) = (1-|z|^2)^b dv(z)$ 表示 $\mathbb{B}_n$ 上的加权 Lebesgue 测度. Zhu^[3] 把 $\mathbb{I}_b$ 推广为如下的一类积分算子:

$$(\mathbb{T}_{a,b} f)(z) = (1-|z|^2)^a \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^b}{(1-z\bar{w})^{2+a+b}} dA(w),$$

英文引用格式: Zhou L F, Lu J. The Forelli-Rudin type theorem and a class of integral operator related to hypergeometric function (in Chinese). Sci Sin Math, 2019, 49: 765–780, doi: 10.1360/SCM-2018-0018

其中 $\mathbb{D}$ 表示复平面上的开单位圆盘, dA 表示单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上的正规化 Lebesgue 测度. 设 $\lambda > -1$, $dA_\lambda = (1 - |z|^2)^\lambda dA(z)$ 表示单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上的加权 Lebesgue 测度. Zhu^[3] 讨论了算子 $\mathbb{T}_{a,b}$ 在加权函数空间 $L^p(\mathbb{D}, dA_\lambda)$ 上的有界性, 并提出了如下的问题: 当算子 $\mathbb{T}_{a,b}$ 中 $1 - z\bar{w}$ 的幂次 $2 + a + b$ 换成一般的幂次 c 时, 更一般的积分算子

$$(\mathbb{T}_{a,b,c}f)(z) = (1 - |z|^2)^a \int_{\mathbb{D}} \frac{(1 - |w|^2)^b}{(1 - z\bar{w})^c} dA(w)$$

在 $L^p(\mathbb{D}, dA_\lambda)$ 上有界的条件是什么? Kures 和 Zhu^[4] 讨论了此问题, 并给出了该类积分算子在 $L^p(\mathbb{B}_n, dv_\lambda)$ 上有界性.

全纯 Bergman 投影和加权全纯 Bergman 投影, 以及推广的积分算子 $\mathbb{T}_{a,b,c}$ 在 L^p 空间上的有界性已经十分清晰, 但是这些算子在 L^p 空间上的精确范数却是一个有趣而困难的工作. 设 $1 < p < \infty$, 对全纯 Bergman 投影的精确 L^p 范数估计这一问题的讨论开始于 Zhu^[5] 的工作. Dostanić^[6] 以单位圆盘上的全纯 Bergman 投影为研究对象, 改进了 Zhu^[5] 的结果, 更精确地估计了全纯 Bergman 投影的 L^p 范数. 相应于 Hollenbeck 和 Verbisky^[7] 证明的 Hardy 空间中 Gohberg-Krupnik 猜想, Dostanić^[6] 进一步猜想, 当 $1 < p < \infty$ 时, 全纯 Bergman 投影的精确 L^p 范数等于 $\csc \frac{\pi}{p}$. 最近, Liu^[8] 继续对全纯 Bergman 投影的精确 L^p 范数进行了研究. Liu^[8] 以单位球上的全纯 Bergman 投影为研究对象, 否定了 Dostanić^[6] 的猜想, 给出了全纯 Bergman 投影更精确的 L^p 范数估计, 并对此问题提出了一个新的猜想. 至此, 当 $1 < p < \infty$ 时, 全纯 Bergman 投影的精确 L^p 范数还是一个公开问题. 当 $p = \infty$ 时, Bergman 投影是从 L^∞ 到全纯 Bloch 空间上的有界算子, 参见文献 [4, 定理 5.2], 其精确范数计算, 参见文献 [9–12].

虽然全纯 Bergman 投影在 L^p 空间上的精确范数计算至今还是一个公开问题, 但是与 $\mathbb{T}_{a,b,c}$ 相关的一类积分算子在 L^p 空间上的精确范数当参数 (a, b, c) 满足一定的条件时是可以计算的. 此类相关的积分算子定义为

$$\mathbb{S}_{a,b,c}f(z) = (1 - |z|^2)^a \int_{\mathbb{B}_n} \frac{(1 - |w|^2)^b}{|1 - \langle z, w \rangle|^c} f(w) dv(w). \quad (1.1)$$

全纯 Bergman 投影在 L^p 空间上的有界性 (选取合适的参数 (a, b, c)) 和推广的积分算子 $\mathbb{T}_{a,b,c}$ 在 L^p 空间上的有界性都是由积分算子 $\mathbb{S}_{a,b,c}$ 在 L^p 空间上的有界性给出的, 参见文献 [1–4]. 另一方面, 当 $a = n + 1, b = 0, c = 2(n + 1)$ 时, 算子 $\mathbb{S}_{a,b,c}$ 是全纯 Berezin 变换. 因此, 算子 $\mathbb{S}_{a,b,c}$ 在某种程度上可以看作 Berezin 变换的推广. 当参数 (a, b, c) 满足 $c = n + 1 + a + b$ 时, 算子 $\mathbb{S}_{a,b,c}$ 在 L^p 空间上的精确范数是可以精确计算的, 参见文献 [13], 有关全纯 Berezin 变换在 L^p 空间上的精确范数计算, 参见文献 [14, 15].

在上述工作的基础上, 我们经常把 Bergman 投影、Berezin 变换、与 Bergman 投影相关的算子 $\mathbb{T}_{a,b,c}$, 以及与 Berezin 变换相关的算子 $\mathbb{S}_{a,b,c}$ 在 L^p 空间上的有界性与精确范数估计等方面的结果统称为 Forelli-Rudin 型定理.

全纯 Forelli-Rudin 型定理的发展带动了调和 Forelli-Rudin 型定理的发展. 为区别于 $\mathbb{C}^n$ 中的开单位球 $\mathbb{B}_n$, 用符号 B 表示 $\mathbb{R}^n$ 上的开单位球. 受 Zhu^[5] 关于全纯 Bergman 投影在 L^p 空间上的精确范数估计的思想启发, Choe 等^[16] 得到了加权调和 Bergman 投影在 L^p 空间上的精确范数估计. Zhou^[17] 讨论了一类与 (1.1) 中类似的积分算子在 L^p 空间上的有界性, 即

$$(S_{a,b,c}f)(x) = (1 - |x|^2)^a \int_{B_n} \frac{(1 - |y|^2)^b}{[x, y]^c} f(y) dv(y), \quad (1.2)$$

其中 $[x, y]^2 = 1 - 2x \cdot y + |x|^2|y|^2$, 并给出了当 $c = n + a + b$ 时, 该算子在 L^p 空间上的精确范数. 当 $a = 0, b = \lambda, c = n + \lambda$ 时, 算子 $S_{a,b,c}$ 与加权调和 Bergman 投影相关, 且算子 $S_{a,b,c}$ 在 L^p 空间上的有界性蕴含了加权调和 Bergman 投影在 L^p 空间上的有界性, 参见文献 [16, 18]. 算子 $S_{0,\lambda,n+\lambda}$ 在 L^p 空间上的精确范数计算参见文献 [16, 19]. 当 $a = 2 + \lambda, b = \lambda, c = n + 2 + 2\lambda$ 时, $S_{a,b,c}$ 是文献 [20, 21] 中讨论的调和 Berezin 型变换.

由于 (1.1) 中一类与全纯 Berezin 变换相关的积分算子 $S_{a,b,c}$ 和 (1.2) 中一类与调和 Berezin 型变换相关的积分算子 $S_{a,b,c}$ 在 L^p 空间上的有界性与精确范数估计都充分地依赖于超几何函数, 而且在方法上又存在一定的相似性, 因此, 本文主要借助超几何函数建立一类定义在开区间 $(0, 1)$ 上的积分算子. 此类积分算子的建立, 为 (1.1) 中 $S_{a,b,c}$ 与 (1.2) 中 $S_{a,b,c}$ 之间建立了联系.

设 dt 表示开区间 $(0, 1)$ 上的 Lebesgue 测度. 设 $\theta, \lambda \in \mathbb{R}$, 开区间 $(0, 1)$ 上的加权 Lebesgue 测度定义为

$$d\mu_{\lambda,\theta}(t) := (1-t)^{\lambda}t^{\theta-1}dt.$$

$\mu_{\lambda,\theta}$ 是区间 $(0, 1)$ 上的有限测度当且仅当 $\theta > 0, \lambda > -1$. 设 $1 \leq p < \infty$, 空间 $L_{\mu_{\lambda,\theta}}^p := L_{\mu_{\lambda,\theta}}^p(0, 1)$ 是区间 $(0, 1)$ 上满足

$$\|f\|_{p,\mu_{\lambda,\theta}} := \left(\int_0^1 |f(t)|^p d\mu_{\lambda,\theta}(t) \right)^{1/p} < \infty$$

的所有 Lebesgue 可测函数构成的全体. $L_{\mu_{\lambda,\theta}}^\infty := L_{\mu_{\lambda,\theta}}^\infty(0, 1)$ 包含区间 $(0, 1)$ 上所有关于测度 $\mu_{\lambda,\theta}$ 的本性有界可测函数.

设 $\xi, \eta, a, b, \theta \in \mathbb{R}$, 一类与超几何函数相关的积分算子定义为

$$\mathcal{T}_{a,b,\theta}^{\xi,\eta} f(s) = (1-s)^a \int_0^1 (1-t)^b {}_2F_1 \left[\begin{matrix} \xi, \eta \\ \theta \end{matrix}; ts \right] f(t) t^{\theta-1} dt,$$

其中

$${}_2F_1 \left[\begin{matrix} \alpha, \beta \\ \gamma \end{matrix}; \varrho \right]$$

表示 Gauss 超几何函数. 本文主要讨论此类积分算子 $\mathcal{T}_{a,b,\theta}^{\xi,\eta}$ 在 $L_{\mu_{\lambda,\theta}}^p(0, 1)$ 上的有界性与精确范数.

本文的主要结果如下.

定理 1.1 设 $\xi > 0, \eta > 0, \theta > 0$.

(1) 若 $1 < p < \infty$, 则 $\mathcal{T}_{a,b,\theta}^{\xi,\eta}$ 是 $L_{\mu_{\lambda,\theta}}^p$ 上的有界算子当且仅当

$$\begin{cases} -a < \frac{\lambda+1}{p} < b+1, \\ \xi + \eta \leq a + b + \theta + 1. \end{cases}$$

(2) $\mathcal{T}_{a,b,\theta}^{\xi,\eta}$ 是 $L_{\mu_{\lambda,\theta}}^1$ 上的有界算子当且仅当

$$\begin{cases} -a < \lambda + 1 < b + 1, \\ \xi + \eta \leq a + b + \theta + 1, \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} -a < \lambda + 1 \leq b + 1, \\ \xi + \eta < a + b + \theta + 1. \end{cases}$$

(3) $\mathcal{T}_{a,b,\theta}^{\xi,\eta}$ 是 $L_{\mu_{\lambda,\theta}}^\infty(0,1)$ 上的有界算子当且仅当

$$\begin{cases} a > 0, & b > -1, \\ \xi + \eta \leq a + b + \theta + 1, \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} a \geq 0, & b > -1, \\ \xi + \eta < a + b + \theta + 1. \end{cases}$$

定理 1.2 设 $\xi > 0, \eta > 0, \theta > 0, \xi + \eta = a + b + \theta + 1$.

(1) 当 $1 < p < \infty$ 时, 若 $-a < (\lambda + 1)/p < (b + 1)$, ξ 和 η 满足

$$\left(\xi - a - \frac{\lambda + 1}{p}\right)\left(\eta - a - \frac{\lambda + 1}{p}\right) \geq 0, \quad (1.3)$$

$$\left(\xi - b - 1 + \frac{\lambda + 1}{p}\right)\left(\eta - b - 1 + \frac{\lambda + 1}{p}\right) \geq 0, \quad (1.4)$$

则

$$\|\mathcal{T}_{a,b,\theta}^{\xi,\eta}\|_{L_{\mu_{\lambda,\theta}}^p \rightarrow L_{\mu_{\lambda,\theta}}^p} = \frac{\Gamma(a + \frac{\lambda+1}{p})\Gamma(b + 1 - \frac{\lambda+1}{p})\Gamma(\theta)}{\Gamma(\xi)\Gamma(\eta)}.$$

(2) 若 $-a < (\lambda + 1) < (b + 1)$, 则

$$\|\mathcal{T}_{a,b,\theta}^{\xi,\eta}\|_{L_{\mu_{\lambda,\theta}}^1 \rightarrow L_{\mu_{\lambda,\theta}}^1} = \begin{cases} \frac{\Gamma(a + \lambda + 1)\Gamma(b - \lambda)\Gamma(\theta)}{\Gamma(\xi)\Gamma(\eta)}, & (\xi - b + \lambda)(\eta - b + \lambda) \geq 0, \\ \frac{\Gamma(a + \lambda + 1)\Gamma(\theta)}{\Gamma(a + \theta + \lambda + 1)}, & (\xi - b + \lambda)(\eta - b + \lambda) < 0. \end{cases}$$

(3) 若 $a > 0, b > -1$, 则

$$\|\mathcal{T}_{a,b,\theta}^{\xi,\eta}\|_{L_{\mu_{\lambda,\theta}}^\infty \rightarrow L_{\mu_{\lambda,\theta}}^\infty} = \begin{cases} \frac{\Gamma(a)\Gamma(b + 1)\Gamma(\theta)}{\Gamma(\xi)\Gamma(\eta)}, & (\xi - a)(\eta - a) \geq 0, \\ \frac{\Gamma(b + 1)\Gamma(\theta)}{\Gamma(b + \theta + 1)}, & (\xi - a)(\eta - a) < 0. \end{cases}$$

当算子 $\mathcal{T}_{a,b,\theta}^{\xi,\eta}$ 中的参数 $a = 0, \xi = \eta$ 时, Marković^[22] 讨论了此类积分算子 $\mathcal{T}_{0,b,\theta}^{\xi,\xi}$ 在 $L_{\mu_{0,\theta}}^p(0,1)$ 上的有界性, 并给出了当 $2\xi = b + \theta + 1$ 时, $\mathcal{T}_{0,b,\theta}^{\xi,\xi}$ 在 $L_{\mu_{0,\theta}}^p(0,1)$ 上的精确范数. 本文首先介绍超几何函数与 Schur 检验等预备知识, 其次给出定理 1.1 和 1.2 的证明, 最后阐述主要定理的应用. 在主要定理的应用方面, 我们讨论了当算子 $\mathcal{T}_{a,b,\theta}^{\xi,\eta}$ 中的指标 a, b, θ, ξ 和 η 取不同值时, 可得到全纯 (调和) Bergman 投影的有界性与上界估计、全纯 (调和) Berezin (型) 变换的精确范数. 与超几何函数相关算子 $\mathcal{T}_{a,b,\theta}^{\xi,\eta}$ 的建立, 不仅为全纯 Forelli-Rudin 型定理以及调和 Forelli-Rudin 型定理搭建了桥梁, 而且其有界性与精确范数的研究也深化了我们对 Bergman 投影与 Berezin 变换的认识.

2 预备知识

2.1 超几何函数

设 $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}, \gamma \neq 0, -1, -2, \dots$, 无穷级数定义为

$${}_2F_1 \left[\begin{matrix} \alpha, \beta \\ \gamma \end{matrix}; \varrho \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k(\beta)_k}{(\gamma)_k} \frac{\varrho^k}{k!}. \quad (2.1)$$

无穷级数 (2.1) 及其解析开拓表出的函数通常称为 Gauss 超几何函数, 其中 $(\alpha)_k$ 是 Pochhammer 符号, 具体为

$$(\alpha)_0 = 1, \quad (\alpha)_k = \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1), \quad k \geq 1.$$

(2.1) 中的无穷级数在单位圆盘 $\{\varrho: |\varrho| < 1\}$ 内收敛. 超几何函数常被用来表示数学、物理和工程中的一些特殊函数. Gauss 超几何函数用 Beta 函数表达为

$${}_2F_1 \left[\begin{matrix} \alpha, \beta \\ \gamma \end{matrix}; \varrho \right] = \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha)_k \frac{B(\beta+k, \gamma-\beta)}{B(\beta, \gamma-\beta)} \frac{\varrho^k}{k!},$$

其中 $B(\cdot, \cdot)$ 表示 Euler Beta 函数. 由于 Gauss 超几何函数与 Beta 函数的关系, 推广的 Beta 函数以及用推广的 Beta 函数表示的超几何函数得到了广泛的研究, 参见文献 [23–27].

为方便读者, 我们列出与本文相关的几个超几何函数公式 (参见文献 [28, 第 II 章]):

$${}_2F_1 \left[\begin{matrix} \alpha, \beta \\ \gamma \end{matrix}; 1 \right] = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}, \quad \operatorname{Re}(\gamma-\alpha-\beta) > 0, \quad (2.2)$$

$${}_2F_1 \left[\begin{matrix} \alpha, \beta \\ \gamma \end{matrix}; \varrho \right] = (1-\varrho)^{\gamma-\alpha-\beta} {}_2F_1 \left[\begin{matrix} \gamma-\alpha, \gamma-\beta \\ \gamma \end{matrix}; \varrho \right], \quad (2.3)$$

$$\frac{d}{d\varrho} {}_2F_1 \left[\begin{matrix} \alpha, \beta \\ \gamma \end{matrix}; \varrho \right] = \frac{\alpha\beta}{\gamma} {}_2F_1 \left[\begin{matrix} \alpha+1, \beta+1 \\ \gamma+1 \end{matrix}; \varrho \right], \quad (2.4)$$

$${}_2F_1 \left[\begin{matrix} \alpha, \beta \\ \gamma \end{matrix}; \varrho \right] = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\gamma-\lambda)} \int_0^1 t^{\lambda-1} (1-t)^{\gamma-\lambda-1} {}_2F_1 \left[\begin{matrix} \alpha, \beta \\ \lambda \end{matrix}; t\varrho \right] dt, \quad (2.5)$$

$$\operatorname{Re} \gamma > \operatorname{Re} \lambda > 0, \quad |\arg(1-\varrho)| < \pi, \quad z \neq 1.$$

当 $|\varrho| \rightarrow 1^-$ 时, 有如下的估计:

$${}_2F_1 \left[\begin{matrix} \alpha, \beta \\ \gamma \end{matrix}; \varrho \right] \asymp \begin{cases} 1, & \text{当 } \operatorname{Re}(\gamma-\alpha-\beta) > 0 \text{ 时,} \\ \log \frac{1}{1-|\varrho|}, & \text{当 } \operatorname{Re}(\gamma-\alpha-\beta) = 0 \text{ 时,} \\ (1-|\varrho|)^{\gamma-\alpha-\beta}, & \text{当 } \operatorname{Re}(\gamma-\alpha-\beta) < 0 \text{ 时,} \end{cases} \quad (2.6)$$

其中 $A(\varrho) \asymp B(\varrho)$ 表示存在与 ϱ 无关的常数 C 使得 $C^{-1}B(\varrho) \leq A(\varrho) \leq CB(\varrho)$. 结合 (2.5) 与 (2.6), 我们得到了如下的结果.

引理 2.1 (参见文献 [19, 引理 2.1]) 设 $\operatorname{Re} \gamma > 0, \operatorname{Re} \delta > 0, \operatorname{Re}(\gamma+\delta-\alpha-\beta) > 0$, 则

$$\int_0^1 t^{\gamma-1} (1-t)^{\delta-1} {}_2F_1 \left[\begin{matrix} \alpha, \beta \\ \gamma \end{matrix}; t \right] dt = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\delta)\Gamma(\gamma+\delta-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma+\delta-\alpha)\Gamma(\gamma+\delta-\beta)}. \quad (2.7)$$

引理 2.2 设 $\gamma, \rho, \delta > 0, \gamma+\rho+\delta-\alpha-\beta > 0$, 则

$$\int_0^1 s^{\gamma+\rho-1} (1-s)^{\delta-1} \left\{ \int_0^1 t^{\gamma-1} (1-t)^{\rho-1} {}_2F_1 \left[\begin{matrix} \alpha, \beta \\ \gamma \end{matrix}; ts \right] dt \right\} ds$$

$$= \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\rho)\Gamma(\delta)\Gamma(\gamma+\rho+\delta-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma+\rho+\delta-\alpha)\Gamma(\gamma+\rho+\delta-\beta)}.$$

证明 根据 (2.5), 有

$$\begin{aligned} & \int_0^1 s^{\gamma+\rho-1}(1-s)^{\delta-1} \left\{ \int_0^1 (1-t)^{\rho-1} t^{\gamma-1} {}_2F_1 \left[\begin{matrix} \alpha, \beta \\ \gamma \end{matrix}; ts \right] dt \right\} ds \\ &= \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\rho)}{\Gamma(\gamma+\rho)} \int_0^1 s^{\gamma+\rho-1}(1-s)^{\delta-1} {}_2F_1 \left[\begin{matrix} \alpha, \beta \\ \gamma+\rho \end{matrix}; s \right] ds. \end{aligned}$$

结合 (2.7), 即得引理 2.2. □

引理 2.3 (参见文献 [29, 引理 2.1]) 设 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\gamma > \max\{\alpha, \beta, \alpha + \beta, -1\}$. 若 $\alpha\beta\gamma > 0$, 则

$$\varrho \mapsto {}_2F_1 \left[\begin{matrix} \alpha, \beta \\ \gamma \end{matrix}; \varrho \right]$$

是从 $[0, 1)$ 到 $[1, B)$ 的单增函数. 若 $\alpha\beta\gamma < 0$, 则

$$\varrho \mapsto {}_2F_1 \left[\begin{matrix} \alpha, \beta \\ \gamma \end{matrix}; \varrho \right]$$

是从 $[0, 1)$ 到 $(B, 1]$ 的单减函数, 其中

$$B := {}_2F_1 \left[\begin{matrix} \alpha, \beta \\ \gamma \end{matrix}; 1 \right] = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}.$$

引理 2.4 设 $\rho > 0$, $\gamma > 0$, $\delta \in \mathbb{R}$, 则

$$\sup_{s \in (0, 1)} (1-s)^\delta \int_0^1 (1-t)^{\rho-1} t^{\gamma-1} {}_2F_1 \left[\begin{matrix} \alpha, \beta \\ \gamma \end{matrix}; ts \right] dt < +\infty \quad (2.8)$$

当且仅当

$$\begin{cases} \delta \geq 0, \\ \delta + \rho + \gamma - \alpha - \beta > 0, \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} \delta > 0, \\ \delta + \rho + \gamma - \alpha - \beta \geq 0. \end{cases}$$

进一步, 若 $\delta + \rho + \gamma = \alpha + \beta$, 则

$$\sup_{s \in [0, 1)} (1-s)^\delta \int_0^1 (1-t)^{\rho-1} t^{\gamma-1} {}_2F_1 \left[\begin{matrix} \alpha, \beta \\ \gamma \end{matrix}; ts \right] dt = \begin{cases} \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\rho)\Gamma(\delta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}, & \text{当 } (\alpha-\delta)(\beta-\delta) \geq 0 \text{ 时,} \\ \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\rho)}{\Gamma(\alpha+\beta-\delta)}, & \text{当 } (\alpha-\delta)(\beta-\delta) < 0 \text{ 时.} \end{cases} \quad (2.9)$$

证明 由 (2.5) 知,

$$(1-s)^\delta \int_0^1 (1-t)^{\rho-1} t^{\gamma-1} {}_2F_1 \left[\begin{matrix} \alpha, \beta \\ \gamma \end{matrix}; ts \right] dt = (1-s)^\delta \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\rho)}{\Gamma(\gamma+\rho)} {}_2F_1 \left[\begin{matrix} \alpha, \beta \\ \gamma+\rho \end{matrix}; s \right].$$

由 (2.6) 知, (2.8) 成立当且仅当

$$\begin{cases} \delta > 0, \\ \gamma + \rho - \alpha - \beta \geq -\delta, \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} \delta = 0, \\ \gamma + \rho - \alpha - \beta > 0. \end{cases}$$

进一步, 当 $\delta + \rho + \gamma = \alpha + \beta$ 时, 根据 (2.3), 得

$$\sup_{s \in [0,1]} (1-s)^\delta {}_2F_1 \left[\begin{matrix} \alpha, \beta \\ \gamma + \rho \end{matrix}; s \right] = \sup_{s \in [0,1]} {}_2F_1 \left[\begin{matrix} \beta - \delta, \alpha - \delta \\ \gamma + \rho \end{matrix}; s \right].$$

再结合引理 2.3 得 (2.9). □

2.2 Schur 检验

引理 2.5 (参见文献 [30, 定理 3.6]) 设 (X, μ) 是 σ -有限可测空间, $K(x, y)$ 是 $X \times X$ 上的非负可测函数, 积分算子 T 定义为

$$(Tf)(x) = \int_X K(x, y)f(y)d\mu(y).$$

设 $1 < p < \infty$, q 是 p 的共轭指标, 即满足 $1/p + 1/q = 1$. 如果存在正常数 C_1, C_2 和 X 上的正可测函数 u 满足

$$\sup_{x \in X} \left(u(x)^{-q} \int_X K(x, y)u(y)^q d\mu(y) \right) \leq C_1,$$

且

$$\sup_{y \in X} \left(u(y)^{-p} \int_X K(x, y)u(x)^p d\mu(x) \right) \leq C_2,$$

则 T 是 $L^p(X, \mu)$ 上的有界算子, 且 $\|T\| \leq C_1^{1/q} C_2^{1/p}$.

引理 2.6 设 (X, μ) 是 σ -有限可测空间, $K(x, y)$ 是 $X \times X$ 上的非负可测函数, 积分算子 T 定义为

$$(Tf)(x) = \int_X K(x, y)f(y)d\mu(y),$$

则

(1) T 是 $L^1(X, \mu)$ 上的有界算子当且仅当 $\sup_{y \in X} (T^*1)(y) < \infty$, 且

$$\|T\|_{L^1(X, \mu) \rightarrow L^1(X, \mu)} = \sup_{y \in X} (T^*1)(y),$$

其中

$$(T^*1)(y) = \int_X K(x, y)d\mu(x).$$

(2) T 是 $L^\infty(X, \mu)$ 上的有界算子当且仅当 $\sup_{x \in X} (T1)(x) < \infty$, 且

$$\|T\|_{L^\infty(X, \mu) \rightarrow L^\infty(X, \mu)} = \sup_{x \in X} (T1)(x),$$

其中

$$(T1)(x) = \int_X K(x, y)d\mu(y).$$

证明 首先证明 (2). 一方面, 因为

$$|(Tf)(x)| \leq \int_X K(x, y) |f(y)| d\mu(y) \leq \|f\|_\infty \int_X K(x, y) d\mu(y),$$

则

$$\|T\|_{L^\infty(X, \mu) \rightarrow L^\infty(X, \mu)} \leq \sup_{x \in X} \int_X K(x, y) d\mu(y);$$

另一方面, 取 $f = 1$, 有

$$\|T\|_{L^\infty(X, \mu) \rightarrow L^\infty(X, \mu)} \geq \sup_{x \in X} \int_X K(x, y) d\mu(y),$$

(2) 得证. 类似地, 根据

$$(T^*f)(y) = \int_X K(x, y) f(x) d\mu(x),$$

结合 $\|T\|_{L^1(X, \mu) \rightarrow L^1(X, \mu)} = \|T^*\|_{L^\infty(X, \mu) \rightarrow L^\infty(X, \mu)}$ 可证明 (1). $\square$

3 定理 1.1 和 1.2 的证明

引理 3.1 设 $1 < p < \infty$, 则 $f(t) = ct^{\frac{\delta}{p}}(1-t)^{\frac{\tilde{\delta}}{p}} \in L_{\mu_{\lambda, \theta}}^p$ 当且仅当 $\delta + \theta > 0, \tilde{\delta} + \lambda + 1 > 0$. 进一步, $\|f\|_{p, \mu_{\lambda, \theta}} = 1$ 当且仅当 $c = B(\delta + \theta, \tilde{\delta} + \lambda + 1)^{-1/p}$.

证明 因为

$$\|f\|_{p, \mu_{\lambda, \theta}}^p = c^p \int_0^1 t^\delta (1-t)^{\tilde{\delta}} d\mu_{\lambda, \theta}(t) = c^p \int_0^1 t^{\delta+\theta-1} (1-t)^{\tilde{\delta}+\lambda} dt,$$

所以, $f \in L_{\mu_{\lambda, \theta}}^p$ 当且仅当 $\delta + \theta > 0, \tilde{\delta} + \lambda + 1 > 0$. 根据 Beta 函数的定义知, $\|f\|_{p, \mu_{\lambda, \theta}} = 1$ 当且仅当 $c = B(\delta + \theta, \tilde{\delta} + \lambda + 1)^{-1/p}$. $\square$

定理 1.1 的证明 (1) 当 $1 < p < \infty$ 时. 用 q 表示 p 的共轭指标, 即满足 $1/p + 1/q = 1$.

(i) (充分性) 已知 $-a < (\lambda + 1)/p < b + 1, \xi + \eta \leq a + b + \theta + 1$. 算子 $\mathcal{T}_{a, b, \theta}^{\xi, \eta}$ 的积分核为

$$K(s, t) = (1-s)^a (1-t)^{b-\lambda} {}_2F_1 \left[\begin{matrix} \xi, \eta \\ \theta \end{matrix}; ts \right].$$

根据 Schur 检验 (引理 2.5), 取可测函数

$$u(t) = (1-t)^{-\frac{\lambda+1}{pq}},$$

要证明算子 $\mathcal{T}_{a, b, \theta}^{\xi, \eta}$ 是 $L_{\mu_{\lambda, \theta}}^p$ 上的有界算子, 只需要证明如下的事实成立:

$$\sup_{s \in (0, 1)} u(s)^{-q} (\mathcal{T}_{a, b, \theta}^{\xi, \eta} u^q)(s) < +\infty \quad \text{和} \quad \sup_{t \in (0, 1)} u(t)^{-p} (\mathcal{T}_{a, b, \theta}^{\xi, \eta} u^p)(t) < +\infty.$$

事实上,

$$\sup_{s \in (0, 1)} u(s)^{-q} (\mathcal{T}_{a, b, \theta}^{\xi, \eta} u^q)(s) = \sup_{s \in (0, 1)} (1-s)^{a+\frac{\lambda+1}{p}} \int_0^1 (1-t)^{b-\frac{\lambda+1}{p}} t^{\theta-1} {}_2F_1 \left[\begin{matrix} \xi, \eta \\ \theta \end{matrix}; st \right] dt. \quad (3.1)$$

在 (2.8) 中取 $\delta = a + \frac{\lambda+1}{p}$, $\rho = b + 1 - \frac{\lambda+1}{p}$, $\gamma = \theta$, $\alpha = \xi$, $\beta = \eta$. 根据已知条件知,

$$\delta = a + \frac{\lambda+1}{p} > 0, \quad \delta + \rho + \gamma - \alpha - \beta = a + b + \theta + 1 - \xi - \eta \geq 0.$$

根据引理 2.4, 有

$$\sup_{s \in (0,1)} u(s)^{-q} (\mathcal{T}_{a,b,\theta}^{\xi,\eta} u^q)(s) < +\infty.$$

类似地, 在 (2.8) 中取

$$\delta = b - \lambda + \frac{\lambda+1}{q} = b + 1 - \frac{\lambda+1}{p},$$

$\rho = a + \lambda + 1 - (\lambda+1)/q$, $\gamma = \theta$, $\alpha = \xi$, $\beta = \eta$, 由已知条件知,

$$\delta > 0, \quad \delta + \rho + \gamma - \alpha - \beta = a + b + \theta + 1 - \xi - \eta \geq 0.$$

根据引理 2.4, 有

$$\sup_{t \in (0,1)} u(t)^{-p} (\mathcal{T}_{a,b,\theta}^{\xi,\eta} u^p)(t) = \sup_{t \in (0,1)} (1-t)^{b-\lambda+\frac{\lambda+1}{q}} \int_0^1 (1-s)^{a+\lambda-\frac{\lambda+1}{q}} s^{\theta-1} {}_2F_1 \left[\begin{matrix} \xi, \eta \\ \theta \end{matrix}; st \right] ds < +\infty. \quad (3.2)$$

(ii) (必要性) 已知 $\mathcal{T}_{a,b,\theta}^{\xi,\eta}$ 是 $L_{\mu_{\lambda,\theta}}^p$ 上的有界算子. 根据 Riesz 表示定理, 算子 $\mathcal{T}_{a,b,\theta}^{\xi,\eta}$ 在 $L_{\mu_{\lambda,\theta}}^p$ 上的范数表达为

$$\|\mathcal{T}_{a,b,\theta}^{\xi,\eta}\|_{L_{\mu_{\lambda,\theta}}^p \rightarrow L_{\mu_{\lambda,\theta}}^p} := \sup \left\{ \left| \int_0^1 (\mathcal{T}_{a,b,\theta}^{\xi,\eta} f)(t) \overline{g(t)} dt \right| : \|f\|_{p,\mu_{\lambda,\theta}} = \|g\|_{q,\mu_{\lambda,\theta}} = 1 \right\}.$$

因此, 取检验函数

$$g_{\tau,\tilde{\tau}}(t) = c_1 t^{\frac{\tau}{p}} (1-t)^{\frac{\tilde{\tau}}{p}}, \quad h_{v,\tilde{v}}(t) = c_2 t^{\frac{v}{q}} (1-t)^{\frac{\tilde{v}}{q}},$$

则当 $g_{\tau,\tilde{\tau}} \in L_{\mu_{\lambda,\theta}}^p$, $h_{v,\tilde{v}} \in L_{\mu_{\lambda,\theta}}^q$ 时, 由 $\mathcal{T}_{a,b,\theta}^{\xi,\eta}$ 在 $L_{\mu_{\lambda,\theta}}^p$ 上的有界性得

$$\int_0^1 (\mathcal{T}_{a,b,\theta}^{\xi,\eta} g_{\tau,\tilde{\tau}})(s) \overline{h_{v,\tilde{v}}(s)} d\mu_{\lambda,\theta}(s) < +\infty. \quad (3.3)$$

根据引理 3.1, $g_{\tau,\tilde{\tau}} \in L_{\mu_{\lambda,\theta}}^p$, $h_{v,\tilde{v}} \in L_{\mu_{\lambda,\theta}}^q$ 当且仅当 $\tau + \theta > 0$, $\tilde{\tau} + \lambda + 1 > 0$, $v + \theta > 0$, $\tilde{v} + \lambda + 1 > 0$. 进一步, 为使 $\|g\|_{p,\mu_{\lambda,\theta}} = \|h\|_{q,\mu_{\lambda,\theta}} = 1$, 常数 c_1 和 c_2 为

$$c_1 = B(\tau + \theta, \tilde{\tau} + \lambda + 1)^{-\frac{1}{p}}, \quad c_2 = B(v + \theta, \tilde{v} + \lambda + 1)^{-\frac{1}{q}}.$$

于是, 对任意固定的 $\epsilon > 0$, 如果取 $\tau = 0$ 和 $\tilde{\tau} = \epsilon - (\lambda + 1)$, 则 $g_{\tau,\tilde{\tau}}(t) \in L_{\mu_{\lambda,\theta}}^p$,

$$(\mathcal{T}_{a,b,\theta}^{\xi,\eta} g_{\tau,\tilde{\tau}})(s) = (1-s)^a \int_0^1 (1-t)^{b+\frac{\tilde{\tau}}{p}} {}_2F_1 \left[\begin{matrix} \xi, \eta \\ \theta \end{matrix}; st \right] t^{\theta-1} dt.$$

为使 $\mathcal{T}_{a,b,\theta}^{\xi,\eta} g_{\tau,\tilde{\tau}}(s)$ 定义有意义, 根据 (2.5), 有

$$b + 1 + \frac{\tilde{\tau}}{p} = b + 1 + \frac{\epsilon - (\lambda + 1)}{p} > 0. \quad (3.4)$$

进一步, 如果取 $v = q(b + 1 + \tilde{\tau}/p)$, $\tilde{v} = \tilde{\tau}$, 则

$$\int_0^1 (\mathcal{T}_{a,b,\theta}^{\xi,\eta} g_{\tau,\tilde{\tau}})(s) \overline{h_{v,\tilde{v}}(s)} d\mu_{\lambda,\theta}(s) = c_1 c_2 \int_0^1 s^{b+\frac{\tilde{\tau}}{p}+\theta} (1-s)^{a+\lambda+\frac{\tilde{\tau}}{q}} \left\{ \int_0^1 (1-t)^{b+\frac{\tilde{\tau}}{p}} {}_2F_1 \left[\begin{matrix} \xi, \eta \\ \theta \end{matrix}; st \right] t^{\theta-1} dt \right\} ds.$$

引理 2.2 中的参数 $\gamma = \theta$, $\rho = b + 1 + \frac{\tilde{\tau}}{p}$, $\delta = a + \lambda + 1 + \frac{\tilde{\tau}}{q}$, $\alpha = \xi$, $\beta = \eta$, 为使上式有意义, 则

$$\delta := a + \lambda + 1 + \frac{\tilde{\tau}}{q} = a + \frac{\lambda + 1}{p} + \frac{\epsilon}{q} > 0, \quad (3.5)$$

且

$$\gamma + \rho + \delta - \alpha - \beta := a + b + \theta + 1 + \epsilon - \xi - \eta > 0. \quad (3.6)$$

这样, 综合 (3.4)–(3.6), 根据 ϵ 的任意性知,

$$-a \leq \frac{\lambda + 1}{p} \leq b + 1, \quad \xi + \eta \leq a + b + \theta + 1. \quad (3.7)$$

下面证明 $-a < \frac{\lambda+1}{p} < b+1$. 事实上, 取 $N > a$, $f(t) = (1-t)^N$, 则通过 (3.7) 和引理 3.1, 得 $f \in L_{\mu_{\lambda,\theta}}^p$. 由已知条件 $\mathcal{T}_{a,b,\theta}^{\xi,\eta}$ 在 $L_{\mu_{\lambda,\theta}}^p$ 上的有界性, 得 $(\mathcal{T}_{a,b,\theta}^{\xi,\eta} f)(s) \in L_{\mu_{\lambda,\theta}}^p$. 根据 (2.5), 有

$$\begin{aligned} (\mathcal{T}_{a,b,\theta}^{\xi,\eta} f)(s) &= (1-s)^a \int_0^1 (1-t)^{b+N} {}_2F_1 \left[\begin{matrix} \xi, \eta \\ \theta \end{matrix}; ts \right] t^{\theta-1} dt \\ &= \frac{\Gamma(\theta)\Gamma(b+N+1)}{\Gamma(\theta+b+N+1)} {}_2F_1 \left[\begin{matrix} \xi, \eta \\ \theta+b+N+1 \end{matrix}; s \right] (1-s)^a. \end{aligned}$$

因为 $\theta + b + N + 1 - \xi - \eta > \theta + b + a + 1 - \xi - \eta \geq 0$, 根据 (2.6), 有 $(\mathcal{T}_{a,b,\theta}^{\xi,\eta} f)(s) \asymp (1-s)^a$. 于是, $(\mathcal{T}_{a,b,\theta}^{\xi,\eta} f)(s) \in L_{\mu_{\lambda,\theta}}^p$ 蕴含 $pa + \lambda > -1$. 类似地, 如果取 $f(t) = (1-t)^{N'}$, 其中 $N' > b - \lambda$, 那么 $f \in L_{\mu_{\lambda,\theta}}^q$. $(\mathcal{T}_{a,b,\theta}^{\xi,\eta})^*$ 在 $L_{\mu_{\lambda,\theta}}^q$ 上的有界性蕴含 $q(b - \lambda) + \lambda > -1$, 即 $b + 1 - \frac{\lambda+1}{p} > 0$, 其中 $(\mathcal{T}_{a,b,\theta}^{\xi,\eta})^*$ 表示 $\mathcal{T}_{a,b,\theta}^{\xi,\eta}$ 的共轭算子,

$$(\mathcal{T}_{a,b,\theta}^{\xi,\eta})^* f(s) = (1-s)^{b-\lambda} \int_0^1 (1-t)^{a+\lambda} {}_2F_1 \left[\begin{matrix} \xi, \eta \\ \theta \end{matrix}; ts \right] f(t) t^{\theta-1} dt.$$

(2) 当 $p = 1$ 时, 根据引理 2.6, 得

$$\|\mathcal{T}_{a,b,\theta}^{\xi,\eta}\|_{L_{\mu_{\lambda,\theta}}^1 \rightarrow L_{\mu_{\lambda,\theta}}^1} = \sup_{t \in (0,1)} (1-t)^{b-\lambda} \int_0^1 (1-s)^{a+\lambda} s^{\theta-1} {}_2F_1 \left[\begin{matrix} \xi, \eta \\ \theta \end{matrix}; ts \right] ds.$$

根据 (2.8) 即得结果.

(3) 当 $p = \infty$ 时. 类似于 $p = 1$ 的情形. □

定理 1.2 的证明 当 $1 < p < \infty$ 时, 在定理 1.1 的证明中, 令

$$C_u^1 := \sup_{s \in (0,1)} u(s)^{-q} (\mathcal{T}_{a,b,\theta}^{\xi,\eta} u^q)(s) \quad \text{和} \quad C_u^2 := \sup_{t \in (0,1)} u(t)^{-p} (\mathcal{T}_{a,b,\theta}^{\xi,\eta} u^p)(t),$$

当 ξ 和 η 满足条件 (1.3) 和 (1.4) 时, 根据 (2.9), 得

$$C_u^1 = C_u^2 = \frac{\Gamma(a + \frac{\lambda+1}{p})\Gamma(b+1 - \frac{\lambda+1}{p})\Gamma(\theta)}{\Gamma(\xi)\Gamma(\eta)}.$$

应用 Schur 检验 (引理 2.5), 得到

$$\|\mathcal{T}_{a,b,\theta}^{\xi,\eta}\|_{L_{\mu_{\lambda,\theta}}^p \rightarrow L_{\mu_{\lambda,\theta}}^p} \leq (C_u^1)^{1/q}(C_u^2)^{1/p} = \frac{\Gamma(a + \frac{\lambda+1}{p})\Gamma(b+1 - \frac{\lambda+1}{p})\Gamma(\theta)}{\Gamma(\xi)\Gamma(\eta)}.$$

算子范数 $\|\mathcal{T}_{a,b,\theta}^{\xi,\eta}\|_{L_{\mu_{\lambda,\theta}}^p \rightarrow L_{\mu_{\lambda,\theta}}^p}$ 的下界估计是通过如下的事实得到的, 即对任意固定 $\epsilon > 0$, 在定理 1.1 的证明中, 取 $\tau = 0$, $\tilde{\tau} = \epsilon - (\lambda + 1)$ 与 $v = q(b + 1 + \tilde{\tau}/p)$, $\tilde{v} = \tilde{\tau}$, 有

$$\|\mathcal{T}_{a,b,\theta}^{\xi,\eta}\|_{L_{\mu_{\lambda,\theta}}^p \rightarrow L_{\mu_{\lambda,\theta}}^p} \geq \int_0^1 (\mathcal{T}_{a,b,\theta}^{\xi,\eta} g_{\tau,\tilde{\tau}})(s) \overline{h_{v,\tilde{v}}(s)} d\mu_{\lambda,\theta}(s).$$

通过引理 2.2, 有

$$\begin{aligned} \int_0^1 \mathcal{T}_{a,b,\theta}^{\xi,\eta} g_{\tau,\tilde{\tau}}(s) \overline{h_{v,\tilde{v}}(s)} d\mu_{\lambda,\theta}(s) &= \frac{\Gamma(\theta)\Gamma(b+1 + \frac{\epsilon-(\lambda+1)}{p})\Gamma(a + \frac{\lambda+1}{p} + \frac{\epsilon}{q})}{\Gamma(\theta+a+b+1-\xi+\epsilon)\Gamma(\theta+a+b+1-\eta+\epsilon)} \\ &\quad \times \left\{ \frac{\Gamma(\theta+\epsilon)}{\Gamma(\theta)} \right\}^{1/p} \left\{ \frac{\Gamma(q(b+1 + (\epsilon-\lambda-1)/p) + \theta + \epsilon)}{\Gamma(q(b+1 + (\epsilon-\lambda-1)/p) + \theta)} \right\}^{1/q}. \end{aligned}$$

令 $\epsilon \rightarrow 0^+$, 得

$$\|\mathcal{T}_{a,b,\theta}^{\xi,\eta}\|_{L_{\mu_{\lambda,\theta}}^p \rightarrow L_{\mu_{\lambda,\theta}}^p} \geq \frac{\Gamma(a + \frac{\lambda+1}{p})\Gamma(b+1 - \frac{\lambda+1}{p})\Gamma(\theta)}{\Gamma(\xi)\Gamma(\eta)}.$$

这样, 算子 $\mathcal{T}_{a,b,\theta}^{\xi,\eta}$ 的精确范数 $\|\mathcal{T}_{a,b,\theta}^{\xi,\eta}\|_{L_{\mu_{\lambda,\theta}}^p \rightarrow L_{\mu_{\lambda,\theta}}^p}$ 即得.

当 $p = 1$ 时, 通过引理 2.6, 得

$$\|\mathcal{T}_{a,b,\theta}^{\xi,\eta}\|_{L_{\mu_{\lambda,\theta}}^1 \rightarrow L_{\mu_{\lambda,\theta}}^1} = \sup_{t \in (0,1)} (1-t)^{b-\lambda} \int_0^1 (1-s)^{a+\lambda} s^{\theta-1} {}_2F_1 \left[\begin{matrix} \xi, \eta \\ \theta \end{matrix}; ts \right] ds.$$

再根据 (2.9) 即得定理 1.2(2). 类似得 $p = \infty$ 的结果. $\square$

4 应用

定义 4.1 [22] 用符号 Ω 表示 $\mathbb{R}^n$ 中的实开单位球或 $\mathbb{C}^n$ 中复开单位球. 设 $h(w)$ 为定义在 Ω 上的函数, 如果存在 $(0, 1)$ 上的函数 $H(t)$, 对任意的 $w \in \Omega$ 满足 $h(w) = H(|w|^2)$, 则称 $h(w)$ 为 Ω 上的径向对称函数.

引理 4.1 设 $g(z)$ 是 $\mathbb{B}_n \subset \mathbb{C}^n$ 上的径向对称函数, $G_{\mathbb{B}_n}(r)$ 是定义在 $(0, 1)$ 上的函数, 满足对任意的 $z \in \mathbb{B}_n$, 有 $g(z) = G_{\mathbb{B}_n}(|z|^2)$, 则有以下结论成立:

- (i) 当 $1 \leq p < \infty$ 时, $\|g\|_{p, v_{\lambda, \mathbb{B}_n}}^p = n \|G_{\mathbb{B}_n}\|_{p, \mu_{\lambda, n}}^p$;
- (ii) $(\mathbb{S}_{a,b,c}g)(z) = n(\mathcal{T}_{a,b,n}^{\xi,\eta} G_{\mathbb{B}_n})(|z|^2)$, $(\mathbb{S}_{a,b,c}^*g)(z) = n((\mathcal{T}_{a,b,n}^{\xi,\eta})^* G_{\mathbb{B}_n})(|z|^2)$, 其中 $\xi = \eta = c/2$.

证明 (i) 根据

$$\begin{aligned}\|g\|_{p,v_\lambda,\mathbb{B}_n}^p &= \int_{\mathbb{B}_n} |g(z)|^p dv_\lambda(z) = 2n \int_0^1 r^{2n-1} (1-r^2)^\lambda |G_{\mathbb{B}_n}(r^2)|^p dr \\ &= n \int_0^1 r^{n-1} (1-r)^\lambda |G(r)|^p dr = n \|G_{\mathbb{B}_n}\|_{p,\mu_{\lambda,n}}^p,\end{aligned}$$

即得结论 (i).

(ii) 设 $\xi = \eta = c/2$, 只需证明 $(\mathbb{S}_{a,b,c}g)(z) = n(\mathcal{T}_{a,b,n}^{\xi,\eta} G_{\mathbb{B}_n})(|z|^2)$. 因为同理可证 $(\mathbb{S}_{a,b,c}^*g)(z) = n((\mathcal{T}_{a,b,n}^{\xi,\eta})^* G_{\mathbb{B}_n})(|z|^2)$. 由极坐标变换公式和文献 [8, 推论 2.4], 有

$$\begin{aligned}(\mathbb{S}_{a,b,c}g)(z) &= (1-|z|^2)^a \int_{\mathbb{B}_n} \frac{(1-|w|^2)^b}{|1-\langle z,w \rangle|^c} g(w) dv(w) \\ &= 2n(1-|z|^2)^a \int_0^1 r^{2n-1} (1-r^2)^b G_{\mathbb{B}_n}(r^2) \left\{ \int_{\mathbb{S}_n} \frac{d\sigma(\zeta)}{|1-\langle z,r\zeta \rangle|^c} \right\} dr \\ &= n(1-|z|^2)^a \int_0^1 (1-r)^b {}_2F_1 \left[\begin{matrix} \frac{c}{2}, \frac{c}{2} \\ n \end{matrix}; r|z|^2 \right] r^{n-1} G_{\mathbb{B}_n}(r) dr \\ &= n(\mathcal{T}_{a,b,n}^{\xi,\eta} G_{\mathbb{B}_n})(|z|^2),\end{aligned}$$

其中 $\mathbb{S}_n$ 表示 $\mathbb{C}^n$ 中的开单位球面, 证毕. $\square$

引理 4.2 设 $1 \leq p \leq \infty$, $\xi = \eta = c/2$, 则算子 $\mathbb{S}_{a,b,c}$ 是 $L_{v_\lambda}^p(\mathbb{B}_n)$ 上的有界算子当且仅当 $\mathcal{T}_{a,b,n}^{\xi,\eta}$ 是 $L_{\mu_{\lambda,n}}^p(0,1)$ 上的有界算子, 且

$$\|\mathbb{S}_{a,b,c}\|_{L_{v_\lambda}^p(\mathbb{B}_n) \rightarrow L_{v_\lambda}^p(\mathbb{B}_n)} = n \|\mathcal{T}_{a,b,n}^{\xi,\eta}\|_{L_{\mu_{\lambda,n}}^p \rightarrow L_{\mu_{\lambda,n}}^p}. \quad (4.1)$$

证明 当 p 等于 1 或 ∞ 时, 根据引理 4.1 知,

$$(\mathbb{S}_{a,b,c}^*1)(z) = n((\mathcal{T}_{a,b,n}^{\xi,\eta})^*1)(|z|^2), \quad (\mathbb{S}_{a,b,c}1)(z) = n(\mathcal{T}_{a,b,n}^{\xi,\eta}1)(|z|^2).$$

再根据引理 2.6 即得 (4.1).

当 $1 < p < \infty$ 时, 首先证明

$$n \|\mathcal{T}_{a,b,n}^{\xi,\eta}\|_{L_{\mu_{\lambda,n}}^p \rightarrow L_{\mu_{\lambda,n}}^p} \leq \|\mathbb{S}_{a,b,c}\|_{L_{v_\lambda}^p(\mathbb{B}_n) \rightarrow L_{v_\lambda}^p(\mathbb{B}_n)}. \quad (4.2)$$

事实上, 任取 $F_{\mathbb{B}_n}(t) \in L_{\mu_{\lambda,n}}^p(0,1)$, 令

$$f(z) := F_{\mathbb{B}_n}(|z|^2), \quad z \in \mathbb{B}_n.$$

根据引理 4.1, 有

$$n(\mathcal{T}_{a,b,n}^{\xi,\eta} F_{\mathbb{B}_n})(s) = n(\mathcal{T}_{a,b,n}^{\xi,\eta} F_{\mathbb{B}_n})(|z|^2) = (\mathbb{S}_{a,b,c}f)(z).$$

因此, $\mathbb{S}_{a,b,c}f$ 是 $\mathbb{B}_n$ 上的径向对称函数. 再根据引理 4.1, 有

$$\begin{aligned}n \|n(\mathcal{T}_{a,b,n}^{\xi,\eta} F_{\mathbb{B}_n})\|_{p,\mu_{\lambda,n}}^p &= \|\mathbb{S}_{a,b,c}f\|_{p,v_\lambda,\mathbb{B}_n}^p \leq (\|\mathbb{S}_{a,b,c}\|_{L_{v_\lambda}^p(\mathbb{B}_n) \rightarrow L_{v_\lambda}^p(\mathbb{B}_n)})^p \|f\|_{p,v_\lambda,\mathbb{B}_n}^p \\ &\leq n(\|\mathbb{S}_{a,b,c}\|_{L_{v_\lambda}^p(\mathbb{B}_n) \rightarrow L_{v_\lambda}^p(\mathbb{B}_n)})^p \|F_{\mathbb{B}_n}\|_{p,\mu_{\lambda,n}}^p.\end{aligned}$$

(4.2) 得证.

其次证明

$$\|\mathbb{S}_{a,b,c}\|_{L_{v_\lambda}^p(\mathbb{B}_n) \rightarrow L_{v_\lambda}^p(\mathbb{B}_n)} \leq n \|\mathcal{T}_{a,b,n}^{\xi,\eta}\|_{L_{\mu_{\lambda,n}}^p \rightarrow L_{\mu_{\lambda,n}}^p}. \quad (4.3)$$

要证明此事实, 只需要证明

$$\|\mathbb{S}_{a,b,n+1+a+b}\|_{L_{v_\lambda}^p(\mathbb{B}_n) \rightarrow L_{v_\lambda}^p(\mathbb{B}_n)} \leq n \|\mathcal{T}_{a,b,n}^{\xi,\eta}\|_{L_{\mu_{\lambda,n}}^p \rightarrow L_{\mu_{\lambda,n}}^p},$$

因为

$$\|\mathbb{S}_{a,b,c}\|_{L_{v_\lambda}^p(\mathbb{B}_n)} \leq \|\mathbb{S}_{a,b,n+1+a+b}\|_{L_{v_\lambda}^p(\mathbb{B}_n) \rightarrow L_{v_\lambda}^p(\mathbb{B}_n)}.$$

事实上, 取 $u(z) = (1 - |z|^2)^{-\frac{\lambda+1}{pq}}$, 则存在定义在 $(0, 1)$ 上的函数 $U_{\mathbb{B}_n}(s) = (1 - s)^{-\frac{\lambda+1}{pq}}$ 满足

$$u(z) = U_{\mathbb{B}_n}(|z|^2).$$

因此, 函数 $u(z)$ 是 $\mathbb{B}_n$ 上的径向对称函数. 设 $c = n + a + b + 1$, $\xi = \eta = (n + a + b + 1)/2$, 则此时 $\xi + \eta = n + a + b + 1$. 根据 Schur 检验 (引理 2.5)、引理 4.1 以及定理 1.2 的证明过程, 有

$$\begin{aligned} \|\mathbb{S}_{a,b,c}\|_{L_{v_\lambda}^p(\mathbb{B}_n) \rightarrow L_{v_\lambda}^p(\mathbb{B}_n)} &\leq \max \left\{ \sup_{z \in \mathbb{B}_n} u(z)^{-q} (\mathbb{S}_{a,b,c} u^q)(z), \sup_{w \in \mathbb{B}_n} u(w)^{-p} (\mathbb{S}_{a,b,c} u^p)(w) \right\} \\ &= n \max \left\{ \sup_{s \in (0,1)} U_{\mathbb{B}_n}(s)^{-q} (\mathcal{T}_{a,b,n}^{\xi,\eta} U_{\mathbb{B}_n}^q)(s), \sup_{t \in (0,1)} U_{\mathbb{B}_n}(t)^{-p} (\mathcal{T}_{a,b,n}^{\xi,\eta} U_{\mathbb{B}_n}^p)(t) \right\} \\ &= n \|\mathcal{T}_{a,b,n}^{\xi,\eta}\|_{L_{\mu_{\lambda,n}}^p \rightarrow L_{\mu_{\lambda,n}}^p}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

证毕. $\square$

根据引理 4.2, 由 $\mathcal{T}_{a,b,n}^{\xi,\eta}$ 在 $L_{\mu_{\lambda,\theta}}^p(0, 1)$ 上的有界性与精确范数得到 $\mathbb{S}_{a,b,c}$ 在 $L_{v_\lambda}^p(\mathbb{B}_n)$ 上的有界性与精确范数.

推论 4.1 (1) 设 $1 < p < \infty$, 则 $\mathbb{S}_{a,b,c}$ 是 $L_{v_\lambda}^p(\mathbb{B}_n)$ 上的有界算子当且仅当 $-a < (\lambda + 1)/p < b + 1$ 且 $c \leq n + 1 + a + b$.

(2) $\mathbb{S}_{a,b,c}$ 是 $L_{v_\lambda}^1(\mathbb{B}_n)$ 上的有界算子当且仅当

$$\begin{cases} -a < \lambda + 1 < b + 1, \\ c \leq n + a + b + 1, \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} -a < \lambda + 1 \leq b + 1, \\ c < n + a + b + 1. \end{cases}$$

(3) $\mathbb{S}_{a,b,c}$ 是 $L^\infty(\mathbb{B}_n)$ 上的有界算子当且仅当

$$\begin{cases} a > 0, \quad b > -1, \\ c \leq n + a + b + 1, \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} a \geq 0, \quad b > -1, \\ c < n + a + b + 1. \end{cases}$$

进一步, 若 $c = n + a + b + 1$, 则

$$\|\mathbb{S}_{a,b,c}\|_{L_{v_\lambda}^p(\mathbb{B}_n) \rightarrow L_{v_\lambda}^p(\mathbb{B}_n)} = \frac{n! \Gamma(a + \frac{\lambda+1}{p}) \Gamma(b + 1 - \frac{\lambda+1}{p})}{\Gamma^2((n + 1 + a + b)/2)}.$$

当 $p = \infty$ 时, 上式理解为

$$\frac{n! \Gamma(a) \Gamma(b + 1)}{\Gamma^2((n + 1 + a + b)/2)}.$$

注 4.1 (1) 推论 4.1 中的 (1) 和 (2) 是文献 [4] 中的主要结果, (3) 与算子 $S_{a,b,c}$ 的精确范数是文献 [13] 中的主要结果.

(2) 当 $\mathcal{T}_{a,b,\theta}^{\xi,\eta}$ 中的 $a=0, b=0, \theta=n, \xi=\eta=(n+1)/2$ 时, 即 $S_{a,b,c}$ 中的 $a=0, b=0, c=n+1$ 时, 得到全纯 Bergman 投影

$$Pf(z) = \int_{\mathbb{B}_n} \frac{f(w)}{(1 - \langle z, w \rangle)^{n+1}} dv(w)$$

的有界性, 即当 $1 < p < \infty$ 时,

$$\|P\|_{L_v^p(\mathbb{B}_n) \rightarrow L_v^p(\mathbb{B}_n)} \leq \|S_{0,0,n+1}\|_{L_v^p(\mathbb{B}_n) \rightarrow L_v^p(\mathbb{B}_n)} = n \|\mathcal{T}_{0,0,n}^{\frac{n+1}{2}, \frac{n+1}{2}}\|_{L_{\mu_{0,n}}^p \rightarrow L_{\mu_{0,n}}^p} = \frac{n! \Gamma(\frac{1}{p}) \Gamma(1 - \frac{1}{p})}{\Gamma^2(\frac{n+1}{2})}.$$

类似地, 当 $\mathcal{T}_{a,b,\theta}^{\xi,\eta}$ 中的 $a=0, b, \theta=n, \xi=\eta=(n+1+b)/2$ 时, 也可得加权 Bergman 投影的有界性或上界估计.

(3) 当 $\mathcal{T}_{a,b,\theta}^{\xi,\eta}$ 中的 $a=n+1, b=0, \theta=n, \xi=\eta=n+1$ 时, 即 $S_{a,b,c}$ 中的 $a=n+1, b=0, c=2(n+1)$ 时, 得到全纯 Berezin 变换

$$Bf(z) = (1 - |z|^2)^{n+1} \int_{\mathbb{B}_n} \frac{f(w)}{|1 - \langle z, w \rangle|^{2(n+1)}} dv(w)$$

的精确范数为

$$\begin{aligned} \|B\|_{L_v^p(\mathbb{B}_n) \rightarrow L_v^p(\mathbb{B}_n)} &= \|S_{n+1,0,2(n+1)}\|_{L_v^p(\mathbb{B}_n) \rightarrow L_v^p(\mathbb{B}_n)} = n \|\mathcal{T}_{n+1,0,n}^{n+1,n+1}\|_{L_{\mu_{0,n}}^p \rightarrow L_{\mu_{0,n}}^p} \\ &= \frac{\Gamma(n+1+\frac{1}{p})\Gamma(1-\frac{1}{p})}{n!} = \frac{1}{p} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{kp}\right) \frac{\pi}{\sin(\pi/p)}. \end{aligned}$$

上述结果是文献 [15] 中的结果. 而当 $\mathcal{T}_{a,b,\theta}^{\xi,\eta}$ 中的 $a=2, b=0, \theta=1, \xi=\eta=2$ 时, 即 $S_{a,b,c}$ 中的 $a=2, b=0, c=4$ 时, 对应着上述结果一维时的情形, 此情形是文献 [14] 中的结果.

引理 4.3 设 $g(x)$ 是单位球 $B \subset \mathbb{R}^n$ 上的径向对称函数, $G_B(r)$ 是定义在 $(0,1)$ 上的函数, 满足对任意的 $x \in B$, 有 $g(x) = G_B(|x|^2)$, 则有以下结论成立:

- (i) 设 $1 \leq p < \infty$, 则 $\|g\|_{p,v_\lambda,B}^p = \frac{n}{2} \|G_B\|_{p,\mu_{\lambda,n/2}}^p$;
- (ii) $(S_{a,b,c}g)(x) = \frac{n}{2} (\mathcal{T}_{a,b,n/2}^{\xi,\eta} G_B)(|x|^2)$, $(S_{a,b,c}^*g)(x) = \frac{n}{2} ((\mathcal{T}_{a,b,n/2}^{\xi,\eta})^* G_B)(|x|^2)$, 其中 $\xi = \frac{c}{2}, \eta = \frac{c}{2} - \frac{n}{2} + 1$.

证明 类似于引理 4.1, 通过极坐标变换和文献 [31, 引理 2.1] 即得. $\square$

引理 4.4 设 $1 \leq p \leq \infty, \xi = \frac{c}{2}, \eta = \frac{c}{2} - \frac{n}{2} + 1$, 则算子 $S_{a,b,c}$ 是 $L_{v_\lambda}^p(B)$ 上的有界算子当且仅当 $\mathcal{T}_{a,b,n/2}^{\xi,\eta}$ 是 $L_{\mu_{\lambda,n/2}}^p(0,1)$ 上的有界算子. 进一步, 当 ξ 和 η 满足条件 (1.3) 和 (1.4), 有

$$\|S_{a,b,c}\|_{L_{v_\lambda}^p(B) \rightarrow L_{v_\lambda}^p(B)} = \frac{n}{2} \|\mathcal{T}_{a,b,n/2}^{\xi,\eta}\|_{L_{\mu_{\lambda,n/2}}^p \rightarrow L_{\mu_{\lambda,n/2}}^p}. \quad (4.5)$$

证明 当 $p=1, \infty$ 时, 根据引理 4.3, 有

$$(S_{a,b,c}^*1)(x) = \frac{n}{2} ((\mathcal{T}_{a,b,n/2}^{\xi,\eta})^* 1)(|x|^2), \quad (S_{a,b,c}1)(x) = \frac{n}{2} (\mathcal{T}_{a,b,n/2}^{\xi,\eta} 1)(|x|^2),$$

再根据引理 2.6 即得 (4.5).

当 $1 < p < \infty$ 时, 类似于引理 4.2, 容易证得

$$\frac{n}{2} \|\mathcal{T}_{a,b,n/2}^{\xi,\eta}\|_{L_{\mu_{\lambda,n/2}}^p \rightarrow L_{\mu_{\lambda,n/2}}^p} \leq \|S_{a,b,c}\|_{L_{v_\lambda}^p(B) \rightarrow L_{v_\lambda}^p(B)}.$$

从而知算子 $S_{a,b,c}$ 是 $L^p_{v_\lambda}(B)$ 上的有界算子蕴含 $\mathcal{T}^{\xi,\eta}_{a,b,n/2}$ 是 $L^p_{\mu_{\lambda,n/2}}(0,1)$ 上的有界算子. 反过来, 已知 $\mathcal{T}^{\xi,\eta}_{a,b,n/2}$ 是 $L^p_{\mu_{\lambda,n/2}}(0,1)$ 上的有界算子, 类似于引理 4.2 的证明, 取 $u(x) = (1 - |x|^2)^{-(\lambda+1)/pq}$ 以及相应的 $U_B(s) = (1 - s)^{-(\lambda+1)/pq}$, 从而建立如下不等式:

$$\begin{aligned} \|S_{a,b,c}\|_{L^p_{v_\lambda}(B) \rightarrow L^p_{v_\lambda}(B)} &\leq \|S_{a,b,n+a+b}\|_{L^p_{v_\lambda}(B) \rightarrow L^p_{v_\lambda}(B)} \\ &\leq \max \left\{ \sup_{x \in B} u(x)^{-q} (S_{a,b,n+a+b} u^q)(x), \sup_{y \in B} u(y)^{-p} (S_{a,b,n+a+b} u^p)(y) \right\} \\ &\leq \max \left\{ \sup_{s \in (0,1)} U_B(s)^{-q} (\mathcal{T}^{\xi,\eta}_{a,b,n/2} U_B^q)(s), \sup_{t \in (0,1)} U_B(t)^{-p} (\mathcal{T}^{\xi,\eta}_{a,b,n/2} U_B^p)(t) \right\}, \end{aligned}$$

由定理 1.1 和引理 2.4, 有

$$\max \left\{ \sup_{s \in (0,1)} U_B(s)^{-q} (\mathcal{T}^{\xi,\eta}_{a,b,n/2} U_B^q)(s), \sup_{t \in (0,1)} U_B(t)^{-p} (\mathcal{T}^{\xi,\eta}_{a,b,n/2} U_B^p)(t) \right\} < \infty.$$

这样就得到了算子 $S_{a,b,c}$ 是 $L^p_{v_\lambda}(B)$ 上的有界算子. 进一步, 当 ξ 和 η 满足条件 (1.3) 和 (1.4) 时, 根据定理 1.2 知,

$$\max \left\{ \sup_{s \in (0,1)} U_B(s)^{-q} (\mathcal{T}^{\xi,\eta}_{a,b,n/2} U_B^q)(s), \sup_{t \in (0,1)} U_B(t)^{-p} (\mathcal{T}^{\xi,\eta}_{a,b,n/2} U_B^p)(t) \right\} = \frac{n}{2} \|\mathcal{T}^{\xi,\eta}_{a,b,n/2}\|_{L^p_{\mu_{\lambda,n/2}} \rightarrow L^p_{\mu_{\lambda,n/2}}}.$$

得到了 (4.5). 证毕. $\square$

类似于引理 4.2 的应用, 结合引理 4.4, 由 $\mathcal{T}^{\xi,\eta}_{a,b,n/2}$ 在 $L^p_{\mu_{\lambda,\theta}}(0,1)$ 上的有界性与精确范数得到算子 $S_{a,b,c}$ 在 $L^p_{v_\lambda}(B)$ 上的有界性与精确范数, 即文献 [17] 中的主要结果. 特别地, 当 $\mathcal{T}^{\xi,\eta}_{a,b,\theta}$ 中的 $a = 0$, $b = \lambda$, $\theta = n/2$, $\xi = \eta = n + \lambda$ 时, 即 $S_{a,b,c}$ 中的 $a = 0$, $b = \lambda$, $c = n + \lambda$ 时, 得到加权调和 Bergman 投影在 $L^p_\lambda(B)$ 上的有界性与上界估计, 这是文献 [16, 19] 中的主要结果.

致谢 对审稿人提出的宝贵意见表示衷心感谢.

参考文献

- Forelli F, Rudin W. Projections on spaces of holomorphic functions in balls. *Indiana Univ Math J*, 1974, 24: 593–602
- Kolaski C J. A new look at a theorem of Forelli and Rudin. *Indiana Univ Math J*, 1979, 28: 495–499
- Zhu K. A Forelli-Rudin type theorem with applications. *Complex Var Elliptic Equ*, 1991, 16: 107–113
- Kures O, Zhu K. A class of integral operators on the unit ball of $\mathbb{C}^n$. *Integral Equations Operator Theory*, 2006, 56: 71–82
- Zhu K. A sharp norm estimate of the Bergman projection on L^p spaces. *Contemp Math*, 2006, 404: 195–205
- Dostanić M. Two sided norm estimate of the Bergman projection on L^p spaces. *Czechoslovak Math J*, 2008, 58: 569–575
- Hollenbeck B, Verbitsky I E. Best constants for the Riesz projection. *J Funct Anal*, 2000, 175: 370–392
- Liu C. Sharp Forelli-Rudin estimates and the norm of the Bergman projection. *J Funct Anal*, 2015, 268: 255–277
- Perälä A. On the optimal constant for the Bergman projection onto the Bloch space. *Ann Acad Sci Fenn Math*, 2012, 37: 245–249
- Perälä A. Bloch space and the norm of the Bergman projection. *Ann Acad Sci Fenn Math*, 2013, 38: 849–853
- Kalaj D, Marković M. Norm of the Bergman projection. *Math Scand*, 2014, 115: 143–160
- Kalaj D, Vujadinović D. Norm of the Bergman projection onto the Bloch space. *J Operator Theory*, 2015, 73: 113–126
- Zhou L, Lu J. The improvement on the boundedness and norm of a class of integral operators on L^p space. *J Funct Spaces*, 2015, 2015: 1–6
- Dostanić M. Norm of Berezin transform on L^p space. *J Anal Math*, 2008, 104: 13–23
- Liu C, Zhou L. On the p norm of the Berezin transform. *Illinois J Math*, 2012, 56: 497–505
- Choe B, Koo H, Nam K. Optimal norm estimate of operators related to the harmonic Bergman projection on the ball. *Tohoku Math J (2)*, 2010, 62: 357–374

- 17 Zhou L. On the boundedness and the norm of a class of integral operators. *Acta Math Sci Ser B Engl Ed*, 2015, 35: 1475–1482
- 18 Jevtić M, Pavlović M. Harmonic Bergman functions on the unit ball in $\mathbb{R}^n$. *Acta Math Hungar*, 1999, 85: 81–96
- 19 Liu C, Zhou L. Norm of an integral operator related to the harmonic Bergman projection. *Integral Equations Operator Theory*, 2011, 69: 557–566
- 20 Liu C. A “deformation estimate” for the Toeplitz operators on harmonic Bergman spaces. *Proc Amer Math Soc*, 2007, 135: 2867–2877
- 21 Liu C. Iterates of a Berezin-type transform. *J Math Anal Appl*, 2007, 329: 822–829
- 22 Marković M. On the Forelli-Rudin projection theorem. *Integral Equations Operator Theory*, 2015, 81: 409–425
- 23 Özergin E, Özarslan M A, Altin A. Extension of gamma, beta and hypergeometric functions. *J Comput Appl Math*, 2011, 235: 4601–4610
- 24 Goswami A, Jain S, Agarwal P, et al. A note on the new extended Beta and Gauss hypergeometric functions. *Appl Math Inf Sci*, 2018, 12: 139–144
- 25 Choi J, Agarwal P, Jain S. Certain fractional integral operators and extended generalized Gauss hypergeometric functions. *Kyungpook Math J*, 2015, 55: 695–703
- 26 Agarwal R P, Luo M J, Agarwal P. On the extended Appell-Lauricella hypergeometric functions and their applications. *Filomat*, 2017, 31: 3693–3713
- 27 Ruzhansky M, Cho Y J, Agarwal P, et al. *Advances in Real and Complex Analysis with Applications*. Singapore: Springer, 2017, 71–87
- 28 Erdélyi A, Magnus W, Oberhettinger F, et al. *Higher Transcendental Functions*, Vol. I. New York: McGraw-Hill, 1953, 56–99
- 29 Lin B, Liu C, Wang J. A sharp version of the Forelli-Rudin type estimates on the unit real ball. *Ann Acad Sci Fenn Math*, 2016, 41: 243–252
- 30 Zhu K. *Operator Theory in Function Spaces*, 2nd ed. *Mathematical Surveys and Monographs*, vol. 138. Providence: Amer Math Soc, 2007
- 31 Liu C, Peng L. Boundary regularity in the Dirichlet problem for the invariant Laplacian Δ_γ on the unit real ball. *Proc Amer Math Soc*, 2004, 132: 3259–3268

The Forelli-Rudin type theorem and a class of integral operator related to hypergeometric function

Lifang Zhou & Jin Lu

Abstract The boundedness and the accurate norm of a class of integral operator related to hypergeometric function are discussed by using the theory of hypergeometric function and Schur’s test. The establishment of the main results not only builds the bridge between holomorphic Forelli-Rudin type theorem and harmonic Forelli-Rudin type theorem, but also deepens the understanding of the Bergman projection and Berezin transform.

Keywords hypergeometric function, Bergman projection, Berezin transform, accurate norm

MSC(2010) 47B38, 47G10

doi: 10.1360/SCM-2018-0018