平稳分枝超 Lévy 过程是一个随机偏微分方程的轨道唯一解

杨叙¹, 宗国纬^{2*}

1. 北方民族大学数学与信息科学学院, 银川 750021;

2. 天津医科大学公共卫生学院, 天津 300070

E-mail: xuyang@mail.bnu.edu.cn, gwzong@mail.bnu.edu.cn

收稿日期: 2017-02-12; 接受日期: 2018-03-08; 网络出版日期: 2018-07-19; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11771018 和 11401012) 和宁夏高等学校一流学科建设 (批准号: NXYLXK2017B09) 资助项目

摘要 本文证明平稳 (stable) 分枝超 Lévy 过程的密度在一定条件下是如下随机偏微分方程的轨道唯一解:

$$\frac{\partial}{\partial t} X_t(x) = AX_t(x) + bX_t(x) + X_{t-}(x)^{\frac{1}{\alpha}} \dot{L}_t(x), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

其中 A 是超 Lévy 过程底运动的生成元, $\alpha \in (1, 2)$ 和 $b \in \mathbb{R}$ 是常数, $\{\dot{L}_t(x) : t \geq 0, x \in \mathbb{R}\}$ 是一个无负跳的单边的 α -平稳噪声.

关键词 超 Lévy 过程 平稳 轨道唯一 随机偏微分方程

MSC (2010) 主题分类 60J68, 60H15

1 引言

Konno 和 Shiga^[1] 及 Reimers^[2] 分别独立地证明了一维的二元分枝超 Brown 运动存在连续的密度过程, 记为 $\{X_t(x) : t \geq 0, x \in \mathbb{R}\}$, 且此密度过程满足如下的随机偏微分方程 (stochastic partial differential equation, SPDE):

$$\frac{\partial}{\partial t} X_t(x) = \frac{1}{2} \Delta X_t(x) + X_t(x)^{\frac{1}{2}} \dot{W}_t(x), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1.1)$$

其中 Δ 是 Laplace 算子, $\{\dot{W}_t(x) : t \geq 0, x \in \mathbb{R}\}$ 表示一个时空 Gauss 白噪声的导数. 以上方程解的弱唯一性可以由与超 Brown 运动相关的鞅问题得到. 关于其非负解的轨道唯一性, 虽然已有很多学者进行了很多研究工作, 但是依然没有解决, 主要难点来源于扩散项系数的非 Lipschitz 性, 不过一些修改后的 SPDE 已经取得了进展. 当随机场 $\{W_t(x) : t > 0, x \in \mathbb{R}\}$ 是空间有色时间白的噪声时, Mytnik 等^[3] 给

英文引用格式: Yang X, Zong G W. Stable branching super-Lévy process as the pathwise unique solution to an SPDE (in Chinese). Sci Sin Math, 2019, 49: 699–716, doi: 10.1360/SCM-2017-0092

出了 SPDE 非负解的轨道唯一性, Rippl 和 Sturm^[4] 及 Neuman^[5] 开展了进一步的研究工作. 文献 [6] 证明了实值的超 Brown 运动的分布函数过程是另外一个 SPDE 的轨道唯一性解. 在 SPDE (1.1) 中, 当 $\{W_t(x) : t > 0, x \in \mathbb{R}\}$ 是时空 Gauss 白噪声、解可以取正取负且 $\sqrt{X_t(x)}$ 换成 $\sigma(t, x, X_t(x))$ 时, Mytnik 和 Perkins^[7] 证明了, 如果 $\sigma(\cdot, \cdot, u)$ 关于 u Hölder 连续且 Hölder 指数 $\beta_0 > 3/4$, 那么解的轨道唯一性成立. 在 (1.1) 中, 如果 $\sqrt{X_t(x)}$ 换成 $|X_t(x)|^{\beta_1}$, Burdzy 等^[8] 和 Mueller 等^[9] 分别建立了 $0 < \beta_1 < 1/2$ 和 $1/2 \leq \beta_1 < 3/4$ 时解的非唯一性.

Mytnik^[10] 将以上结果推广到了 α -平稳分枝超 Brown 运动的情形, 此时对应的 SPDE 为

$$\frac{\partial}{\partial t} X_t(x) = \frac{1}{2} \Delta X_t(x) + X_{t-}(x)^{\frac{1}{\alpha}} \dot{L}_t(x), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1.2)$$

其中 $\alpha \in (1, 2)$, $\{\dot{L}_t(x) : t \geq 0, x \in \mathbb{R}\}$ 是一个无负跳的 α -平稳噪声的导数. SPDE (1.2) 解的弱唯一性可以由对应的超 Brown 运动的鞅问题得到, 但是由于 Laplace 算子的无界性和扩散项系数的非 Lipschitz 性, 其强唯一性还没有完全解决. 文献 [11] 证明了它的分布函数过程是另一个带跳 SPDE 的轨道唯一解. 最近, Yang 和 Zhou^[12] 通过利用解在固定时间的 Hölder 性^[13] 证明了在 $1 < \alpha < \sqrt{5} - 1$ 时方程 (1.2) 的非负解具有轨道唯一性.

为了继续引言部分, 我们给出一些记号. 令 $M(\mathbb{R})$ 表示 $\mathbb{R}$ 上装备了弱收敛拓扑的 Borel 测度. $B(\mathbb{R})$ 表示 $\mathbb{R}$ 上的所有有界 Borel 函数组成的集合. $C(\mathbb{R})$ 表示 $\mathbb{R}$ 上的所有有界连续函数组成的集合, $C_0(\mathbb{R})$ 是 $C(\mathbb{R})$ 中在无穷处为零的所有函数组成的集合. 对于 $1 \leq n \leq \infty$, 令 $C^n(\mathbb{R})$ 是 $C(\mathbb{R})$ 中这样的函数组成的集合: 前 n 次导函数均属于 $C(\mathbb{R})$. $C_0^n(\mathbb{R})$ 是 $C^n(\mathbb{R})$ 中这样的函数组成的集合: 前 n 次导函数均属于 $C_0(\mathbb{R})$.

假定 $\{\xi_t : t \geq 0\}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的 Lévy 过程, 转移半群为 $\{P_t : t \geq 0\}$, 生成元 A 为对每个 $f \in C_0^2(\mathbb{R})$, 都有

$$Af(x) = \beta f'(x) + \frac{1}{2} \sigma^2 f''(x) + \int_{\mathbb{R}^0} [f(x+z) - f(x) - f'(x)z 1_{\{|z| \leq 1\}}] \nu(dz), \quad (1.3)$$

其中 $\sigma \geq 0$ 和 β 为常数, $(1 \wedge z^2)\nu(dz)$ 是 $\mathbb{R}^0 := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 上的 Borel 测度. 定义分枝机制 ϕ :

$$\phi(z) = bz + z^\alpha = bz + \int_0^\infty (e^{-zu} - 1 + zu) m_0(du), \quad z \geq 0,$$

其中 $b \in \mathbb{R}$, $\alpha \in (1, 2)$ 且

$$m_0(du) = \frac{\alpha(\alpha-1)}{\Gamma(2-\alpha)} u^{-1-\alpha} 1_{\{u>0\}} du. \quad (1.4)$$

α -平稳分枝超 Lévy 过程是指取值于 $M(\mathbb{R})$ 的左极右连的 Markov 过程, 其转移半群 $(Q_t)_{t \geq 0}$ 定义为

$$\int_{M(\mathbb{R})} e^{-\nu(f)} Q_t(\mu, d\nu) = \exp\{-\mu(v_t)\}, \quad \mu \in M(\mathbb{R}), \quad f \in B(\mathbb{R})^+, \quad (1.5)$$

其中 $(t, x) \mapsto v_t(x)$ 是以下方程的唯一非负局部有界解:

$$v_t(x) + \int_0^t P_{t-s}[\phi(v_s(\cdot))](x) ds = P_t f(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0. \quad (1.6)$$

关于超 Lévy 过程的一般理论, 读者可参见文献 [14].

本文将研究以下形式的 SPDE:

$$\frac{\partial}{\partial t} X_t(x) = AX_t(x) - bX_t(x) + X_{t-}(x)^{\frac{1}{\alpha}} \dot{L}_t(x), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1.7)$$

事实上, 此方程是一个形式上的 SPDE, 可理解为对任意的 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ($\mathbb{R}$ 上的无穷可微且急速下降的函数组成的 Schwartz 空间), 有

$$\langle X_t, f \rangle = X_0(f) + \int_0^t \langle X_s, Af - bf \rangle ds + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} X_{s-}(x)^{\frac{1}{\alpha}} f(x) L(ds, dx), \quad t \geq 0, \quad (1.8)$$

其中 $X_0 \in M(\mathbb{R})$, $L(ds, dx)$ 是一个无负跳的 α - 平稳随机测度, 它分布意义下的导数为 $\dot{L}_t(x)$. SPDE (1.8) 的弱解是指, 存在一对 (X, L) 定义在同一个带流的概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ 上且满足 (1.8).

1.1 主要结果

为了方便, 我们先给出以下条件.

条件 1.1 存在 $(0, \infty) \times \mathbb{R}$ 上的连续函数 $(t, x) \mapsto p_t(x)$ 使得对于所有的 $t > 0$ 和 $x, y \in \mathbb{R}$ 都有 $P_t(x, dy) = p_t(y - x)dy$ 且 $p_t(x) \leq C_0(t)t^{-\frac{1}{\kappa}}$ 对于所有的 $x \in \mathbb{R}$ 及 $t > 0$ 都成立.

条件 1.2 $(t, x, y) \mapsto q_t(x, y)$ 是 $(0, \infty) \times \mathbb{R}^2$ 上的 Borel 函数, κ 是由条件 1.1 确定的且满足 $\kappa > \alpha$. 对每个 $\theta \in [0, 1]$, 都存在 $(0, \infty)$ 上的局部有界非负函数 $t \mapsto C_0(t)$ 和非负可测函数 $z \mapsto C'_0(z)$ 使得对于所有的 $x, y \in \mathbb{R}$ 和 $|x'| \wedge |y'| \geq z$, 都有

$$|p_t(x) - p_t(y)| \leq C_0(t)|x - y|^{\theta} t^{-\frac{\theta}{\kappa}} q_t(x, y), \quad (1.9)$$

$$q_t(x, y) \leq C_0(t)t^{-\frac{1}{\kappa}}, \quad (1.10)$$

$$q_t(x', y') \leq C_0(t)C'_0(z), \quad (1.11)$$

$$\int_{\mathbb{R}} q_t(x - u, y - u) du \leq C_0(t, 1). \quad (1.12)$$

注 1.1 (i) 如果 $(P_t)_{t \geq 0}$ 是 $\kappa \in (\alpha, 2]$ 的对称 κ - 平稳过程的转移半群, 那么条件 1.1 和 1.2 成立且对应的 $q_t(x, y) = p_t(x/2) + p_t(y/2)$ (参见文献 [13, 引理 2.1]).

(ii) 如果 $(P_t)_{t \geq 0}$ 是一定非局部对称的类 κ - 平稳过程的转移半群 ($\kappa \in (\alpha, 2)$), 那么条件 1.1 和 1.2 也成立, 此时对应的 $q_t(x, y) = t(t^{1/\kappa} + |x| \wedge |y|)^{-1-\kappa}$ (参见文献 [15, 定理 1.1(i) 和 1.1(ii)]).

以下假定 $\{X_t : t \geq 0\}$ 是一个由 (1.5) 和 (1.6) 确定的 α - 平稳分枝超 Lévy 过程. 文献 [11, 定理 3.7] 和 [14, 定理 7.28] 证明了在条件 1.1 成立时, 对每个固定的 $t > 0$, 随机测度 $X_t(dx)$ 关于 Lebesgue 测度绝对连续. 现在给出本文的主要结果.

定理 1.1 假定条件 1.1 成立, 那么在一个扩展的概率空间上存在无负跳的 α - 平稳随机测度 L 使得 α - 平稳分枝超 Lévy 过程的密度函数过程 $\{X_t(x) : t > 0, x \in \mathbb{R}\}$ 满足方程 (1.7).

注 1.2 对于 α - 平稳分枝的超 κ - 平稳过程, 即 (1.3) 中 $b = 0$ 且 $\nu(dz) = \alpha(\alpha - 1)/\Gamma(2 - \alpha)|z|^{-1-\kappa}dz$, 文献 [10] 证明了密度函数过程是 (1.7) 的解; 进一步, 如果 $\kappa > \alpha$, 那么密度函数存在一个连续的版本并具有局部 Hölder 性 (参见文献 [13, 定理 1.2(a)]).

定理 1.2 假定条件 1.1 和 1.2 成立且

$$\kappa > \alpha(2 - \alpha)(2 - \alpha^2)^{-1}, \quad 1 < \alpha < \sqrt{2}. \quad (1.13)$$

如果 $\{X_t(x) : t > 0, x \in \mathbb{R}\}$ 和 $\{Y_t(x) : t > 0, x \in \mathbb{R}\}$ 是定义在同一个带流的概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ 上的方程 (1.7) 的两个弱解, $X_0 = Y_0 \in M(\mathbb{R})$ 并且具有同样的 Lévy 噪声 L , 那么 $P\{\text{对于 } \lambda\text{-a.e. } x \text{ 和每个 } t > 0 \text{ 都有 } X_t(x) = Y_t(x)\} = 1$.

注 1.3 (i) 如果 $\{X_t : t \geq 0\}$ 是一个 α -平稳分枝的超 κ -平稳过程, 那么由注 1.1 及定理 1.1 和 1.2 可知, 在条件 (1.13) 之下, 其密度是 (1.7) 的轨道唯一解.

(ii) 对于超 Brown 运动的情形 (即 $A = \Delta$), 定理 1.2 已经在文献 [12, 定理 1.5] 中建立.

(iii) 定理 1.2 证明的关键是定义一系列停时 $\sigma_{k,i}$ (参见 (4.2)), 从而在定理 1.2 证明的第 3 步中估计 $I_2^{m,n,i,k,j}$ 和 $I_{2,2}^{m,n,i,k,j}$. 命题 3.1 确保了当 $k \rightarrow \infty$ 时 $\sigma_{k,i} \rightarrow \infty$, 条件 (1.13) 的要求源于命题 3.1 中的 η_c 以及定理 1.2 证明的第 4 步中对于 $I_2^{m,n,i,k}$ 的估计.

证明方程 (1.7) 轨道唯一性的难点是算子 A 的无界性和扩散项系数的非 Lipschitz 性. 克服第一个困难是利用了分部积分和 Taylor 公式. 这种方法已经在文献 [16–18] 中用到. 克服第二个困难是利用了解在固定时刻的局部 Hölder 性, 这最早已在文献 [12] 中用到.

本文其余部分组织如下: 定理 1.1 的证明在第 2 节中给出; 第 3 节展示超 Lévy 过程解的一些性质; 第 4 节建立定理 1.2 的证明.

本文采用如下记号: $\int_x^y = \int_{(x,y]}$ 和 $\int_x^\infty = \int_{(x,\infty)}$, 其中 $0 \leq x \leq y$. 对于 $\mu \in M(\mathbb{R})$ 和 $f, g \in B(\mathbb{R})$, 如果积分存在, 则分别记 $\mu(f)$ 和 $\langle f, g \rangle$ 为 $\int_{\mathbb{R}} f d\mu$ 和 $\int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)dx$. 我们用 C 表示一个非负有限数, 其值可以在不同的地方不同. C_T 表示一个其值依赖 $T \geq 0$ 的常数. ∇ 和 Δ 分别表示一次和二次空间导数算子.

2 定理 1.1 的证明

定理 1.1 的证明 为了完成该证明, 我们需要在一个扩展的概率空间上构造一个无负跳的 α -平稳随机测度 L 使得这个密度过程 $\{X_t(x) : t > 0, x \in \mathbb{E}\}$ 满足 SPDE (1.8).

根据文献 [14, 定理 7.13], 在 $[0, \infty) \times M(\mathbb{R})^\circ$ 上存在可选的随机测度 $N_0(ds, d\nu)$ 使得

$$N_0(ds, d\nu) = \sum_{s>0} 1_{\{\Delta X_s \neq 0\}} \delta_{(s, \Delta X_s)}(ds, d\nu),$$

其中 $\Delta X_s = X_s - X_{s-} \in M(\mathbb{R})$, 它的可料补偿为

$$\hat{N}_0(ds, d\nu) = ds \int_{\mathbb{R}} X_{s-}(dx) \int_0^\infty m_0(dz) \delta_{z\delta_x}(d\nu),$$

进一步,

$$\langle X_t, f \rangle = X_0(f) + \int_0^t \langle X_s, Af \rangle ds - \int_0^t \langle X_s, bf \rangle ds + \int_0^t \int_{M(\mathbb{R})^\circ} \nu(f) \tilde{N}_0(ds, d\nu), \quad (2.1)$$

其中 $m_0(dz)$ 由 (1.4) 给出, $\tilde{N}_0(ds, d\nu) = N_0(ds, d\nu) - \hat{N}_0(ds, d\nu)$. 令 $\theta(t, z, x) : [0, \infty) \times (0, \infty) \times \mathbb{R} \mapsto M(\mathbb{R})^\circ$ ($M(\mathbb{R})$ 中非零测集) 是一个映射, 定义为 $\theta(t, z, x) = zX_{t-}(x)^{\frac{1}{\alpha}}\delta_x$. 对于任意的 $B \subset (0, \infty)$ 及 $a < b \in \mathbb{R}$, 设 $E := \{z\delta_x : z \in B, x \in (a, b]\} \subset M(\mathbb{R})^\circ$. 通过积分区域的调整可得

$$\int_0^t \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} 1_E(\theta(s, z, x)) dsm_0(dz) dx = \int_0^t \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} 1_B(zX_{s-}(x)^{\frac{1}{\alpha}}) 1_{(a,b]}(x) dsm_0(dz) dx$$

$$= \int_0^t \int_E \hat{N}_0(ds, d\nu).$$

因此, 根据文献 [19, 第 93 页], 在扩展的概率空间上, 存在 $(0, \infty)^2 \times \mathbb{R}$ 上的强度为 $dsm_0(dz)dx$ 的 Poisson 随机测度 $N(ds, dz, dx)$ 使得

$$N_0((0, t] \times E) = \int_0^t \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} 1_E(\theta(s, z, x)) N(ds, dz, dx).$$

依照文献 [20, 定理 1.1(a)] 的证明, 定义 α -平稳随机测度

$$L_t(a, b] = \int_0^t \int_0^\infty \int_a^b z \tilde{N}(ds, dz, dx), \quad (2.2)$$

其中 $\tilde{N}(ds, dz, dx)$ 表示 $N(ds, dz, dx)$ 的补偿. 易验证

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{M(\mathbb{R})^\circ} \nu(f) \tilde{N}_0(ds, d\nu) &= \int_0^t \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} z X_{s-}(x)^{\frac{1}{\alpha}} f(x) \tilde{N}(ds, dz, dx) \\ &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}} X_{s-}(x)^{\frac{1}{\alpha}} f(x) L(ds, dx). \end{aligned}$$

结合 (2.1) 和前面的结论, 我们可以得到想要的结果. $\square$

注 2.1 根据 (2.2), 方程 (1.8) 可以写成: 对于所有的 $t \geq 0$ 和 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, 都有

$$\langle X_t, f \rangle = X_0(f) + \int_0^t \langle X_s, Af - bf \rangle ds + \int_0^t \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} z X_{s-}(x)^{\frac{1}{\alpha}} \tilde{N}(ds, dz, dx). \quad (2.3)$$

3 定理 1.2 证明的准备工作

本节将建立一些在第 4 节中要用到的结论. 我们总是假定 $\{X_t : t \geq 0\}$ 是由 (1.5) 和 (1.6) 确定的初始分布是确定值 $X_0 \in M(\mathbb{R})$ 的 α -平稳分枝超 Lévy 过程, 用 $\{X_t(x) : t > 0, x \in \mathbb{R}\}$ 表示其密度函数过程.

3.1 一些辅助结论

以下引理已经在文献 [14, 推论 7.14] 中给出.

引理 3.1 对于每个 $T \geq 0$, 都有 $E\{\sup_{0 \leq t \leq T} X_t(1)\} \leq C[X_0(1) + 1]$.

将文献 [12, 命题 2.2] 中的热核密度和文献 [12, (2.10)] 中的 $\frac{\bar{p}}{2}$ 分别换成这里的 p_t 和 $\frac{\bar{p}}{\kappa}$ 时, 我们可以得到引理 3.2 和 3.3, 它们的证明基本与文献 [12] 中的命题 2.2 和引理 2.4 相同, 所以, 这里只给出结论, 省略证明.

引理 3.2 假定条件 1.1 成立, 于是, 对每个 $t > 0$, 都有

$$\begin{aligned} X_t(x) &= \int_{\mathbb{R}} p_t(x-z) X_0(dz) - b \int_0^t p_{t-s}(x-y) X_s(y) dy \\ &\quad + \int_0^t \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \int_0^{X_{s-}(u)} z p_{t-s}(x-u) \tilde{N}_0(ds, dz, du, dv), \quad \text{P-a.s., } \lambda\text{-a.e. } x, \end{aligned}$$

其中 $\tilde{N}_0(ds, dz, du, dv)$ 是 $(0, \infty)^2 \times \mathbb{R} \times (0, \infty)$ 上强度为 $dsm_0(dz)dudv$ 的补偿的 Poisson 随机测度, $m_0(dz)$ 由 (1.4) 给出.

引理 3.3 假定条件 1.1 和 1.2 成立, 固定 $0 < p < \alpha$ 和 $T > 0$, 那么对每个 $t \in (0, T]$, 都存在一个 Lebesgue 零测集 $K_t \subset \mathbb{R}$ 使得

$$\mathbb{E}\{X_t(x)^p\} \leq C_T t^{-\frac{p}{\kappa}}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus K_t.$$

引理 3.4 假定条件 1.1 和 1.2 成立. 固定 $T > 0$, $\delta \in (1, \alpha)$ 和 $\delta_1 \in (\alpha, 2)$, 令 $0 < r < \min\{1, \frac{\kappa+1-\delta_1}{\delta_1}\}$, 那么对每个 $0 < t \leq T$, 都有

$$\mathbb{E}\{|X_t(x_1) - X_t(x_2)|^\delta\} \leq C_T t^{-\frac{(r+1)\delta}{\kappa}} |x_1 - x_2|^{r\delta}, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus K_t,$$

其中集合 $K_t \subset \mathbb{R}$ 由引理 3.3 给出.

证明 该引理的证明是文献 [12, 引理 2.5] 证明的修改, 为了更好地说明如何用到了条件 1.2, 以下给出具体的细节. 对于任何的 $t > 0$ 和 $x \in \mathbb{R}$, 定义

$$Z_1(t, x) = \int_0^t \int_0^1 \int_{\mathbb{R}} \int_0^{X_{s-}(u)} z p_{t-s}(x-u) \tilde{N}_0(ds, dz, du, dv)$$

和

$$Z_2(t, x) = \int_0^t \int_1^\infty \int_{\mathbb{R}} \int_0^{X_{s-}(u)} z p_{t-s}(x-u) \tilde{N}_0(ds, dz, du, dv).$$

根据引理 3.2, 有

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{|X_t(x_1) - X_t(x_2)|^\delta\} &\leq C \mathbb{E}\left\{\left|\int_{\mathbb{R}} p_t(x_1 - y) X_0(dy) - \int_{\mathbb{R}} p_t(x_2 - y) X_0(dy)\right|^\delta\right. \\ &\quad \left.+ b^\delta \left|\int_{\mathbb{R}} p_{t-s}(x_1 - y) X_s(y) dy - \int_{\mathbb{R}} p_{t-s}(x_2 - y) X_s(y) dy\right|^\delta\right. \\ &\quad \left.+ |Z_1(t, x_1) - Z_1(t, x_2)|^\delta + |Z_2(t, x_1) - Z_2(t, x_2)|^\delta\right\}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

首先, 鉴于条件 1.2 中的 (1.9) 和 (1.10), 可以看出

$$\begin{aligned} &\left|\int_{\mathbb{R}} p_t(x_1 - y) X_0(dy) - \int_{\mathbb{R}} p_t(x_2 - y) X_0(dy)\right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |p_t(x_1 - y) - p_t(x_2 - y)| X_0(dy) \\ &\leq C |x_1 - x_2|^r t^{-\frac{r}{\kappa}} \int_{\mathbb{R}} q_t(x_1 - y, x_2 - y) X_0(dy) \\ &\leq C_T |x_1 - x_2|^r t^{-\frac{r+1}{\kappa}} X_0(1), \end{aligned}$$

这确保了

$$\mathbb{E}\left\{\left|\int_{\mathbb{R}} p_t(x_1 - y) X_0(dy) - \int_{\mathbb{R}} p_t(x_2 - y) X_0(dy)\right|^\delta\right\} \leq C_T t^{-\frac{(r+1)\delta}{\kappa}} |x_1 - x_2|^{r\delta}.$$

其次, 由引理 3.3 知, 存在 Lebesgue 零测集 $K_t \subset \mathbb{R}$ 使得对于所有的 $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus K_t$ 都有

$$\mathbb{E}\left\{\left|\int_{\mathbb{R}} p_{t-s}(x_1 - y) X_s(y) dy - \int_{\mathbb{R}} p_{t-s}(x_2 - y) X_s(y) dy\right|^\delta\right\}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} |p_{t-s}(x_1 - y) - p_{t-s}(x_2 - y)| E\{X_s(y)^\delta\} dy \\
&\leq C_T |x_1 - x_2|^r \int_0^t (t-s)^{-\frac{r}{\kappa}} s^{-\frac{\delta}{\kappa}} ds \int_{\mathbb{R}} q_{t-s}(x_1 - y, x_2 - y) dy \\
&\leq C_T |x_1 - x_2|^r \int_0^t (t-s)^{-\frac{r}{\kappa}} s^{-\frac{\delta}{\kappa}} ds,
\end{aligned}$$

其中, 最后两个不等式用到了条件 1.2 中的 (1.9) 和 (1.11). 最后, 根据文献 [21] 中的 (1.6) 和引理 3.3 知, 对所有的 $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus K_t$, 都有

$$\begin{aligned}
&E\{|Z_1(t, x_1) - Z_1(t, x_2)|^{\delta_1}\} \\
&\leq C \int_0^1 z^{\delta_1} m_0(dz) \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} E\{X_{s-}(u)\} |p_{t-s}(x_1 - u) - p_{t-s}(x_2 - u)|^{\delta_1} du \\
&\leq C_T \int_0^1 z^{\delta_1} m_0(dz) \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} s^{-\frac{1}{\kappa}} |p_{t-s}(x_1 - u) - p_{t-s}(x_2 - u)|^{\delta_1} du \\
&\leq C_T |x_1 - x_2|^{r\delta_1} \int_0^1 z^{\delta_1} m_0(dz) \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} s^{-\frac{1}{\kappa}} (t-s)^{-\frac{r\delta_1}{\kappa}} |q_{t-s}(x_1 - u, x_2 - u)|^{\delta_1} du \\
&\leq C_T |x_1 - x_2|^{r\delta_1} \int_0^1 z^{\delta_1} m_0(dz) \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} s^{-\frac{1}{\kappa}} (t-s)^{-\frac{r\delta_1+\delta_1-1}{\kappa}} |q_{t-s}(x_1 - u, x_2 - u)| du \\
&\leq C_T |x_1 - x_2|^{r\delta_1} \int_0^t s^{-\frac{1}{\kappa}} (t-s)^{-\frac{r\delta_1+\delta_1-1}{\kappa}} ds,
\end{aligned} \tag{3.2}$$

其中最后三个不等式分别用到了条件 1.2 中的 (1.9)、(1.10) 和 (1.12). 因为 $\delta_1 > \delta$, 所以, 由 Hölder 不等式知,

$$E\{|Z_1(t, x_1) - Z_1(t, x_2)|^\delta\} \leq \{E[|Z_1(t, x_1) - Z_1(t, x_2)|^{\delta_1}]\}^{\frac{\delta}{\delta_1}}. \tag{3.3}$$

类似于 (3.2), 可以看到

$$E\{|Z_2(t, x_1) - Z_2(t, x_2)|^\delta\} \leq C_T |x_1 - x_2|^{r\delta} \int_0^t s^{-1/\kappa} (t-s)^{-\frac{r\delta+\delta-1}{\kappa}} ds.$$

鉴于 (3.3) 及其前面的不等式, 我们可以立即得到

$$E\{|Z_1(t, x_1) - Z_1(t, x_2)|^\delta + |Z_2(t, x_1) - Z_2(t, x_2)|^\delta\} \leq C_T t^{-\frac{(r+1)\delta}{\kappa}} |x_1 - x_2|^{r\delta}.$$

回到 (3.1), 我们因此可以立即得到该引理的论断. $\square$

3.2 Hölder 连续性

以下命题将在定理 1.2 的证明中用到, 具体地, 该命题在定理 1.2 的证明的第 3 步中用来估计 $I_2^{m,n,i,k}(t)$, 并用来确保由 (4.2) 定义的停时 $\sigma_{k,i}$ 在 $k \rightarrow \infty$ 时趋于无穷 (参见 (4.3)). 读者也可以参见定理 1.2 证明的第 5 步.

命题 3.1 假定条件 1.1 和 1.2 成立. 于是, 对每个 $t > 0$, 密度 $X_t(x)$ 都有一个连续的修正 $\tilde{X}_t(x)$ (即 $\tilde{X}_t(x)$ 关于 x 连续且 $P\{\text{对于所有的 } x \in \mathbb{R} \text{ 都有 } \tilde{X}_t(x) = X_t(x)\} = 1$). 同时, 对每个 $\eta < \eta_c = \frac{\kappa}{\alpha} - 1$, 以概率 1, $\tilde{X}_t(x)$ 是指数为 η 的局部 Hölder 连续的, 即对任意的紧集 $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}$, 都有

$$\sup_{x, z \in \mathbb{K}, x \neq z} \frac{|\tilde{X}_t(x) - \tilde{X}_t(z)|}{|x - z|^\eta} < \infty, \quad \text{P-a.s.},$$

并且, 对每个 $T > 0$ 及 $\{n : n \geq 1\}$ 的子列 $\{n' : n' \geq 1\}$, 都有

$$\liminf_{n' \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{n'}} \sum_{k=1}^{2^{n'}} \sup_{x, z \in \mathbb{K}, x \neq z} \frac{|\tilde{X}_{n'kT}(x) - \tilde{X}_{n'kT}(z)|}{|x - z|^\eta} < \infty, \quad \text{P-a.s.} \quad (3.4)$$

对于超 Brown 运动的情形 ($A = \Delta$), 以上命题已经在文献 [12, 定理 1.2] 中给出 ($\kappa = 2$), 并且前两个结论已经在文献 [13, 定理 1.2] 中建立.

为了建立该命题的证明, 我们需要一些引理. 对任何 $t > 0$ 和 $x \in \mathbb{R}$, 令

$$Z_t(x) := \int_0^t \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \int_0^{X_{s-}(u)} z p_{t-s}(x - u) \tilde{N}_0(ds, dz, du, dv).$$

利用引理 3.4 和 3.3, 将文献 [12, 引理 3.1 和 3.2] 证明中的热核换成这里的 p_t , 我们也可以类似地得到如下两个引理.

引理 3.5 命题 3.1 中的结论对于 η_c 换成 $\eta'_c = \eta_c 1_{\{\alpha \geq (\kappa+1)/\kappa\}} + (\kappa - 1 - \alpha)/\alpha 1_{\{\alpha < (\kappa+1)/\kappa\}}$ 也是成立的.

引理 3.6 对于任意固定的 $t > 0$, 令 $\tilde{X}_t$ 是 X_t 的一个连续修正, 那么对于 $\mathbb{R}$ 上的任意紧集 $\mathbb{K}$ 和 $\delta \in [1, \alpha)$, 都有

$$\sup_{t \in (0, T]} t^{\frac{\delta}{\kappa}} \mathbb{E} \left\{ \sup_{x \in \mathbb{K}} \tilde{X}_t(x)^\delta \right\} < \infty. \quad (3.5)$$

引理 3.7 设 $\delta, \delta' \in [1, \kappa + 1)$, $r, r' \in [0, 1]$ 使得 $r < \frac{\kappa+1-\delta}{\delta}$ 且 $\frac{r'\delta'+\delta'}{\kappa} < 1$, $\mathbb{K}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的非负紧集. 定义

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{V}}_n &= \int_0^1 \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{2^n} 1_{(n_{k-1}, n_k]}(s) \sum_{i=k}^{2^n} (n_i - s)^{-\frac{r\delta+\delta-1}{\kappa}} \bar{\mathcal{V}}_{n,i}(s) ds, \\ \bar{\mathcal{U}}_n &= \sup_{1 \leq i \leq 2^n} \int_0^{n_i} (n_i - s)^{-\frac{r'\delta'+\delta'-1}{\kappa}} \bar{\mathcal{V}}_{n,i}(s) ds, \end{aligned}$$

其中

$$\bar{\mathcal{V}}_{n,i}(s) := \sup_{x_1, x_2 \in \mathbb{K}} \int_{\mathbb{R}} X_s(u) q_{n_i-s}(x_1 - u, x_2 - u) du.$$

那么, 对于任意的 $\varepsilon > 0$ 都存在一个常数 $C_\varepsilon > 0$ 使得

$$\sup_{n \geq 1} \mathbb{P}[\bar{\mathcal{V}}_n \geq C_\varepsilon] \leq \varepsilon, \quad \sup_{n \geq 1} \mathbb{P}[\bar{\mathcal{U}}_n \geq C_\varepsilon] \leq \varepsilon. \quad (3.6)$$

同时, 对每个 $x_1, x_2 \in \mathbb{K}$ 和 $n \geq 1$, 都有

$$\int_0^1 ds \int_{\mathbb{R}} X_s(u) \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{2^n} 1_{(n_{k-1}, n_k]}(s) \sum_{i=k}^{2^n} |p_{n_i-s}(x_1 - u) - p_{n_i-s}(x_2 - u)|^\delta du \leq C \bar{\mathcal{V}}_n |x_1 - x_2|^{r\delta}, \quad (3.7)$$

且对每个 $1 \leq i \leq 2^n$, 有

$$\int_0^{n_i} ds \int_{\mathbb{R}} X_s(u) |p_{n_i-s}(x_1 - u) - p_{n_i-s}(x_2 - u)|^{\delta'} du \leq C \bar{\mathcal{U}}_n |x_1 - x_2|^{r'\delta'}. \quad (3.8)$$

证明 该引理的证明与文献 [12, 引理 2.8] 的证明类似, 为了更好地说明如何用到了条件 1.2, 以下给出具体的细节. 为了简便, 假定 $\mathbb{K} \subset [0, 1]$. 对于每个 $s \geq 0$, 都有

$$\begin{aligned}\bar{V}_{n,i}(s) &\leq \sup_{x_1, x_2 \in [0, 1]} \int_{\{|u| \geq 2\}} \tilde{X}_s(u) q_{n_i-s}(x_1 - u, x_2 - u) du \\ &\quad + \sup_{x_1, x_2 \in [0, 1]} \int_{\{|u| \leq 2\}} \tilde{X}_s(u) q_{n_i-s}(x_1 - u, x_2 - u) du \\ &\leq C \langle \tilde{X}_s, 1 \rangle + C \sup_{|x| \leq 2} \tilde{X}_s(x) \sup_{x_1, x_2 \in [0, 1]} \int_{\mathbb{R}} q_{n_i-s}(x_1 - u, x_2 - u) du \\ &\leq C \langle \tilde{X}_s, 1 \rangle + C \sup_{|u| \leq 2} \tilde{X}_s(u),\end{aligned}$$

其中最后两个不等式分别由条件 1.2 中的 (1.11) 和 (1.12) 得到. 于是, 根据引理 3.6 和 3.1, 有

$$E\{\bar{V}_{n,i}\} \leq C[1 + s^{-1/\kappa}].$$

因此,

$$\begin{aligned}\sup_{n \geq 1} E\{\bar{V}_n\} &\leq \sup_{n \geq 1} C \int_0^1 \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{2^n} 1_{(n_{k-1}, n_k]}(s) \sum_{i=k}^{2^n} (n_i - s)^{-\frac{r\delta+\delta-1}{\kappa}} [1 + s^{-\frac{1}{\kappa}}] ds \\ &= \sup_{n \geq 1} \frac{C}{2^n} \sum_{k=1}^{2^n} \sum_{i=k}^{2^n} \int_{n_{k-1}}^{n_k} (n_i - s)^{-\frac{r\delta+\delta-1}{\kappa}} [1 + s^{-\frac{1}{\kappa}}] ds \\ &= \sup_{n \geq 1} \frac{C}{2^n} \sum_{i=1}^{2^n} \int_0^{n_i} (n_i - s)^{-\frac{r\delta+\delta-1}{\kappa}} [1 + s^{-\frac{1}{\kappa}}] ds < \infty.\end{aligned}$$

于是, (3.6) 的第一个不等式可由 Markov 不等式得到, (3.7) 和 (3.8) 容易由 (1.9) 给出.

现在考虑 (3.6) 中的第二个论断, 根据条件 1.2 中的 (1.10), 有

$$(n_i - s)^{-\frac{r'\delta'+\delta'-1}{\kappa}} \bar{V}_{n,i}(s) \leq C(n_i - s)^{-\frac{r'\delta'+\delta'}{\kappa}} \langle X_s, 1 \rangle,$$

所以,

$$\begin{aligned}E\{\bar{U}_n\} &\leq C \sup_{1 \leq i \leq 2^n} \int_0^1 (n_i - s)^{-\frac{r'\delta'+\delta'}{\kappa}} E\{\langle X_s, 1 \rangle\} ds \\ &\leq C \sup_{0 \leq s \leq 1} E\{\langle X_s, 1 \rangle\} \int_0^1 (1 - s)^{-\frac{r'\delta'+\delta'}{\kappa}} ds < \infty.\end{aligned}$$

因此, 由 Chebyshev 不等式可得到 (3.6) 的第二个论断. $\square$

命题 3.1 的证明 该证明类似于文献 [12, 定理 1.2] 的证明, 用 p_t 代替文献 [12] 中的热核, 用引理 3.2 和 3.7 代替文献 [12] 中的引理 3.3, 可以完成证明. $\square$

4 定理 1.2 的证明

本节建立 SPDE (1.7) 的轨道唯一性, 证明的方法是一个 Yamada-Watanabe 方法的无穷维版本, 读者可参见文献 [16, 17] 以及早期的文献 [22]. 在定理的证明中我们将需要以下两个引理, 参见文献 [17, 引理 4.4 和 4.5].

引理 4.1 对每个 $h \in C^2(\mathbb{R})$ 和 $g, g' \in C_0^2(\mathbb{R})$, 都有

$$\int_{\mathbb{R}} h(x)g'(x)dx = - \int_{\mathbb{R}} h'(x)g(x)dx, \quad \int_{\mathbb{R}} h(x)g''(x)dx = \int_{\mathbb{R}} h''(x)g(x)dx.$$

令 $\Phi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ 使得 $0 \leq \Phi(x) \leq 1$, $\text{supp}(\Phi) \subset (-1, 1)$ 且 $\int_{\mathbb{R}} \Phi(x)dx = 1$. 对于 $m \geq 1$ 和 $x, y \in \mathbb{R}$, 定义 $\Phi_x^m(y) = \Phi_m(x, y) = m\Phi(m(x - y))$.

引理 4.2 如果 $h \in B(\mathbb{R})$ 有至多可数多个跳, 那么对于 λ -a.e. 的 x , 有

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \langle h, \Phi_x^m \rangle = h(x).$$

定理 1.2 的证明 通过考虑条件概率, 我们可以假定初始分布是确定的, 证明分以下 5 步给出.

第 1 步 定义 $U_t(x) = X_t(x) - Y_t(x)$ 和 $V_t(x) = X_t(x)^{\frac{1}{\alpha}} - Y_t(x)^{\frac{1}{\alpha}}$. 于是, 根据 (2.3) 可知,

$$\langle U_t, \Phi_x^m \rangle = \int_0^t \langle U_s, A\Phi_x^m - b\Phi_x^m \rangle ds + \int_0^t \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} zV_t(y)\Phi_x^m(y)\tilde{N}(ds, dz, dy). \quad (4.1)$$

对于 $n \geq 1$, 令 $a_n := \exp\{-n(n+1)/2\}$. 对于 $n \geq 1$ 及 $x \in \mathbb{R}$, 令

$$\phi_n(x) := \int_0^{|x|} dy \int_0^y \psi_n(z)dz,$$

其中 $0 \leq \psi_n(x) \in C_0^2(\mathbb{R})$ 的支撑为 (a_n, a_{n-1}) , $\int_{a_n}^{a_{n-1}} \psi_n(x)dx = 1$, 并且对于每个 $x > 0$ 和 $n \geq 1$, 都有 $0 \leq \psi_n(x) \leq 2/(nx)$. 容易验证 $\|\phi'_n\| \leq 1$, $\phi_n(x) \rightarrow |x|$ 且对于 $x \neq 0$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\phi'_n(x) \rightarrow x/|x|$. 定义 $D_n(y, z) = \phi_n(y+z) - \phi_n(y) - z\phi'_n(y)$ 及

$$\gamma_k = \inf\{t \geq 0 : \langle X_t, 1 \rangle + \langle Y_t, 1 \rangle > k\}.$$

引理 3.1 蕴含着 $\lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_k = \infty$, P-a.s. 对于每个满足 $0 \leq i \leq 2^{l'}$ 的 $l', i \geq 1$, 令 $l'_i := i/2^{l'}$. 对于非负可测函数 f 及 $t > 0$, 令

$$\int_{(0,t]} f(s)ds := \liminf_{l' \rightarrow \infty} \int_0^t \sum_{i=1}^{2^{l'}} 1_{(l'_{i-1}T, l'_iT]}(s) f(l'_iT)ds$$

和

$$\int_{(0,t)} f(s)ds := \lim_{t' \uparrow t} \int_{(0,t']} f(s)ds.$$

于是, $\bar{\int}_{(0,t]} f(s)ds \leq \bar{\int}_{(0,T]} f(s)ds$. 对于 $0 < \eta < \eta_c$, 令

$$\sigma_{k,i} := \inf \left\{ t \in (0, T] : \int_{(0,t]} \sup_{x, z \in [-(i+3), i+3] \cap \mathbb{Q}, x \neq z} \frac{|X_s(x) - X_s(z)| \vee |Y_s(x) - Y_s(z)|}{|x - z|^\eta} ds > k \right\}. \quad (4.2)$$

由命题 3.1 可知,

$$\int_{(0,t]} \sup_{x, z \in [-(i+3), i+3] \cap \mathbb{Q}, x \neq z} \frac{|X_s(x) - X_s(z)| \vee |Y_s(x) - Y_s(z)|}{|x - z|^\eta} ds < \infty, \quad \text{P-a.s.},$$

这蕴含着

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_{k,i} = \infty, \quad \text{P-a.s.} \quad (4.3)$$

令 $\tau_{k,i} := \min\{\gamma_k, \sigma_{k,i}\}$. 易证 γ_k 、 $\sigma_{k,i}$ 和 $\tau_{k,i}$ 都是停时且 $\lim_{k \rightarrow \infty} \tau_{k,i} = \infty$, P-a.s. 利用 (4.1) 和 Itô 公式可得到

$$\begin{aligned} \phi_n(\langle U_{t \wedge \tau_{k,i}}, \Phi_x^m \rangle) &= \int_0^{t \wedge \tau_{k,i}} ds \int_0^\infty m_0(dz) \int_{\mathbb{R}} D_n(\langle U_s, \Phi_x^m \rangle, zV_s(y)\Phi_x^m(y))dy \\ &\quad + \int_0^{t \wedge \tau_{k,i}} \phi'_n(\langle U_s, \Phi_x^m \rangle) \langle U_s, A\Phi_x^m - b\Phi_x^m \rangle ds + \text{鞅}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

定义 $J(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-|y|} \rho_0(x-y)dy$, 其中 $\rho_0(x) = \tilde{C} \exp\{-\frac{1}{(1-x^2)}\} 1_{\{|x|<1\}}$, $\tilde{C} > 0$ 是使得 $\int_{\mathbb{R}} \rho_0(x)dx = 1$ 的常数. 于是存在常数 $C'_n, C''_n \geq 0$ 使得对每个 $n \geq 0$ 都有 $C'_n e^{-|x|} \leq J^{(n)}(x) \leq C''_n e^{-|x|}$. 对 $i \geq 0$, 定义 $J_i(x) = J(x)g_i(x)$, 其中 $g_i \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ 满足 $g_i: \mathbb{R} \mapsto [0, 1]$,

$$[-i, i] \subset \{x: g_i(x) = 1\}, \quad \{x: |x| > i+1\} \subset \{x: g_i(x) = 0\}, \quad \sup_{i \geq 1} \{\|g'_i\| + \|g''_i\|\} < \infty.$$

于是, $J_i \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ 且对每个 $x \in \mathbb{R}$ 都有 $\lim_{i \rightarrow \infty} J_i(x) = J(x)$. 进一步有

$$\sup_{i \geq 1} \{|J_i(x)| + |J'_i(x)| + |J''_i(x)|\} \leq C J(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (4.5)$$

鉴于 (4.4), 我们有

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left\{ \int_{\mathbb{R}} \phi_n(\langle U_{t \wedge \tau_{k,i}}, \Phi_x^m \rangle) J_i(x) dx \right\} \\ &= \mathbb{E} \left\{ \int_0^{t \wedge \tau_{k,i}} ds \int_{\mathbb{R}} \phi'_n(\langle U_s, \Phi_x^m \rangle) \langle U_s, A\Phi_x^m - b\Phi_x^m \rangle J_i(x) dx \right\} \\ &\quad + \mathbb{E} \left\{ \int_0^{t \wedge \tau_{k,i}} ds \int_{\mathbb{R}} J_i(x) dx \int_0^\infty m_0(dz) \int_{\mathbb{R}} D_n(\langle U_s, \Phi_x^m \rangle, zV_s(y)\Phi_x^m(y))dy \right\} \\ &=: I_1^{m,n,i,k}(t) + I_2^{m,n,i,k}(t). \end{aligned} \quad (4.6)$$

第 2 步 估计 $I_1^{m,n,i,k}(t)$. 对于每个 $t \geq 0$, 用 $\tilde{X}_t(x)$ 和 $\tilde{Y}_t(x)$ 分别表示 $X_t(x)$ 和 $Y_t(x)$ 的连续版本. 定义 $\tilde{U}_t(x) = \tilde{X}_t(x) - \tilde{Y}_t(x)$. 令 $U_t^m(x) = \langle U_t, \Phi_x^m \rangle$, $\tilde{U}_t^m(x) = \langle \tilde{U}_t, \Phi_x^m \rangle$. 根据 (1.3), 可得

$$\begin{aligned} I_1^{m,n,i,k}(t) &= -b \mathbb{E} \left\{ \int_0^{t \wedge \tau_{k,i}} ds \int_{\mathbb{R}} \phi'_n(U_s^m(x)) \langle U_s, \Phi_x^m \rangle J_i(x) dx \right\} \\ &\quad + \beta \mathbb{E} \left\{ \int_0^{t \wedge \tau_{k,i}} ds \int_{\mathbb{R}} \phi'_n(U_s^m(x)) \langle U_s, \nabla \cdot \Phi_x^m \rangle J_i(x) dx \right\} \\ &\quad + \frac{\sigma^2}{2} \mathbb{E} \left\{ \int_0^{t \wedge \tau_{k,i}} ds \int_{\mathbb{R}} \phi'_n(U_s^m(x)) \langle U_s, \Delta \cdot \Phi_x^m \rangle J_i(x) dx \right\} \\ &\quad + \mathbb{E} \left\{ \int_0^{t \wedge \tau_{k,i}} ds \int_{\mathbb{R}} J_i(x) dx \int_{\mathbb{R}} \phi'_n(U_s^m(x)) [U_s^m(x-z) - U_s^m(x) \right. \\ &\quad \left. - z \langle U_s, \nabla \cdot \Phi_x^m \rangle 1_{\{0 < |z| < 1\}}] \nu(dz) \right\} \\ &=: -b I_{1,1}^{m,n,i,k}(t) + \beta I_{1,2}^{m,n,i,k}(t) + \frac{\sigma^2}{2} I_{1,3}^{m,n,i,k}(t) + I_{1,4}^{m,n,i,k}(t). \end{aligned}$$

注意到对于所有的 $u \in \mathbb{R}$ 和 $i, n \geq 1$, 都有 $|\phi'_n(u)| \leq 1$ 和 $0 \leq J_i(u) \leq J(u)$. 于是,

$$|I_{1,1}^{m,n,i,k}(t)| \leq \mathbb{E} \left\{ \int_0^{t \wedge \tau_{k,i}} ds \int_{\mathbb{R}} |\langle U_s, \Phi_x^m \rangle| J(x) dx \right\}.$$

因为 $\langle U_s, \nabla \cdot \Phi_x^m \rangle = -\nabla_x(U_s^m(x))$, 所以可以验证

$$\phi'_n(U_s^m(x))\langle U_s, \nabla \cdot \Phi_x^m \rangle = -\nabla_x(\phi_n(U_s^m(x))), \quad (4.7)$$

结合此式及引理 4.1 可得到

$$\begin{aligned} |I_{1,2}^{m,n,i,k}(t)| &= \left| \mathbb{E} \left\{ \int_0^{t \wedge \tau_{k,i}} ds \int_{\mathbb{R}} \nabla_x(\phi_n(U_s^m(x))) J_i(x) dx \right\} \right| \\ &= \left| \mathbb{E} \left\{ \int_0^{t \wedge \tau_{k,i}} ds \int_{\mathbb{R}} \phi_n(U_s^m(x)) J'_i(x) dx \right\} \right| \\ &\leq C \mathbb{E} \left\{ \int_0^{t \wedge \tau_{k,i}} ds \int_{\mathbb{R}} |U_s^m(x)| J(x) dx \right\}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

这里的最后一个不等式用到了 (4.5) 及 $\phi_n(z) \leq |z|$. 注意到

$$\begin{aligned} \phi'_n(U_s^m(x))\langle U_s, \Delta \cdot \Phi_x^m \rangle &= \phi'_n(U_s^m(x))\Delta_x(U_s^m(x)) = \Delta_x(\phi_n(U_s^m(x))) - \phi''_n(U_s^m(x))[\nabla_x(U_s^m(x))]^2 \\ &\leq \Delta_x(\phi_n(U_s^m(x))), \end{aligned}$$

其中最后一个不等式是根据 $\phi''_n(x) = \psi_n(|x|) \geq 0$ 给出的. 于是利用引理 4.1、(4.5) 和 $\phi_n(z) \leq |z|$, 可以得到

$$\begin{aligned} I_{1,3}^{m,n,i,k}(t) &\leq \mathbb{E} \left\{ \int_0^{t \wedge \tau_{k,i}} ds \int_{\mathbb{R}} \Delta_x(\phi_n(U_s^m(x))) J_i(x) dx \right\} \\ &= \mathbb{E} \left\{ \int_0^{t \wedge \tau_{k,i}} ds \int_{\mathbb{R}} \phi_n(U_s^m(x)) J''_i(x) dx \right\} \\ &\leq C \mathbb{E} \left\{ \int_0^{t \wedge \tau_{k,i}} ds \int_{\mathbb{R}} |U_s^m(x)| J(x) dx \right\}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

鉴于 (4.7)、引理 4.1 和 Taylor 公式, 我们有

$$\begin{aligned} &\phi'_n(U_s^m(x)) [U_s^m(x-z) - U_s^m(x) - z\langle U_s, \nabla \cdot \Phi_x^m \rangle] \\ &= \phi'_n(U_s^m(x)) [U_s^m(x-z) - U_s^m(x)] + z\nabla_x(\phi_n(U_s^m(x))) \\ &= [\phi_n(U_s^m(x-z)) - \phi_n(U_s^m(x)) + z\nabla_x(\phi_n(U_s^m(x)))] \\ &\quad - [\phi_n(U_s^m(x-z)) - \phi_n(U_s^m(x)) - \phi'_n(U_s^m(x))(U_s^m(x-z) - U_s^m(x))] \\ &= z^2 \int_0^1 (1-h) \Delta_x(\phi_n(U_s^m(x-zh))) dh \\ &\quad - [U_s^m(x-z) - U_s^m(x)]^2 \int_0^1 (1-h) \phi''_n(U_s^m(x) + h(U_s^m(x-z) - U_s^m(x))) dh \\ &\leq z^2 \int_0^1 (1-h) \Delta_x(\phi_n(U_s^m(x-zh))) dh, \end{aligned}$$

其中在最后一个不等式用到了这样的事实: $\phi''_n(u) \geq 0$ 对于所有的 $u \in \mathbb{R}$. 因此, 对于 $|z| \leq 1$, 有

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}} \phi'_n(\langle U_s, \Phi_x^m \rangle) [U_s^m(x-z) - U_s^m(x) - z\langle U_s, \nabla \cdot \Phi_x^m \rangle] J_i(x) dx \\ &\leq z^2 \int_0^1 (1-h) dh \int_{\mathbb{R}} J_i(x) \Delta_x(\phi_n(U_s^m(x-zh))) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= z^2 \int_0^1 (1-h) dh \int_{\mathbb{R}} \phi_n(U_s^m(x-zh)) J_i''(x) dx \leq C z^2 \int_0^1 dh \int_{\mathbb{R}} |U_s^m(x-zh)| J(x) dx \\
&\leq C z^2 \int_0^1 dh \int_{\mathbb{R}} |U_s^m(x)| J(x+zh) dx \leq C z^2 \int_{\mathbb{R}} |U_s^m(x)| J(x) dx,
\end{aligned}$$

这里最后一个不等式用到了 $J(x+zh) \leq C e^{-|x+zh|} \leq C e e^{-|x|} \leq C J(x)$. 注意到 $\|\phi'_n\| \leq 1$. 因此, 可以得到

$$\begin{aligned}
I_{1,4}^{m,n,i,k}(t) &\leq C E \left\{ \int_0^{t \wedge \tau_{k,i}} ds \int_{\{|z| \geq 1\}} \nu(dz) \int_{\mathbb{R}} (|U_s^m(x-z)| + |U_s^m(x)|) J(x) dx \right\} \\
&\quad + C E \left\{ \int_0^{t \wedge \tilde{\tau}_k} ds \int_{\{0 < |z| \leq 1\}} z^2 \nu(dz) \int_{\mathbb{R}} |U_s^m(x)| J(x) dx \right\} \\
&= C E \left\{ \int_0^{t \wedge \tau_{k,i}} ds \int_{\mathbb{R}} |U_s^m(x)| \tilde{J}_1(x) dx \right\}, \tag{4.10}
\end{aligned}$$

其中

$$\tilde{J}_1(x) := J(x) + \int_{|z| \geq 1} J(x+z) \nu(dz).$$

根据 (4.8)–(4.10), 有

$$I_1^{m,n,i,k}(t) \leq C E \left\{ \int_0^{t \wedge \tau_{k,i}} ds \int_{\mathbb{R}} |U_s^m(x)| \tilde{J}_1(x) dx \right\}. \tag{4.11}$$

注意到对每个 $s > 0$, 都有 $U_s^m(x) = \tilde{U}_s^m(x)$ 和 $U_s(x) = \tilde{U}_s(x)$, P-a.s., λ -a.e. x . 于是, 由引理 4.2、(4.11) 和 (3.5) 及控制收敛定理可得到

$$\begin{aligned}
\limsup_{m,n \rightarrow \infty} I_1^{m,n,i,k}(t) &\leq \lim_{m \rightarrow \infty} C E \left\{ \int_0^{t \wedge \tau_{k,i}} ds \int_{\mathbb{R}} |\tilde{U}_s^m(x)| \tilde{J}_1(x) dx \right\} \\
&= C E \left\{ \int_0^{t \wedge \tau_{k,i}} ds \int_{\mathbb{R}} |\tilde{U}_s(x)| \tilde{J}_1(x) dx \right\} \\
&= C E \left\{ \int_0^{t \wedge \tau_{k,i}} ds \int_{\mathbb{R}} |U_s(x)| \tilde{J}_1(x) dx \right\}. \tag{4.12}
\end{aligned}$$

第 3 步 证明如下结论:

$$I_2^{m,n,i,k}(t) \leq C_T [km(na_n)^{-1} j^{\alpha-2} + k^{1/\alpha} (m^{-\eta/\alpha} + a_{n-1}^{1/\alpha}) j^{\alpha-1}], \quad t \in [0, T]. \tag{4.13}$$

对于 $m, n, k, i, j \geq 1$ 和 $t \in [0, T]$, 令

$$I_{2,1}^{m,n,k,i,j}(t) := E \left\{ \int_0^{t \wedge \gamma_k} ds \int_0^{1/j} m_0(dz) \int_{\mathbb{R}} \langle D_n(\langle U_s, \Phi^m \rangle, z V_s(y) \Phi^m(y)), J_i \rangle dy \right\}$$

且

$$\begin{aligned}
I_{2,2}^{m,n,k,i,j}(t) &:= E \left\{ \int_0^{t \wedge \sigma_{k,i}} ds \int_{1/j}^\infty m_0(dz) \int_{\mathbb{R}} \langle D_n(\langle U_s, \Phi^m \rangle, z V_s(y) \Phi^m(y)), J_i \rangle dy \right\} \\
&= E \left\{ \int_0^{t \wedge \sigma_{k,i}} ds \int_{1/j}^\infty m_0(dz) \int_{\mathbb{R}} \langle D_n(\langle \tilde{U}_s, \Phi^m \rangle, z \tilde{V}_s(y) \Phi^m(y)), J_i \rangle dy \right\},
\end{aligned}$$

其中对于固定的 $t > 0$, $\tilde{U}_t$ 和 $\tilde{V}_t$ 分别表示 U_t 和 V_t 连续的修正. 与文献 [12, 引理 4.4] 同样的讨论, 我们可得到

$$I_{2,1}^{m,n,k,i,j}(t) \leq C_T k m (n a_n)^{-1} j^{\alpha-2}, \quad t \in [0, T]. \quad (4.14)$$

类似于文献 [12] 的引理 4.5 中关于 $I_{5,2}^{m,n,k,i,j}(t)$ 的估计, 我们有

$$I_{2,2}^{m,n,k,i,j}(t) \leq C_T [k^{1/\alpha} m^{-\eta/\alpha} + a_{n-1}^{1/\alpha}] j^{\alpha-1}, \quad t \in [0, T]. \quad (4.15)$$

于是, (4.13) 可由 (4.14) 和 (4.15) 得到. 以下给出 (4.15) 证明的概要.

对于固定的 s 和 x , 令 $x_{s,m} \in [-1, 1]$ 满足以下条件:

$$\left| \tilde{V}_s \left(x - \frac{x_{s,m}}{m} \right) \right| = \inf_{y \in [-1, 1]} \left\{ \left| \tilde{V}_s \left(x - \frac{y}{m} \right) \right| \right\}.$$

于是, $I_{2,2}^{m,n,k,i,j}(t)$ 可以分成以下两项:

$$\begin{aligned} I_{2,2}^{m,n,k,i,j}(t) &\leq \mathbb{E} \left\{ \int_0^{t \wedge \sigma_{k,i}} ds \int_{\mathbb{R}} J_i(x) dx \int_{1/j}^{\infty} z m_0(dz) \int_{-1}^1 \Phi(y) dy \right. \\ &\quad \times \int_0^1 \left| \tilde{D}_n \left(\langle \tilde{U}_s, \Phi_x^m \rangle, m z h \tilde{V}_s \left(x - \frac{y}{m} \right) \right) \left[\tilde{V}_s \left(x - \frac{y}{m} \right) - \tilde{V}_s \left(x - \frac{x_{s,m}}{m} \right) \right] \right| dh \Big\} \\ &+ \mathbb{E} \left\{ \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} J_i(x) dx \int_{1/j}^{\infty} z m_0(dz) \int_{-1}^1 \Phi(y) dy \right. \\ &\quad \times \int_0^1 \left| \tilde{D}_n \left(\langle \tilde{U}_s, \Phi_x^m \rangle, m z h \tilde{V}_s \left(x - \frac{y}{m} \right) \right) \tilde{V}_s \left(x - \frac{x_{s,m}}{m} \right) \right| 1_{\{\tilde{V}_s(x - \frac{x_{s,m}}{m}) \neq 0\}} dh \Big\} \\ &=: I_{2,2,1}^{m,n,k,i,j}(t) + I_{2,2,2}^{m,n,i,j}(t). \end{aligned} \quad (4.16)$$

与文献 [12] 中的引理 4.5 的证明中第 2 步同样的讨论可知,

$$I_{2,2,2}^{m,n,k,i,j}(t) \leq C_T a_{n-1}^{1/\alpha} j^{\alpha-1}, \quad t \in [0, T]. \quad (4.17)$$

现在估计 $I_{2,2,1}^{m,n,k,i,j}(t)$. 由于对固定的 $s > 0$, $\tilde{X}_s$ 和 $\tilde{Y}_s$ 分别是 X_s 和 Y_s 的连续版本, 于是, P-a.s.,

$$X_s(x) = \tilde{X}_s(x), \quad Y_s(x) = \tilde{Y}_s(x), \quad x \in \mathbb{R} \cap \mathbb{Q}, \quad s \in (0, \infty) \cap \mathbb{Q}.$$

结合 $\sigma_{k,i}$ 和 $\bar{\int}_{(0,t]}$ 的定义, 我们有, P-a.s.,

$$\begin{aligned} \sigma_{k,i} &= \tilde{\sigma}_{k,i} \\ &:= \inf \left\{ t \in (0, T] : \bar{\int}_{(0,t]} \sup_{x, z \in [-(i+3), i+3] \cap \mathbb{Q}, x \neq z} \frac{|\tilde{X}_s(x) - \tilde{X}_s(z)| \vee |\tilde{Y}_s(x) - \tilde{Y}_s(z)|}{|x - z|^\eta} ds > k \right\} \\ &= \inf \left\{ t \in (0, T] : \bar{\int}_{(0,t]} \sup_{x, z \in [-(i+3), i+3], x \neq z} \frac{|\tilde{X}_s(x) - \tilde{X}_s(z)| \vee |\tilde{Y}_s(x) - \tilde{Y}_s(z)|}{|x - z|^\eta} ds > k \right\}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

由 Hölder 不等式, 有

$$\begin{aligned}
 & \int_{(0, t \wedge \tilde{\sigma}_{k,i})} \sup_{|x| \leq i+1, |y| \vee |v| \leq 1} \left| \tilde{X}_s \left(x - \frac{y}{m} \right) - \tilde{X}_s \left(x - \frac{v}{m} \right) \right|^{1/\alpha} ds \\
 & \leq t^{1-1/\alpha} \left[\int_{(0, t \wedge \tilde{\sigma}_k)} \sup_{|x| \leq i+1, |y| \vee |v| \leq 1} \left| \tilde{X}_s \left(x - \frac{y}{m} \right) - \tilde{X}_s \left(x - \frac{v}{m} \right) \right| ds \right]^{1/\alpha} \\
 & \leq t^{1-1/\alpha} (2/m)^{\eta/\alpha} \left[\int_{(0, t \wedge \tilde{\sigma}_k)} \sup_{|x| \leq i+1, |y| \vee |v| \leq 1, y \neq v} \frac{|\tilde{X}_s(x - \frac{y}{m}) - \tilde{X}_s(x - \frac{v}{m})|}{|y/m - v/m|^\eta} ds \right]^{1/\alpha} \\
 & \leq 2^{\eta/\alpha} t^{1-1/\alpha} m^{-\eta/\alpha} k^{1/\alpha},
 \end{aligned}$$

关于 $\tilde{Y}$ 也可以建立同样的估计. 于是利用 (4.18) 可以得到 P-a.s.,

$$\begin{aligned}
 & \int_{(0, t \wedge \sigma_{k,i})} \sup_{|x| \leq i+1, |y| \vee |v| \leq 1} \left| \tilde{V}_s \left(x - \frac{y}{m} \right) - \tilde{V}_s \left(x - \frac{v}{m} \right) \right| ds \\
 & \leq C \int_{(0, t \wedge \tilde{\sigma}_k)} \sup_{|x| \leq i+1, |y| \vee |v| \leq 1} \left[\left| \tilde{X}_s \left(x - \frac{y}{m} \right) - \tilde{X}_s \left(x - \frac{v}{m} \right) \right|^{1/\alpha} \right. \\
 & \quad \left. + \left| \tilde{Y}_s \left(x - \frac{y}{m} \right) - \tilde{Y}_s \left(x - \frac{v}{m} \right) \right|^{1/\alpha} \right] ds \\
 & \leq 2^{\eta/\alpha+1} C t^{1-1/\alpha} m^{-\eta/\alpha} k^{1/\alpha}.
 \end{aligned}$$

注意到对所有的 $n \geq 1$ 和 $y, z \in \mathbb{R}$, 都有 $|\tilde{D}_n(y, z)| \leq 2$, 于是,

$$\begin{aligned}
 I_{2,2,1}^{m,n,k,i,j}(t) & \leq \frac{2c_2 j^{\alpha-1}}{\alpha-1} \mathbb{E} \left\{ \int_{(0, t \wedge \sigma_{k,i})} ds \int_{\mathbb{R}} J_i(x) dx \int_{-1}^1 \left| \tilde{V}_s \left(x - \frac{y}{m} \right) - \tilde{V}_s \left(x - \frac{x_{s,m}}{m} \right) \right| \Phi(y) dy \right\} \\
 & \leq \frac{2c_2 j^{\alpha-1}}{\alpha-1} \int_{\mathbb{R}} J(x) dx \int_{-1}^1 \mathbb{E} \left\{ \int_{(0, t \wedge \sigma_{k,i})} \sup_{|x| \leq i+1, |y| \vee |v| \leq 1} \left| \tilde{V}_s \left(x - \frac{y}{m} \right) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \tilde{V}_s \left(x - \frac{v}{m} \right) \right| ds \right\} \Phi(y) dy \\
 & \leq 2^{\eta/\alpha+2} k^{1/\alpha} C t^{1-1/\alpha} m^{-\eta/\alpha} j^{\alpha-1} (1/\alpha - 1)^{-1}.
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

因此, (4.15) 可由 (4.16)–(4.19) 获得.

第 4 步 取 $m = a_{n-1}^{-\delta}$ 和 $j = a_{n-1}^{-\varepsilon}$, 于是, 由 (4.13) 可知,

$$I_2^{m,n,i,k}(t) \leq C_T [k n^{-1} a_n^{-\delta-1+(2-\alpha)\varepsilon} + k^{1/\alpha} (a_{n-1}^{\eta\delta/\alpha-\varepsilon(\alpha-1)} + a_{n-1}^{1/\alpha-\varepsilon(\alpha-1)})]. \tag{4.20}$$

如果我们以这种方式选择 $\delta, \varepsilon > 0$:

$$-\delta - 1 + (2 - \alpha)\varepsilon > 0, \quad \frac{\eta\delta}{\alpha} - \varepsilon(\alpha - 1) > 0 \quad \text{且} \quad \frac{1}{\alpha} - \varepsilon(\alpha - 1) > 0, \tag{4.21}$$

那么,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_2^{m,n,i,k}(t) = 0. \tag{4.22}$$

(4.21) 等价于

$$\frac{\delta + 1}{2 - \alpha} < \varepsilon < \frac{\eta\delta}{\alpha(\alpha - 1)} \quad \text{和} \quad \varepsilon < \frac{1}{\alpha(\alpha - 1)}.$$

因为 $\eta < \eta_c = \frac{\kappa}{\alpha} - 1$. 所以, (4.21) 的成立只需要

$$\frac{\delta + 1}{2 - \alpha} < \varepsilon < \frac{\eta_c \delta}{\alpha(\alpha - 1)} \quad \text{和} \quad \varepsilon < \frac{1}{\alpha(\alpha - 1)}.$$

也就是只需要 (1.13) 成立.

第 5 步 该步完成定理的证明. 回顾 $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(x) = |x|$. 因为 $\|\phi'_n\| \leq 1$, 所以, 对于当 $m \rightarrow \infty$ 时就有 $x_m \rightarrow x$ 的序列, 我们就有当 $m, n \rightarrow \infty$ 时,

$$|\phi_n(x_m) - |x|| \leq |\phi_n(x_m) - \phi_n(x)| + |\phi_n(x) - |x|| \leq |x_m - x| + |\phi_n(x) - |x||$$

趋于零. 因此, 由引理 4.2 和 Fatou 引理可得到

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{\langle |U_{t \wedge \tau_{k,i}}|, J_i \rangle\} &= \mathbb{E}\{\langle \tilde{U}_{t \wedge \tau_{k,i}}|, J_i \rangle\} = \mathbb{E}\left\{\int_{\mathbb{R}} \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(\tilde{U}_{t \wedge \tau_{k,i}}^m(x)) J_i(x) dx\right\} \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}\left\{\int_{\mathbb{R}} \phi_n(\tilde{U}_{t \wedge \tau_{k,i}}^m(x)) J_i(x) dx\right\} \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}\left\{\int_{\mathbb{R}} \phi_n(U_{t \wedge \tau_{k,i}}^m(x)) J_i(x) dx\right\}. \end{aligned}$$

结合此式、(4.6)、(4.12) 和 (4.22), 可以得到

$$\mathbb{E}\{\langle |U_{t \wedge \tau_{k,i}}|, J_i \rangle\} \leq C \int_0^t \mathbb{E}\{\langle |U_{s \wedge \tau_{k,i}}|, \tilde{J}_1 \rangle\} ds.$$

于是, 由 (4.3)、引理 3.1、控制收敛定理及前面的不等式可知, $\mathbb{E}\{\langle |U_t|, J_i \rangle\} \leq C \int_0^t \mathbb{E}\{\langle |U_s|, \tilde{J}_1 \rangle\} ds$. 因为 $\lim_{i \rightarrow \infty} J_i(x) = J(x)$, 所以, 令 $i \rightarrow \infty$, 并再次利用 Fatou 引理可得到

$$\mathbb{E}\{\langle |U_t|, J \rangle\} \leq C \int_0^t \mathbb{E}\{\langle |U_s|, \tilde{J}_1 \rangle\} ds.$$

注意到

$$\begin{aligned} |\tilde{J}'_1(x)| &= \left| J'(x) + \int_{|z| \geq 1} J'(x+z) \nu(dz) \right| \leq C \tilde{J}_1(x), \\ |\tilde{J}''_1(x)| &= \left| J''(x) + \int_{|z| \geq 1} J''(x+z) \nu(dz) \right| \leq C \tilde{J}_1(x). \end{aligned}$$

于是, 由以上的证明过程, 有

$$\mathbb{E}\{\langle |U_t|, J \rangle\} \leq C^2 \int_0^t ds_1 \int_0^{s_1} \mathbb{E}\{\langle |U_{s_2}|, \tilde{J}_2 \rangle\} ds_2,$$

其中 $\tilde{J}_2(x) = \tilde{J}_1(x) + \int_{|z| \geq 1} \tilde{J}_1(x+z) \nu(dz)$. 连续地利用此方法, 我们可以证明对于每个 $n \geq 1$, 都有

$$\mathbb{E}\{\langle |U_t|, J \rangle\} \leq C^n \int_0^t ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \cdots \int_0^{s_{n-1}} \mathbb{E}\{\langle |U_{s_n}|, \tilde{J}_n \rangle\} ds_n,$$

其中

$$\tilde{J}_n(x) = \tilde{J}_{n-1}(x) + \int_{|z| \geq 1} \tilde{J}_{n-1}(x+z) \nu(dz).$$

再次注意到 $\langle 1, \tilde{J}_n \rangle \leq \langle 1, J \rangle (1 + \nu[(-1, 1)^c])^n$. 于是, 对于每个 $n \geq 1$, 都有

$$E\{\langle |U_t|, J \rangle\} \leq \frac{\langle 1, J \rangle C^n (1 + \nu[(-1, 1)^c])^n t^n}{n!}.$$

由 n 的任意性可知, 对于任意的 $t \geq 0$, 都有 $E\{\langle |U_t|, J \rangle\} = 0$. 因此, 对于每个 $t \geq 0$ 和 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, 就有 $\langle X_t, f \rangle = \langle Y_t, f \rangle$, P-a.s. 由 $t \mapsto \langle X_t, f \rangle$ 和 $t \mapsto \langle Y_t, f \rangle$ 的右连续性可知, $P\{\text{对每个 } t > 0 \text{ 和 } f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \text{ 都有 } \langle X_t, f \rangle = \langle Y_t, f \rangle\} = 1$ ($\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 的定义见 (1.8) 之前). 由文献 [14] 中定理 12.9 的证明, 我们可以考虑 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 中的可数稠密子列 $\{f_1, f_2, \dots\}$ 完成证明. $\square$

致谢 感谢审稿人的有益建议, 感谢李增沪教授和周晓文教授对本文初稿的有帮助的建议.

参考文献

- Konno N, Shiga T. Stochastic partial differential equations for some measure-valued diffusions. *Probab Theory Related Fields*, 1988, 79: 201–225
- Reimers M. One dimensional stochastic partial differential equations and the branching measure diffusion. *Probab Theory Related Fields*, 1989, 81: 319–340
- Mytnik L, Perkins E, Sturm A. On pathwise uniqueness for stochastic heat equations with non-Lipschitz coefficients. *Ann Probab*, 2006, 34: 1910–1959
- Rippl T, Sturm A. New results on pathwise uniqueness for the heat equation with colored noise. *Electron J Probab*, 2013, 18: 1–46
- Neuman E. Pathwise uniqueness of the stochastic heat equations with spatially inhomogeneous white noise. *ArXiv:1403.4491*, 2014
- Xiong J. Super-Brownian motion as the unique strong solution to an SPDE. *Ann Probab*, 2013, 41: 1030–1054
- Mytnik L, Perkins E. Pathwise uniqueness for stochastic heat equations with Hölder continuous coefficients: The white noise case. *Probab Theory Related Fields*, 2011, 149: 1–96
- Burdzy K, Mueller C, Perkins E A. Nonuniqueness for nonnegative solutions of parabolic stochastic partial differential equations. *Illinois J Math*, 2010, 54: 1481–1507
- Mueller C, Mytnik L, Perkins E. Nonuniqueness for a parabolic SPDE with $(\frac{3}{4} - \varepsilon)$ -Hölder diffusion coefficients. *Ann Probab*, 2014, 42: 2032–2112
- Mytnik L. Stochastic partial differential equation driven by stable noise. *Probab Theory Related Fields*, 2002, 123: 157–201
- He H, Li Z, Yang X. Stochastic equations of super-Lévy processes with general branching mechanism. *Stochastic Process Appl*, 2014, 124: 1519–1565
- Yang X, Zhou X. Pathwise uniqueness for an SPDE with Hölder continuous coefficient driven by α -stable noise. *Electron J Probab*, 2017, 22: 1–48
- Fleischmann K, Mytnik L, Wachtel V. Optimal local Hölder index for density states of superprocesses with $(1 + \beta)$ -branching mechanism. *Ann Probab*, 2010, 38: 1180–1220
- Li Z. *Measure-Valued Branching Markov Processes*. Berlin: Springer, 2011
- Chen Z, Zhang X. Heat kernels and analyticity of non-symmetric jump diffusion semigroups. *Probab Theory Related Fields*, 2016, 165: 267–312
- Mytnik L, Xiong J. Well-posedness of the martingale problem for superprocess with interaction. *Illino J Math*, 2015, 59: 485–497
- Xiong J, Yang X. Superprocesses with interaction and immigration. *Stochastic Process Appl*, 2016, 126: 3377–3401
- Wang L, Yang X, Zhou X. A distribution-function-valued SPDE and its applications. *J Differential Equations*, 2017, 262: 1085–1118
- Ikeda N, Watanabe S. *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes*, 2nd ed. Amsterdam-Kodansha-Tokyo: North-Holland, 1989
- Perkins E, Mytnik L. Regularity and irregularity of $(1 + \beta)$ -stable super-Brownian motion. *Ann Probab*, 2003, 31: 1413–1440
- Saint Loubert Bié E. Étude d'une EDPS conduite par un bruit poissonnien. *Probab Theory Related Fields*, 1998, 111: 287–321
- Yamada T, Watanabe S. On the uniqueness of solutions of stochastic differential equations. *J Math Kyoto Univ*, 1971, 11: 155–167

Stable branching super-Lévy process as the pathwise unique solution to an SPDE

Xu Yang & Guowei Zong

Abstract In this paper, we show that the density of a stable branching super-Lévy process is the pathwise unique solution to

$$\frac{\partial}{\partial t} X_t(x) = AX_t(x) + bX_t(x) + X_{t-}(x)^{\frac{1}{\alpha}} \dot{L}_t(x), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

under certain conditions, where A is the generator of a Lévy process, $\alpha \in (1, 2)$ and $b \in \mathbb{R}$ are constants, and $\{\dot{L}_t(x) : t \geq 0, x \in \mathbb{R}\}$ is a one sided α -stable noise without negative jumps. This partly generalizes the recent work of Yang and Zhou (2017), in which $A = \Delta/2$ (Δ denotes the Laplacian operator) was considered.

Keywords super-Lévy process, stable, pathwise uniqueness, stochastic partial differential equation

MSC(2010) 60J68, 60H15

doi: 10.1360/SCM-2017-0092