加权射影线的凝聚层范畴与圈李代数

献给刘绍学教授 90 华诞

窦汝静¹, 阮诗铨², 肖杰^{1*}, 徐帆¹

1. 清华大学数学科学系, 北京 100084;

2. 厦门大学数学科学学院, 厦门 361005

E-mail: dourujing@gmail.com, squan@xmu.edu.cn, jxiao@math.tsinghua.edu.cn, fanxu@math.tsinghua.edu.cn

收稿日期: 2018-01-17; 接受日期: 2018-04-16; 网络出版日期: 2018-10-25; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11471177) 资助项目

摘要 本文介绍了从根范畴构造复李代数的方法, 应用到加权射影线的凝聚层范畴, 得到相应的星型图对应的 Kac-Moody 李代数的圈 (loop) 代数的实现. 作为应用, 本文得到了 Kac-Moody 李代数的 Weyl 群的范畴化.

关键词 凝聚层 圈代数 加权射影线 根范畴

MSC (2010) 主题分类 17B67, 14F05

1 引言

代数表示论的一个中心研究课题是利用定向箭图的表示来阐述相应的李代数和包络代数. 这种阐述的可能性最早是由 Gabriel 在 1972 年给出的, 这也是代数表示论的起源之一. Gabriel^[1] 建立了单李代数根系与 Dynkin 型箭图的不可分解表示的维数向量之间的一一对应. 这个结果的一个深刻推广是 Kac 在 1980 年左右给出的. Kac^[2,3] 证明了给定一个域 k 和一个箭图 Q , 它有一个维数向量为 α 的 k -不可分解表示当且仅当 α 是相应李代数 $\mathfrak{g}_Q$ 的正根. 进一步, 设 $k = \mathbb{F}_q$, 令 $a_\alpha(q)$ 是维数向量为 α 的绝对不可分解表示同构类的个数, 他还证明了 $a_\alpha(q)$ 是 q 的一个整系数多项式, 并猜想 $a_\alpha(q) \in \mathbb{N}[q]$ 且 $a_\alpha(0) = \dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}_Q)_\alpha$. Crawley-Boevey 和 Van Den Bergh^[4] 证明了, 如果 α 是不可除的 (indivisible), 则 Kac 的猜想成立. 更一般情形最近被 Hausel 等证明 (参见文献 [5,6]).

以上结果强烈建议从箭图的表示范畴给出李代数的“范畴化”实现. Ringel^[7] 首先给出了单李代数的 Hall 代数实现; Frenkel 等^[8] 给出了仿射型李代数的 Hall 代数实现. 一般的 Kac-Moody 李代数的实现依赖于 Lusztig^[9] 给出的量子群的实现. Schofield 在一篇未出版的文章中使用了不同的方法给出了一般的 Kac-Moody 李代数的实现. 另一方面, 代数表示论的发展也提供了多种多样的范畴结构, 通过 Hall 代数方法, 可以得到新的李代数结构和 Kac 定理的类比形式, 丰富了李理论的内容. 这种原

英文引用格式: Dou R J, Ruan S Q, Xiao J, et al. The category of coherent sheaves over a weighted projective line and loop algebras (in Chinese). Sci Sin Math, 2018, 48: 1551–1570, doi: 10.1360/N012018-00011

则下, 一个典型的例子是通过加权射影线的凝聚层范畴, 使用 Hall 代数方法给出一类椭圆型李代数的实现 (参见文献 [10, 11]). Crawley-Boevey^[12] 应用 Hall 代数方法刻画了 Kac-Moody 李代数的圈代数的根系与加权射影线的凝聚层范畴的 Grothendieck 群之间的对应关系, 这是 Kac 定理的推广.

本文的主要研究方法来自文献 [10–13]. 下面给出本文的基本框架. 第 2 节回顾加权射影线的凝聚层范畴的具体结构. 第 3 节介绍星型图对应的 Kac-Moody 李代数以及它的仿射化和圈化. 第 4 节阐述从根范畴出发构造复李代数的几何方法. 应用到加权射影线的凝聚层范畴, 我们得到了星型图对应的 Kac-Moody 李代数的圈代数到相应的凝聚层范畴的合成子代数之间的一个满同态, 并由此得到了凝聚层范畴中的 Kac 定理, 这是本文的主要内容, 将在第 5 节详细讨论. 第 6 节研究基本无限 (domestic) 型加权射影线的情形, 给出仿射型李代数的基的构造. 第 7 节主要考虑管 (tubular) 型加权射影线的情形, 证明圈代数与合成子代数之间的同构, 并研究它们与 2- 环形 (toroidal) 李代数以及椭圆李代数之间的同构关系. 最后一节利用凝聚层范畴的导出范畴中的一族突变 (mutation) 函子, 给出星型图对应的 Kac-Moody 李代数的 Weyl 群中单反射的范畴化.

本文是基于我们的系列讨论班关于理解加权射影线的凝聚层范畴与椭圆李代数的关系的相关讨论而逐渐形成的, 我们希望刻画加权射影线的凝聚层范畴的 Hall 型李代数 (参见文献 [12] 或第 5 节) 与星形箭图对应的 Kac-Moody 李代数的圈代数之间的精确关系. 定理 1 和命题 4 揭示了部分关系, 但是我们仍然不知道 $\text{Ker}(\phi)$ 的确切刻画. 我们感谢参加讨论班的同仁们提出的各种宝贵意见.

2 加权射影线的凝聚层范畴

加权射影线由 Geigle 和 Lenzing^[14] 引入, 本节回顾它的凝聚层范畴的结构.

2.1 加权射影线

设 $t \in \mathbb{N}$ 是一个自然数, $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_t) \in \mathbb{N}^t$, 称为权序列. 考虑 $\mathbb{Z}$ - 模

$$\mathbb{L}(\mathbf{p}) = \mathbb{Z}\vec{x}_1 \oplus \mathbb{Z}\vec{x}_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\vec{x}_t / J,$$

其中 J 是由 $\{p_1\vec{x}_1 - p_i\vec{x}_i \mid i = 2, \dots, t\}$ 生成的子模. 记 $\vec{c} = p_1\vec{x}_1 = \cdots = p_t\vec{x}_t \in \mathbb{L}(\mathbf{p})$, 称为典范元, 则 $\mathbb{L}(\mathbf{p})$ 中的每一个元素 $\vec{x} \in \mathbb{L}$ 具有标准型 $\vec{x} = \sum_{i=1}^t l_i\vec{x}_i + l\vec{c}$, 其中 $0 \leq l_i \leq p_i - 1, l \in \mathbb{Z}$.

设 k 是任意的域, 则 t - 元多项式环 $k[X_1, \dots, X_t]$ 具有 $\mathbb{L}(\mathbf{p})$ - 分次代数结构, 它的分次由 $\deg X_i = \vec{x}_i$ 来确定. 我们把它记为 $S(\mathbf{p})$.

设 $\underline{\lambda} = \{\lambda_1, \dots, \lambda_t\}$ 是射影直线 $\mathbb{P}^1(k)$ 上次数为 1 的两两不同的闭点构成的序列, 称为参数序列. 在相差射影直线的自同构意义下, 不妨设 $\lambda_1 = \infty, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 1$. 定义 $I(\mathbf{p}, \underline{\lambda})$ 为 $S(\mathbf{p})$ 中由 $\{X_i^{p_i} - (X_2^{p_2} - \lambda_i X_1^{p_1}) \mid i = 3, \dots, t\}$ 生成的 $\mathbb{L}(\mathbf{p})$ - 齐次理想. 令 $S(\mathbf{p}, \underline{\lambda}) = S(\mathbf{p}) / I(\mathbf{p}, \underline{\lambda})$, 则它也是一个 $\mathbb{L}(\mathbf{p})$ - 分次代数. 对于任意的 $1 \leq i \leq t$, X_i 在 $S(\mathbf{p}, \underline{\lambda})$ 中的象记为 x_i .

定义 $\mathbb{X}_{\mathbf{p}, \underline{\lambda}} = \text{Spec}^{\mathbb{L}(\mathbf{p})} S(\mathbf{p}, \underline{\lambda})$ 为 $S(\mathbf{p}, \underline{\lambda})$ 中所有 $\mathbb{L}(\mathbf{p})$ - 齐次素理想的集合, 称为权型是 $(\mathbf{p}, \underline{\lambda})$ 的加权射影线, 每个 p_i 称为点 λ_i 的权.

下面固定 $\mathbf{p}$ 和 $\underline{\lambda}$, 并简记 $S = S(\mathbf{p}, \underline{\lambda})$, $\mathbb{X} = \mathbb{X}_{\mathbf{p}, \underline{\lambda}}$.

2.2 $\mathbb{X}_{\mathbf{p}, \underline{\lambda}}$ 上的凝聚层

对于任意的齐次元 $f \in S$, 定义 Zariski 拓扑结构意义下的闭集 $V_f = \{\mathfrak{p} \in \mathbb{X} \mid f \in \mathfrak{p}\}$ 和主开集

$D_f = \mathbb{X} \setminus V_f$. 加权射影线 $\mathbb{X}$ 的结构层 $\mathcal{O}_{\mathbb{X}}$ 定义成 $\mathbb{X}$ 上与预层 $D_f \mapsto S_f$ 相伴的 $\mathbb{L}(\mathbf{p})$ - 分次代数层, 其中 $S_f = \{\frac{g}{f^l} \mid g \in S, l \in \mathbb{N}\}$. 记 $\mathcal{O}_{\mathbb{X}}\text{-Mod}$ 为 $\mathbb{X}$ 上所有的 $\mathbb{L}(\mathbf{p})$ - 分次 $\mathcal{O}_{\mathbb{X}}$ - 模层构成的范畴.

对于任意的 $\vec{x} \in \mathbb{L}(\mathbf{p})$ 和 $\mathbb{L}(\mathbf{p})$ - 分次 $\mathcal{O}_{\mathbb{X}}$ - 模 $\mathcal{M}$, 记 $\mathcal{M}(\vec{x})$ 为 $\mathcal{M}$ 通过 $\vec{x}$ 平移得到的层 (即对于任意的 $\vec{y} \in \mathbb{L}(\mathbf{p})$, 有 $\mathcal{M}(\vec{x})_{\vec{y}} = \mathcal{M}_{\vec{x}+\vec{y}}$). 一个 $\mathbb{L}(\mathbf{p})$ - 分次 $\mathcal{O}_{\mathbb{X}}$ - 模层 $\mathcal{M}$ 称为凝聚层, 如果存在 $\mathbb{X}$ 的一族开覆盖 $\{U_i\}_{i \in I}$, 使得对于任意的 $i \in I$, 都存在正合列

$$\bigoplus_{j=1}^n \mathcal{O}_{\mathbb{X}}(\vec{y}_{ij})|_{U_i} \rightarrow \bigoplus_{j=1}^m \mathcal{O}_{\mathbb{X}}(\vec{z}_{ij})|_{U_i} \rightarrow \mathcal{M}|_{U_i} \rightarrow 0,$$

其中 $\vec{y}_{ij}, \vec{z}_{ij} \in \mathbb{L}(\mathbf{p})$.

加权射影线 $\mathbb{X}$ 的凝聚层范畴记为 $\text{coh}(\mathbb{X})$, 它是 $\mathcal{O}_{\mathbb{X}}\text{-Mod}$ 的满子范畴. 文献 [14] 已经证明了 $\text{coh}(\mathbb{X})$ 是一个 Hom- 有限的 k - 线性遗传 Abel 范畴, 并且存在 Serre 对偶:

$$\text{Ext}^1(X, Y) \cong D\text{Hom}(Y, X(\vec{\omega})),$$

其中 $D = \text{Hom}_k(-, k)$ 是向量空间的对偶, $\vec{\omega} = (t-2)\vec{c} - \sum_{i=1}^t \vec{x}_i \in \mathbb{L}(\mathbf{p})$ 称为对偶元. 进而, 凝聚层范畴中存在 Auslander-Reiten 序列, 并且 Auslander-Reiten 变换 τ 由分次平移 $\vec{\omega}$ 给出, 即对于任意的凝聚层 X , 都有 $\tau(X) = X(\vec{\omega})$.

2.3 $\text{coh}(\mathbb{X})$ 的结构

本节描述 $\text{coh}(\mathbb{X})$ 的结构.

设 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{T}$ 分别是 $\text{coh}(\mathbb{X})$ 中由局部自由层 (向量丛) 和有限长度层构成的满子范畴, 它们都是扩张封闭的. $\mathcal{T}$ 是一个遗传长度范畴, $\mathcal{F}$ 中的对象没有单子对象.

引理 1 [14] 凝聚层范畴具有如下分解:

- (i) 每一个凝聚层 $\mathcal{M} \in \text{coh}(\mathbb{X})$ 可以分解成 $\mathcal{M}_t \oplus \mathcal{M}_f$, 其中 $\mathcal{M}_t \in \mathcal{T}$, $\mathcal{M}_f \in \mathcal{F}$;
- (ii) 对于任意的 $\mathcal{M}_t \in \mathcal{T}$ 和 $\mathcal{M}_f \in \mathcal{F}$, 有 $\text{Hom}(\mathcal{M}_t, \mathcal{M}_f) = \text{Ext}^1(\mathcal{M}_f, \mathcal{M}_t) = 0$.

为了更好地描述子范畴 $\mathcal{T}$ 的结构, 我们需要对 $\mathbb{X} = \text{Spec}^{\mathbb{L}(\mathbf{p})} S(\mathbf{p}, \underline{\lambda})$ 的闭点进行分类. 根据文献 [14], 每一个闭点 λ_i 对应 x_i 生成的齐次素理想, 称为例外点. 其余的闭点分别对应一个不可约齐次多项式 $F(x_1^{p_1}, x_2^{p_2})$ 生成的素理想, 其中 $F(T_1, T_2) \in k[T_1, T_2]$ 满足 $F(T_1, T_2) \neq T_2 - \lambda_i T_1$ ($3 \leq i \leq t$), 称为普通点.

令 $p = \text{l.c.m.}(p_1, \dots, p_t)$. 例外点的次数定义为 $\deg(\lambda_i) = \frac{p}{p_i}$; 普通点 x 的次数定义为 $\deg(x) = pd$, 其中 d 是 x 对应的 $k[T_1, T_2]$ 中不可约多项式 $F(T_1, T_2)$ 的次数.

设 C_r 是含有 r 个顶点的循环箭图. 更准确地, 当 $r = 1$ 时, C_1 是经典的 Jordan 箭图, 它只含有一个顶点和一个有向圈. 对于 $r \geq 2$, C_r 的顶点指标集为 $\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$, 对于任意的顶点 i , 从顶点 i 到 $i-1$ 恰好有一个箭向. 记 $\text{rep}_0(C_r)_k$ 为 C_r 在域 k 上的幂零表示范畴. 下面的引理给出子范畴 $\mathcal{T}$ 的详细刻画.

引理 2 [14] 有限长度子范畴 $\mathcal{T}$ 具有如下分解:

- (i) $\mathcal{T} = \coprod_{x \in \mathbb{X}} \mathcal{T}_x$, 其中 $\mathcal{T}_x$ 是支撑在闭点 $x \in \mathbb{X}$ 上的有限长度层全体构成的满子范畴;
- (ii) 对于任意的次数为 d 的普通点 x , 设 k_x 为点 x 处的剩余类域, 则 $\mathcal{T}_x$ 等价于 $\text{rep}_0(C_1)_{k_x}$;
- (iii) 对于任意闭点 λ_i ($1 \leq i \leq t$), $\mathcal{T}_{\lambda_i}$ 等价于 $\text{rep}_0(C_{p_i})_k$.

下面考虑范畴 $\mathcal{T}$ 中的不可分解对象. 首先回顾循环箭图的幂零表示范畴的经典结果:

(1) 范畴 $\text{rep}_0(C_1)$ 的不可分解对象同构类集合为 $\{S(a) \mid a \in \mathbb{N}\}$, 其中 $S = S(1)$ 是唯一的单对象, $S(a)$ 是长度为 a 的唯一不可分解对象. 特别地, 对于任意的划分 $\mu = (\mu_1 \geq \cdots \geq \mu_n)$, 记 $S(\mu) = \bigoplus_{i=1}^n S(\mu_i)$, 则每一个幂零表示都同构于某一个 $S(\mu)$.

(2) 范畴 $\text{rep}_0(C_r)$ 的不可分解对象同构类的集合为 $\{S_j(a) \mid 1 \leq j \leq r, a \in \mathbb{N}\}$, 其中 $\{S_j = S_j(1) \mid 1 \leq j \leq r\}$ 是 r 个互不同构的单对象的完全集, $S_j(a)$ 是顶部 (top) 为 S_j 长度为 a 的唯一不可分解对象.

对于凝聚层范畴中的单对象, 我们下面的刻画.

设 x 是次数为 d 的普通点, 它对应的齐次素理想记为 $(F(x_1^{p_1}, x_2^{p_2}))$. 通过乘以多项式 $F(x_1^{p_1}, x_2^{p_2})$ 诱导如下正合列:

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{X}} \xrightarrow{F(x_1^{p_1}, x_2^{p_2})} \mathcal{O}_{\mathbb{X}}(d\vec{c}) \rightarrow S_x \rightarrow 0.$$

在同构意义下, S_x 是范畴 $\mathcal{T}_x$ 中唯一的单对象. 对于任意的 $\vec{x} \in \mathbb{L}(\mathbf{p})$, 都有 $S_x(\vec{x}) = S_x$.

对于例外点 λ_i , 通过乘以 x_i 诱导如下的正合列:

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{X}}((j-1)\vec{x}_i) \xrightarrow{x_i} \mathcal{O}_{\mathbb{X}}(j\vec{x}_i) \rightarrow S_{i,j} \rightarrow 0, \quad 1 \leq j \leq p_i.$$

对于任意的 $1 \leq i \leq t$, $\{S_{i,j} \mid 1 \leq j \leq p_i\}$ 构成范畴 $\mathcal{T}_{\lambda_i}$ 中互不同构单层的完全集. 对于任意的标准型 $\vec{x} = \sum_{i=1}^t l_i \vec{x}_i + l\vec{c}$, 都有 $S_{i,j}(\vec{x}) = S_{i,j+l_i(\text{mod } p_i)}$.

结合引理 2, 我们得到了范畴 $\mathcal{T}$ 的所有不可分解对象: 对于任意的普通点 x , 范畴 $\mathcal{T}_x$ 中的不可分解对象形如 $S_x(a)$, $a \in \mathbb{N}$; 对于例外点 λ_i , 范畴 $\mathcal{T}_{\lambda_i}$ 中的不可分解对象可以表示为 $S_{i,j}(a)$, $1 \leq j \leq p_i$, $a \in \mathbb{N}$.

2.4 Grothendieck 群和 Euler 型

凝聚层范畴 $\text{coh}(\mathbb{X})$ 的 Grothendieck 群记为 $K_0(\text{coh}(\mathbb{X}))$. 下面的命题给出它的详细描述.

命题 1 我们有如下 $\mathbb{Z}$ -模同构:

$$K_0(\text{coh}(\mathbb{X})) \cong \left(\mathbb{Z}[\mathcal{O}_{\mathbb{X}}] \oplus \mathbb{Z}[\mathcal{O}_{\mathbb{X}}(\vec{c})] \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^t \bigoplus_{j=1}^{p_i} \mathbb{Z}[S_{i,j}] \right) \right) / I,$$

其中 I 是由 $\{\sum_{j=1}^{p_i} [S_{i,j}] + [\mathcal{O}_{\mathbb{X}}] - [\mathcal{O}_{\mathbb{X}}(\vec{c})] \mid i = 1, \dots, t\}$ 生成的子群.

Grothendieck 群 $K_0(\text{coh}(\mathbb{X}))$ 上存在 Euler 双线性型, 它可由下式诱导:

$$\langle [X], [Y] \rangle = \dim \text{Hom}(X, Y) - \dim \text{Ext}^1(X, Y), \quad \forall X, Y \in \text{coh}(\mathbb{X}).$$

相应的对称 Euler 双线性型定义为 $([X], [Y]) = \langle [X], [Y] \rangle + \langle [Y], [X] \rangle$.

从现在起, 简记 $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{\mathbb{X}}$.

引理 3 ^[10] 令 $\delta = [\mathcal{O}(\vec{c})] - [\mathcal{O}]$, 则有如下等式:

$$\begin{aligned} \langle \delta, \delta \rangle &= \langle \delta, [S_{i,j}] \rangle = \langle [S_{i,j}], \delta \rangle = 0, \\ \langle [\mathcal{O}], [\mathcal{O}] \rangle &= \langle [\mathcal{O}], \delta \rangle = -\langle \delta, [\mathcal{O}] \rangle = 1, \\ \langle [\mathcal{O}], [S_{i,j}] \rangle &= \delta_{j,p_i}, \quad \langle [S_{i,j}], [\mathcal{O}] \rangle = \delta_{j,1}, \\ \langle [S_{i,j}], [S_{i',j'}] \rangle &= \delta_{i,i'}(\delta_{j,j'} - \delta_{j,j'+1}(\text{mod } p_i)). \end{aligned}$$

Grothendieck 群 $K_0(\text{coh}(\mathbb{X}))$ 上可以定义一些重要的函数, 包括次数 (degree) 函数、秩 (rank) 函数和斜率 (slope) 函数等, 它们对加权射影线的分类起到了重要的作用, 下面回顾它们的定义.

首先介绍 $\mathbb{L}(\mathbf{p})$ 上的一个线性函数 $\delta: \mathbb{L}(\mathbf{p}) \rightarrow \mathbb{Z}; \vec{x} \mapsto \frac{p}{p_i}$, 其中 $p = \text{l.c.m.}(p_1, p_2, \dots, p_t)$ 表示最小公倍数. 根据 $\delta(\vec{\omega})$ 的符号, 加权射影线 $\mathbb{X}$ 可以分成三类. 具体地, 当 $\delta(\vec{\omega}) < 0$ 时, $\mathbb{X}$ 称为基本无限型, 此时权序列 $\mathbf{p}$ 包括 $(p, q), p, q \geq 1; (2, 2, n), n \geq 2; (2, 3, r), r = 3, 4, 5$; 当 $\delta(\vec{\omega}) = 0$ 时, $\mathbb{X}$ 称为管型, 此时权序列 $\mathbf{p}$ 包括 $(2, 2, 2, 2), (3, 3, 3), (4, 4, 2)$ 和 $(6, 3, 2)$; 当 $\delta(\vec{\omega}) > 0$ 时, $\mathbb{X}$ 称为野 (wild) 型, 它包含所有其余的权序列.

现在给出次数函数和秩函数的定义, 它们都是 $K_0(\text{coh}(\mathbb{X}))$ 上的线性函数. 注意到 $K_0(\text{coh}(\mathbb{X}))$ 有一组基为 $\{[\mathcal{O}(\vec{x})] \mid 0 \leq \vec{x} \leq \vec{c}\}$, 只需要在这组基上给出这两个函数的定义即可. 次数函数 $\deg: K_0(\text{coh}(\mathbb{X})) \rightarrow \mathbb{Z}$ 定义为 $\deg([\mathcal{O}(\vec{x})]) = \delta(\vec{x})$, 秩函数 $\text{rk}: K_0(\text{coh}(\mathbb{X})) \rightarrow \mathbb{Z}$ 定义为 $\text{rk}([\mathcal{O}(\vec{x})]) = 1$.

进一步, 对于任意非零的凝聚层 X , 它的斜率定义成 $\mu(X) = \frac{\deg([X])}{\text{rk}([X])}$. 斜率函数给出凝聚层范畴的一种稳定条件. 称凝聚层 X 为半稳定的, 如果对于 X 的任意的子对象 Y , 都有 $\mu(Y) \leq \mu(X)$; 称 X 为稳定的, 如果对于 X 的任意非零真子对象 Y , 都有 $\mu(Y) < \mu(X)$. 根据定义知, 有限长度层的秩为零, 因此斜率为无穷大, 从而它们都是半稳定的, 其中的稳定对象恰好为所有的单层; 而向量丛的稳定性质要复杂得多, 它们要依据权型的不同来阐述. 具体地, 对于基本无限型的加权射影线, 任何非零向量丛都是稳定的; 对于管型的情形, 任何非零向量丛都是半稳定的, 并且存在非稳定的向量丛; 而对于野型的加权射影线, 总存在非半稳定的向量丛.

3 星形图和圈代数

给定权序列 $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_t)$, 我们得到一个星形图 Γ :

记 $I = \{*; ij := [i, j]; 1 \leq i \leq t, 1 \leq j \leq p_i - 1\}$ 为 Γ 的点集, $A = (a_{u,v})_{u,v \in I}$ 表示它的广义 Cartan 矩阵, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(\Gamma)$ 表示对应的 Kac-Moody 李代数, 生成元分别记为 e_u, f_u 和 $h_u (u \in I)$, $\mathfrak{h}$ 表示 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数, $\mathfrak{g}$ 的根系和根格分别记为 Δ 和 Q , 根系 Δ 中的单根分别记为 α_* 和 $\alpha_{ij}, 1 \leq i \leq t, 1 \leq j \leq p_i - 1$. 李代数 $\mathfrak{g}$ 上具有一个标准的不变双线性型 $(-, -)$, 它在生成元上定义为

$$\begin{aligned} (e_u, e_v) &= 0, & (f_u, f_v) &= 0, & (h_u, h_v) &= a_{u,v}, \\ (h_u, e_v) &= 0, & (h_u, f_v) &= 0, & (e_u, f_v) &= \delta_{u,v}. \end{aligned}$$

它满足对于 $\mathfrak{g}$ 中任意的元素 x, y 和 z , 都有 $([x, y], z) = (x, [y, z])$, 且对于任意的 $\alpha \neq 0, (-, -)|_{\mathfrak{g}_\alpha + \mathfrak{g}_{-\alpha}}$ 是非退化的; 对于任意的 $\alpha + \beta \neq 0$, 有 $(\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta) = 0$.

李代数 $\mathfrak{g}$ 可以分别进行仿射化和圈化.

3.1 仿射化

李代数 $\mathfrak{g}$ 的仿射化定义为 $\hat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}c$, 其中 c 是中心元, 李括号定义为

$$[xt^n, yt^m] = [x, y]t^{m+n} + n\delta_{n,-m}(x, y)c, \quad x, y \in \mathfrak{g}.$$

李代数 $\hat{\mathfrak{g}}$ 的根格为 $\hat{Q} = Q \oplus \mathbb{Z}\delta$, 根系为 $\hat{\Delta} = \Delta \oplus \mathbb{Z}\delta$. 因此, $\hat{\mathfrak{g}}$ 是 $\hat{Q}$ -分次代数, 其中

$$\hat{\mathfrak{g}}_{\alpha+l\delta} = \mathfrak{g}_{\alpha}t^l, \quad \hat{\mathfrak{g}}_0 = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}c, \quad \hat{\mathfrak{g}}_{l\delta} = \mathfrak{h}t^l.$$

李代数 $\mathfrak{g}$ 的根格 Q 上的 Cartan 型诱导 $\hat{Q}$ 上的 Cartan 型: $(\alpha + r\delta, \beta + s\delta) = (\alpha, \beta)$. 李代数 $\hat{\mathfrak{g}}$ 中也存在如下不变双线性型:

$$(xt^l + ac, yt^m + bc) = (x, y)\delta_{l,-m}, \quad x, y \in \mathfrak{g}, \quad a, b \in \mathbb{C}.$$

3.2 圈化

李代数 $\mathfrak{g}$ 的圈代数 $\mathcal{L}\mathfrak{g}$ 是由 $h_{u,k}$ 、 $e_{u,k}$ 和 $f_{u,k}$ ($u \in I, k \in \mathbb{Z}$) 以及 c 生成, 满足如下关系:

$$\begin{aligned} [h_{u,k}, h_{v,l}] &= k\delta_{k,-l}a_{u,v}c, \\ [e_{u,k}, f_{v,l}] &= \delta_{u,v}h_{u,k+l} + k\delta_{k,-l}c, \\ [h_{u,k}, e_{v,l}] &= a_{u,v}e_{v,l+k}, \quad [h_{u,k}, f_{v,l}] = -a_{u,v}f_{v,l+k}, \\ [e_{u,k}, e_{u,l}] &= 0, \quad [f_{u,k}, f_{u,l}] = 0, \quad c \text{ 是中心元}, \\ [e_{u,k_1}, [e_{u,k_2}, [\dots, [e_{u,k_n}, e_{v,l}] \dots]]] &= 0, \quad \text{其中 } n = 1 - a_{u,v}, \\ [f_{u,k_1}, [f_{u,k_2}, [\dots, [f_{u,k_n}, f_{v,l}] \dots]]] &= 0, \quad \text{其中 } n = 1 - a_{u,v}. \end{aligned}$$

李代数 $\mathcal{L}\mathfrak{g}$ 和 $\hat{\mathfrak{g}}$ 具有相同的根格和根系, 生成元 $e_{u,k}$ 、 $f_{u,k}$ 和 $h_{u,k}$ 的次数分别定义成 $\alpha_u + k\delta$ 、 $-\alpha_u + k\delta$ 和 $k\delta$. 显然, 存在保持分次的代数满同态:

$$\varphi: \mathcal{L}\mathfrak{g} \longrightarrow \hat{\mathfrak{g}}, \quad e_{u,k} \mapsto e_u t^k, \quad f_{u,k} \mapsto f_u t^k, \quad h_{u,k} \mapsto h_u t^k, \quad c \mapsto c.$$

李代数 $\mathcal{L}\mathfrak{g}$ 和 $\hat{\mathfrak{g}}$ 的根格可以自然地看成长型为 $(\underline{p}, \underline{\lambda})$ 的加权射影线的凝聚层范畴的 Grothendieck 群. 事实上, 我们有自然的 $\mathbb{Z}$ -模同构 $K_0(\text{coh}(\mathbb{X})) \cong \hat{Q}$, 具体的对应方式为

$$[S_{i,j}] \mapsto \alpha_{ij} \quad (1 \leq j \leq p_i - 1), \quad [S_{i,p_i}] \mapsto \delta - \sum_{j=1}^{p_i-1} \alpha_{ij}, \quad [\mathcal{O}(k\vec{c})] \mapsto \alpha_* + k\delta \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

因此, 通过凝聚层范畴, 我们可以把根格重新划分成正负两部分 $\hat{Q} = \hat{Q}_+ \cup \hat{Q}_-$, 其中 $\hat{Q}_+$ 定义为 α_{ij} 、 $\delta - \sum_{j=1}^{p_i-1} \alpha_{ij}$ 和 $\alpha_* + k\delta$ 以及 δ 的非负线性组合, $\hat{Q}_- = \hat{Q}_+$. 相应地, 对于凝聚层范畴中的任意对象 X , $[X] \in K_0(\text{coh}(\mathbb{X}))$ 在上述同构下的像称为 X 的型.

4 导出范畴和李代数

设 Λ 是域 $\mathbb{C}$ 上的一个有限维结合代数, 其总体维数有限. 在 Morita 等价意义下, 它可以表示成 $\Lambda = \mathbb{C}\vec{\Gamma}/I$, 其中 $\vec{\Gamma}$ 是一个箭图, I 是由一些关系生成的容许理想.

考虑有限维 Λ -模全体构成的范畴 $\text{mod } \Lambda$ 以及它的有界导出范畴 $D^b(\Lambda)$. 文献 [13] 从根范畴 $D^b(\Lambda)/(T^2)$ 得到了复李代数的几何实现, 这里简单回顾如下.

4.1 李代数的几何实现

设 $\{P_1, P_2, \dots, P_l\}$ 是互不同构的不可分解投射 Λ -模的完全集. 一个 Λ -模复形 $C^\bullet$ 称为 2-周期复形, 如果它满足 $C^\bullet[2] = C^\bullet$. 令 $P^\bullet = (P^0, P^1, \partial_0, \partial_1)$ 是一个由投射 Λ -模构成的 2-周期复形, 并设每个投射模 P^i 可以分解成 $P^i = \bigoplus_{j=1}^l e_j^i P_j$. 向量 $(e_1^i, e_2^i, \dots, e_l^i)$ 记为 $\underline{e}(P^i)$, 并称 $\underline{e} = (\underline{e}(P^0), \underline{e}(P^1))$ 为 $P^\bullet$ 的投射维数序列. 定义

$$\mathcal{P}_2(\Lambda, \underline{e}) = \{(\partial_0, \partial_1) \in \text{Hom}_\Lambda(P^0, P^1) \times \text{Hom}_\Lambda(P^1, P^0) \mid \partial_0 \partial_1 = 0 = \partial_1 \partial_0\}.$$

代数群 $G_{\underline{e}} = \text{Aut}_\Lambda(P^0) \times \text{Aut}_\Lambda(P^1)$ 通过共轭作用可以作用在 $\mathcal{P}_2(\Lambda, \underline{e})$ 上, 两个投射复形落在同一个轨道当且仅当它们拟同构.

设 K_0 是 $D^b(\Lambda)$ 的 Grothendieck 群, 它自然也是根范畴 $\mathcal{R}_\Lambda := D^b(\Lambda)/(T^2)$ 的 Grothendieck 群. 从投射维数序列构成的 Abel 群到 K_0 有一个自然的满同态, 记为 $\underline{\dim}$. 对于任意的 $\underline{d} \in K_0$, 定义 $\mathcal{P}_2(\Lambda, \underline{d}) = \bigcup_{\underline{e} \in \underline{\dim}^{-1}(\underline{d})} \mathcal{P}_2(\Lambda, \underline{e})$, 则 $\mathcal{P}_2(\Lambda, \underline{e})$ 的拓扑结构自然诱导 $\mathcal{P}_2(\Lambda, \underline{d})$ 上的拓扑结构, 具体细节参见文献 [13]. 从而, $G_{\underline{d}} = \bigcup_{\underline{e} \in \underline{\dim}^{-1}(\underline{d})} G_{\underline{e}}$ 局部作用在 $\mathcal{P}_2(\Lambda, \underline{d})$ 上. 进一步, 令 $T_{\underline{e}} = \{t_x^\pm \mid x \in \mathcal{P}_2(\Lambda, \underline{e})\}$ 是可缩复形, 并记 $T = \bigcup_{\underline{e} \in \underline{\dim}^{-1}(\underline{0})} T_{\underline{e}}$, 则它们也局部作用在 $\mathcal{P}_2(\Lambda, \underline{d})$ 上, 其中 $t_x^+(y) = x \oplus y$, 而 $t_x^-(x \oplus y) = y$. 我们把 $\mathcal{P}_2(\Lambda, \underline{d})$ 在群胚 $\langle G_{\underline{d}}, T \rangle$ 作用下的轨道记为

$$\mathcal{Q}\mathcal{P}_2(\Lambda, \underline{d}) = \mathcal{P}_2(\Lambda, \underline{d}) / \langle G_{\underline{d}}, T \rangle.$$

记 $M(X)$ 为代数簇 X 上的复值可构函数构成的集合, 它自然是一个 $\mathbb{C}$ -线性空间. 设 G 是一个代数群, 它作用在 X 上. 我们将 $M(X)$ 中 G -不变的函数构成的子空间记为 $M_G(X)$.

令 $\underline{d}$ 是 K_0 中的一个维数向量, $\mathcal{O}$ 是 $\mathcal{P}_2(\Lambda, \underline{d})$ 的一个 $\langle G_{\underline{d}}, T \rangle$ -不变且支撑有界的可构子集. 这里, 支撑有界指的是存在投射维数序列 $\underline{e}$, 使得 $\mathcal{O} = \langle G_{\underline{d}}, T \rangle(\mathcal{O} \cap \mathcal{P}_2(\Lambda, \underline{e}))$, 此时称 $\underline{e}$ 是 $\mathcal{O}$ 的一个支撑投射维数序列. 定义函数 $1_{\mathcal{O}} : \mathcal{P}_2(\Lambda, \underline{d}) \rightarrow \mathbb{C}$, 它在 $\mathcal{O}$ 上的每个点处取值为 1, 在其余点处取值为 0. 称 $\mathcal{P}_2(\Lambda, \underline{d})$ 上的一个函数 f 为 $\langle G_{\underline{d}}, T \rangle$ -不变的可构函数, 如果它可以写成有限和 $f = \sum_i m_i 1_{\mathcal{O}_i}$ 的形式, 其中 $m_i \in \mathbb{C}$ 且每个 $\mathcal{O}_i$ 都是 $\mathcal{P}_2(\Lambda, \underline{d})$ 的 $\langle G_{\underline{d}}, T \rangle$ -不变且支撑有界的可构子集.

设 $\underline{e}_1$ 和 $\underline{e}_2$ 是 $\underline{\dim}^{-1}(\underline{d})$ 中的投射维数序列. 两个可构函数 $f_i \in M_{G_{\underline{e}_i}}(\mathcal{P}_2(\Lambda, \underline{e}_i))$ ($i = 1, 2$) 称为等价, 如果存在 $\mathcal{P}_2(\Lambda, \underline{d})$ 上的一个 $\langle G_{\underline{d}}, T \rangle$ -不变的可构函数 F , 使得 $f_i = F|_{\mathcal{P}_2(\Lambda, \underline{e}_i)}$. 记

$$M_{GT}(\mathcal{P}_2(\Lambda, \underline{d})) = \{\hat{f} \mid f \in M_{G_{\underline{e}}}(\Lambda, \underline{e}), \underline{e} \in \underline{\dim}^{-1}(\underline{d})\},$$

其中 $\hat{f}$ 表示 f 的等价类. $\hat{f}$ 称为不可分解的, 如果 $\text{supp}(f)$ 中的任何点在 2-周期投射复形的 (相对) 同伦范畴中都是不可分解的. 我们把 $M_{GT}(\mathcal{P}_2(\Lambda, \underline{d}))$ 中所有不可分解等价类构成的 $\mathbb{C}$ -线性空间记为 $I_{GT}(\underline{d})$.

设 $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{P}_2(\Lambda, \underline{e}') \subset \mathcal{P}_2(\Lambda, \underline{d}_1)$ 和 $\mathcal{O}_2 \subset \mathcal{P}_2(\Lambda, \underline{e}'') \subset \mathcal{P}_2(\Lambda, \underline{d}_2)$ 分别为 $G_{\underline{e}'}$ -不变和 $G_{\underline{e}''}$ -不变的可构集合. 对于任意的 $L \in \mathcal{P}_2(\Lambda, \underline{e}' + \underline{e}'')$, 令

$$W(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2; L) = \{(f, g, h) \mid Y \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} X \xrightarrow{h} TY \text{ 是好三角且 } X \in \mathcal{O}_1, Y \in \mathcal{O}_2\},$$

则商空间 $W(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2; L)/G_{\underline{e}'} \times G_{\underline{e}''}$ 与 $\langle G_{\underline{d}_1}, T \rangle \mathcal{O}_1$ 和 $\langle G_{\underline{d}_2}, T \rangle \mathcal{O}_2$ 的支撑投射维数序列的选取无关, 我们将其记为 $V(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2; L)$. 因此, 卷积 $\hat{1}_{\mathcal{O}_1} * \hat{1}_{\mathcal{O}_2} \in M_{GT}(\mathcal{P}_2(\Lambda, \underline{d}_1 + \underline{d}_2))$ 可以如下定义:

$$\hat{1}_{\mathcal{O}_1} * \hat{1}_{\mathcal{O}_2}(L) = F_{\mathcal{O}_1 \mathcal{O}_2}^L := \chi(V(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2; L)),$$

其中 χ 表示商空间的拟 Euler 特征, 参见文献 [13].

设 $\mathfrak{h} = K_0 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ 是由 $\{h_{\underline{d}} \mid \underline{d} \in K_0\}$ 线性张成的 $\mathbb{C}$ -线性空间, 它上面的对称 Euler 双线性型定义为

$$\begin{aligned} (h_{\underline{d}_1} \mid h_{\underline{d}_2}) &= \dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Hom}(X, Y) - \dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Hom}(X, TY) \\ &\quad + \dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Hom}(Y, X) - \dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Hom}(Y, TX), \end{aligned}$$

其中 $X \in \mathcal{P}_2(\Lambda, \underline{d}_1)$, $Y \in \mathcal{P}_2(\Lambda, \underline{d}_2)$.

令 $\mathfrak{n} = \bigoplus_{\underline{d} \in K_0} I_{GT}(\underline{d})$, 则 $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}$ 构成一个 $\mathbb{C}$ 上的李代数, 它的李括号 $[-, -]$ 定义为

$$\begin{aligned} [h_{\underline{d}_1}, h_{\underline{d}_2}] &:= 0, \\ [\hat{1}_{\mathcal{O}_2}, h_{\underline{d}_1}] &= -[h_{\underline{d}_1}, \hat{1}_{\mathcal{O}_2}] := (h_{\underline{d}_1} \mid h_{\underline{d}_2}) \hat{1}_{\mathcal{O}_2}, \\ [\hat{1}_{\mathcal{O}_1}, \hat{1}_{\mathcal{O}_2}] &= [\hat{1}_{\mathcal{O}_1}, \hat{1}_{\mathcal{O}_2}]_{\mathfrak{n}} + \chi(\overline{\mathcal{O}_1 \cap T\mathcal{O}_2}) h_{\underline{d}_1}, \end{aligned}$$

其中 $[\hat{1}_{\mathcal{O}_1}, \hat{1}_{\mathcal{O}_2}]_{\mathfrak{n}}(L) := F_{\mathcal{O}_1 \mathcal{O}_2}^L - F_{\mathcal{O}_2 \mathcal{O}_1}^L$, 而 $\overline{\mathcal{O}_1 \cap T\mathcal{O}_2} \simeq (\mathcal{O}_1 \cap T\mathcal{O}_2)_{\underline{e}}/G_{\underline{e}}$, 这里 $\underline{e}$ 是 $\mathcal{O}_1 \cap T\mathcal{O}_2$ 的一个投射维数序列.

4.2 导出等价和李代数

众所周知, 权型为 $(\underline{p}, \underline{\lambda})$ 的加权射影线 $\mathbb{X} := \mathbb{X}_{\underline{p}, \underline{\lambda}}$ 与 Ringel^[15] 介绍的一类典范代数 $\Lambda := \Lambda_{\underline{p}, \underline{\lambda}}$ 具有密切的联系. 事实上, 加权射影线的凝聚层范畴 $\operatorname{coh}(\mathbb{X})$ 中存在一个典范的倾斜对象, 使得它的自同态代数同构于典范代数 Λ , 因此, 它们的导出范畴之间是三角等价的:

$$F : D^b(\operatorname{coh}(\mathbb{X})) \simeq D^b(\operatorname{mod}(\Lambda^{op})),$$

从而, 它们的根范畴也是三角等价 $F : \mathcal{R}_{\mathbb{X}} \simeq \mathcal{R}_{\Lambda}$. 根据第 4.1 小节, 从这个根范畴出发, 我们可以定义一个复李代数, 记为 $\mathfrak{L}(\mathcal{R}_{\mathbb{X}})$.

注意到凝聚层范畴 $\operatorname{coh}(\mathbb{X})$ 是一个遗传 Abel 范畴, 因此, 它的根范畴 $\mathcal{R}_{\mathbb{X}}$ 的不可分解对象的同构类全体可以表示为

$$\operatorname{ind} \mathcal{R}_{\mathbb{X}} = \{X, TX \mid X \in \operatorname{ind}(\operatorname{coh}(\mathbb{X}))\}.$$

对于任意的单层 S , 定义 $S[r]$ 如下: 当 $r > 0$ 时, $S[r] = S^{(r)}$ 表示长度为 r 且顶部为 S 的唯一有限长度层; 当 $r < 0$ 时, $S[r] = TY$, 其中 Y 是长度为 $-r$ 且满足 $\operatorname{Ext}^1(Y, S) \neq 0$ 的唯一有限长度层. 用 H_r 表示根范畴 $\mathcal{R}_{\mathbb{X}}$ 中类型为 $r\delta$ 且满足对于任意的 $1 \leq i \leq t$, $1 \leq j \leq p_i - 1$, 都有 $\operatorname{Hom}(X, S_{i,j}) = 0$ 的不可分解对象的集合.

引理 4 ^[16] (i) 对于任意的 $X \in \text{ind}\mathcal{R}_{\mathbb{X}}$, 假设 $F(X) \in \mathcal{P}_2(\Lambda, \underline{e})$, 则 $\hat{1}_{G_{\underline{e}}F(X)} \in I_{GT}(\underline{\dim} \underline{e})$.
(ii) 假设 $F(H_r) \subset \mathcal{P}_2(\Lambda, \underline{e}(r))$, 则 $\hat{1}_{G_{\underline{e}(r)}F(H_r)} \in I_{GT}(\underline{\dim} \underline{e}(r))$ 且 $\chi(G_{\underline{e}(r)}F(H_r)/G_{\underline{e}(r)}) = 2$.
以下简记 $\hat{1}_{(X)} = \hat{1}_{G_{\underline{e}}F(X)}$ 和 $\hat{1}_{(H_r)} = \hat{1}_{G_{\underline{e}(r)}F(H_r)}$.

5 合成李代数 and 圈代数

从加权射影线 $\mathbb{X}$ 的凝聚层范畴的根范畴出发, 我们构造了一类李代数 $\mathfrak{L}(\mathcal{R}_{\mathbb{X}})$, 本节讨论它与星型图对应的圈代数 $\mathcal{L}\mathfrak{g}$ 之间的联系. 首先定义一个函数 $l(r)$ 如下: 当 $r \geq 0$ 时, 令 $l(r) = 1$; 当 $r < 0$ 时, 令 $l(r) = -1$.

定理 1 ^[16] 下列元素 (见第 3.2 小节) 满足 $\mathcal{L}\mathfrak{g}$ 中的生成关系:

$$e_{v,r} = \begin{cases} l(r)\hat{1}_{(S_{i,j}[rp_i+1])}, & v = [i,j], \\ \hat{1}_{(\mathcal{O}(r\vec{c}))}, & v = *, \end{cases} \quad f_{v,r} = \begin{cases} l(r-1)\hat{1}_{(S_{i,j-1}[rp_i-1])}, & v = [i,j], \\ -\hat{1}_{(T\mathcal{O}(-r\vec{c}))}, & v = *, \end{cases}$$

$$c = -\delta, \quad h_{v,r} = \begin{cases} -\alpha_v, & r = 0, \\ l(r)\hat{1}_{(S_{i,j}[rp_i])} - l(r)\hat{1}_{(S_{i,j-1}[rp_i])}, & r \neq 0, \quad v = [i,j], \\ l(r)\hat{1}_{(H_r)}, & r \neq 0, \quad v = *. \end{cases}$$

换言之, 李代数 $\mathfrak{L}(\mathcal{R}_{\mathbb{X}})$ 中由 $\hat{1}_{(H_r)}$ 、 $\hat{1}_{(S_{i,j}[\epsilon])}$ 和 $\hat{1}_{(\mathcal{O}(r\vec{c}[\epsilon])}$ ($r \in \mathbb{Z}$, $\epsilon \in \{0, 1\}$) 生成的子代数, 称为合成子代数, 并记为 $\mathfrak{L}_c(\mathcal{R}_{\mathbb{X}})$, 是圈代数 $\mathcal{L}\mathfrak{g}$ 的商代数, 即存在满同态 $\phi: \mathcal{L}\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{L}_c(\mathcal{R}_{\mathbb{X}})$.

根据文献 [13] 中的结果可知, 通过根范畴定义的李代数 $\mathfrak{L}(\mathcal{R}_{\mathbb{X}})$ 具有不变双线性型 $(-, -)$. 把它限制到合成子代数 $\mathfrak{L}_c(\mathcal{R}_{\mathbb{X}})$ 上, 我们得到 $\mathfrak{L}_c(\mathcal{R}_{\mathbb{X}})$ 上的一个双线性型, 仍然记为 $(-, -)$.

命题 2 李代数 $\mathfrak{L} := \mathfrak{L}_c(\mathcal{R}_{\mathbb{X}})$ 上的对称双线性型 $(-, -)$ 满足

- (i) $(-, -)$ 是不变双线性型, 即对于任意的 $x, y, z \in \mathfrak{L}_c(\mathcal{R}_{\mathbb{X}})$, 有 $([x, y], z) = (x, [y, z])$;
- (ii) 对任意的 $\alpha \neq 0$, $(\cdot, \cdot)|_{\mathfrak{L}_{\alpha} + \mathfrak{L}_{-\alpha}}$ 是非退化的;
- (iii) 若 $\alpha + \beta \neq 0$, 则 $(\mathfrak{L}_{\alpha}, \mathfrak{L}_{\beta}) = 0$;
- (iv) $(h_{d_1}, h_{d_2}) = (d_1, d_2)$, 其中 (d_1, d_2) 是对称 Euler 双线性型;
- (v) 对于任意不可分解的 $\mathcal{O}_1$ 和 $\mathcal{O}_2$, 有 $(\hat{1}_{\mathcal{O}_1}, \hat{1}_{\mathcal{O}_2}) = -\chi(\overline{\mathcal{O}_1 \cap T\mathcal{O}_2})$.

根据定理 1 可知, 存在满同态 $\phi: \mathcal{L}\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{L}_c(\mathcal{R}_{\mathbb{X}})$. 因此, $\mathfrak{L}_c(\mathcal{R}_{\mathbb{X}})$ 中的不变双线性型诱导圈代数 $\mathcal{L}\mathfrak{g}$ 上的一个不变双线性型:

$$(\alpha, \beta) := (\phi(\alpha), \phi(\beta)), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathcal{L}\mathfrak{g}.$$

命题 3 在生成元上, $\mathcal{L}\mathfrak{g}$ 上的不变双线性型满足如下关系:

$$(e_{v,k}, e_{w,l}) = 0, \quad (f_{v,k}, f_{w,l}) = 0, \quad (h_{v,k}, h_{w,l}) = a_{v,w}\delta_{k,-l}, \quad (c, -) = 0,$$

$$(h_{v,k}, e_{w,l}) = 0, \quad (h_{v,k}, f_{w,l}) = 0, \quad (e_{v,k}, f_{w,l}) = \delta_{v,w}\delta_{k,-l}.$$

命题 4 满同态 $\varphi: \mathcal{L}\mathfrak{g} \rightarrow \hat{\mathfrak{g}}$ 保持不变双线性型, 即对于任意 $\alpha, \beta \in \mathcal{L}\mathfrak{g}$, 有 $(\alpha, \beta) = (\varphi(\alpha), \varphi(\beta))$, 而且, φ 经过满同态 ϕ 分解:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}\mathfrak{g} & \xrightarrow{\varphi} & \hat{\mathfrak{g}} \\ \downarrow \phi & \nearrow & \\ \mathfrak{L}_c(\mathcal{R}_{\mathbb{X}}) & & \end{array}$$

证明 容易验证 φ 保持不变双线性型. 下面只需证明 $\ker\phi \subset \ker\varphi$ 即可.

任取 $a \in \ker\phi$, 考虑下面三种情形:

(1) $a \in \mathcal{L}\mathfrak{g}_{\alpha+r\delta}$. 此时, 若 $\varphi(a) \neq 0$, 则存在 $x \in \mathfrak{g}_\alpha$ ($\alpha \neq 0$), 使得 $\varphi(a) = xt^r$. 从而存在 $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$, 使得 $(x, y) \neq 0$, 因此, $(xt^r, yt^{-r}) = (x, y) \neq 0$. 选取 $b \in \varphi^{-1}(yt^{-r})$, 则 $(a, b) = (\varphi(a), \varphi(b)) = (\phi(a), \phi(b)) \neq 0$, 矛盾.

(2) $a \in \mathcal{L}\mathfrak{g}_{r\delta}$, $r \neq 0$. 此时可假设 $a = \sum a_i h_{i,r}$. 由 $\phi(a) = 0$ 可知每个系数 $a_i = 0$, 从而 $\varphi(a) = 0$.

(3) $a \in \mathcal{L}\mathfrak{g}_0$. 此时可令 $a = \sum a_i h_i + mc$. 由 $\phi(a) = \sum a_i h_i + mc = 0$ 可知 $a = 0$. $\square$

根据 Kac 定理的结果, 箭图 $\vec{\Gamma}$ 的不可分解表示的维数向量与对应的 Kac-Moody 李代数的正根之间一一对应. 对于加权射影线的凝聚层范畴, 也有如下类似的结果:

定理 2 ^[12] 设 $\mathbb{X}_{\mathbf{p}, \lambda}$ 是代数闭域 K 上的加权射影线, $\alpha \in \hat{Q}$, 则在凝聚层范畴 $\text{coh}(\mathbb{X}_{\mathbf{p}, \lambda})$ 中存在型为 α 的不可分解凝聚层当且仅当 α 是一个正根. 进一步, 对于每个实根, 存在唯一不可分解凝聚层与之对应; 而对于虚根, 存在无限多个不可分解对象与之对应.

这个定理描述了不可分解凝聚层可能的维数型. Crawley-Boevey ^[12] 将问题归结到 K 是一个有限域的代数闭包的情形, 并考虑在有限域 F_q 上定义加权射影线的凝聚层范畴的 Hall 李代数, 通过定理 1 给出这个定理的一个证明. 我们发现当 K 取复数域 $\mathbb{C}$ 时, 上述定理的证明可以简化. 事实上, 根据凝聚层范畴与相应的典范代数的模范畴之间的导出等价, 我们利用文献 [13] 的结果, 以 Euler 特征代替 Hall 数作为结构常数, 构造了复数域上加权射影线的凝聚层范畴对应的李代数, 并由此得到上述定理的一个直接而简短的证明.

6 基本无限型加权射影线

本节关注基本无限型加权射影线的情形, 考虑合成子代数 $\mathcal{L}_c(\mathcal{R}_{\mathbb{X}})$ 的结构. 本节总假设 $\mathbb{X}$ 是基本无限型的加权射影线. 在这种情形, 相应的星型图 Γ 分别为 A-D-E 型 Dynkin 图. 记 Γ 的扩张 Dynkin 图为 $\hat{\Gamma}$.

6.1 温和型遗传代数和基本无限型加权射影线

众所周知, 凝聚层范畴 $\text{coh}(\mathbb{X})$ 导出等价于模范畴 $\text{mod } \Lambda$, 其中 Λ 是 $\hat{\Gamma}$ 对应的路代数, 它是温和 (tame) 型遗传的. 更准确地, 我们有下面的定理:

定理 3 ^[14] 在向量丛范畴中, 任何一个完全切片 (slice) 上的不可分解向量丛的直和构成凝聚层范畴 $\text{coh}(\mathbb{X})$ 中的一个倾斜对象, 其自同态代数同构于 Λ . 因此,

$$D^b(\text{coh}(\mathbb{X})) \simeq D^b(\text{mod } \Lambda).$$

由于凝聚层范畴和温和型箭图的表示范畴都是遗传的, 它们的根范畴 $\mathcal{R}_\Lambda \cong \mathcal{R}_{\mathbb{X}} := \mathcal{R}$ 的不可分解对象可以表示为

$$\text{ind } \mathcal{R}_{\mathbb{X}} = \{X, TX \mid X \in \text{ind}(\text{coh}(\mathbb{X}))\} = \{Y, TY \mid Y \in \text{ind}(\text{mod } \Lambda)\}.$$

6.2 李代数的两种版本

由于星型图 Γ 是 A-D-E 型 Dynkin 图, 相应的 Kac-Moody 李代数 $\mathfrak{g}$ 是单李代数, 并且 $\mathcal{L}\mathfrak{g} \simeq \hat{\mathfrak{g}}$. 因此, 作为命题 4 的推论, 我们有

$$\mathcal{L}\mathfrak{g} \simeq \mathcal{L}_c(\mathcal{R}_{\mathbb{X}}) \simeq \hat{\mathfrak{g}}.$$

在这种情形, 圈代数 $\mathcal{L}\mathfrak{g}$ 也是一个 Kac-Moody 代数.

由于凝聚层范畴和温和型箭图的表示范畴都是遗传的, 它们的导出范畴是等价的. 一方面, 凝聚层范畴的合成李代数 $\mathfrak{L}_c(\mathcal{R}_{\mathbb{X}})$ 给出圈代数的一种实现. 另一方面, 温和型箭图的表示范畴的合成李代数 $\mathfrak{L}_c(\mathcal{R}_{\Lambda})$ 给出仿射型 Kac-Moody 李代数 $\hat{\mathfrak{g}}$ 的实现, 把生成元 $1_{(S_i)}$ 和 $1_{(TS_i)}$ (S_i 是单 Λ -模) 对应到 $\hat{\mathfrak{g}}$ 的标准生成元 e_i 和 f_i . 结合命题 4, 我们有如下交换图:

定理 4 设 $\mathbb{X}$ 是基本无限型的加权射影线, Γ 是相应的 Dynkin 图, Λ 是相应的温和型遗传代数, $\mathfrak{g}$ 和 $\hat{\mathfrak{g}}$ 分别表示与 Γ 相应的单李代数和仿射李代数. 我们有如下李代数同构交换图:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}\mathfrak{g} & \xrightarrow{\simeq} & \hat{\mathfrak{g}} \\ \downarrow \simeq & \nearrow \simeq & \downarrow \simeq \\ \mathfrak{L}_c(\mathcal{R}_{\mathbb{X}}) & & \mathfrak{L}_c(\mathcal{R}_{\Lambda}). \end{array}$$

6.3 仿射李代数

文献 [8] 介绍了仿射李代数的正部分的 Chevalley 基, 证明了这组基可以通过温和型箭图的不可分解表示来实现. 事实上, 如果考虑温和型箭图表示范畴的根范畴, 则可以得到整个仿射李代数的 Chevalley 基. 由于温和型箭图表示范畴与基本无限型加权射影线的凝聚层范畴是三角等价的, 我们发现利用凝聚层范畴的根范畴来实现仿射李代数的 Chevalley 基将更加方便, 这将是本节的主要内容.

沿用前面的记号, $\mathfrak{g}$ 和 $\hat{\mathfrak{g}}$ 分别表示与星型图 Γ 对应的单李代数和仿射李代数. 它们的根系分别记为 Δ 和 $\hat{\Delta}$, 根格分别记为 Q 和 $\hat{Q}$. 作为 $\mathbb{Z}$ -模, 根格 $\hat{Q}$ 同构于凝聚层范畴的 Grothendieck 群. 在 $\mathbb{C}\hat{Q}$ 上定义 Euler 闭链: $\varepsilon(-, -) = (-1)^{\langle -, - \rangle}$, 其中 $\langle -, - \rangle$ 是 Euler 型.

定义 $\mathbb{C}$ -线性空间 $\hat{\mathfrak{g}}^\varepsilon$ 如下:

(1) 对于任意的 $\alpha \in \hat{\Delta}^{\text{re}}$, 令 $\hat{\mathfrak{g}}_\alpha^\varepsilon = \mathbb{C}e_\alpha$ 是以 e_α 为基的一维空间.

(2) 对于任意的 $\theta \in \hat{\Delta}^{\text{im}} \cup \{0\}$, 令 $\hat{\mathfrak{g}}_\theta^\varepsilon = \mathbb{C}\hat{Q}/\mathbb{C}\theta$, 记 $h(\theta)$ 为 $h \in \mathbb{C}\hat{Q}$ 在自然投影 $\mathbb{C}\hat{Q} \rightarrow \hat{\mathfrak{g}}_\theta^\varepsilon$ 下的象.

令

$$\hat{\mathfrak{g}}^\varepsilon = \left(\bigoplus_{\alpha \in \hat{\Delta}^{\text{re}}} \hat{\mathfrak{g}}_\alpha^\varepsilon \right) \oplus \left(\bigoplus_{\theta \in \hat{\Delta}^{\text{im}} \cup \{0\}} \hat{\mathfrak{g}}_\theta^\varepsilon \right),$$

在 $\hat{\mathfrak{g}}^\varepsilon$ 上定义李括号:

$$\begin{aligned} [h(\theta), e_\alpha] &= \varepsilon(\theta, \alpha)(h, \alpha)e_{\theta+\alpha}, \\ [h(\theta), h'(\theta')] &= \varepsilon(\theta, \theta')(h, h')\theta(\theta + \theta'), \\ [e_\alpha, e_\beta] &= \begin{cases} \varepsilon(\alpha, \beta)e_{\alpha+\beta}, & \text{如果 } \alpha + \beta \in \hat{\Delta}^{\text{re}}, \\ \varepsilon(\alpha, \beta)\alpha(\alpha + \beta), & \text{如果 } \alpha + \beta \in \hat{\Delta}^{\text{im}} \cup \{0\}, \\ 0, & \text{其余情形.} \end{cases} \end{aligned}$$

命题 5 按照上述李括号, $\hat{\mathfrak{g}}^\varepsilon$ 成为一个李代数, 并且存在李代数同构

$$\Phi: \mathcal{L}\mathfrak{g} \longrightarrow \hat{\mathfrak{g}}^\varepsilon, \quad e_{v,r} \mapsto e_{\alpha_v+r\delta}, \quad f_{v,r} \mapsto -e_{-\alpha_v+r\delta}, \quad h_{v,r} \mapsto \alpha_v(r\delta), \quad c \mapsto \delta(0).$$

我们已经证明李代数 $\mathcal{L}\mathfrak{g}$ 与 $\mathfrak{L}_c(\mathcal{R}_{\mathbb{X}})$ 之间存在同构 ϕ . 考虑合成

$$\Theta = \phi\Phi^{-1}: \hat{\mathfrak{g}}^\varepsilon \rightarrow \mathcal{L}\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{L}_c(\mathcal{R}_{\mathbb{X}}).$$

显然, Θ 也是一个同构. 根据定理 2 知, $\alpha \in \hat{Q}$ 是一个根当且仅当存在根范畴中的不可分解对象 X 满足 $\dim X = \alpha$. 对于任意的 $1 \leq i \leq t, 1 \leq j \leq p_i, 1 \leq l \leq p_i - 1$, 我们用 $X_{i,j,l+sp_i}$ 表示根范畴中满足 $\dim X_{i,j,l+sp_i} = s\delta + \sum_{k=j}^{j+l} \alpha_{ik}$ 的唯一的不可分解对象.

定理 5 同构 Θ 有如下对应:

- (i) 对于任意的 $\alpha \in \hat{Q}$, 有 $\Theta(\alpha(0)) = h_\alpha$;
- (ii) 对于任何不可分解的向量丛 X , $\Theta(e_{\dim X[\epsilon]}) = \hat{1}_{(X[\epsilon])}$, 其中 $\epsilon \in \{0, 1\}$;
- (iii) $\Theta(e_{\dim X_{i,j,l+sp_i}}) = (-1)^s \hat{1}_{(X_{i,j,l+sp_i})}$;
- (iv) $\Theta(\alpha_*(r\delta)) = [\hat{1}_{(\mathcal{O})}, \hat{1}_{(T\mathcal{O}(r\bar{e}))}]$ 且 $\Theta(\alpha_{ij}(r\delta)) = (-1)^r (\hat{1}_{(X_{i,j,sp_i}[l(r)])} - \hat{1}_{(X_{i,j+1,sp_i}[l(r)])})$.

7 管型加权射影线

本节研究管型加权射影线的情形. 设 $\mathbb{X}$ 是管型加权射影线, 即 $\mathbb{X}$ 的权序列为 $(2, 2, 2, 2)$ 、 $(3, 3, 3)$ 、 $(4, 4, 2)$ 或者 $(6, 3, 2)$. 此时相应的星型图 Γ 分别为 $D_4^{(1)}$ 、 $E_6^{(1)}$ 、 $E_7^{(1)}$ 和 $E_8^{(1)}$ 型的仿射 Dynkin 图. 我们仍然用 $\mathfrak{g}$ 以及 $\hat{\mathfrak{g}}$ 分别表示与 Γ 相应的 Kac-Moody 李代数以及它的仿射化. 设 $\dot{\mathfrak{g}}$ 是与 $\mathfrak{g}$ 相应的单李代数, 它的根系和根格记为 Δ_0 和 Q_0 , 则 $\mathfrak{g}$ 和 $\hat{\mathfrak{g}}$ 的根格分别为 $Q = Q_0 \oplus \mathbb{Z}\delta_0$ 和 $\hat{Q} = Q \oplus \mathbb{Z}\delta = Q_0 \oplus \mathbb{Z}\delta_0 \oplus \mathbb{Z}\delta$.

7.1 合成李子代数

对于任意的有理数 $q \in \mathbb{Q}$, 我们用符号 $\mathfrak{C}_q$ 表示凝聚层范畴 $\text{coh}(\mathbb{X})$ 中由零对象以及斜率为 q 的半稳定对象全体构成的满子范畴. 为了符号的统一, 我们也用 $\mathfrak{C}_\infty$ 表示有限长度层构成的满子范畴 $\text{coh}_0(\mathbb{X})$. 下面的结果给出管型加权射影线的凝聚层范畴的结构刻画.

命题 6 ^[14] (i) 对于任意的 $q \in \mathbb{Q}$, 子范畴 $\mathfrak{C}_q$ 是一个扩张封闭的遗传 Abel 范畴. 每一个对象都具有有限长度, 拟单对象恰好为所有的稳定对象;

(ii) 对于任意的 $p > q$, 有 $\text{Hom}(\mathfrak{C}_p, \mathfrak{C}_q) = 0$;

(iii) 凝聚层范畴可以分解成 $\text{coh}(\mathbb{X}) = \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}} \mathfrak{C}_q$.

上述命题表明, 满子范畴 $\{\mathfrak{C}_q, q \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}\}$ 构成凝聚层范畴的有向划分. 事实上, 它们之间还有更密切的关系:

定理 6 ^[17] (i) 对于任意的 $q \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$, 子范畴 $\mathfrak{C}_q$ 之间都是典范等价的;

(ii) 对于任意的 $q > 0$, 突变函子诱导范畴等价 $\mathfrak{C}_q \cong \mathfrak{C}_{q/(q+1)}$.

特别地, 每一个满子范畴 $\mathfrak{C}_q$ 都与有限长度层构成的满子范畴 $\text{coh}_0(\mathbb{X})$ 等价, 它们的 Auslander-Reiten 箭图都是由一族管子构成, 因此都可以用循环箭图的表示范畴来描述. 与范畴 $\text{coh}_0(\mathbb{X})$ 类似, 我们用 $S_{i,j}(q)$ 表示范畴 $\mathfrak{C}_q$ 中的例外单对象, 用 δ^q 表示 $\mathfrak{C}_q$ 中的极小虚根.

定理 7 假设 $\mathbb{X}$ 是管型的加权射影线, 则李同态 $\phi: \mathcal{L}\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{L}_c(\mathcal{R}_{\mathbb{X}})$ 是一个同构.

证明 由于李代数 $\mathcal{L}\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{L}_c(\mathcal{R}_{\mathbb{X}})$ 都是 $\hat{Q}$ -分次的, 并且 ϕ 保持分次, 因此, 我们只需要证明它们在每个齐次空间的维数相等即可. 根据命题 5 中的交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}\mathfrak{g} & \xrightarrow{\varphi} & \hat{\mathfrak{g}} \\ \downarrow \phi & \nearrow & \\ \mathfrak{L}_c(\mathcal{R}_{\mathbb{X}}) & & \end{array}$$

可知, 对于给定的次数, 李代数 $\mathfrak{L} := \mathfrak{L}_c(\mathcal{R}_{\mathbb{X}})$ 的齐次空间的维数介于 $\mathcal{L}\mathfrak{g}$ 与 $\hat{\mathfrak{g}}$ 的维数之间.

根据文献 [18] 的结果可知, 对于任意的 $\alpha \in \Delta_0$, $k_0 \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$, 有

$$\dim \mathfrak{L}_{\alpha+k_0\delta_0+k\delta} = \begin{cases} 1, & \alpha \neq 0, \\ l+1, & \alpha = 0, \quad (k_0, k) \neq (0, 0), \\ l+2, & \alpha = k_0 = k = 0, \end{cases}$$

其中 $l = \text{rank}(\mathfrak{g}_0)$. 另一方面, $\hat{\mathfrak{g}}$ 的每个齐次空间的维数具有如下公式:

$$\dim \hat{\mathfrak{g}}_{\alpha+k_0\delta_0+k\delta} = \begin{cases} 1, & \alpha \neq 0, \\ l, & \alpha = 0, \quad k_0 \neq 0, \\ l+1, & \alpha = 0, \quad k_0 = 0, \quad k \neq 0, \\ l+2, & \alpha = k_0 = k = 0, \end{cases}$$

比较上述两个维数公式可知, 我们只需要证明当 $k_0 \neq 0$ 时, $\dim \mathfrak{L}_{k_0\delta_0+k\delta} = l+1$ 即可.

注意到, 对于任意的 $k \neq 0$, 有 $\dim \mathfrak{L}_{k\delta} = l+1$. 当 $k > 0$ 时, $\mathfrak{L}_{k\delta}$ 上的每个函数 f 的支撑上的每个点都是有限长度层, 即对于任意的 $X \in \text{supp}(f)$, 有 $X \in \mathfrak{C}_\infty$. 另外, 对于根范畴中的每个例外对象 X , 都有 $1_{(X)} \in \mathfrak{L}$. 因此, $1_{(S_{i,j})}$ 和 $T_r = [1_{(\mathcal{O})}, 1_{(T\mathcal{O}(-r\bar{c}))}]$ 都落在合成子代数 $\mathfrak{L}$ 中. 对于任何有理数 q , 利用突变变换可诱导范畴等价 $F: \mathfrak{C}_\infty \rightarrow \mathfrak{C}_q$. 我们把 $1_{(S_{i,j})}$ 和 T_r 在 F 下的象分别记为 $1_{(S_{i,j}(q))}$ 和 $T_r(q)$, 则由 $1_{(S_{i,j}(q))}$ 和 $T_r(q)$ 生成的子代数同构于由 $1_{(S_{i,j})}$ 和 T_r 生成的子代数. 又由于等价函子 $F: \mathfrak{C}_\infty \rightarrow \mathfrak{C}_q$ 保持例外对象, 从而, $F(S_{i,j}), F(T_r) \in \mathfrak{L}$. 因此存在 k_1 , 使得 $\dim \mathfrak{L}_{k_0\delta_0+k\delta} = \dim \mathfrak{L}_{k_1\delta} = l+1$, 证毕. $\square$

7.2 李代数的几种表述

7.2.1 环形李代数

设 $\hat{\mathfrak{g}}$ 是有限维单李代数, 称 $\hat{\mathfrak{g}} \otimes \mathbb{C}[s, s^{-1}, t, t^{-1}]$ 的泛覆盖代数为 2- 环形李代数 (参见文献 [19]). 下面给出 2- 环形李代数的构造.

记 $A = \mathbb{C}[s, s^{-1}, t, t^{-1}]$, 设 $\{a_i\}$ 是 A 的一组基. 定义 A 的微分模 (Ω_A, d) 如下: 设 F 是以形式符号 $\{\tilde{d}a_i\}$ 为基的左 A - 自由模, 我们把 F 自然看成双边自由 A - 模, 它的右模结构由如下给出: $(\tilde{d}a)b = b(\tilde{d}a)$, $a, b \in A$. 令 $\tilde{d}: A \rightarrow F$; $a_i \mapsto \tilde{d}a_i$ 为 $\mathbb{C}$ - 线性映射, 记 K 是 F 中由 $\tilde{d}(ab) - ((\tilde{d}(a)b + a\tilde{d}(b)))$ ($a, b \in A$) 生成的 A - 子模. 令 $\Omega_A := F/K$, 则自然的商映射 $d: A \rightarrow \Omega_A$; $a \mapsto \tilde{d}a + K$ 是微分映射, 它满足如下泛性质: 对于任意的 A - 模 M 和导子 $D: A \rightarrow M$, 存在唯一的 A - 模同态 $f: \Omega_A \rightarrow M$, 使得 $D = fd$, 即下图可交换:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{d} & \Omega_A \\ & \searrow D & \swarrow f \\ & & M. \end{array}$$

令 $-: \Omega_A \rightarrow \Omega_A/dA$ 为典范映射, 它满足 $\overline{d(ab)} = 0$, 因此, $\overline{a(db)} = -\overline{(da)b} = -\overline{b(da)}$. 线性空间 $\mathfrak{u} := A \otimes \hat{\mathfrak{g}} \oplus (\Omega_A/dA)$ 具有自然的李代数结构, 其李括号定义为

$$\begin{aligned} [a \otimes x, b \otimes y] &= ab \otimes [x, y] + \overline{(da)b}(x, y), \\ [\hat{\mathfrak{g}}, \Omega_A/dA] &= [\Omega_A/dA, \hat{\mathfrak{g}}] = [\Omega_A/dA, \Omega_A/dA] = 0, \end{aligned}$$

其中 $(-, -)$ 表示 $\hat{\mathfrak{g}}$ 上的标准双线性型. 令 $\omega: \mathfrak{u} \rightarrow A \otimes \hat{\mathfrak{g}}$ 为自然投影, 其核为 Ω_A/dA .

命题 7^[19] (u, ω) 是 $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[s, s^{-1}, t, t^{-1}]$ 的泛覆盖.

设李代数 $\mathfrak{g}$ 的根系为 Δ_0 , 素根系为 $\Pi_0 = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$, 设 ζ 是 Δ_0 的相对于 Π_0 的最高根. 令 $\delta_1 := \sum_{i=1}^l n_i \alpha_i$ ($\text{g.c.d}(n_0, n_1, \dots, n_l) = 1$) 为零根. 李代数 $\mathfrak{g}$ 的生成元记为 e_i, f_i 和 $h_i, i = 1, \dots, l$. 我们可以选择 $e_0 \in \mathfrak{g}^{-\zeta}, f_0 \in \mathfrak{g}^{\zeta}$, 使得 $\{e_0, f_0, h_0\}$ 是一个 $\mathfrak{sl}_2$ -三元组, 其中 $h_0 := -\sum_{i=1}^l n_i h_i$.

命题 8^[18] 下列对应法则定义了从圈代数 $\mathcal{L}\mathfrak{g}$ 到 2- 环形李代数 u 的一个同构:

$$\begin{aligned} \Phi: \mathcal{L}\mathfrak{g} &\longrightarrow u, \\ e_{0,k} &\mapsto s^k t \otimes e_0, \quad f_{0,k} \mapsto -s^k t^{-1} \otimes f_0, \quad h_{0,k} \mapsto s^k \otimes h_0 + \overline{s^k t^{-1} dt}, \quad c \mapsto \overline{s^{-1} ds}, \\ e_{i,k} &\mapsto s^k \otimes e_i, \quad f_{i,k} \mapsto -s^k \otimes f_i, \quad h_{i,k} \mapsto s^k \otimes h_i, \quad 1 \leq i \leq l. \end{aligned}$$

7.2.2 椭圆李代数

对于任意的对称广义 Cartan 矩阵, 都可以定义一个 Kac-Moody 李代数, 由 Chevally 生成元生成并满足 Serre 关系得到. 现在考虑椭圆 Cartan 矩阵, 它是余秩为 2 的半正定矩阵. 我们主要考虑以下几类椭圆 Dynkin 图对应的椭圆 Cartan 矩阵 (参见文献 [20]):

令 U 是 n 维 $\mathbb{Q}$ -空间, $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ 为 U 的一组标准基, 其中 n 是上述椭圆 Dynkin 图的顶点的个数. U 上的对称双线性型 $I(-, -): U \times U \rightarrow \mathbb{Q}$ 定义为

$$I(\alpha_i, \alpha_j) = \begin{cases} 2, & \text{如果 } i = j, \\ -1, & \text{如果 } i \text{ 与 } j \text{ 有实边相连,} \\ 2, & \text{如果 } i \text{ 与 } j \text{ 有双重虚边相连,} \\ 0, & \text{其余情形.} \end{cases}$$

U 上的二次型 q 定义为 $q(x) = I(x, x)/2$. 类似于 Kac-Moody 李代数的情形, 我们也可以定义反射变换 $\omega_{\alpha_i}(\alpha_j) = \alpha_j - I(\alpha_i, \alpha_j)\alpha_i$, Weyl 群 $W = \langle \omega_{\alpha_i} \mid 1 \leq i \leq n \rangle$ 和根格 $\hat{Q} = \mathbb{Z}\Pi = \sum_{i=1}^n \mathbb{Z}\alpha_i$, 其中实根 $R^{\text{re}} = W\Pi$, 虚根 $R^{\text{im}} = \text{rad}I(-, -) \cap \hat{Q} \setminus \{0\}$. 下面考虑与上述椭圆 Dynkin 图相应的椭圆李代数 $\mathfrak{g}^{\text{ell}}$.

定义 1 椭圆李代数 $\mathfrak{g}^{\text{ell}}$ 是一个 $\mathbb{C}$ -代数, 它由 Chevalley 生成元 α_i 和 $e_{\pm i}$ ($1 \leq i \leq n$) 生成, 满足如下广义 Serre 关系:

$$(0) [\alpha_i, \alpha_j] = 0, 1 \leq i, j \leq n;$$

$$(I) [e_i, e_{-i}] = \alpha_i, 1 \leq i \leq n;$$

$$(II.1) [\alpha_i, e_j] = I(\alpha_i, \alpha_j)e_j, i, j = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n, \text{ 其中 } \alpha_{-i} = -\alpha_i;$$

$$(II.2) (\text{ade}_i)^{\max\{1, 1-I(\alpha_i, \alpha_j)\}} e_j = 0, i = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n;$$

$$(III) [e_{\pm i}, e_{\pm 1}, e_{\pm n}] = 0, \text{ 若存在}$$

$$(IV) [e_{\pm i}, e_{\pm 1}, e_{\pm j}, e_{\pm n}] = 0, \text{ 若存在}$$

上述型为 (0)-(II) 的关系是 Kac-Moody 李代数的定义关系, 型为 (III) 和 (IV) 的关系称为广义 Serre 关系. 代数 $\mathfrak{g}^{\text{ell}}$ 是 $\hat{Q}$ -分次的, 其分次由 $\deg(e_{\pm i}) = \alpha_{\pm i}$ 和 $\deg(\alpha_i) = 0$ ($1 \leq i \leq n$) 给出. 根据文献 [20] 的结果, 代数 $\mathfrak{g}^{\text{ell}}$ 分次空间的维数有如下公式:

$$\dim \mathfrak{g}_{\alpha}^{\text{ell}} = \begin{cases} 1, & \text{如果 } \alpha \in R^{\text{re}}, \\ n-1, & \text{如果 } \alpha \in R^{\text{im}}, \\ n, & \text{如果 } \alpha = 0, \\ 0, & \text{其余情形.} \end{cases}$$

命题 9 [20] 单边型的椭圆李代数同构于相应的 2- 环形代数.

Lin 和 Peng [11] 通过管代数给出椭圆李代数的一种实现. 他们证明了椭圆李代数同构于同型管代数的根范畴定义的李代数. 由于管代数的范畴导出等价于管型的加权射影线的凝聚层范畴, 因此, 它们的根范畴等价, 所以有如下结果:

定理 8 设 $\mathbb{X}$ 是与椭圆李代数 $\mathfrak{g}^{\text{ell}}$ 相应的管型加权射影线, 则 $\mathfrak{g}^{\text{ell}} \cong \mathfrak{L}_c(\mathcal{R}_{\mathbb{X}})$.

8 突变函子和单反射

本节考虑加权射影线的凝聚层范畴的有界导出范畴中的突变函子 [21] 诱导的相应的李代数之间的自同构. 首先回顾一些基本的记号. 设 $\mathbb{X}$ 是任意型的加权射影线, $\Gamma = \Gamma_{\mathbb{X}}$ 是相应的星型图, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(\Gamma)$ 是相应的 Kac-Moody 李代数, $\Delta(\Gamma)$ 是 $\mathfrak{g}$ 的根系, $W = W(\Gamma)$ 是 $\mathfrak{g}$ 的 Weyl 群. 本节主要目的是证明由一族线丛定义的突变函子给出 Weyl 群 W 中单反射的范畴化. 星型图 Γ 中的点集用 I 表示, 即 $I = \{*, ij \mid 1 \leq i \leq t, 1 \leq j \leq p_i - 1\}$. 为了方便, 有时记 $* = i0, 1 \leq i \leq t$.

李代数 $\mathfrak{g}$ 的圈代数 $\mathcal{L}\mathfrak{g}$ 是 $\widehat{\Gamma}$ - 分次:

$$\deg e_{\omega r} = \alpha_{\omega} + r\delta, \quad \deg f_{\omega r} = -\alpha_{\omega} + r\delta, \quad \deg h_{\omega r} = r\delta, \quad \deg c = 0,$$

其中 $\widehat{\Gamma} = \mathbb{Z}I \oplus \mathbb{Z}\delta$, $\omega \in I$, $r \in \mathbb{Z}$. $\mathcal{L}\mathfrak{g}$ 存在根空间分解为

$$\mathcal{L}\mathfrak{g} = (\mathcal{L}\mathfrak{g})_0 \oplus \bigoplus_{\zeta \in \widehat{\Delta}} (\mathcal{L}\mathfrak{g})_{\zeta}, \quad \text{并且} \quad (\mathcal{L}\mathfrak{g})_0 = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathbb{C}c,$$

其中

$$\widehat{\Delta} = \{\alpha + r\delta \mid \alpha \in \Delta, r \in \mathbb{Z}\} \cup \{r\delta \mid 0 \neq r \in \mathbb{Z}\}.$$

8.1 正交垂范畴

对于任意给定的 $\vec{x} \in \mathbb{L} := \mathbb{L}(\mathbf{p})$, 记

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(\vec{x})^{\perp} &= \{X \in \text{coh } \mathbb{X} \mid \text{Hom}(\mathcal{O}(\vec{x}), X) = 0 = \text{Ext}^1(\mathcal{O}(\vec{x}), X)\}, \\ {}^{\perp}\mathcal{O}(\vec{x}) &= \{X \in \text{coh } \mathbb{X} \mid \text{Hom}(X, \mathcal{O}(\vec{x})) = 0 = \text{Ext}^1(X, \mathcal{O}(\vec{x}))\}. \end{aligned}$$

根据文献 [22], $\mathcal{O}(\vec{x})^{\perp}$ 和 ${}^{\perp}\mathcal{O}(\vec{x})$ 都仍然是遗传 Abel 范畴. 而且,

$$D^b(\mathcal{O}(\vec{x})^{\perp}) = \{X^{\bullet} \in D^b(\text{coh } \mathbb{X}) \mid \text{Hom}(\mathcal{O}(\vec{x}), X^{\bullet}[n]) = 0, \forall n \in \mathbb{Z}\},$$

也就是说, $D^b(\mathcal{O}(\vec{x})^{\perp})$ 和 $\mathcal{O}(\vec{x})$ (作为茎复形) 在 $D^b(\text{coh } \mathbb{X})$ 中的右垂范畴一致. 类似地,

$$D^b({}^{\perp}\mathcal{O}(\vec{x})) = \{X^{\bullet} \in D^b(\text{coh } \mathbb{X}) \mid \text{Hom}(X^{\bullet}[n], \mathcal{O}(\vec{x})) = 0, \forall n \in \mathbb{Z}\},$$

它等价于茎复形 $\mathcal{O}(\vec{x})$ 在 $D^b(\text{coh } \mathbb{X})$ 中的左垂范畴.

8.2 突变

由于每一个线丛 $\mathcal{O}(\vec{x})$ 都是 $D^b(\text{coh } \mathbb{X})$ 中的例外对象, 根据文献 [21, 定理 3.2] (也可参见文献 [23]), 范畴 $D^b(\text{coh } \mathbb{X})$ 中由 $\mathcal{O}(\vec{x})$ 生成的满子范畴 $\langle \mathcal{O}(\vec{x}) \rangle$ 是容许子范畴, 即嵌入函子 $\langle \mathcal{O}(\vec{x}) \rangle \hookrightarrow D^b(\text{coh } \mathbb{X})$ 存在左伴随和右伴随. 因此, 嵌入函子

$$j_{*, \vec{x}} : D^b(\mathcal{O}(\vec{x})^{\perp}) \longrightarrow D^b(\text{coh } \mathbb{X}) \quad \text{和} \quad r_{*, \vec{x}} : D^b({}^{\perp}\mathcal{O}(\vec{x})) \longrightarrow D^b(\text{coh } \mathbb{X})$$

分别存在左伴随和右伴随, 相应地记为 $j_{\vec{x}}^*$ 和 $r_{\vec{x}}^!$. 进一步, 限制函子

$$\mathbf{R}_{\vec{x}} := r_{\vec{x}}^! \mid_{D^b(\mathcal{O}(\vec{x})^{\perp})} : D^b(\mathcal{O}(\vec{x})^{\perp}) \longrightarrow D^b({}^{\perp}\mathcal{O}(\vec{x}))$$

是一个等价函子, 其拟逆为 $\mathbf{L}_{\vec{x}} := j_{\vec{x}}^* \mid_{D^b({}^{\perp}\mathcal{O}(\vec{x}))}$. 函子 $\mathbf{R}_{\vec{x}}$ 和 $\mathbf{L}_{\vec{x}}$ 分别称为右突变函子和左突变函子. 事实上, 它们分别由下列泛三角给出:

$$\mathbf{R}_{\vec{x}}(X) \longrightarrow X \longrightarrow \text{Hom}^{\bullet}(X, \mathcal{O}(\vec{x})) \otimes \mathcal{O}(\vec{x}), \quad (8.1)$$

$$D\text{Hom}^{\bullet}(\mathcal{O}(\vec{x}), X) \otimes \mathcal{O}(\vec{x}) \longrightarrow X \longrightarrow \mathbf{L}_{\vec{x}}(X). \quad (8.2)$$

8.3 李商代数

本节将证明 Kac-Moody 李代数 $\mathfrak{g}$ 可以看成 $\mathfrak{L}_c(\mathcal{R}_{\mathbb{X}})$ 的商代数. 为此, 首先定义 $\mathfrak{L}_c(\mathcal{R}_{\mathbb{X}})$ 的一个李理想:

$$\mathfrak{I} = \langle 1_{\mathcal{O}(\vec{e})} - 1_{\mathcal{O}}, 1_{T\mathcal{O}(\vec{e})} - 1_{T\mathcal{O}} \rangle.$$

给定元素 $1_X \in \mathfrak{L}_c(\mathcal{R}_{\mathbb{X}})$, 它在 $\mathfrak{L}_c(\mathcal{R}_{\mathbb{X}})/\mathfrak{I}$ 中的象记为 $\bar{1}_X$.

设 $\iota: \mathfrak{g} \hookrightarrow \mathcal{L}\mathfrak{g}$ 是标准的自然嵌入, 它在生成元上的对应为

$$e_\omega \mapsto e_\omega 0, \quad f_\omega \mapsto f_\omega 0, \quad h_\omega \mapsto h_\omega 0, \quad \forall \omega \in I.$$

我们用 Φ 表示同态 $\phi: \mathcal{L}\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{L}_c(\mathcal{R}_{\mathbb{X}})$ 与自然嵌入和自然投影的合成:

$$\Phi: \mathfrak{g} \xrightarrow{\iota} \mathcal{L}\mathfrak{g} \xrightarrow{\phi} \mathfrak{L}_c(\mathcal{R}_{\mathbb{X}}) \xrightarrow{\eta} \mathfrak{L}_c(\mathcal{R}_{\mathbb{X}})/\mathfrak{I}.$$

根据定理 5 可知, Φ 具有如下对应:

$$\begin{aligned} e_* &\mapsto \bar{1}_{\mathcal{O}}, & f_* &\mapsto -\bar{1}_{T\mathcal{O}}, & h_* &\mapsto -h_{[\mathcal{O}]}, \\ e_\omega &\mapsto \bar{1}_{S_{ij}}, & f_\omega &\mapsto -\bar{1}_{TS_{ij}}, & h_\omega &\mapsto -h_{[S_{ij}]}, \quad \forall \omega = ij \in I \setminus \{*\}. \end{aligned}$$

命题 10 ^[24] $\Phi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{L}_c(\mathcal{R}_{\mathbb{X}})/\mathfrak{I}$ 是一个同构.

8.4 李子代数

对于任意的 $\vec{x} \in \mathbb{L}$, 由于 $\mathcal{O}(\vec{x})^\perp$ 等价于星型图 Γ 的表示范畴, 我们可以定义它的根范畴 $\mathcal{R}(\mathcal{O}(\vec{x})^\perp)$ 与相应的合成李代数 $\mathfrak{L}_c(\mathcal{R}(\mathcal{O}(\vec{x})^\perp))$. 为了符号方便, 以下简记为 $\mathfrak{L}_{\vec{x}}^r = \mathfrak{L}_c(\mathcal{R}(\mathcal{O}(\vec{x})^\perp))$, 它同构于 Γ 对应的 Kac-Moody 李代数 $\mathfrak{g}$. 导出范畴的嵌入 $D^b(\mathcal{O}(\vec{x})^\perp) \hookrightarrow D^b(\text{coh } \mathbb{X})$ 诱导根范畴的嵌入 $\mathcal{R}(\mathcal{O}(\vec{x})^\perp) \hookrightarrow \mathcal{R}(\text{coh } \mathbb{X})$, 进而, 诱导李代数的嵌入 $\mathfrak{L}_{\vec{x}}^r \hookrightarrow \mathfrak{L}_c(\mathcal{R}_{\mathbb{X}})$.

对偶地, 从左垂范畴 ${}^\perp\mathcal{O}(\vec{x})$ 出发, 我们可以定义合成李代数 $\mathfrak{L}_{\vec{x}}^l$, 它也同构于 $\mathfrak{g}$, 并且存在李代数的嵌入 $\mathfrak{L}_{\vec{x}}^l \hookrightarrow \mathfrak{L}_c(\mathcal{R}_{\mathbb{X}})$.

给定 $\vec{x} \in \mathbb{L}$, 记 $\theta_{\vec{x}}^r$ 为如下自然嵌入与自然投影的合成:

$$\theta_{\vec{x}}^r: \mathfrak{L}_{\vec{x}}^r \hookrightarrow \mathfrak{L}_c(\mathcal{R}_{\mathbb{X}}) \twoheadrightarrow \mathfrak{L}_c(\mathcal{R}_{\mathbb{X}})/\mathfrak{I}.$$

命题 11 ^[24] 对于任意的 $\vec{x} \in \mathbb{L}$, $\theta_{\vec{x}}^r: \mathfrak{L}_{\vec{x}}^r \rightarrow \mathfrak{L}_c(\mathcal{R}_{\mathbb{X}})/\mathfrak{I}$ 是一个李代数之间的同构.

对偶地, 记 $\theta_{\vec{x}}^l$ 为如下自然嵌入和自然投影的合成:

$$\theta_{\vec{x}}^l: \mathfrak{L}_{\vec{x}}^l \hookrightarrow \mathfrak{L}_c(\mathcal{R}_{\mathbb{X}}) \twoheadrightarrow \mathfrak{L}_c(\mathcal{R}_{\mathbb{X}})/\mathfrak{I},$$

则 $\theta_{\vec{x}}^l$ 也是一个李代数同构.

注 1 (1) 对于任意的 $\vec{x}$, $\theta_{\vec{x}}^r$ (相应地, $\theta_{\vec{x}}^l$) 建立起 $\mathfrak{L}_c(\mathcal{R}_{\mathbb{X}})$ 的子代数 $\mathfrak{L}_{\vec{x}}^r$ (相应地, $\mathfrak{L}_{\vec{x}}^l$) 与商代数 $\mathfrak{L}_c(\mathcal{R}_{\mathbb{X}})/\mathfrak{I}$ 之间的同构关系. 我们强调子代数 $\mathfrak{L}_{\vec{x}}^r$ 和 $\mathfrak{L}_{\vec{x}}^l$ 依赖于 $\vec{x}$ 的选取, 而商代数 $\mathfrak{L}_c(\mathcal{R}_{\mathbb{X}})/\mathfrak{I}$ 则与 $\vec{x}$ 的选取无关.

(2) 结合命题 10 和 11, 我们得到李代数之间的同构: $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{L}_{\vec{x}}^r$. 这个同构保持 $\mathbb{Z}I$ - 分次.

8.5 突变诱导的自同构

对于任意的 $\vec{x} \in \mathbb{L}$, 设 $\vec{x} \in \mathbb{L}$ 的标准型为 $\vec{x} = \sum_{i=1}^t l_i \vec{x}_i + l\vec{c}$, 存在导出范畴之间的三角等价 $\mathbf{R}_{\vec{x}} : D^b(\mathcal{O}(\vec{x})^\perp) \rightarrow D^b({}^\perp\mathcal{O}(\vec{x}))$, 它诱导根范畴之间的三角等价 $\mathcal{R}(\mathcal{O}(\vec{x})^\perp) \cong \mathcal{R}({}^\perp\mathcal{O}(\vec{x}))$. 由于 $\mathbf{R}_{\vec{x}}$ 保持例外对象, 我们得到李代数同构

$$\Upsilon_{\vec{x}} : \mathfrak{L}_{\vec{x}}^r \longrightarrow \mathfrak{L}_{\vec{x}}^l,$$

它在一组生成元下的具体对应为

$$1_{\mathcal{O}(\vec{x}-\vec{c})[\varepsilon]} \longmapsto -1_{\mathcal{O}(\vec{x}+\vec{c})[\varepsilon+1]}, \quad 1_{S_{i,l_i+1}[\varepsilon]} \longmapsto 1_{\mathcal{O}(\vec{x}+\vec{x}_i)[\varepsilon]}, \quad 1_{S_{i,j}[\varepsilon]} \longmapsto 1_{S_{i,j}[\varepsilon]},$$

其中 $\varepsilon \in \{0, 1\}$, $1 \leq i \leq t$, $1 \leq j \leq p_i$ 满足 $j \neq l_i, l_i + 1$. 令

$$\tilde{\Upsilon}_{\vec{x}} := \theta_{\vec{x}}^l \Upsilon_{\vec{x}} (\theta_{\vec{x}}^r)^{-1} : \mathfrak{L}_c(\mathcal{R}_{\mathbb{X}})/\mathfrak{I} \longrightarrow \mathfrak{L}_c(\mathcal{R}_{\mathbb{X}})/\mathfrak{I},$$

即有如下交换图:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{L}_{\vec{x}}^r & \xrightarrow{\Upsilon_{\vec{x}}} & \mathfrak{L}_{\vec{x}}^l \\ \downarrow \theta_{\vec{x}}^r & & \downarrow \theta_{\vec{x}}^l \\ \mathfrak{L}_c(\mathcal{R}_{\mathbb{X}})/\mathfrak{I} & \xrightarrow{\tilde{\Upsilon}_{\vec{x}}} & \mathfrak{L}_c(\mathcal{R}_{\mathbb{X}})/\mathfrak{I}. \end{array}$$

定理 9 ^[24] 对于任意的 $1 \leq k \leq t$, 有

$$\tilde{\Upsilon}_{\vec{x}-\vec{x}_k} \tilde{\Upsilon}_{\vec{x}} \tilde{\Upsilon}_{\vec{x}-\vec{x}_k} = \tilde{\Upsilon}_{\vec{x}} \tilde{\Upsilon}_{\vec{x}-\vec{x}_k} \tilde{\Upsilon}_{\vec{x}}.$$

对于任意的例外对象 $X \in \mathcal{R}_{\mathbb{X}}$, $\mathfrak{L}_c(\mathcal{R}_{\mathbb{X}})/\mathfrak{I}$ 上的伴随算子 $\text{ad}(\bar{1}_X)$ 是局部幂零的. 因此, 可以定义

$$\exp(\text{ad}(\bar{1}_X)) = \text{id} + \text{ad}(\bar{1}_X) + \frac{1}{2!}(\text{ad}(\bar{1}_X))^2 + \cdots.$$

对于任意的 $\vec{x} \in \mathbb{L}$, 自同构 $\tilde{\Upsilon}_{\vec{x}} : \mathfrak{L}_c(\mathcal{R}_{\mathbb{X}})/\mathfrak{I} \longrightarrow \mathfrak{L}_c(\mathcal{R}_{\mathbb{X}})/\mathfrak{I}$ 可以如下表达成 Tits 自同构乘积的形式.

命题 12 ^[24] 在相差 $\text{Aut}(\mathfrak{L}_c(\mathcal{R}_{\mathbb{X}})/\mathfrak{I})$ 中一个符号自同构的意义下, 如下等式成立:

$$\tilde{\Upsilon}_{\vec{x}} = \exp(\text{ad}(\bar{1}_{\mathcal{O}(\vec{x})})) \exp(\text{ad}(\bar{1}_{T\mathcal{O}(\vec{x})})) \exp(\text{ad}(\bar{1}_{\mathcal{O}(\vec{x})})).$$

命题 13 ^[24] 对于任意的 $1 \leq k \leq t$, 在相差 $\text{Aut}(\mathfrak{L}_c(\mathcal{R}_{\mathbb{X}})/\mathfrak{I})$ 中的一个符号自同构的意义下, 如下等式成立:

$$\tilde{\Upsilon}_{\vec{x}-\vec{x}_k} \tilde{\Upsilon}_{\vec{x}} \tilde{\Upsilon}_{\vec{x}-\vec{x}_k} = \exp(\text{ad}(\bar{1}_{S_{k,l_k}})) \exp(\text{ad}(\bar{1}_{T_{S_{k,l_k}}})) \exp(\text{ad}(\bar{1}_{S_{k,l_k}})).$$

对于任意的 $\vec{x} \in \mathbb{L}$, 令

$$\Xi_{\vec{x}} := \Phi^{-1} \tilde{\Upsilon}_{\vec{x}} \Phi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}.$$

换言之, 我们有如下交换图:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{\Xi_{\vec{x}}} & \mathfrak{g} \\ \downarrow \Phi & & \downarrow \Phi \\ \mathfrak{L}_c(\mathcal{R}_{\mathbb{X}})/\mathfrak{I} & \xrightarrow{\tilde{\Upsilon}_{\vec{x}}} & \mathfrak{L}_c(\mathcal{R}_{\mathbb{X}})/\mathfrak{I} \end{array}$$

作为命题 12 和 13 的推论, 我们得到如下主结论:

定理 10 ^[24] 在相差 $\text{Aut}(\mathfrak{g})$ 中一个符号自同构的意义下,

$$\Xi_0 = \exp(\text{ad}(e_*)) \exp(\text{ad}(-f_*)) \exp(\text{ad}(e_*));$$

并且对于任意的 $\omega = ij \in I \setminus \{*\}$, 有

$$\Xi_{(j-1)\bar{x}_i} \Xi_j \bar{x}_i \Xi_{(j-1)\bar{x}_i} = \exp(\text{ad}(e_\omega)) \exp(\text{ad}(-f_\omega)) \exp(\text{ad}(e_\omega)).$$

参考文献

- 1 Gabriel P. Unzerlegbare darstellungen, I. *Manuscripta Math*, 1972, 6: 71–103
- 2 Kac V. Infinite root systems, representations of graphs and invariant theory. *Invent Math*, 1980, 56: 57–92
- 3 Kac V. Root systems, representations of quivers and invariant theory. In: *Invariant Theory (Montecatini, 1982)*. *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 996. Berlin: Springer, 1983, 74–108
- 4 Crawley-Boevey W, Van Den Bergh M. Absolutely indecomposable representations and Kac-Moody Lie algebras. *Invent Math*, 2004, 155: 537–559
- 5 Hausel T. Kac's conjecture from Nakajima quiver varieties. *Invent Math*, 2010, 181: 21–37
- 6 Hausel T, Letellier E, Rodriguez-Villegas F. Positivity for Kac polynomials and DT-invariants of quivers. *Ann of Math* (2), 2013, 177: 1147–1168
- 7 Ringel C M. Lie algebras arising in representation theory. In: *Representations of Algebras and Related Topics*. London Mathematical Society, vol. 168. Cambridge: Cambridge University Press, 1992, 284–291
- 8 Frenkel I B, Malkin A, Vybormov M. Affine Lie algebras and tame quivers. *Selecta Math (NS)*, 2001, 7: 1–56
- 9 Lusztig G. Introduction to Quantum Groups. *Progress in Mathematics*, vol. 110. Boston: Birkhäuser, 1993
- 10 Schiffmann O. Noncommutative projective curves and quantum loop algebras. *Duke Math J*, 2004, 121: 113–168
- 11 Lin Y, Peng L. Elliptic Lie algebras and tubular algebras. *Adv Math*, 2005, 196: 487–530
- 12 Crawley-Boevey W. Kac's Theorem for weighted projective lines. *J Eur Math Soc (JEMS)*, 2010, 12: 1331–1345
- 13 Xiao J, Xu F, Zhang G. Derived categories and Lie algebras. *ArXiv:0604564*, 2006
- 14 Geigle W, Lenzing H. A class of weighed projective curves arising in the representation theory of finite-dimensional algebras. In: *Singularities, Representations of Algebras and Vector Bundles (Lambrecht, Germany, 1985)*. *Lecture Note in Mathematics*, vol. 1273. Berlin: Springer, 1987, 265–297
- 15 Ringel C M. C. Tame Algebras and Integral Quadratic Forms. *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 1099. Berlin: Springer-Verlag, 1984
- 16 Dou R, Sheng J, Xiao J. Complex Lie algebras corresponding to weighted projective lines. *Front Math China*, 2011, 6: 629–639
- 17 Lenzing H, Meltzer H. Sheaves on a weighted projective line of genus one and representations of a tubular algebra. In: *Representations of Algebras (Ottawa, Canada, 1992)*. *Canadian Mathematical Society Conference Proceedings*, Volume 14. Providence: Amer Math Soc, 1993, 313–337
- 18 Moody R V, Rao S E, Yokonuma T. Toroidal Lie algebras and vertex representations. *Geom Dedicata*, 1990, 35: 283–307
- 19 Kassel C. Kähler differentials and coverings of complex simple Lie algebras extended over a commutative algebra. *J Pure Appl Algebra*, 1984, 34: 265–275
- 20 Saito K, Yoshii D. Extended affine root system, IV: Simply-laced elliptic Lie algebras. *Publ Res Inst Math Sci*, 2000, 36: 385–421
- 21 Bondal A I. Representations of associative algebras and coherent sheaves. *Izv Akad Nauk SSSR Ser Mat*, 1989, 53: 25–44; English traslation: *Math USSR-Izv*, 1990, 34: 23–45
- 22 Geigle W, Lenzing H. Perpendicular categories with applications to representations and sheaves. *J Algebra*, 1991, 144: 273–343
- 23 Meltzer H. Exceptional sequences for canonical algebras. *Arch Math*, 1995, 64: 304–312
- 24 Deng B, Ruan S, Xiao J. Applications of mutations in the derived categories of weighted projective lines to Lie and quantum algebras. *ArXiv:1711.08190*, 2017

The category of coherent sheaves over a weighted projective line and loop algebras

Rujing Dou, Shiquan Ruan, Jie Xiao & Fan Xu

Abstract In this survey paper, we introduce the approach to construct complex Lie algebras via root categories. For the category of coherent sheaves over a weighted projective line, the approach provides a realization of the loop algebra of the Kac-Moody algebra associated with the corresponding star graph. As an application, we categorify the Weyl group of the corresponding Kac-Moody algebra.

Keywords coherent sheaf, loop algebra, weighted projective line, root category

MSC(2010) 17B67, 14F05

doi: 10.1360/N012018-00011