POVM测量组合的联合可测性及其应用

余雪晴, 肖书, 曹怀信*

陕西师范大学数学与信息科学学院, 西安 710119

*联系人, E-mail: caohx@snnu.edu.cn

收稿日期: 2019-10-12; 接受日期: 2019-11-06; 网络出版日期: 2020-03-24

国家自然科学基金(编号: 11871318, 11771009)、中央高校基本科研业务费专项资金(编号: GK201703010, GK201801011)和陕西省青年科技新星项目(编号: 2018KJXX-054)资助

摘要 由一组正算子值测度(POVM)构成的POVM测量组合是描述与研究复合量子系统的非定域性、量子导引及量子关联性的重要工具. 本文首先引入由任意多个POVM构成的POVM测量组合 $\mathcal{M}_S$ 的联合可测性(Joint Measurability), 证明了 $\mathcal{M}_S$ 的联合可测性与其相容性是相互等价的; 给出了与1秩投影测量联合可测的POVM的一般形式; 证明了POVM测量组合 $\mathcal{M}_S$ 是联合可测的当且仅当由它构成的“行随机算子矩阵” $\mathbf{M}_S$ 可以表示成 $\{0, I_S\}$ ——行随机算子矩阵的“算子凸组合”; 特别地, 证明了三维实单位向量 $\mathbf{n}_i (i = 0, 1)$ 诱导的POVM测量组合 $\mathcal{M}(\mathbf{n}_0, \mathbf{n}_1)$ 是联合可测的当且仅当 $\mathbf{n}_0 = \pm \mathbf{n}_1$. 作为应用, 给出了两比特量子态关于POVM测量组合 $\mathcal{M}(\mathbf{n}_0, \mathbf{n}_1)$ 不可导引性的充要条件.

关键词 POVM测量组合, 相容性, 联合可测性, EPR导引

PACS: 03.67.-a, 03.65.Ud, 03.65.-w

1 引言

复合量子系统的非定域性、量子导引及量子关联性都是利用量子测量来检测的. 量子导引, 又称EPR导引, 是薛定谔在著名的EPR悖论^[1]的情境下发现的重要量子特性^[2-5], 是一种介于Bell非局域性和量子纠缠之间的一种量子关联形式. Wiseman等人在文献[6, 7]中给出了EPR导引的实验解释. 后来, Cavalcanti等人在文献[8]中推广了Wiseman等人在文献[6]中定义的两体系统中的量子导引, 并推导出一些不等式来检验Bell非局域性、EPR导引和

量子纠缠. EPR导引在量子密钥分配、安全传送和纠缠辅助子信道区分等方面具有重要的应用^[9-12]. Reid在文献[11]中证明了EPR悖论已经达到可以用来验证量子位隐形传送的基准. Skrzypczyk等人在文献[13]中给出了这一现象的一种量化方法, 并用它来研究一些量子态的可导引性, 表明每一个纯纠缠态都是最大可导引的. Chen等人在文献[14]中证明了对于任何两比特纠缠态, 如果存在投影测量使Bob的规范化条件状态变成两个不同的纯态, 那么Alice就可以导引Bob的状态. Nguyen等人在文献[15]中将这一结果推广到高维系统. Sun等人在文

引用格式: 余雪晴, 肖书, 曹怀信. POVM测量组合的联合可测性及其应用. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2020, 50: 070001

Yu X Q, Xiao S, Cao H X. Joint measurability of POVM measurement assemblages and applications (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, 2020, 50: 070001, doi: 10.1360/SSPMA-2019-0353

献[16]中通过实验证明了一类两比特量子态EPR可导引性的不对称性, 并提出了一种实用方法来量化可导引性. Chen等人在文献[17]中证明了Bell非局域态可以由一些可导引态来构造. Zheng等人在文献[18]中提出并研究了两体态的广义可导引鲁棒性. Li等人在文献[19]中给出了不可导引的必要条件和充分条件, 进而建立了一个EPR导引不等式. Cao等人在文献[20]中提出了两体量子系统中的Bell非局域性及EPR导引的数学定义, 给出了它们的等价刻画, 证明了Bell非局域态之集与EPR不可导引态之集都是紧凸集. Yu等人在文献[21]中给出了单量子比特的两个正算子值测度联合可测的充分必要条件. Uola 等人在文献[22]中考虑了联合可测问题与量子导引问题之间的一一对应关系, 并量化了测量的不相容性. Chen 等人在文献[23]中得到了一类量子态可导引性的充分必要条件, 并且研究了EPR导引的非对称性. Zhao等人在文献[24]中讨论了von Neumann测量对量子系统的作用, 对给定的von Neumann测量和一个正交无迹厄密矩阵基, 引入了von Neumann测量相关矩阵, 并证明了这个矩阵不仅是幂等的、基无关的, 并且是奇异的.

由于神经网络结构的良好逼近能力^[25-27], 机器学习技术已经被用于研究量子多体问题. Carolle与Troyer^[28]基于具有多个隐层神经元的人工神经网络引入了量子态的变分表示, 并证明了深度学习计算方法计算基态的显著能力. 随后, Deng等人^[29]证明对于具有远程纠缠量子也可以使用RBM方法来描述拓扑态, 且构建了对称保护的拓扑态和内在拓扑有序态的精确神经网络表示; Yang等人^[30,31]分别研究了神经网络量子状态对系统基态的逼近问题与量子多体态的神经网络表示问题; Gao等人^[32]给出了具有深神经网络的量子多体系统的高效表示.

基于POVM测量组合对于判断Bell非定域性和EPR导引的重要性, 本文讨论POVM测量组合的联合可测性, 并给出相关结果在研究EPR导引方面的应用. 在第2节中, 引入由任意多个POVM构成的POVM测量组合 $\mathcal{M}_S$ 的联合可测性, 证明 $\mathcal{M}_S$ 的联合可测性与其相容性是相互等价的; 利用列随机矩阵, 给出与1秩投影测量联合可测的POVM的一般形式; 证明POVM测量组合 $\mathcal{M}_S$ 是联合可测的

当且仅当由它构成的“行随机算子矩阵” $\mathbf{M}_S$ 可以表示成 $\{0, I_S\}$ ——行随机算子矩阵的“算子凸组合”; 特别证明了由三维实单位向量 $\mathbf{n}_i (i = 0, 1)$ 诱导的POVM测量组合 $\mathcal{M}(\mathbf{n}_0, \mathbf{n}_1)$ 是联合可测的当且仅当 $\mathbf{n}_0 = \pm \mathbf{n}_1$. 在第3节中, 根据两体量子态的约化态讨论其不可导引性, 并利用POVM测量组合的联合可测性, 给出一般量子态 ρ^{AB} 不可导引的充要条件; 其次, 给出两比特量子态关于POVM测量组合 $\mathcal{M}(\mathbf{n}_0, \mathbf{n}_1)$ 不可导引的充分必要条件.

2 POVM测量组合的相容性与联合可测性

用 $\mathcal{H}_S$ 表示量子系统 S 的状态空间, 它是一个有限维复Hilbert空间, $\mathcal{H}_{AB} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ 表示复合量子系统 AB 的状态空间, 用 I_S 和 $\mathcal{D}_S$ 分别表示 $\mathcal{H}_S$ 上的恒等算子和量子系统 S 的所有量子态(密度算子)之集, 用 $\mathcal{B}(\mathcal{H}_S)$ 表示量子系统 S 的所有有界线性算子之集, $\mathcal{S}(\mathcal{H}_S)$ 表示量子系统 S 的所有单位向量之集, 用 $\mathcal{M}_S = \{\{M_{s|x}\}_{s=1}^{o_S} : x = 1, \dots, m_S\}$ 表示量子系统 S 的 m_S 个正算子值测度(POVM)之集, 称其为一个 (o_S, m_S) -POVM测量组合, 简称测量组合. 于是

$$\begin{cases} M_{s|x} \geq 0, \quad \forall s \in [o_S], x \in [m_S], \\ \sum_{s=1}^{o_S} M_{s|x} = I_S, \quad \forall x \in [m_S], \end{cases} \quad (1)$$

其中, $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$.

定义2.1^[33] 若对于量子系统 S 上的一个POVM测量组合 $\mathcal{M}_S = \{\{M_{s|x}\}_{s=1}^{o_S} : x \in [m_S]\}$, 存在概率分布 $\{P_S(s|x, \lambda)\}_{s=1}^{o_S}$ 以及系统 S 上的一个正算子值测度 $\{G_\lambda\}_{\lambda=1}^t$, 使得

$$M_{s|x} = \sum_{\lambda=1}^t P_S(s|x, \lambda) G_\lambda, \quad \forall s \in [o_S], x \in [m_S], \quad (2)$$

则称 $\mathcal{M}_S$ 是相容的(Compatible).

易见, 对任意 x , 式(2)可用矩阵表示为

$$M^x \equiv \begin{pmatrix} M_{1|x} \\ M_{2|x} \\ \vdots \\ M_{o_S|x} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} P_S(1|x, 1) & P_S(1|x, 2) & \cdots & P_S(1|x, t) \\ P_S(2|x, 1) & P_S(2|x, 2) & \cdots & P_S(2|x, t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_S(o_S|x, 1) & P_S(o_S|x, 2) & \cdots & P_S(o_S|x, t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \\ \vdots \\ G_t \end{pmatrix}. \quad (3)$$

一个矩阵 $\mathbf{F} = [f_{ij}]_{m \times n}$ 称为列随机矩阵, 是指该矩阵中元素满足 $f_{ij} \geq 0 (\forall i, j)$ 且 $\sum_{i=1}^m f_{ij} = 1 (\forall j)$. 在下文中, 我们用 $CS(m, n)$ 表示所有 m 行 n 列的列随机矩阵之集.

注2.1 由定义2.1可知, 量子系统 S 上的两个正算子值测度 $\mathcal{P} = \{P_i\}_{i=1}^m$ 和 $\mathcal{Q} = \{Q_j\}_{j=1}^n$ 构成的 POVM 测量组合 $\{\mathcal{P}, \mathcal{Q}\}$ 是相容的当且仅当存在两个列随机矩阵 $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in CS(m, t)$, $\mathbf{B} = [b_{ij}] \in CS(n, t)$, 以及系统 S 上的一个正算子值测度 $\{G_\lambda\}_{\lambda=1}^t$, 使得 $\forall i \in [m]$, $\forall j \in [n]$, 有

$$P_i = \sum_{\lambda=1}^t a_{i\lambda} G_\lambda, \quad Q_j = \sum_{\lambda=1}^t b_{j\lambda} G_\lambda. \quad (4)$$

定义2.2 [21] 若对于系统 S 上的两个正算子值测度 $\mathcal{P} = \{P_i\}_{i=1}^m$ 和 $\mathcal{Q} = \{Q_j\}_{j=1}^n$, 存在系统 S 上的一个正算子值测度 $\{M_{ij}|i \in [m], j \in [n]\}$, 使得 $\forall i \in [m]$ 及 $\forall j \in [n]$, 有

$$P_i = \sum_{j=1}^n M_{ij}, \quad Q_j = \sum_{i=1}^m M_{ij}, \quad (5)$$

则称 $\{\mathcal{P}, \mathcal{Q}\}$ 是联合可测的 (Jointly Measurable). 此时, 也称 $\{M_{ij}|i \in [m], j \in [n]\}$ 为 $\mathcal{P}$ 与 $\mathcal{Q}$ 的一个联合测量 (Joint Measurement).

注2.2 由定义2.2知: 当两个 POVM $\mathcal{P} = \{P_i\}_{i=1}^m$ 与 $\mathcal{Q} = \{Q_j\}_{j=1}^n$ 两两可交换 (即 $P_i Q_j = Q_j P_i (\forall i, j)$) 时, 它们是联合可测的; 此时, 取 $M_{ij} = P_i Q_j$.

注2.3 对于系统 S 上的正算子值测度

$$\mathcal{P} = \{P_i\}_{i=1}^m \equiv (P_1, P_2, \dots, P_m)^T$$

及任意 $n \times m$ 列随机矩阵 $\mathbf{C} = [c_{ij}]$, 定义

$$\mathcal{Q} = \{Q_j\}_{j=1}^n \equiv (Q_1, Q_2, \dots, Q_n)^T$$

为 $\mathcal{Q} = \mathbf{C}\mathcal{P}$, 即

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_m \end{pmatrix}, \quad (6)$$

则 $\mathcal{Q}$ 成为系统 S 上的正算子值测度. 再定义 $\mathcal{H}_S$ 上的算子 $M_{ij} = c_{ji} P_i (i \in [m], j \in [n])$, 即

$$[M_{ij}] = \begin{pmatrix} c_{11} P_1 & c_{21} P_1 & \cdots & c_{n1} P_1 \\ c_{12} P_2 & c_{22} P_2 & \cdots & c_{n2} P_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{1m} P_m & c_{2m} P_m & \cdots & c_{nm} P_m \end{pmatrix}, \quad (7)$$

则 $\mathcal{M} = \{M_{ij}|i \in [m], j \in [n]\}$ 为系统 S 上的正算子值测度, 且

$$\sum_{j=1}^n M_{ij} = \left(\sum_{j=1}^n c_{ji} \right) P_i = P_i (\forall i \in [m]),$$

$$\sum_{i=1}^m M_{ij} = \sum_{i=1}^m c_{ji} P_i = Q_j (\forall j \in [n]).$$

因此, 由定义2.2可知: 测量组合 $\{\mathcal{P}, \mathcal{Q}\}$ 是联合可测的, 且 $\mathcal{M}$ 为它们的一个联合测量.

当测量组合 $\{\mathcal{P}, \mathcal{Q}\}$ 中有一个为 1 秩投影测量时, 我们有以下结果.

定理2.1 设

$$\mathcal{P} = \{P_i\}_{i=1}^m \equiv (P_1, P_2, \dots, P_m)^T,$$

$$\mathcal{Q} = \{Q_j\}_{j=1}^n \equiv (Q_1, Q_2, \dots, Q_n)^T$$

为系统 S 上的两个正算子值测度且 $\mathcal{P}$ 为 1 秩投影测量, 即 $P_i = |x_i\rangle\langle x_i| (i \in [m])$ 且 $\{|x_i\rangle\}_{i=1}^m$ 为 $\mathcal{H}_S$ 的正规正交基, 则 $\{\mathcal{P}, \mathcal{Q}\}$ 是联合可测的当且仅当存在 $n \times m$ 列随机矩阵 $\mathbf{C} = [c_{ij}]$ 使得 $\mathcal{Q} = \mathbf{C}\mathcal{P}$, 即式(6)成立.

证明 充分性由注2.3知, 下证必要性. 设 $\{\mathcal{P}, \mathcal{Q}\}$ 是联合可测的, 则由定义2.2知: 存在系统 S 上的一个正算子值测度 $\{M_{ij}|i \in [m], j \in [n]\}$, 使得式(5)成立. 于是

$$0 \leq M_{ij} \leq \sum_{j=1}^n M_{ij} = P_i = |x_i\rangle\langle x_i| (\forall i \in [m]).$$

根据文献[20, Lemma 4.1]知: 存在常数 $0 \leq c_{ji} \leq 1$ 使得 $M_{ij} = c_{ji}P_i (i \in [m], j \in [n])$. 由式(5)得

$$Q_j = \sum_{i=1}^m M_{ij} = \sum_{i=1}^m c_{ji}P_i (\forall j \in [n]).$$

于是, 式(6)成立. 再由

$$I_S = \sum_{j=1}^n Q_j = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n c_{ji} \right) P_i = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n c_{ji} \right) |x_i\rangle\langle x_i|$$

知 $\sum_{j=1}^n c_{ji} = 1 (\forall i \in [m])$, 即 $\sum_{i=1}^m c_{ij} = 1 (\forall j \in [n])$. 因此, $C = [c_{ij}]$ 为 $n \times m$ 列随机矩阵. 证毕.

下面我们将联合可测的概念推广到任意多个 POVM 的情况.

定义 2.3 设 $\mathcal{M}_S = \{\{M_{s|x}\}_{s=1}^n : x \in [m]\}$ 为量子系统 S 的一个 POVM 测量组合, 若存在 S 上由 m 个下标确定的一个 POVM

$$\{M_{i_1, i_2, \dots, i_m} : i_1, i_2, \dots, i_m \in [n]\}$$

使得对每个 $s = 1, 2, \dots, n$, 有

$$\begin{cases} M_{s|1} = \sum_{i_2, i_3, \dots, i_m} M_{s, i_2, i_3, \dots, i_m}, \\ M_{s|2} = \sum_{i_1, i_3, \dots, i_m} M_{i_1, s, i_3, \dots, i_m}, \\ \dots\dots\dots, \\ M_{s|m} = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_{m-1}} M_{i_1, i_2, \dots, i_{m-1}, s}, \end{cases} \quad (8)$$

则称 $\mathcal{M}_S$ 是联合可测的. 此时, 我们也称 $\{M_{i_1, i_2, \dots, i_m} : i_1, i_2, \dots, i_m \in [n]\}$ 为 POVM 测量组合 $\mathcal{M}_S$ 的一个联合测量.

当 $\mathcal{M}_S = \{\{M_{s|x}\}_{s=1}^n : x \in [m]\}$ 为量子系统 S 上的一个 POVM 测量组合且满足“对易性”条件:

$$M_{s|x} M_{s'|x'} = M_{s'|x'} M_{s|x} (\forall x \neq x'; \forall s, s')$$

时, 定义

$$M_{i_1, i_2, \dots, i_m} = M_{i_1|1} M_{i_2|2} \dots M_{i_m|m} (i_1, i_2, \dots, i_m \in [n]),$$

则 $\{M_{i_1, i_2, \dots, i_m} : i_1, i_2, \dots, i_m \in [n]\}$ 为一个 POVM, 且满足条件(8), 从而由定义 2.3 知 $\mathcal{M}_S$ 是联合可测的.

POVM 测量组合的联合可测性与其相容性的定义从形式上看, 似乎没有什么联系, 但下面的定理说明它们是相互等价的.

定理 2.2 POVM 测量组合 $\mathcal{M}_S = \{\{M_{s|x}\}_{s=1}^n : x \in [m]\}$ 是相容的当且仅当它是联合可测的.

证明 充分性. 设 $\mathcal{M}_S$ 是联合可测的, 则由定义 2.3 知: 存在 S 上由 m 个下标确定的一个 POVM

$$\{M_{i_1, i_2, \dots, i_m} : i_1, i_2, \dots, i_m \in [n]\}$$

使得对每个 $s = 1, 2, \dots, n$, 式(8)成立. 于是,

$$\begin{cases} M_{s|1} = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_m} \delta_{s, i_1} M_{i_1, i_2, i_3, \dots, i_m}, \\ M_{s|2} = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_m} \delta_{s, i_2} M_{i_1, i_2, i_3, \dots, i_m}, \\ \dots\dots\dots, \\ M_{s|m} = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_m} \delta_{s, i_m} M_{i_1, i_2, \dots, i_m}. \end{cases} \quad (9)$$

取双射 $\sigma : [n]^m \rightarrow [n]^m$, 定义

$$G_\lambda = M_{i_1, i_2, \dots, i_m}, P(s|x, \lambda) = \delta_{s, i_x} (\forall x \in [m], s \in [n]),$$

其中 $\sigma(i_1, i_2, \dots, i_m) = \lambda$, 则式(9)可改写为

$$M_{s|x} = \sum_{\lambda=1}^{n^m} P(s|x, \lambda) G_\lambda (\forall x \in [m], s \in [n]).$$

显然, $\{G_\lambda\}_{\lambda=1}^{n^m}$ 为一个 POVM, 且 $\{P(s|x, \lambda)\}_{s=1}^n$ 为概率分布 $(\forall x, \lambda)$. 因此, 由定义 2.1 知 $\mathcal{M}_S$ 是相容的.

必要性. 设 $\mathcal{M}_S$ 是相容的, 则由定义 2.1 知: 存在一个 POVM $\{G_\lambda\}_{\lambda=1}^d$ 使得

$$M_{s|x} = \sum_{\lambda=1}^d P(s|x, \lambda) G_\lambda (\forall x \in [m], s \in [n]), \quad (10)$$

其中 $\{P(s|x, \lambda)\}_{s=1}^n$ 为概率分布 $(\forall x, \lambda)$. 令

$$M_{i_1, i_2, \dots, i_m} = \sum_{\lambda=1}^d P(i_1|1, \lambda) P(i_2|2, \lambda) \dots P(i_m|m, \lambda) G_\lambda,$$

则 $M_{i_1, i_2, \dots, i_m} \geq 0 (\forall i_1, i_2, \dots, i_m \in [n])$ 且

$$\sum_{i_1, i_2, \dots, i_m} M_{i_1, i_2, \dots, i_m}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\lambda=1}^d \sum_{i_1, i_2, \dots, i_m} P(i_1|1, \lambda) P(i_2|2, \lambda) \dots P(i_m|m, \lambda) G_\lambda \\
&= \sum_{\lambda=1}^d G_\lambda \\
&= I_S.
\end{aligned}$$

可见, $\{M_{i_1, i_2, \dots, i_m} : i_1, i_2, \dots, i_m \in [n]\}$ 为一个 POVM, 且由式(10)可知

$$\begin{aligned}
&\sum_{i_2, \dots, i_m} M_{i_1, i_2, \dots, i_m} \\
&= \sum_{\lambda=1}^d P(i_1|1, \lambda) \sum_{i_2, \dots, i_m} P(i_2|2, \lambda) \dots P(i_m|m, \lambda) G_\lambda \\
&= \sum_{\lambda=1}^d P(i_1|1, \lambda) G_\lambda \\
&= M_{i_1|1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{i_1, i_3, \dots, i_m} M_{i_1, i_2, \dots, i_m} \\
&= \sum_{\lambda=1}^d P(i_2|2, \lambda) \\
&\quad \times \sum_{i_1, i_3, \dots, i_m} P(i_1|1, \lambda) P(i_3|3, \lambda) \dots P(i_m|m, \lambda) G_\lambda \\
&= \sum_{\lambda=1}^d P(i_2|2, \lambda) G_\lambda \\
&= M_{i_2|2},
\end{aligned}$$

.....,

$$\begin{aligned}
&\sum_{i_1, i_2, \dots, i_{m-1}} M_{i_1, i_2, \dots, i_m} \\
&= \sum_{\lambda=1}^d P(i_m|m, \lambda) \\
&\quad \times \sum_{i_1, i_2, \dots, i_{m-1}} P(i_1|1, \lambda) \dots P(i_{m-1}|m-1, \lambda) G_\lambda \\
&= \sum_{\lambda=1}^d P(i_m|m, \lambda) G_\lambda \\
&= M_{i_m|m}.
\end{aligned}$$

这就证明了式(8)成立, 因此由定义2.3知 $\mathcal{M}_S$ 是联合可测的. 证毕.

对任意 POVM 测量组合 $\mathcal{M}_S = \{\{M_{s|x}\}_{s=1}^n : x \in [m]\}$, 定义“非负算子矩阵”

$$M_S = [M_{ji}] = \begin{pmatrix} M_{1|1} & M_{2|1} & \dots & M_{n|1} \\ M_{1|2} & M_{2|2} & \dots & M_{n|2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ M_{1|m} & M_{2|m} & \dots & M_{n|m} \end{pmatrix}, \quad (11)$$

且是“行随机的”, 即

$$M_{s|x} \geq 0 (\forall x, s), \sum_{s=1}^n M_{s|x} = I_S (\forall x \in [m]), \quad (12)$$

称其为一个 $m \times n$ “行随机算子矩阵(RSOM)”. 特别当 $M_{s|x} \in \{0, I_S\} (\forall x, s)$ 时, 称其为一个 $\{0, I_S\}$ ——行随机算子矩阵.

显然, 任意一个 $m \times n$ 行随机算子矩阵都对应一个 (n, m) -POVM 测量组合. 于是, 我们可以将 $\mathcal{M}_S$ 与 $\mathbf{M}_S$ 等同, 即

$$\mathcal{M}_S \equiv \mathbf{M}_S = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_n \end{pmatrix}, M_x = [M_{1|x} \ M_{2|x} \ \dots \ M_{n|x}].$$

Gau 等人^[34]证明: 任意行随机数量矩阵都可以表示成为 $\{0, 1\}$ ——行随机数量矩阵的凸组合. 对于行随机算子矩阵, 我们有以下结论.

定理2.3 行随机算子矩阵 $\mathbf{M}_S$ 可以表示为 $\{0, I_S\}$ ——行随机算子矩阵的“算子凸组合”, 即存在 $m \times n$ $\{0, I_S\}$ ——行随机算子矩阵 $\mathbf{A}_t (t = 1, 2, \dots, p)$ 及 $\mathcal{H}_S$ 上的正线性算子 D_t 满足 $\sum_{t=1}^p D_t = I_S$, 使得

$$\mathbf{M}_S = \sum_{t=1}^p \mathbf{A}_t \otimes D_t, \quad (13)$$

当且仅当 POVM 测量组合 $\mathcal{M}_S$ 是联合可测的.

证明 必要性. 设存在 $m \times n$ $\{0, I_S\}$ ——行随机算子矩阵 $\mathbf{A}_t (t \in [p])$ 及 $\mathcal{H}_S$ 上的正线性算子 D_t 满足 $\sum_{t=1}^p D_t = I_S$, 使得式(13)成立, 并记 $\mathbf{A}_t = [P(j|i, t) I_S]$, 则 $P(j|i, t) \in \{0, 1\}$, $\sum_{j=1}^n P(j|i, t) = 1 (\forall t, i)$. 由式(13)得知

$$\mathbf{M}_S = \sum_{t=1}^p \mathbf{A}_t \otimes D_t = \sum_{t=1}^p [P(j|i, t) D_t],$$

从而, 矩阵 $\mathbf{M}_S$ 的 (i, j) 元素为

$$M_{j|i} = \sum_{t=1}^p P(j|i, t) D_t(\forall i, j).$$

因此, 测量组合 $\mathcal{M}_S$ 是相容的, 再由定理 2.2 可知它是联合可测的.

充分性. 设 $\mathcal{M}_S$ 是联合可测的, 则再由定理 2.2 可知它是相容的, 即存在系统 S 上的一个 POVM $\{D'_k\}_{k=1}^d$ 及 $P(j|i, k) \in \{0, 1\}$, $\sum_{j=1}^n P(j|i, k) = 1 (\forall k, i)$, 使得

$$M_{j|i} = \sum_{k=1}^d P(j|i, k) D'_k(\forall i, j),$$

于是

$$\mathbf{M}_S = [M_{j|i}] = \sum_{k=1}^d [P(j|i, k) D'_k] = \sum_{k=1}^d [P(j|i, k)] \otimes D'_k. \quad (14)$$

由于 $[P(j|i, k)]$ 为 $m \times n$ 行随机数量矩阵, 所以由文献 [34] 知: 存在 $m \times n \{0, 1\}$ ——行随机数量矩阵 $\mathbf{R}_s(k) (k \in [d], s \in [q])$ 以及实数 $c_s(k) \geq 0 (k \in [d], s \in [q])$ 且 $\sum_{s=1}^q c_s(k) = 1 (\forall k \in [d])$, 使得

$$[P(j|i, k)] = \sum_{s=1}^q c_s(k) \mathbf{R}_s(k).$$

再由式 (14) 得

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_S &= [M_{j|i}] \\ &= \sum_{k=1}^d \sum_{s=1}^q c_s(k) \mathbf{R}_s(k) \otimes D'_k \\ &= \sum_{k=1}^d \sum_{s=1}^q \mathbf{R}_s(k) \otimes c_s(k) D'_k. \end{aligned}$$

任取双射 $f: [q] \times [d] \rightarrow [qd]$, 并记 $p = qd$, 且

$$t = f(s, k), \mathbf{A}_t = \mathbf{R}_s(k) \otimes I_S, D_t = c_s(k) D'_k,$$

则 $\mathbf{A}_t (t \in [p])$ 为 $m \times n \{0, I_S\}$ ——行随机算子矩阵, D_t 为 $\mathcal{H}_S$ 上的正线性算子, 满足条件 $\sum_{t=1}^p D_t = I_S$, 使得式 (13) 成立. 证毕.

以下研究两体态关于 A 系统上一个特定 POVM 测量组合的可导引性, 这个 POVM 测量组合为

$$\mathcal{M}(\mathbf{n}_0, \mathbf{n}_1) = \{\{M_{k|\mathbf{n}_i}\}_{k=0}^1 : i = 0, 1\} \equiv \{M_{k|\mathbf{n}_i}\}_{k,i},$$

$$M_{k|\mathbf{n}_i} = \frac{1}{2} (\mathbf{I}_2 + (-1)^k \mathbf{n}_i \cdot \boldsymbol{\sigma}). \quad (15)$$

其中, $\mathbf{I}_2$ 是 2 阶单位矩阵, $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 分别是三个 Pauli 矩阵, $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)^T$, $\mathbf{n}_i$ 为三维实单位向量. 记

$$O_{\pm}(x, \mathbf{m}) = \frac{\mathbf{I}_2 \pm (x\mathbf{I}_2 + \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\sigma})}{2}.$$

易见

$$\{M_{0|\mathbf{n}_0}, M_{1|\mathbf{n}_0}\} = \{O_+(0, \mathbf{n}_0), O_-(0, \mathbf{n}_0)\} := O(0, \mathbf{n}_0),$$

$$\{M_{0|\mathbf{n}_1}, M_{1|\mathbf{n}_1}\} = \{O_+(0, \mathbf{n}_1), O_-(0, \mathbf{n}_1)\} := O(0, \mathbf{n}_1).$$

从而

$$\mathcal{M}(\mathbf{n}_0, \mathbf{n}_1) = \{O(0, \mathbf{n}_0), O(0, \mathbf{n}_1)\}, \quad (16)$$

它是系统 $\mathbb{C}^2$ 上由两个 1 秩投影构成的测量组合.

定理 2.4 设 $\mathbf{n}_i (i = 0, 1)$ 为三维实单位向量, 则 $\mathcal{M}(\mathbf{n}_0, \mathbf{n}_1)$ 是联合可测的当且仅当 $\mathbf{n}_0 = \mathbf{n}_1$ 或 $\mathbf{n}_0 = -\mathbf{n}_1$.

证明 设 $\mathbf{n}_0 = \mathbf{n}_1$ 或 $\mathbf{n}_0 = -\mathbf{n}_1$, 则

$$\begin{pmatrix} O_+(0, \mathbf{n}_0) \\ O_-(0, \mathbf{n}_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O_+(0, \mathbf{n}_1) \\ O_-(0, \mathbf{n}_1) \end{pmatrix},$$

或

$$\begin{pmatrix} O_+(0, \mathbf{n}_0) \\ O_-(0, \mathbf{n}_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O_+(0, \mathbf{n}_1) \\ O_-(0, \mathbf{n}_1) \end{pmatrix}.$$

根据定理 2.1 知: $\mathcal{M}(\mathbf{n}_0, \mathbf{n}_1)$ 是联合可测的.

设 $\mathcal{M}(\mathbf{n}_0, \mathbf{n}_1)$ 是联合可测的, 则根据定理 2.1 知: 存在 2 阶列随机矩阵 $\mathbf{C} = [c_{ij}]$ 使得

$$\begin{pmatrix} O_+(0, \mathbf{n}_0) \\ O_-(0, \mathbf{n}_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O_+(0, \mathbf{n}_1) \\ O_-(0, \mathbf{n}_1) \end{pmatrix},$$

从而

$$\begin{cases} c_{11} + c_{12} = 1, & (c_{11} - c_{12})\mathbf{n}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\sigma}, \\ c_{21} + c_{22} = 1, & (c_{21} - c_{22})\mathbf{n}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma} = -\mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\sigma}. \end{cases}$$

所以, $(c_{11} - c_{12})\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_0, (c_{21} - c_{22})\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_0$. 由于 $c_{11} + c_{21} = 1 = c_{12} + c_{22}$, 所以 $c_{21} = c_{12} := c, c_{11} = c_{22} =$

$1 - c$. 从而, $c_{11} - c_{12} = 1 - 2c, c_{21} - c_{22} = 2c - 1$. 因此, $1 - 2c = \pm 1$, 进而 $\mathbf{n}_0 = \mathbf{n}_1$ 或 $\mathbf{n}_0 = -\mathbf{n}_1$. 证毕.

由定理2.2可知, 系统A上的两个正算子值测度是相容的当且仅当它们是联合可测的, 所以由定理2.4知, $\mathcal{M}(\mathbf{n}_0, \mathbf{n}_1)$ 是相容的当且仅当 $\mathbf{n}_0 = \mathbf{n}_1$ 或 $\mathbf{n}_0 = -\mathbf{n}_1$.

Yu等人在文献[21]中研究了比 $\mathcal{M}(\mathbf{n}_0, \mathbf{n}_1)$ 更一般的测量组合 $\{O(x, \mathbf{m}), O(y, \mathbf{n})\}$ 的联合可测性, 其中

$$O(x, \mathbf{m}) = \{O_+(x, \mathbf{m}), O_-(x, \mathbf{m})\},$$

$$O(y, \mathbf{n}) = \{O_+(y, \mathbf{n}), O_-(y, \mathbf{n})\},$$

得到了以下结果.

定理2.5 [21] 设 $|x| + |\mathbf{m}| \leq 1, |y| + |\mathbf{n}| \leq 1$, 且

$$O(x, \mathbf{m}) = \{O_+(x, \mathbf{m}), O_-(x, \mathbf{m})\},$$

$$O(y, \mathbf{n}) = \{O_+(y, \mathbf{n}), O_-(y, \mathbf{n})\},$$

则

(1) 当 $x = 0$ 且 $y = 0$ 时, $\{O(x, \mathbf{m}), O(y, \mathbf{n})\}$ 是联合可测的当且仅当

$$|\mathbf{m}|^2 + |\mathbf{n}|^2 \leq 1 + (\mathbf{m} \cdot \mathbf{n})^2;$$

(2) 当 $x = 0$ 且 $y \neq 0$ 时, $\{O(x, \mathbf{m}), O(y, \mathbf{n})\}$ 是联合可测的当且仅当

$$F_y \sqrt{|\mathbf{n}|^2 - (\mathbf{m} \cdot \mathbf{n})^2} \geq |\mathbf{m} \times \mathbf{n}|;$$

(3) 当 $x \neq 0$ 且 $y = 0$ 时, $\{O(x, \mathbf{m}), O(y, \mathbf{n})\}$ 是联合可测的当且仅当

$$F_x \sqrt{|\mathbf{m}|^2 - (\mathbf{m} \cdot \mathbf{n})^2} \geq |\mathbf{m} \times \mathbf{n}|;$$

(4) 当 $x \neq 0$ 且 $y \neq 0$ 时, $\{O(x, \mathbf{m}), O(y, \mathbf{n})\}$ 是联合可测的当且仅当

$$\left(1 - F_x^2 - F_y^2\right) \left(1 - \frac{x^2}{F_x^2} - \frac{y^2}{F_y^2}\right) \leq (\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} - xy)^2,$$

其中

$$F_x = \frac{1}{2} \left(\sqrt{(1+x)^2 - |\mathbf{m}|^2} + \sqrt{(1-x)^2 - |\mathbf{m}|^2} \right),$$

$$F_y = \frac{1}{2} \left(\sqrt{(1+y)^2 - |\mathbf{n}|^2} + \sqrt{(1-y)^2 - |\mathbf{n}|^2} \right).$$

由定理2.5(1)知: 当 $\mathbf{n}_0$ 与 $\mathbf{n}_1$ 为实单位向量时, $\mathcal{M}(\mathbf{n}_0, \mathbf{n}_1) = \{O(0, \mathbf{m}), O(0, \mathbf{n})\}$ 是联合可测的当且仅当 $|\mathbf{n}_0|^2 + |\mathbf{n}_1|^2 \leq 1 + (\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{n}_1)^2, |\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{n}_1| = 1, \mathbf{n}_0 = \pm \mathbf{n}_1$. 这说明定理2.4是定理2.5(1)的特殊情况, 但前者的证明更为直接与简单, 后者的证明相当困难.

3 EPR导引的一些判据

本节讨论EPR导引的一些判据. 首先, 证明了约化态至少一个为纯态的两体量子态必然为可分态, 从而它关于任意POVM测量组合 $\mathcal{M}_A$ 都是不可导引的; 其次, 利用POVM测量组合的联合可测性, 给出一般量子态 ρ^{AB} 不可导引的充要条件; 最后, 在 $\mathbf{n}_0 \neq \pm \mathbf{n}_1$ 的情况下, 给出系统 $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2$ 中的量子态 ρ^{AB} 关于POVM测量组合 $\mathcal{M}(\mathbf{n}_0, \mathbf{n}_1)$ 从A到B的不可导引的充分必要条件.

定义3.1 [20] 设 $\rho^{AB} \in \mathcal{D}_{AB}$, $\mathcal{M}_A$ 为A系统上的一个POVM测量组合, 若存在一个概率分布 $\{\pi_\lambda\}_{\lambda=1}^d$ 和一族量子态 $\{\sigma_\lambda\}_{\lambda=1}^d \subset \mathcal{D}_B$, 使得

$$\text{tr}_A[(M_{a|x} \otimes I_B)\rho^{AB}] = \sum_{\lambda=1}^d \pi_\lambda P_A(a|x, \lambda) \sigma_\lambda, \quad \forall a, x,$$

其中对每一个 (x, λ) , $\{P_A(a|x, \lambda)\}_{a=1}^{o_A}$ 是一个概率分布, 则称 ρ^{AB} 关于POVM测量组合 $\mathcal{M}_A$ 是从A到B不可导引的. 如果一个态 ρ^{AB} 关于POVM测量组合 $\mathcal{M}_A$ 不是从A到B不可导引, 那么就说它关于POVM测量组合 $\mathcal{M}_A$ 是从A到B可导引的.

文献[20]中说明: 任意可分态关于任意POVM测量组合 $\mathcal{M}_A$ 都是从A到B不可导引的, 且任意量子态 $\rho^{AB} \in \mathcal{D}_{AB}$ 关于一个相容POVM测量组合 $\mathcal{M}_A$ 都是从A到B不可导引的[20, Example 3.1].

引理3.1 [18] 设 $\rho^{AB} \in \mathcal{D}_{AB}$, $\mathcal{M}_A = \{M_{a|x}\}_{a,x}$ 为A系统上的一个POVM测量组合, 则 ρ^{AB} 关于POVM测量组合 $\mathcal{M}_A$ 是从A到B不可导引的当且仅当存在正算子集 $\{\sigma'_\lambda\}_{\lambda=1}^d \subset \mathcal{H}_B$, 使得

$$\text{tr}_A[(M_{a|x} \otimes I_B)\rho^{AB}] = \sum_{\lambda=1}^d P_A(a|x, \lambda) \sigma'_\lambda, \quad \forall x, a,$$

其中对每一个 (x, λ) , $\{P_A(a|x, \lambda)\}_{a=1}^{o_A}$ 是一个概率分布.

命题3.1 设 $\rho^{AB} \in \mathcal{D}_{AB}$ 为纯态, 且其约化密度矩阵 ρ_A 或 ρ_B 为纯态密度矩阵, 则 ρ^{AB} 为可分态且关于任意 POVM 测量组合 $\mathcal{M}_A$ 是从 A 到 B 不可导引的.

证明 因为 ρ^{AB} 为纯态, 所以可设 $\rho^{AB} = |x\rangle\langle x|$ 且 $|x\rangle = \sum_{i=1}^d \lambda_i |e_i\rangle |f_i\rangle$, 其中 $\{|e_i\rangle\}_{i=1}^d \subset \mathcal{S}(\mathcal{H}_A)$ 且相互正交, $\{|f_i\rangle\}_{i=1}^d \subset \mathcal{S}(\mathcal{H}_B)$ 且相互正交, $\lambda_i > 0 (i \in [d])$ 且 $\sum_{i=1}^d \lambda_i^2 = 1$. 故

$$\rho^{AB} = \sum_{i,j=1}^d \lambda_i \lambda_j |e_i\rangle\langle e_j| \otimes |f_i\rangle\langle f_j|,$$

所以

$$\rho_B = \text{tr}_A \rho^{AB} = \sum_{i=1}^d \lambda_i^2 |f_i\rangle\langle f_i|,$$

$$\rho_A = \text{tr}_B \rho^{AB} = \sum_{i=1}^d \lambda_i^2 |e_i\rangle\langle e_i|.$$

当 ρ_B 为纯态时, 可设 $\rho_B = |\varphi_B\rangle\langle \varphi_B|$. 从而, 以任意 $i \in [d]$, 有

$$0 \leq \lambda_i^2 |f_i\rangle\langle f_i| \leq \sum_{i=1}^d \lambda_i^2 |f_i\rangle\langle f_i| = |\varphi_B\rangle\langle \varphi_B|.$$

根据文献[20, Lemma 4.1]知: 存在常数 c_i 使得 $\lambda_i^2 |f_i\rangle\langle f_i| = c_i |\varphi_B\rangle\langle \varphi_B|$. 两边取迹得到, $|f_i\rangle\langle f_i| = |\varphi_B\rangle\langle \varphi_B| (i \in [d])$. 由于 $\{|f_i\rangle\}_{i=1}^d$ 是正规正交集, 所以 $d = 1$, 于是 $|x\rangle = |e_1\rangle |f_1\rangle$, 进而 $\rho^{AB} = |e_1\rangle\langle e_1| \otimes |f_1\rangle\langle f_1|$. 可见, ρ^{AB} 为可分态. 同理可证, 当 ρ_A 为纯态时, ρ^{AB} 也为可分态. 故 ρ^{AB} 为可分态且关于任意 POVM 测量组合 $\mathcal{M}_A$ 是从 A 到 B 不可导引的. 证毕.

命题3.2 设 ρ^{AB} 的约化密度矩阵 ρ_A 或 ρ_B 为纯态密度矩阵, 则 ρ^{AB} 为可分态且关于任意 POVM 测量组合 $\mathcal{M}_A$ 是从 A 到 B 不可导引的.

证明 因为 $\rho^{AB} \in \mathcal{D}_{AB}$, 所以 ρ^{AB} 具有谱分解

$$\rho^{AB} = \sum_{i=1}^d \lambda_i |\psi_i\rangle\langle \psi_i|,$$

其中 $\lambda_i > 0 (i \in [d])$, $\sum_{i=1}^d \lambda_i = 1$ 且 $\{|\psi_i\rangle\}_{i=1}^d$ 为正规正交集. 于是

$$\rho_B = \text{tr}_A \rho^{AB} = \sum_{i=1}^d \lambda_i \text{tr}_A (|\psi_i\rangle\langle \psi_i|),$$

$$\rho_A = \text{tr}_B \rho^{AB} = \sum_{i=1}^d \lambda_i \text{tr}_B (|\psi_i\rangle\langle \psi_i|).$$

当 ρ_B 为纯态时, 可设 $\rho_B = |\varphi_B\rangle\langle \varphi_B|$, 从而, 以任意 $i \in [d]$, 有

$$|\varphi_B\rangle\langle \varphi_B| = \sum_{i=1}^d \lambda_i \text{tr}_A (|\psi_i\rangle\langle \psi_i|) \geq \lambda_i \text{tr}_A (|\psi_i\rangle\langle \psi_i|) \geq 0.$$

根据文献[20, Lemma 4.1]知: 对任意 i , 有 $\text{tr}_A (|\psi_i\rangle\langle \psi_i|) = |\varphi_B\rangle\langle \varphi_B|$. 所以, 由命题3.1可知, 对任意 i , $|\psi_i\rangle\langle \psi_i|$ 为可分态且关于任意 POVM 测量组合 $\mathcal{M}_A$ 是从 A 到 B 不可导引的, 进而 ρ^{AB} 为可分态且关于任意 POVM 测量组合 $\mathcal{M}_A$ 是从 A 到 B 不可导引的文献[20, Corollary 3.1]. 同理可证, 当 ρ_A 为纯态时, ρ^{AB} 为可分态且关于任意 POVM 测量组合 $\mathcal{M}_A$ 是从 A 到 B 不可导引的. 证毕.

因为 $\mathcal{M}(\mathbf{n}_0, \mathbf{n}_1)$ 是相容的当且仅当 $\mathbf{n}_0 = \mathbf{n}_1$ 或 $\mathbf{n}_0 = -\mathbf{n}_1$, 所以当 $\mathbf{n}_0 = \mathbf{n}_1$ 或 $\mathbf{n}_0 = -\mathbf{n}_1$ 时, ρ^{AB} 关于 POVM 测量组合 $\mathcal{M}(\mathbf{n}_0, \mathbf{n}_1)$ 是从 A 到 B 不可导引. 因此, 我们只考虑在 $\mathbf{n}_0 \neq \mathbf{n}_1$ 且 $\mathbf{n}_0 \neq -\mathbf{n}_1$ 的情况下, 给出系统 $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2$ 中的量子态 ρ^{AB} 关于 POVM 测量组合 $\mathcal{M}(\mathbf{n}_0, \mathbf{n}_1)$ 从 A 到 B 不可导引的充分必要条件.

对任意 $\rho^{AB} \in \mathcal{D}(\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2)$, 它在局部酉等价下可表示为

$$\rho^{AB} = \frac{1}{4} \left(\mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{I}_2 + (\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \otimes \mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_2 \otimes (\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma}) + \sum_{j=1}^3 c_j \sigma_j \otimes \sigma_j \right), \quad (17)$$

其中 $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$, $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$. 令 $\mathbf{C} = \text{diag}\{c_1, c_2, c_3\}$, 称为 ρ^{AB} 的关联矩阵.

对于 A 系统上的 POVM 测量组合 $\mathcal{M}(\mathbf{n}_0, \mathbf{n}_1)$, 记

$$\Pi_{k|\mathbf{n}_i} = \text{tr}_A [(M_{k|\mathbf{n}_i} \otimes I_B) \rho^{AB}], \quad \text{则}$$

$$\Pi_{k|\mathbf{n}_i} = \frac{1}{4} \left(\mathbf{I}_2 + (-1)^k (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_i) \mathbf{I}_2 + \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma} + (-1)^k (\mathbf{C} \mathbf{n}_i) \cdot \boldsymbol{\sigma} \right). \quad (18)$$

由于

$$\rho_B = \text{tr}_A \rho^{AB} = \frac{1}{2} (\mathbf{I}_2 + \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma}),$$

所以 $(1 + |\mathbf{b}|)/2$ 和 $(1 - |\mathbf{b}|)/2$ 为 ρ_B 的特征值.

当 $|\mathbf{b}| = 0$ 时, $\rho_B = \frac{1}{2}\mathbf{I}_2$. 当 $|\mathbf{b}| \neq 0$ 时, ρ_B 的谱分解为

$$\rho_B = \frac{1+|\mathbf{b}|}{2} \frac{1}{2} \left(\mathbf{I}_2 + \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} \cdot \boldsymbol{\sigma} \right) + \frac{1-|\mathbf{b}|}{2} \frac{1}{2} \left(\mathbf{I}_2 - \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} \cdot \boldsymbol{\sigma} \right). \quad (19)$$

于是, 当 $0 \leq |\mathbf{b}| < 1$ 时, ρ_B 可逆; 当 $|\mathbf{b}| = 1$ 时, ρ_B 不可逆. 下面我们根据 ρ_B 的可逆性, 分两种情况讨论 ρ^{AB} 关于 POVM 测量组合 $\mathcal{M}(\mathbf{n}_0, \mathbf{n}_1)$ 从 A 到 B 的不可导引性.

当 ρ_B 不可逆, 即 $|\mathbf{b}| = 1$ 时, 有

$$\rho_B^2 = \left(\frac{1}{2} (\mathbf{I}_2 + \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \right)^2 = \rho_B,$$

所以 ρ_B 为纯态密度矩阵. 由命题 3.2 可知 ρ^{AB} 为可分态且 ρ^{AB} 关于 POVM 测量组合 $\mathcal{M}(\mathbf{n}_0, \mathbf{n}_1)$ 是从 A 到 B 不可导引的.

当 ρ_B 可逆时, 对 A 系统上的 POVM 测量组合 $\mathcal{M}(\mathbf{n}_0, \mathbf{n}_1)$, 引进 B 系统上的一个 POVM 测量组合

$$\mathcal{N}(\mathbf{n}_0, \mathbf{n}_1) = \{ \{ O_{k|\mathbf{n}_i} \}_{k=0}^1 : i = 0, 1 \},$$

其中 $O_{k|\mathbf{n}_i} = \rho_B^{-\frac{1}{2}} \Pi_{k|\mathbf{n}_i} \rho_B^{-\frac{1}{2}}$, $\Pi_{k|\mathbf{n}_i}$ 的定义如式 (18) 所示. 应用这些记号, 我们有以下结果.

定理 3.1 设 ρ^{AB} 具有式 (17) 的形式且约化态 ρ_B 可逆, 则 ρ^{AB} 关于 POVM 测量组合 $\mathcal{M}(\mathbf{n}_0, \mathbf{n}_1)$ 是从 A 到 B 不可导引的当且仅当 POVM 测量组合 $\mathcal{N}(\mathbf{n}_0, \mathbf{n}_1)$ 是联合可测的.

证明 必要性. 若 ρ^{AB} 关于 POVM 测量组合 $\mathcal{M}(\mathbf{n}_0, \mathbf{n}_1)$ 是从 A 到 B 不可导引的, 则存在一个概率分布 $\{\pi_\lambda\}_{\lambda=1}^d$ 和一族量子态 $\{\sigma_\lambda\}_{\lambda=1}^d \subset \mathcal{D}_B$ 使得

$$\text{tr}_A[(M_{k|\mathbf{n}_i} \otimes I_B) \rho^{AB}] = \sum_{\lambda=1}^d \pi_\lambda P(k|\mathbf{n}_i, \lambda) \sigma_\lambda, \quad (20)$$

$$\forall k, i = 0, 1,$$

其中对每一个 (i, λ) , $\{P(k|\mathbf{n}_i, \lambda)\}_{k=0}^1$ 是一个概率分布. 在式 (20) 两边关于 k 求和得到 $\sum_{\lambda=1}^d \pi_\lambda \sigma_\lambda = \rho_B$. 根据式 (18) 及 (20) 得

$$\begin{aligned} O_{k|\mathbf{n}_i} &= \rho_B^{-\frac{1}{2}} \Pi_{k|\mathbf{n}_i} \rho_B^{-\frac{1}{2}} \\ &= \rho_B^{-\frac{1}{2}} \sum_{\lambda=1}^d \pi_\lambda P(k|\mathbf{n}_i, \lambda) \sigma_\lambda \rho_B^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$= \sum_{\lambda=1}^d P(k|\mathbf{n}_i, \lambda) \pi_\lambda \rho_B^{-\frac{1}{2}} \sigma_\lambda \rho_B^{-\frac{1}{2}}.$$

定义算子 $G_\lambda = \pi_\lambda \rho_B^{-\frac{1}{2}} \sigma_\lambda \rho_B^{-\frac{1}{2}}$, 则 $\{G_\lambda\}_{\lambda=1}^d$ 为半正定算子且 $O_{k|\mathbf{n}_i} = \sum_{\lambda=1}^d P(k|\mathbf{n}_i, \lambda) G_\lambda$ ($k, i = 0, 1$). 因为

$$\sum_{\lambda=1}^d G_\lambda = \rho_B^{-\frac{1}{2}} \left(\sum_{\lambda=1}^d \pi_\lambda \sigma_\lambda \right) \rho_B^{-\frac{1}{2}} = \rho_B^{-\frac{1}{2}} \rho_B \rho_B^{-\frac{1}{2}} = I_B,$$

所以, $\{G_\lambda\}_{\lambda=1}^d$ 为正算子值测度. 于是, 由定义 2.1 可知: POVM 测量组合 $\mathcal{N}(\mathbf{n}_0, \mathbf{n}_1)$ 是相容的, 从而是联合可测的 (定理 2.2).

充分性. 设 POVM 测量组合 $\mathcal{N}(\mathbf{n}_0, \mathbf{n}_1)$ 是联合可测的, 则它是相容的 (定理 2.2), 从而由定义 2.1 可知存在概率分布 $\{P(k|\mathbf{n}_i, \lambda)\}_{k=0}^1$ 和系统 B 上的一个正算子值测量 $\{G_\lambda\}_{\lambda=1}^d$, 使得

$$O_{k|\mathbf{n}_i} = \sum_{\lambda=1}^d P(k|\mathbf{n}_i, \lambda) G_\lambda.$$

因为 $O_{k|\mathbf{n}_i} = \rho_B^{-\frac{1}{2}} \Pi_{k|\mathbf{n}_i} \rho_B^{-\frac{1}{2}}$, 所以

$$\begin{aligned} \text{tr}_A[(M_{k|\mathbf{n}_i} \otimes I_B) \rho^{AB}] &= \Pi_{k|\mathbf{n}_i} \\ &= \rho_B^{\frac{1}{2}} O_{k|\mathbf{n}_i} \rho_B^{\frac{1}{2}} \\ &= \sum_{\lambda=1}^d P(k|\mathbf{n}_i, \lambda) \rho_B^{\frac{1}{2}} G_\lambda \rho_B^{\frac{1}{2}} \\ &= \sum_{\lambda=1}^d P(k|\mathbf{n}_i, \lambda) \beta'_\lambda, \end{aligned}$$

其中 $\beta'_\lambda = \rho_B^{\frac{1}{2}} G_\lambda \rho_B^{\frac{1}{2}} \geq 0$. 从而, 由引理 3.1 可知 ρ^{AB} 关于 POVM 测量组合 $\mathcal{M}(\mathbf{n}_0, \mathbf{n}_1)$ 是从 A 到 B 不可导引的. 证毕.

下面的定理 3.2 中给出的 EPR 导引不等式中的一部分, 在 Chen 等人的文献 [23] 中已经有所提及, 我们是在该文献的基础上进行了补充并给出详细的证明过程.

设 ρ^{AB} 如式 (17) 所示, 且 ρ_B 可逆, 则 $0 \leq |\mathbf{b}| < 1$. 当 $|\mathbf{b}| = 0$ 时, 取

$$x_i = \mathbf{a}^T \mathbf{n}_i = \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_i, \mathbf{g}_i = \mathbf{C} \mathbf{n}_i; \quad (21)$$

当 $0 < |\mathbf{b}| < 1$ 时, 对 $i = 0, 1$, 取

$$x_i = \frac{\mathbf{a}^T - \mathbf{b}^T \mathbf{C}}{1 - |\mathbf{b}|^2} \mathbf{n}_i (i = 0, 1), \quad (22)$$

$$\mathbf{g}_i = \frac{|\mathbf{b}|^2 \mathbf{b} \mathbf{a}^T + (\sqrt{1 - |\mathbf{b}|^2} - 1) \mathbf{b} \mathbf{b}^T \mathbf{C} - |\mathbf{b}|^2 \sqrt{1 - |\mathbf{b}|^2} \mathbf{C}}{|\mathbf{b}|^2 (|\mathbf{b}|^2 - 1)} \mathbf{n}_i. \quad (23)$$

利用这些记号, 可以得到如下定理.

定理3.2 设 $\rho^{AB} \in \mathcal{D}(\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2)$ 具有式(17)的形式, 且 ρ_B 可逆, 则

(1) 当 $x_0 = 0$ 且 $x_1 = 0$ 时, ρ^{AB} 关于 POVM 测量组合 $\mathcal{M}(\mathbf{n}_0, \mathbf{n}_1)$ 是从 A 到 B 不可导引当且仅当

$$|\mathbf{g}_0|^2 + |\mathbf{g}_1|^2 \leq 1 + (\mathbf{g}_0 \cdot \mathbf{g}_1)^2;$$

(2) 当 $x_0 = 0$ 且 $x_1 \neq 0$ 时, ρ^{AB} 关于 POVM 测量组合 $\mathcal{M}(\mathbf{n}_0, \mathbf{n}_1)$ 是从 A 到 B 不可导引当且仅当

$$F_{x_1} \sqrt{|\mathbf{g}_1|^2 - (\mathbf{g}_0 \cdot \mathbf{g}_1)^2} \geq |\mathbf{g}_0 \times \mathbf{g}_1|;$$

(3) 当 $x_0 \neq 0$ 且 $x_1 = 0$ 时, ρ^{AB} 关于 POVM 测量组合 $\mathcal{M}(\mathbf{n}_0, \mathbf{n}_1)$ 是从 A 到 B 不可导引当且仅当

$$F_{x_0} \sqrt{|\mathbf{g}_0|^2 - (\mathbf{g}_0 \cdot \mathbf{g}_1)^2} \geq |\mathbf{g}_0 \times \mathbf{g}_1|;$$

(4) 当 $x_0 \neq 0$ 且 $x_1 \neq 0$ 时, ρ^{AB} 关于 POVM 测量组合 $\mathcal{M}(\mathbf{n}_0, \mathbf{n}_1)$ 是从 A 到 B 不可导引当且仅当

$$(1 - F_{x_0}^2 - F_{x_1}^2) \left(1 - \frac{x_0^2}{F_{x_0}^2} - \frac{x_1^2}{F_{x_1}^2} \right) - (\mathbf{g}_0 \cdot \mathbf{g}_1 - x_0 x_1)^2 \leq 0,$$

其中

$$F_{x_i} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{(1 + x_i)^2 - |\mathbf{g}_i|^2} + \sqrt{(1 - x_i)^2 - |\mathbf{g}_i|^2} \right).$$

证明 因为 ρ_B 是可逆的, 所以 ρ^{AB} 的表达式(17)中的 $\mathbf{b}$ 满足 $0 \leq |\mathbf{b}| < 1$.

(1) 当 $|\mathbf{b}| = 0$ 时, $\rho_B = \frac{1}{2} \mathbf{I}_2$, 故 $\rho_B^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \mathbf{I}_2$, 所以由式(18)及(21)得

$$\begin{aligned} O_{k|\mathbf{n}_i} &= \rho_B^{-\frac{1}{2}} \Pi_{k|\mathbf{n}_i} \rho_B^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{I}_2 + (-1)^k ((\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_i) \mathbf{I}_2 + (\mathbf{C} \mathbf{n}_i) \cdot \sigma)) \\ &= \frac{\mathbf{I}_2 + (-1)^k ((\mathbf{a}^T \mathbf{n}_i) \mathbf{I}_2 + (\mathbf{C} \mathbf{n}_i) \cdot \sigma)}{2} \\ &= \frac{\mathbf{I}_2 + (-1)^k (x_i \mathbf{I}_2 + \mathbf{g}_i \cdot \sigma)}{2}. \end{aligned}$$

由 $O_{k|\mathbf{n}_i} \geq 0$ 知 $|x_i| + |\mathbf{g}_i| \leq 1$. 由于

$$\mathcal{N}(\mathbf{n}_0, \mathbf{n}_1)$$

$$\begin{aligned} &= \{ \{O_+(x_0, \mathbf{g}_0), O_-(x_0, \mathbf{g}_0)\}, \{O_+(x_1, \mathbf{g}_1), O_-(x_1, \mathbf{g}_1)\} \} \\ &= \{O(x_0, \mathbf{g}_0), O(x_1, \mathbf{g}_1)\}, \end{aligned}$$

所以根据定理2.5可知:

1) 当 $x_0 = 0$ 且 $x_1 = 0$ 时, $\mathcal{N}(\mathbf{n}_0, \mathbf{n}_1)$ 是联合可测的当且仅当

$$|\mathbf{g}_0|^2 + |\mathbf{g}_1|^2 \leq 1 + (\mathbf{g}_0 \cdot \mathbf{g}_1)^2;$$

2) 当 $x_0 = 0$ 且 $x_1 \neq 0$ 时, $\mathcal{N}(\mathbf{n}_0, \mathbf{n}_1)$ 是联合可测的当且仅当

$$F_{x_1} \sqrt{|\mathbf{g}_1|^2 - (\mathbf{g}_0 \cdot \mathbf{g}_1)^2} \geq |\mathbf{g}_0 \times \mathbf{g}_1|;$$

3) 当 $x_0 \neq 0$ 且 $x_1 = 0$ 时, $\mathcal{N}(\mathbf{n}_0, \mathbf{n}_1)$ 是联合可测的当且仅当

$$F_{x_0} \sqrt{|\mathbf{g}_0|^2 - (\mathbf{g}_0 \cdot \mathbf{g}_1)^2} \geq |\mathbf{g}_0 \times \mathbf{g}_1|;$$

4) 当 $x_0 \neq 0$ 且 $x_1 \neq 0$ 时, $\mathcal{N}(\mathbf{n}_0, \mathbf{n}_1)$ 是联合可测的当且仅当

$$(1 - F_{x_0}^2 - F_{x_1}^2) \left(1 - \frac{x_0^2}{F_{x_0}^2} - \frac{x_1^2}{F_{x_1}^2} \right) - (\mathbf{g}_0 \cdot \mathbf{g}_1 - x_0 x_1)^2 \leq 0,$$

其中

$$F_{x_i} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{(1 + x_i)^2 - |\mathbf{g}_i|^2} + \sqrt{(1 - x_i)^2 - |\mathbf{g}_i|^2} \right).$$

再由定理3.1可知, 当 $|\mathbf{b}| = 0$ 时, 该定理成立.

(2) 当 $0 < |\mathbf{b}| < 1$ 时, 根据 ρ_B 的谱分解式(19)得

$$\begin{aligned} \rho_B^{-\frac{1}{2}} &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 + |\mathbf{b}|}} \frac{1}{2} \left(\mathbf{I}_2 + \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} \cdot \sigma \right) + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 - |\mathbf{b}|}} \frac{1}{2} \left(\mathbf{I}_2 - \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} \cdot \sigma \right) \\ &= \frac{\sqrt{1 - |\mathbf{b}|} + \sqrt{1 + |\mathbf{b}|}}{\sqrt{2} \sqrt{1 - |\mathbf{b}|^2}} \mathbf{I}_2 + \frac{\sqrt{1 - |\mathbf{b}|} - \sqrt{1 + |\mathbf{b}|}}{\sqrt{2} |\mathbf{b}| \sqrt{1 - |\mathbf{b}|^2}} \mathbf{b} \cdot \sigma. \end{aligned}$$

记

$$\delta = \frac{|\mathbf{b}|^2 \mathbf{b} \mathbf{a}^T + (\sqrt{1 - |\mathbf{b}|^2} - 1) \mathbf{b} \mathbf{b}^T \mathbf{C} - |\mathbf{b}|^2 \sqrt{1 - |\mathbf{b}|^2} \mathbf{C}}{|\mathbf{b}|^2 (|\mathbf{b}|^2 - 1)},$$

根据式(18), (22)及(23), 计算可得

$$\begin{aligned} O_{k|\mathbf{n}_i} &= \rho_B^{-\frac{1}{2}} \Pi_{k|\mathbf{n}_i} \rho_B^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{I}_2 + \frac{1}{2} (-1)^k \frac{\mathbf{a}^T - \mathbf{b}^T \mathbf{C}}{1 - |\mathbf{b}|^2} \mathbf{n}_i \mathbf{I}_2 + \frac{1}{2} (-1)^k (\delta \mathbf{n}_i) \cdot \sigma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \mathbf{I}_2 + \frac{1}{2} (-1)^k x_i \mathbf{I}_2 + \frac{1}{2} (-1)^k \mathbf{g}_i \cdot \sigma \\
&= \frac{\mathbf{I}_2 + (-1)^k (x_i \mathbf{I}_2 + \mathbf{g}_i \cdot \sigma)}{2}.
\end{aligned}$$

由 $O_{k|\mathbf{n}_i} \geq 0$ 知 $|x_i| + |\mathbf{g}_i| \leq 1$. 因为

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}(\mathbf{n}_0, \mathbf{n}_1) &= \{ \{O_+(x_0, \mathbf{g}_0), O_-(x_0, \mathbf{g}_0)\}, \{O_+(x_1, \mathbf{g}_1), O_-(x_1, \mathbf{g}_1)\} \} \\
&= \{O(x_0, \mathbf{g}_0), O(x_1, \mathbf{g}_1)\},
\end{aligned}$$

所以由定理2.5可知:

1) 当 $x_0 = 0$ 且 $x_1 = 0$ 时, $\mathcal{N}(\mathbf{n}_0, \mathbf{n}_1)$ 是联合可测的当且仅当

$$|\mathbf{g}_0|^2 + |\mathbf{g}_1|^2 \leq 1 + (\mathbf{g}_0 \cdot \mathbf{g}_1)^2;$$

2) 当 $x_0 = 0$ 且 $x_1 \neq 0$ 时, $\mathcal{N}(\mathbf{n}_0, \mathbf{n}_1)$ 是联合可测的当且仅当

$$F_{x_1} \sqrt{|\mathbf{g}_1|^2 - (\mathbf{g}_0 \cdot \mathbf{g}_1)^2} \geq |\mathbf{g}_0 \times \mathbf{g}_1|;$$

3) 当 $x_0 \neq 0$ 且 $x_1 = 0$ 时, $\mathcal{N}(\mathbf{n}_0, \mathbf{n}_1)$ 是联合可测的当且仅当

$$F_{x_0} \sqrt{|\mathbf{g}_0|^2 - (\mathbf{g}_0 \cdot \mathbf{g}_1)^2} \geq |\mathbf{g}_0 \times \mathbf{g}_1|;$$

4) 当 $x_0 \neq 0$ 且 $x_1 \neq 0$ 时, $\mathcal{N}(\mathbf{n}_0, \mathbf{n}_1)$ 是联合可测的当且仅当

$$\left(1 - F_{x_0}^2 - F_{x_1}^2\right) \left(1 - \frac{x_0^2}{F_{x_0}^2} - \frac{x_1^2}{F_{x_1}^2}\right) - (\mathbf{g}_0 \cdot \mathbf{g}_1 - x_0 x_1)^2 \leq 0,$$

其中

$$F_{x_i} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{(1+x_i)^2 - |\mathbf{g}_i|^2} + \sqrt{(1-x_i)^2 - |\mathbf{g}_i|^2} \right).$$

再由定理3.1可知, 当 $0 < |\mathbf{b}| < 1$ 时, 该定理成立. 证毕.

例子3.1 设 $|\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$, 取单位实向量 $\mathbf{n}_i = (r_i, s_i, t_i)^T (i = 0, 1)$ 使得 $\mathbf{n}_0 \neq \pm \mathbf{n}_1$, 则 $\sigma^{AB} = |\varphi\rangle\langle\varphi|$ 关于 POVM 测量组合 $\mathcal{M}(\mathbf{n}_0, \mathbf{n}_1)$ 是从 A 到 B 可导引的.

证明 因为

$$\sigma^{AB} = |\varphi\rangle\langle\varphi| = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

所以 σ^{AB} 可表示为

$$\sigma^{AB} = \frac{1}{4} \left(I_4 + \mathbf{a} \cdot \sigma \otimes \mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{b} \cdot \sigma + \sum_{j=1}^3 c_j \sigma_j \otimes \sigma_j \right),$$

其中 $\mathbf{a} = (0, 0, 0)^T$, $\mathbf{b} = (0, 0, 0)^T$, 且

$$\mathbf{C} = \text{diag}(c_1, c_2, c_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

所以 $|\mathbf{b}| = 0$. 将 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{C}$ 代入式(21)中可得

$$x_i = \mathbf{a}^T \mathbf{n}_i = 0, \quad \mathbf{g}_i = \mathbf{C} \mathbf{n}_i = (r_i, -s_i, t_i)^T (i = 0, 1).$$

由于 $\mathbf{n}_0 \neq \pm \mathbf{n}_1$, 所以 $\mathbf{g}_0 \neq \pm \mathbf{g}_1$, 从而

$$|\mathbf{g}_0|^2 + |\mathbf{g}_1|^2 = 2 > 1 + (\mathbf{g}_0 \cdot \mathbf{g}_1)^2.$$

因此, 由定理3.2(1)可知 $\sigma^{AB} = |\varphi\rangle\langle\varphi|$ 关于 POVM 测量组合 $\mathcal{M}(\mathbf{n}_0, \mathbf{n}_1)$ 是从 A 到 B 可导引的. 证毕.

4 结论

本文提出了任意多个正算子值测度(POVM)构成的 POVM 测量组合 $\mathcal{M}_S$ 的联合可测性概念, 证明了 $\mathcal{M}_S$ 是联合可测的当且仅当它是相容的当且仅当由它生成的“行随机算子矩阵”可以表示成一些 $\{0, I_S\}$ ——行随机算子矩阵的“算子凸组合”. 还得到了与 1 秩投影测量联合可测的 POVM 的一般形式. 作为应用, 得到了两比特量子态关于 POVM 测量组合 $\mathcal{M}(\mathbf{n}_0, \mathbf{n}_1)$ 不可导引的充要条件.

参考文献

- 1 Schrödinger E. Discussion of probability relations between separated systems. *Math Proc Camb Phil Soc*, 1935, 31: 555–563

- 2 Einstein A, Podolsky B, Rosen N. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Phys Rev*, 1935, 47: 777–780
- 3 Reid M D. Demonstration of the Einstein-Podolsky-Rosen paradox using nondegenerate parametric amplification. *Phys Rev A*, 1989, 40: 913–923
- 4 Werner R F. Quantum states with Einstein-Podolsky-Rosen correlations admitting a hidden-variable model. *Phys Rev A*, 1989, 40: 4277–4281
- 5 Ou Z Y, Pereira S F, Kimble H J, et al. Realization of the Einstein-Podolsky-Rosen paradox for continuous variables. *Phys Rev Lett*, 1992, 68: 3663–3666
- 6 Wiseman H M, Jones S J, Doherty A C. Steering, entanglement, nonlocality, and the Einstein-Podolsky-Rosen paradox. *Phys Rev Lett*, 2007, 98: 140402
- 7 Jones S J, Wiseman H M, Doherty A C. Entanglement, Einstein-Podolsky-Rosen correlations, Bell nonlocality, and steering. *Phys Rev A*, 2007, 76: 052116
- 8 Cavalcanti E G, He Q Y, Reid M D, et al. Unified criteria for multipartite quantum nonlocality. *Phys Rev A*, 2011, 84: 032115
- 9 Branciard C, Cavalcanti E G, Walborn S P, et al. One-sided device-independent quantum key distribution: Security, feasibility, and the connection with steering. *Phys Rev A*, 2012, 85: 010301
- 10 Law Y Z, Thinh L P, Bancal J D, et al. Quantum randomness extraction for various levels of characterization of the devices. *J Phys A-Math Theor*, 2014, 47: 424028
- 11 Reid M D. Signifying quantum benchmarks for qubit teleportation and secure quantum communication using Einstein-Podolsky-Rosen steering inequalities. *Phys Rev A*, 2013, 88: 062338
- 12 Piani M, Watrous J. Necessary and sufficient quantum information characterization of Einstein-Podolsky-Rosen steering. *Phys Rev Lett*, 2015, 114: 060404
- 13 Skrzypczyk P, Navascués M, Cavalcanti D. Quantifying Einstein-Podolsky-Rosen steering. *Phys Rev Lett*, 2014, 112: 180404
- 14 Chen J L, Ye X J, Wu C, et al. All-versus-nothing proof of Einstein-Podolsky-Rosen steering. *Sci Rep*, 2013, 3: 2143
- 15 Nguyen H C, Luoma K. Pure steered states of Einstein-Podolsky-Rosen steering. *Phys Rev A*, 2017, 95: 042117
- 16 Sun K, Ye X J, Xu J S, et al. Experimental quantification of asymmetric Einstein-Podolsky-Rosen steering. *Phys Rev Lett*, 2016, 116: 160404
- 17 Chen J L, Ren C, Chen C, et al. Bell's nonlocality can be detected by the violation of Einstein-Podolsky-Rosen steering inequality. *Sci Rep*, 2016, 6: 39063
- 18 Zheng C, Guo Z, Cao H. Generalized steering robustness of bipartite quantum states. *Int J Theor Phys*, 2018, 57: 1787–1801
- 19 Li Z W, Guo Z H, Cao H X. Some characterizations of EPR steering. *Int J Theor Phys*, 2018, 57: 3285–3295
- 20 Cao H X, Guo Z H. Characterizing Bell nonlocality and EPR steering. *Sci China-Phys Mech Astron*, 2019, 62: 030311
- 21 Yu S X, Liu N L, Li L, et al. Joint measurement of two unsharp observables of a qubit. *Phys Rev A*, 2010, 81: 062116
- 22 Uola R, Budroni C, Gühne O, et al. One-to-one mapping between steering and joint measurability problems. *Phys Rev Lett*, 2015, 115: 230402
- 23 Chen Z, Ye X, Fei S M. Quantum steerability based on joint measurability. *Sci Rep*, 2017, 7: 15822
- 24 Zhao M J, Ma T, Zhang T G, et al. von Neumann measurement-related matrices and the nullity condition for quantum correlation. *Sci China-Phys Mech Astron*, 2016, 59: 120313
- 25 Cybenko G. Approximation by superpositions of a sigmoidal function. *Math Control Signal Syst*, 1989, 2: 303–314
- 26 Hornik K, Stinchcombe M, White H. Multilayer feedforward networks are universal approximators. *Neural Netw*, 1989, 2: 359–366
- 27 Kolmogorov A N. On the representation of continuous functions of many variables by superposition of continuous functions of one variable and addition. *Amer Math Soc Transl*, 1963, 28: 55–59
- 28 Carleo G, Troyer M. Solving the quantum many-body problem with artificial neural networks. *Science*, 2017, 355: 602–606
- 29 Deng D L, Li X, Das Sarma S. Machine learning topological states. *Phys Rev B*, 2017, 96: 195145
- 30 Yang Y, Zhang C, Cao H. Approximating ground states by neural network quantum states. *Entropy*, 2019, 21: 82–96
- 31 Yang Y, Cao H X, Zhang Z J. Neural network representations of quantum many-body states. *Sci China-Phys Mech Astron*, 2020, 63: 210312
- 32 Gao X, Duan L M. Efficient representation of quantum many-body states with deep neural networks. *Nat Commun*, 2017, 8: 662
- 33 Xiao S, Guo Z H, Cao H X. Quantum steering in tripartite quantum systems (in Chinese). *Sci Sin-Phys Mech Astron*, 2019, 49: 010301 [肖书, 郭志华, 曹怀信. 三体量子系统中的量子导引. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2019, 49: 010301]
- 34 Gau H L, Wang K Z, Wu P Y. Numerical ranges of row stochastic matrices. *Linear Algebra its Appl*, 2016, 506: 478–505

Joint measurability of POVM measurement assemblages and applications

YU XueQing, XIAO Shu & CAO HuaiXin*

School of Mathematics and Information Science, Shaanxi Normal University, Xi'an 710119, China

The POVM measurement assemblage consisting of a set of positive operator-value measurements (POVMs) is an important tool for describing and studying the non-locality, quantum steering and quantum correlation of composite quantum systems. In this paper, we first introduce the definition of joint measurability of the POVM measurement assemblage $\mathcal{M}_S$ consisting of a finite number of POVMs and then prove that the joint measurability of $\mathcal{M}_S$ is equivalent to its compatibility. We give a general form of a POVM measurement which is jointly measurable with the one-rank projection measurement. It is proved that the POVM measurement assemblage $\mathcal{M}_S$ is jointly measurable if and only if the corresponding “row stochastic operator matrix” $\mathbf{M}_S$ composed of $\mathcal{M}_S$ can be expressed as an “operator convex combination” of $\{0, I_S\}$ —the row stochastic operator matrices. In particular, it is proved that the POVM measurement assemblage $\mathcal{M}(\mathbf{n}_0, \mathbf{n}_1)$ induced by two three-dimensional real unit vectors $\mathbf{n}_i (i = 0, 1)$ is jointly measurable if and only if $\mathbf{n}_0 = \pm \mathbf{n}_1$. As an application, we obtain a necessary and sufficient condition under which a two-qubit quantum state is unsteerable with $\mathcal{M}(\mathbf{n}_0, \mathbf{n}_1)$.

POVM measurement assemblage, compatibility, joint measurability, EPR steering

PACS: 03.67.-a, 03.65.Ud, 03.65.-w

doi: [10.1360/SSPMA-2019-0353](https://doi.org/10.1360/SSPMA-2019-0353)