向列相液晶的动力学方程解在 L^n 的唯一性

献给王斯雷教授 85 华诞

刘晓风¹, 王梦^{2*}

1. 东华大学应用数学系, 上海 201620;

2. 浙江大学数学科学学院, 杭州 310027

E-mail: lxfn7381@hotmail.com, mathdreamcn@zju.edu.cn

收稿日期: 2017-08-16; 接受日期: 2018-02-25; 网络出版日期: 2018-10-09; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11371316 和 11771388) 资助项目

摘要 本文考虑向列相液晶的动力学方程的 Cauchy 问题, 并给出温和解在 $C([0, T]; L^n)$ 中解的唯一性.

关键词 向列相液晶 温和解 唯一性

MSC (2010) 主题分类 35Q35, 76D03

1 引言

本文考虑向列相液晶方程的 Cauchy 问题

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + u \cdot \nabla u + \nabla P = -\nabla \cdot (\nabla d \otimes \nabla d), \\ d_t - \Delta d + u \cdot \nabla d = |\nabla d|^2 d, \\ \operatorname{div} u = 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

初值为

$$u(0) = u_0, \quad d(0) = d_0, \quad (1.2)$$

其中 $u : \mathbb{R}^n \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为流体速度场; $d : \mathbb{R}^n \times [0, T) \rightarrow S^{n-1}$ 为单位向量场, 代表液晶分子的指向; $P : \mathbb{R}^n \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ 为压力; $\nabla d \otimes \nabla d = (\langle \frac{\partial d}{\partial x_i}, \frac{\partial d}{\partial x_j} \rangle)_{1 \leq i, j \leq n}$ 为指向场 d 诱导的应力张量. (1.1) 是 Ericksen-Leslie 系统耦合液晶动力学方程的简化版本, 参见文献 [1, 2]. 从数学上说, (1.1) 是 Navier-Stokes 方程与映射到球面的调和映射的强耦合.

英文引用格式: Liu X F, Wang M. Uniqueness of hydrodynamic flow of nematic liquid crystals in L^n (in Chinese). Sci Sin Math, 2018, 48: 1387–1394, doi: 10.1360/N012017-00187

对于 Navier-Stokes 方程, Kato^[3] 得到了 $C([0, T]; L^n) \cap \{u \mid t^{1/4}u(t) \in C([0, T]; L^{2n})\}$ 类温和解的存在性和唯一性. Lions 和 Masmoudi^[4] 得到了以下情形温和解的唯一性: $n \geq 3$ 时 $C([0, T]; L^n)$ 类温和解, 以及 $n \geq 4$ 时 $L^\infty([0, T]; L^n)$ 类温和解. Monniaux^[5] 利用热核的极大 L^p - L^q 正则性证明了 $C([0, T]; L^n)$ 类温和解的唯一性, 也可参见文献 [6]. Lin 和 Wang^[7] 得到了 Cauchy 问题 (1.1) 的弱解的唯一性结果. Lin 和 Ding^[8] 建立了 Cauchy 问题 (1.1) 在 L^n 初值的适定性问题. Wang^[9] 建立了 Cauchy 问题 (1.1) 在初值属于 $BMO^{-1} \times BMO$ 时的适定性问题. 本文得到 Cauchy 问题 (1.1) 在 $C([0, T]; L^n)$ 类温和解的唯一性结果. 主要结果如下:

定理 1.1 设 $n \geq 3$, 假设 $u_i \in C([0, T]; L^n)$, $\nabla d_i \in C([0, T]; L^n)$ ($i = 1, 2$) 为相应于方程 (1.1) 在 $u_0, \nabla d_0 \in L^n$ 时的温和解, 且 $\nabla d_2 \in L_T^r L^q$, 其中 $n/q + 2/r = 1$ ($q > n$), 则 $(u_1, d_1) = (u_2, d_2)$.

定理 1.2 设 $n \geq 4$, $u_i \in C([0, T]; L^n)$, $\nabla d_i \in C([0, T]; L^n)$ ($i = 1, 2$) 为方程 (1.1) 在相同初值 $u_0, \nabla d_0 \in L^n$ 时的温和解, 则 $(u_1, d_1) = (u_2, d_2)$.

注 1.1 Lin 和 Wang^[7] 在 $n = 3$ 时考虑了 $u \in L_t^\infty L_x^2 \cap L_t^2 H_x^1 \cap C([0, T], L^n)$ 和 $P \in L_t^{n/2} L_x^{n/2}$ 及 $\nabla d \in L_t^2 L_x^2 \cap C([0, T], L^n)$ 类弱解的唯一性. 本文考虑 $u \in C([0, T], L^n)$ 类温和解的唯一性.

本节给出一些记号、定义和基本事实. 文中采用 $L^p = L^p(\mathbb{R}^n)$, $L_T^p L^q = L^p(0, T; L^q(\mathbb{R}^n))$ 且记函数 φ 的 L^p 范数为 $\|\varphi\|_p$, 函数 f 的 $L_T^p L^q$ 范数为 $\|f\|_{L_T^p L^q}$.

由 Riesz 变换的 L^p 有界性, 以及 Riesz 位势的 L^p - L^q 有界性, 得到以下的引理, 参见文献 [10].

引理 1.1 对于 $1 < p < q < \infty$, $1/q + 1/n = 1/p$, 有 $\|\Delta^{-1} \nabla a\|_q \leq C \|a\|_p$, 特别地,

$$\|\Delta^{-1} \nabla a\|_n \leq C \|a\|_{\frac{n}{2}}.$$

以下两个引理给出了热核的标准估计.

引理 1.2 (i) 对于 $1 \leq p \leq q \leq \infty$, 有

$$\|e^{-t\Delta} a\|_q \leq C t^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} \|a\|_p, \quad \|\nabla e^{-t\Delta} a\|_q \leq C t^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{n} + \frac{1}{p} - \frac{1}{q})} \|a\|_p;$$

(ii) 对于 $a \in L^n$, 有

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|e^{-t\Delta} a - a\|_n = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0} \sup_{0 \leq \tau \leq t} \sqrt{\tau} \|e^{-\tau\Delta} a\|_\infty = 0.$$

以下热核的极大 $L_t^p L^q$ 正则性可参见文献 [6, 定理 7.3].

引理 1.3 令

$$Af(t, x) = \int_0^t \nabla^2 e^{-(t-\tau)\Delta} f(\cdot, \tau) d\tau,$$

则对于 $T \in (0, \infty]$, $1 < p, q < \infty$, 有

$$\|Af\|_{L_T^p L^q} \leq C \|f\|_{L_T^p L^q}.$$

Lorentz 空间 $L^{p,q}$ 的定义可参见文献 [11]. 下面回顾 Lorentz 空间的基本性质, 参见文献 [6].

引理 1.4 若 $1 < p < \infty$, $1 \leq q < r < \infty$, 则

$$\|f\|_{L^{p,r}} \leq C \|f\|_{L^{p,q}}.$$

引理 1.5 (Lorentz 空间的点态乘积) 令 $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $1/p_1 + 1/p_2 = 1/p$, 以及 $1/q_1 + 1/q_2 = 1/q$, 则

$$\|fg\|_{L^{p,q}} \leq C \|f\|_{L^{p_1,q_1}} \|g\|_{L^{p_2,q_2}}.$$

引理 1.6 (Lorentz 空间的卷积) 令 $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $1/p_1 + 1/p_2 = 1/p + 1$ 且 $1/q_1 + 1/q_2 = 1/q$, 则

$$\|f * g\|_{L^{p,q}} \leq C \|f\|_{L^{p_1,q_1}} \|g\|_{L^{p_2,q_2}}.$$

注 1.2 $L_*^p = L^{p,\infty}$, 且容易验证 $t^{-\frac{1}{p}} \in L^{p,\infty}(\mathbb{R}^+)$.

2 定理 1.1 的证明

令 (u_i, d_i) ($i = 1, 2$) 为方程 (1.1) 在初值 (u_0, d_0) 的两个解, 且 $u = u_1 - u_2$, $d = d_1 - d_2$, 则 (u, d) 满足以下方程:

$$u_t - \Delta u = -\mathbb{P}\nabla(u \otimes u_1 + u_2 \otimes u + \nabla d \otimes \nabla d_1 + \nabla d_2 \otimes \nabla d) = F, \quad (2.1)$$

$$d_t - \Delta d = (\nabla d_1 + \nabla d_2) \cdot \nabla d d_1 + |\nabla d_2|^2 d - (u \cdot \nabla d_1 + u_2 \cdot \nabla d) = G, \quad (2.2)$$

且 $\operatorname{div} u = 0$, $u(0) = d(0) = 0$, 则

$$u(t) = \int_0^t e^{-(t-\tau)\Delta} F(\tau) d\tau, \quad (2.3)$$

$$d(t) = \int_0^t e^{-(t-\tau)\Delta} G(\tau) d\tau, \quad (2.4)$$

$$\nabla d(t) = \int_0^t \nabla e^{-(t-\tau)\Delta} G(\tau) d\tau. \quad (2.5)$$

令 $u_{i,h} = u_i - e^{-t\Delta} u_0$, $\nabla d_{i,h} = \nabla d_i - e^{-t\Delta} \nabla d_0$. 对于 $u_i, \nabla d_i \in C([0, T]; L^n)$, 由引理 1.2(ii), 有

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|u_{i,h}\|_n = 0 \quad \text{和} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \|\nabla d_{i,h}\|_n = 0.$$

现在估计 (2.3) 和 (2.5) 右边的项. 首先, 给出几个引理.

引理 2.1 令 $1 < p < \infty$, $\varphi \in L^n$, $g \in L^p L^n$, 则

$$\left\| \int_0^t \nabla e^{-(t-\tau)\Delta} (g e^{-\tau\Delta} \varphi)(\tau) d\tau \right\|_{L_t^p L^n} \leq M \sup_{0 \leq \tau \leq t} (\sqrt{\tau} \|e^{-\tau\Delta} \varphi\|_\infty) \|g\|_{L_t^p L^n},$$

其中 $M = \|t^{-\frac{1}{2}}\|_{L^{2,\infty}}^2$.

证明 由 Minkowski 不等式、引理 1.2(i)、1.5 和 1.6, 有

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t \nabla e^{-(t-\tau)\Delta} (g e^{-\tau\Delta} \varphi)(\tau) d\tau \right\|_{L_t^p L^n} &\leq \left\| \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \|g\|_n \|e^{-\tau\Delta} \varphi\|_\infty d\tau \right\|_{L_t^p} \\ &\leq \left\| \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}} \tau^{-\frac{1}{2}} \|g\|_n d\tau \right\|_{L_t^p} \sup_{0 \leq \tau \leq t} (\sqrt{\tau} \|e^{-\tau\Delta} \varphi\|_\infty) \\ &\leq M \sup_{0 \leq \tau \leq t} (\sqrt{\tau} \|e^{-\tau\Delta} \varphi\|_\infty) \|g\|_{L_t^p L^n}. \end{aligned}$$

证毕. □

由引理 1.1、1.3 和 Hölder 不等式, 有下面的引理:

引理 2.2 令 $1 < p < \infty$, $f \in L_t^\infty L^n$, $g \in L_t^p L^n$, 则

$$\left\| \int_0^t \nabla e^{-(t-\tau)\Delta} (fg)(\tau) d\tau \right\|_{L_t^p L^n} \leq C \|f\|_{L_t^\infty L^n} \|g\|_{L_t^p L^n}.$$

由引理 1.1、1.3 和 Hölder 不等式, 对于 $1/s + 1/r = 1/p$, 有

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t \nabla e^{-(t-\tau)\Delta} |\nabla d_2|^2 d\tau \right\|_{L_t^p L^n} &\leq C \|\nabla d_2\|_{L_t^p L^{n/2}}^2 \\ &\leq \|\nabla d_2\|_n \|\nabla d_2\|_q \|d\|_{L_t^p L^{\frac{nq}{q-n}}} \\ &\leq \|\nabla d_2\|_{L_t^\infty L^n} \|\nabla d_2\|_{L_t^r L^q} \|d\|_{L_t^s L^{\frac{nq}{q-n}}}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

所以, 由 (2.3)、(2.5)、(2.6)、引理 2.1 和 2.2, 有

$$\begin{aligned} \|u\|_{L_t^p L^n} + \|\nabla d\|_{L_t^p L^n} &\leq C(\|u_{1,h}\|_{L_t^\infty L^n} + \|u_{2,h}\|_{L_t^\infty L^n}) \|u\|_{L_t^p L^n} \\ &\quad + (\|\nabla d_{1,h}\|_{L_t^\infty L^n} + \|\nabla d_{2,h}\|_{L_t^\infty L^n}) \|\nabla d\|_{L_t^p L^n} \\ &\quad + (\|\nabla d_{1,h}\|_{L_t^\infty L^n} \|u\|_{L_t^p L^n} + \|u_{2,h}\|_{L_t^\infty L^n} \|\nabla d\|_{L_t^p L^n}) \\ &\quad + \left(\sup_{0 \leq \tau \leq t} (\sqrt{\tau} \|e^{-\tau\Delta} u_0\|_\infty) + \sup_{0 \leq \tau \leq t} (\sqrt{\tau} \|e^{-\tau\Delta} \nabla d_0\|_\infty) \right) (\|u\|_{L_t^p L^n} + \|\nabla d\|_{L_t^p L^n}) \\ &\quad + \|\nabla d_2\|_{L_t^\infty L^n} \|\nabla d_2\|_{L_t^r L^q} \|d\|_{L_t^s L^{\frac{nq}{q-n}}}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

接下来需要证明 $\|d\|_{L_t^s L^{\frac{nq}{q-n}}}$ 的有界性. 由引理 1.2(i) 和 Hölder 不等式, 有

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t e^{-(t-\tau)\Delta} (f \times g) d\tau \right\|_{L_t^s L^{\frac{nq}{q-n}}} &\leq \left\| \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{n+q}{2q}} \|f\|_n \|g\|_n d\tau \right\|_{L_t^s} \\ &\leq C t^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L_t^\infty L^n} \|g\|_{L_t^\infty L^n}, \end{aligned}$$

则由 (2.2), 有

$$\|d\|_{L_t^s L^{\frac{nq}{q-n}}} \leq C t^{\frac{1}{p}} \sum_{i=1,2} (\|u_i\|_{L_t^\infty L^n}^2 + \|\nabla d_i\|_{L_t^\infty L^n}^2) < \infty.$$

为了估计 $\|d\|_{L_t^s L^{\frac{nq}{q-n}}}$, 我们需要以下引理:

引理 2.3 若 $s > p$, $1/s + 1/r = 1/p$, 则

$$\left\| \int_0^t e^{-(t-\tau)\Delta} (f \times g) d\tau \right\|_{L_t^s L^{\frac{nq}{q-n}}} \leq C \|f\|_{L_t^\infty L^n} \|g\|_{L_t^p L^n}.$$

证明 由引理 1.2(i)、1.5、1.6 和 1.4, 有

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t e^{-(t-\tau)\Delta} (f \times g) d\tau \right\|_{L_t^s L^{\frac{nq}{q-n}}} &\leq C \left\| \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{q+n}{2q}} \|f\|_n \|g\|_n d\tau \right\|_{L_t^s} \\ &\leq C \|t^{-\frac{q+n}{2q}}\|_{L_t^{\frac{2q}{q+n}}, \infty} \|f\|_n \|g\|_n \|1\|_{L_t^{p,s}} \\ &\leq C \|f\|_{L_t^\infty L^n} \|g\|_{L_t^p L^n}. \end{aligned}$$

证毕. □

引理 2.4 对于 $s > p$, 有

$$\left\| \int_0^t e^{-(t-\tau)\Delta} (f \times e^{-\tau\Delta} \varphi) d\tau \right\|_{L_t^s L^{\frac{nq}{q-n}}} \leq C \|f\|_{L_t^p L^n} \sup_{0 \leq \tau \leq t} (\sqrt{\tau} \|e^{-\tau\Delta} \varphi\|_\infty).$$

证明 由引理 1.2、1.5、1.6 和 1.4, 有

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t e^{-(t-\tau)\Delta} (f \times e^{-\tau\Delta} \varphi) d\tau \right\|_{L_t^s L^{\frac{nq}{q-n}}} &\leq C \left\| \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{n}{2q}} \|f\|_n \|e^{-\tau\Delta} \varphi\|_\infty d\tau \right\|_{L_t^s} \\ &\leq C \left\| \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{n}{2q}} \tau^{-\frac{1}{2}} \|f\|_n d\tau \right\|_{L_t^s} \sup_{0 \leq \tau \leq t} (\sqrt{\tau} \|e^{-\tau\Delta} \varphi\|_\infty) \\ &\leq C \|t^{-\frac{n}{2q}}\|_{L^{\frac{2q}{n}, \infty}} \|t^{-\frac{1}{2}}\|_{L_t^{2, \infty}} \|f\|_{L_t^{p, s} L^n} \sup_{0 \leq \tau \leq t} (\sqrt{\tau} \|e^{-\tau\Delta} \varphi\|_\infty) \\ &\leq C \|f\|_{L_t^p L^n} \sup_{0 \leq \tau \leq t} (\sqrt{\tau} \|e^{-\tau\Delta} \varphi\|_\infty). \end{aligned}$$

证毕. □

引理 2.5 对于 $2 < p < r$ 和 $1/s + 1/r = 1/p$, 有

$$\begin{aligned} &\left\| \int_0^t e^{-(t-\tau)\Delta} |\nabla d_2|^2 d(\tau) d\tau \right\|_{L_t^s L^{\frac{nq}{q-n}}} \\ &\leq C \|\nabla d_2\|_{L_t^\infty L^n} \left(\|\nabla d_{2,h}\|_{L_t^\infty L^n} + \sup_{0 \leq \tau \leq t} (\sqrt{\tau} \|e^{-\tau\Delta} \nabla d_0\|_\infty) \right) \|d\|_{L_t^s L^{\frac{nq}{q-n}}}. \end{aligned}$$

证明 由引理 1.3、Hölder 不等式以及 Riesz 位势的 L^p - L^q 有界性, 有

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t e^{-(t-\tau)\Delta} (\nabla d_2 \cdot \nabla d_{2,h}) d(\tau) d\tau \right\|_{L_t^s L^{\frac{nq}{q-n}}} &\leq C \|(\nabla d_2 \cdot \nabla d_{2,h}) d\|_{L_t^s L^{\frac{nq}{3q-n}}} \\ &\leq C \|\nabla d_2\|_n \|\nabla d_{2,h}\|_n \|d\|_{L_t^s L^{\frac{nq}{q-n}}} \\ &\leq C \|\nabla d_2\|_{L_t^\infty L^n} \|\nabla d_{2,h}\|_{L_t^\infty L^n} \|d\|_{L_t^s L^{\frac{nq}{q-n}}}. \end{aligned}$$

由引理 1.2、1.5 和 1.6 知,

$$\begin{aligned} &\left\| \int_0^t e^{-(t-\tau)\Delta} (\nabla d_2 \cdot e^{-\tau\Delta} \nabla d_0) d(\tau) d\tau \right\|_{L_t^s L^{\frac{nq}{q-n}}} \\ &\leq C \left\| \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}} \|\nabla d_2\|_n \|e^{-\tau\Delta} \nabla d_0\|_\infty \|d\|_{L_t^s L^{\frac{nq}{q-n}}} d\tau \right\|_{L_t^s} \\ &\leq C \|\nabla d_2\|_{L_t^\infty L^n} \sup_{0 \leq \tau \leq t} (\sqrt{\tau} \|e^{-\tau\Delta} \nabla d_0\|_\infty) \left\| \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}} \tau^{-\frac{1}{2}} \|d\|_{L_t^s L^{\frac{nq}{q-n}}} d\tau \right\|_{L_t^s} \\ &\leq C \|\nabla d_2\|_{L_t^\infty L^n} \sup_{0 \leq \tau \leq t} (\sqrt{\tau} \|e^{-\tau\Delta} \nabla d_0\|_\infty) \|d\|_{L_t^s L^{\frac{nq}{q-n}}}. \end{aligned}$$

现在估计 $\|d\|_{L_t^s L^{\frac{nq}{q-n}}}$. 由 (2.4) 和引理 2.3–2.5, 有

$$\begin{aligned} \|d\|_{L_t^s L^{\frac{nq}{q-n}}} &\leq C \left(\|\nabla d_{2,h}\|_{L_t^\infty L^n} + \sup_{0 \leq \tau \leq t} (\sqrt{\tau} \|e^{-\tau\Delta} \nabla d_0\|_\infty) \right) \|\nabla d_2\|_{L_t^\infty L^n} \|d\|_{L_t^s L^{\frac{nq}{q-n}}} \\ &\quad + \left(\|\nabla d_{1,h}\|_{L_t^\infty L^n} + \|\nabla d_{2,h}\|_{L_t^\infty L^n} + 2 \sup_{0 \leq \tau \leq t} (\sqrt{\tau} \|e^{-\tau\Delta} \nabla d_0\|_\infty) \right) \|\nabla d\|_{L_t^p L^n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left(\|\nabla d_{1,h}\|_{L_t^\infty L^n} + \sup_{0 \leq \tau \leq t} (\sqrt{\tau} \|e^{-\tau \Delta} \nabla d_0\|_\infty) \right) \|u\|_{L_t^p L^n} \\
 & + \left(\|u_{2,h}\|_{L_t^\infty L^n} + \sup_{0 \leq \tau \leq t} (\sqrt{\tau} \|e^{-\tau \Delta} u_0\|_\infty) \right) \|\nabla d\|_{L_t^p L^n}.
 \end{aligned} \quad (2.8)$$

最后, 由 (2.7) 和 (2.8), 有

$$\begin{aligned}
 & \|d\|_{L_t^s L^{\frac{nq}{q-n}}} + \|\nabla d\|_{L_t^p L^n} + \|u\|_{L_t^p L^n} \\
 & \leq C(\|u_{1,h}\|_{L_t^\infty L^n} + \|u_{2,h}\|_{L_t^\infty L^n} + \|\nabla d_{1,h}\|_{L_t^\infty L^n}) \|u\|_{L_t^p L^n} \\
 & \quad + (\|\nabla d_{1,h}\|_{L_t^\infty L^n} + \|\nabla d_{2,h}\|_{L_t^\infty L^n} + \|u_{2,h}\|_{L_t^\infty L^n}) \|\nabla d\|_{L_t^p L^n} \\
 & \quad + \left(\sup_{0 \leq \tau \leq t} (\sqrt{\tau} \|e^{-\tau \Delta} u_0\|_\infty) + \sup_{0 \leq \tau \leq t} (\sqrt{\tau} \|e^{-\tau \Delta} \nabla d_0\|_\infty) \right) (\|\nabla d\|_{L_t^p L^n} + \|u\|_{L_t^p L^n}) \\
 & \quad + \left(\|\nabla d_2\|_{L_t^r L^q} + \|\nabla d_{2,h}\|_{L_t^\infty L^n} + \sup_{0 \leq \tau \leq t} (\sqrt{\tau} \|e^{-\tau \Delta} \nabla d_0\|_\infty) \right) \|\nabla d_2\|_{L_t^\infty L^n} \|d\|_{L_t^s L^{\frac{nq}{q-n}}} \\
 & \leq f(t)(\|d\|_{L_t^s L^{\frac{nq}{q-n}}} + \|\nabla d\|_{L_t^p L^n} + \|u\|_{L_t^p L^n}),
 \end{aligned} \quad (2.9)$$

其中当 $t \rightarrow 0$ 时, $f(t) \rightarrow 0$. 所以, 对于 t_0 充分小, 有 $\|d\|_{L_t^s L^{\frac{nq}{q-n}}} + \|\nabla d\|_{L_t^p L^n} + \|u\|_{L_t^p L^n} = 0$, 于是, 当 $0 < t < t_0$ 时, $u = d = 0$, 且由连续性, 在 $0 < t < T$ 中也成立. $\square$

3 定理 1.2 的证明

令 (u_i, d_i) ($i = 1, 2$) 为方程 (1.1) 的解, 即

$$\begin{aligned}
 u_{i,t} - \Delta u_i &= -\mathbb{P}(u_i \cdot \nabla u_i - \nabla \cdot (\nabla d_i \otimes \nabla d_i)) = \nabla \mathbb{P} F_i, \\
 d_{i,t} - \Delta d_i &= -u_i \cdot \nabla d_i + |\nabla d_i|^2 d_i = G_i,
 \end{aligned} \quad (3.1)$$

其中 $F_i = u_i \otimes u_i + \nabla d_i \otimes \nabla d_i$, $G_i = -u_i \cdot \nabla d_i + |\nabla d_i|^2 d_i$. 同文献 [4] 中的讨论, 至此得到 $u, \nabla d \in L_T^\infty L^2$ 和 $\nabla u, \nabla^2 d \in L_T^\infty L^2$. 为简单起见, 仅考虑 $n = 4$ 的情形. 对于 $u_i, \nabla d_i \in L_t^\infty L^n$, $i = 1, 2$, 有 $F_i, G_i \in L_T^\infty L^{\frac{n}{2}}$. 由引理 1.3 和 1.2, 有 $\nabla u_i, \nabla^2 d_i \in L_T^p L^{\frac{n}{2}} + L_T^r L^n$, $1 < p < \infty$, $1 < r < 2$. 同样, $\nabla u, \nabla^2 d \in L_T^p L^{\frac{n}{2}}$. 容易验证, 对于 $1 < r < 2$, 有

$$\begin{aligned}
 F &= -\mathbb{P}(u \cdot \nabla u_1 + u_2 \cdot \nabla u + \nabla \cdot (\nabla d \otimes \nabla d_1 + \nabla d_2 \otimes \nabla d)) \in L_T^r (L^{\frac{n}{2}} + L^{\frac{n}{3}}), \\
 \nabla G &= \nabla(u \cdot \nabla d_1 + u_2 \cdot \nabla d - (\nabla d_1 + \nabla d_2) \cdot \nabla d d_1 + |\nabla d_2|^2 d) \in L_T^r (L^{\frac{n}{2}} + L^{\frac{n}{3}}).
 \end{aligned}$$

由引理 1.3, 有 $u_t, \Delta u, \nabla d_t, \Delta \nabla d \in L_T^r (L^{\frac{n}{2}} + L^{\frac{n}{3}})$, 且由引理 1.2, 有 $u, \nabla d \in L_T^\infty (L^{\frac{n}{2}} + L^{\frac{n}{3}})$. 因为 $u, \nabla d \in L_T^\infty L^n$, 所以, $u, \nabla d \in L_T^\infty L^{\frac{n}{2}}$, 从而得到 $n = 4$ 时, $u, \nabla d \in L_T^\infty L^2$ 和 $\nabla u, \nabla^2 d \in L_T^\infty L^2$.

现在进行进一步的讨论. 把方程 (2.1) 乘以 u , 并且分部积分, 有

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_2^2 + \|\nabla u\|_2^2 = - \int u \otimes u_1 : \nabla u dx - \int \nabla d \otimes \nabla d_1 : \nabla u dx - \int \nabla d_2 \otimes \nabla d : \nabla u dx. \quad (3.2)$$

把方程 (2.2) 乘以 Δd 并且分部积分, 有

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla d\|_2^2 + \|\Delta d\|_2^2 = \int (u \cdot \nabla d_1 + u_2 \cdot \nabla d - (\nabla d_1 + \nabla d_2) \cdot \nabla d d_1) \cdot \Delta d dx + \int |\nabla d_2|^2 |\nabla d|^2 dx. \quad (3.3)$$

注意此处利用了 $|d| = 1$ 这个事实. 对于 $u_i, \nabla d_i \in C([0, T]; L^n)$, 我们可以把 u_1 、 ∇d_1 和 ∇d_2 各自分成两个部分: $u_1 = u_{1,s} + u_{1,b}$ 、 $\nabla d_1 = \nabla d_{1,s} + \nabla d_{1,b}$ 和 $\nabla d_2 = \nabla d_{2,s} + \nabla d_{2,b}$, 其中

$$\|u_{1,s}\|_{L_T^\infty L^n}, \|\nabla d_{1,s}\|_{L_T^\infty L^n}, \|\nabla d_{2,s}\|_{L_T^\infty L^n} \leq \epsilon$$

且

$$\|u_{1,b}\|_{L_{x,t}^\infty}, \|\nabla d_{1,b}\|_{L_{x,t}^\infty}, \|\nabla d_{2,b}\|_{L_{x,t}^\infty} \leq C_\epsilon.$$

接着估计 (3.2) 和 (3.3) 右边的各项. 由 Hölder 不等式和 $u \in L_T^\infty H^1$, 有

$$\begin{aligned} \left| \int u \otimes u_1 : \nabla u dx \right| &\leq \left| \int u \otimes u_{1,s} : \nabla u dx \right| + \left| \int u \otimes u_{1,b} : \nabla u dx \right| \\ &\leq \|u\|_{\frac{2n}{n-2}} \|u_{1,s}\|_n \|\nabla u\|_2 + \|u\|_2 \|u_{1,b}\|_\infty \|\nabla u\|_2 \\ &\leq 2\epsilon \|\nabla u\|_2^2 + C_\epsilon \|u\|_2^2. \end{aligned}$$

同样地,

$$\begin{aligned} \left| \int (\nabla d \otimes \nabla d_1 + \nabla d_2 \otimes \nabla d) : \nabla u dx \right| &\leq C_\epsilon (\|\nabla u\|_2^2 + \|\Delta d\|_2^2) + C_\epsilon \|\nabla d\|_2^2, \\ \left| \int u \cdot \nabla d_1 \cdot \Delta d dx \right| &\leq \epsilon (\|\nabla u\|_2^2 + \|\Delta d\|_2^2) + C_\epsilon \|u\|_2^2, \\ \left| \int u_2 \cdot \nabla d \cdot \Delta d dx \right| + \left| \int (\nabla d_1 + \nabla d_2) : \nabla d d_1 \cdot \Delta d dx \right| &\leq C_\epsilon \|\Delta d\|_2^2 + C_\epsilon \|\nabla d\|_2^2. \end{aligned}$$

对于 (3.3) 右边的最后一项, 由 Hölder 不等式和 $\nabla d \in L_T^\infty H^1$, 有

$$\begin{aligned} \left| \int |\nabla d_2|^2 |\nabla d|^2 dx \right| &\leq C_\epsilon \|\nabla d\|_2^2 + \left| \int |\nabla d_{2,s}|^2 |\nabla d|^2 dx \right| \\ &\leq C_\epsilon \|\nabla d\|_2^2 + \|\nabla d_{2,s}\|_n^2 \|\nabla d\|_{\frac{2n}{n-2}}^2 \\ &\leq C_\epsilon \|\nabla d\|_2^2 + C\epsilon^2 \|\Delta d\|_2^2. \end{aligned}$$

所以,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|u\|_2^2 + \|\nabla d\|_2^2) + \|\nabla u\|_2^2 + \|\Delta d\|_2^2 \leq C_\epsilon (\|\nabla u\|_2^2 + \|\Delta d\|_2^2) + C_\epsilon (\|u\|_2^2 + \|\nabla d\|_2^2).$$

选取 ϵ 充分小, 有

$$\frac{d}{dt} (\|u\|_2^2 + \|\nabla d\|_2^2) \leq C_\epsilon (\|u\|_2^2 + \|\nabla d\|_2^2),$$

注意到 $u(0) = \nabla d(0) = 0$, 应用 Gronwall 不等式, 得到 $u_1 = u_2$ 和 $d_1 = d_2$.

致谢 感谢审稿人的建议和指正.

参考文献

- 1 Ericksen J L. Hydrostatic theory of liquid crystals. Arch Ration Mech Anal, 1962, 9: 371–378
- 2 Leslie F M. Some constitutive equations for liquid crystals. Arch Ration Mech Anal, 1968, 28: 265–283
- 3 Kato T. Strong L^p -solutions of Navier-Stokes equation in $\mathbb{R}^m$, with applications to weak solutions. Math Z, 1984, 187: 471–480
- 4 Lions P L, Masmoudi N. Uniqueness of mild solutions of the Navier-Stokes system in L^N . Comm Partial Differential Equations, 2001, 26: 2211–2226

- 5 Monniaux S. Uniqueness of mild solutions of the Navier-Stokes equation and maximal L^p -regularity. C R Acad Sci Ser I Math, 1999, 328: 663–668
- 6 Lemarié-Rieusset P G. Recent Developments in the Navier-Stokes Problem. Boca Raton: CRC Press, 2002
- 7 Lin F H, Wang C Y. On the uniqueness of heat flow of harmonic maps and hydrodynamic flow of nematic liquid crystals. Chin Ann Math Ser B, 2010, 31: 921–938
- 8 Lin J, Ding S. On the well-posedness for the heat flow of harmonic maps and the hydrodynamic flow of nematic liquid crystals in critical spaces. Math Methods Appl Sci, 2012, 35: 158–173
- 9 Wang C Y. Well-posedness for the heat flow of harmonic maps and the liquid crystal flow with rough initial data. Arch Ration Mech Anal, 2011, 200: 1–19
- 10 Stein E M. Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions. Princeton: Princeton University Press, 1970
- 11 Ziemer W P. Weakly Differentiable Functions. New York: Springer-Verlag, 1989

Uniqueness of hydrodynamic flow of nematic liquid crystals in L^n

Xiaofeng Liu & Meng Wang

Abstract In this paper, we consider the Cauchy problem of hydrodynamic flow of nematic liquid crystals. We get the uniqueness of the mild solution in $C([0, T]; L^n)$.

Keywords nematic liquid crystals, mild solution, uniqueness

MSC(2010) 35Q35, 76D03

doi: 10.1360/N012017-00187