一类随机环境中的超 Lévy 过程

献给严士健教授 90 华诞

李增沪¹, 杨叙², 宗国纬^{3*}

1. 北京师范大学数学科学学院, 北京 100875;

2. 北方民族大学数学与信息科学学院, 银川 750021;

3. 天津医科大学公共卫生学院, 天津 300070

E-mail: lizh@bnu.edu.cn, xuyang@mail.bnu.edu.cn, gwzong@mail.bnu.edu.cn

收稿日期: 2018-04-27; 接受日期: 2018-07-14; 网络出版日期: 2019-04-19; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11531001 和 11771018)、北方民族大学校级重大专项 (批准号: ZDZX201804) 和宁夏高等学校一流建设学科 (批准号: NXYLXK2017B09) 资助项目

摘要 本文证明一种分布函数值随机偏微分方程解的存在性和轨道唯一性, 以此给出一类随机环境中超 Lévy 过程的构造. 本文还给出此类过程的生成元和鞅问题的刻画.

关键词 超 Lévy 过程 随机环境 随机偏微分方程 分布函数

MSC (2010) 主题分类 60J68, 60K37, 60H15

1 引言

1.1 研究背景

Galton-Watson 分枝过程是描述群体随机繁衍的离散状态随机过程, 作为经典 Galton-Watson 过程的扩展, Smith^[1] 及 Smith 和 Wilkinson^[2] 引进了随机环境中的 Galton-Watson 过程, 之后这类分枝过程受到人们越来越多的关注. 随机环境中的 Galton-Watson 过程模型更具有现实意义, 并且具有很多有意思的新性质, 如存活概率的相变等 (参见文献 [3–6]). 最近, Bansaye 等^[7]、He 等^[8] 及 Palau 和 Pardo^[9] 分别定义和研究了随机环境中的连续状态分枝过程. 特别地, He 等^[8] 通过以下随机微分方程的非负解, 构造了随机环境中的连续状态分枝过程:

$$X_t = X_0 - b \int_0^t Y_s(x) ds + \int_0^t \sqrt{2cX_s} dB_s + \int_0^t \int_0^\infty \int_0^{X_{s-}} z \tilde{N}_0(ds, dz, du) + \int_0^t X_{s-} dU(s),$$

其中 $c \geq 0$ 和 b 都是常数, $\{B_t : t \geq 0\}$ 是 Brown 运动, $\tilde{N}_0(dt, dz, du)$ 是带补偿的 Poisson 随机测度, 而 $\{U(t) : t \geq 0\}$ 是一个跳幅不小于 -1 的 Lévy 过程. 这里的 Lévy 过程 $\{U(t) : t \geq 0\}$ 描述了我们所

英文引用格式: Li Z H, Yang X, Zong G W. A class of super-Lévy processes in random environment (in Chinese). Sci Sin Math, 2020, 50: 69–86, doi: 10.1360/N012018-00119

说的随机环境. 另外, Li 和 Xu^[10] 及 Palau 等^[11] 通过研究 Lévy 过程的指数积分泛函, 给出了关于随机环境连续状态分枝过程存活概率衰减速度的若干结果.

连续状态分枝过程的无穷维形式称为超过程, 是描述微观粒子在某个空间中繁衍和迁徙的随机过程模型. He 等^[12] 证明了具有一般分枝机制的一维超 Lévy 过程的分布函数过程是如下随机偏微分方程 (stochastic partial differential equation, SPDE) 的轨道唯一非负解:

$$\begin{aligned} Y_t(x) = Y_0(x) &+ \int_0^t A^* Y_s(x) ds - b \int_0^t Y_s(x) ds \\ &+ \sqrt{2c} \int_0^t \int_0^{Y_s(x)} W(ds, du) + \int_0^t \int_0^\infty \int_0^{Y_s(x)} z \tilde{N}_0(ds, dz, du), \end{aligned} \quad (1.1)$$

其中 A^* 是一个 Lévy 过程生成元的对偶算子, $c \geq 0$ 和 b 是实常数, $W(ds, du)$ 是 $(0, \infty)^2$ 上的一个 Gauss 白噪声, $\tilde{N}_0(ds, dz, du)$ 是 $(0, \infty)^3$ 上带补偿的 Poisson 随机测度. 近二十多年里, 越来越多的学者研究了随机环境中的超过程 (superprocesses in random environment, SPRE). 随机环境可以影响分枝率 (参见文献 [13–16]), 也可以影响分枝机制 (参见文献 [17, 18]).

受文献 [8, 12] 中模型的启发, 本文将通过一个 SPDE 的非负解来构造随机环境中的超 Lévy 过程 (super-Lévy process in random environments, SLRE). 这里所说的随机环境只影响过程的分枝机制. 具体地, 对于一个比 (1.1) 更一般的 SPDE, 我们构造其轨道唯一的非负解, 然后用此解来定义 SLRE 过程的分布函数值过程. 此处的随机环境由一个跳幅不小于 -1 的 Lévy 过程决定. 读者可以参见文献 [19–21] 来了解分布函数值过程.

1.2 主要结果

令 $B(\mathbb{R})$ 为 $\mathbb{R}$ 上有界函数空间, $C(\mathbb{R})$ 为 $\mathbb{R}$ 上有界连续函数的集合, $C_0(\mathbb{R})$ 为 $C(\mathbb{R})$ 中在无穷远处消失的函数的集合, $C^2(\mathbb{R})$ 为 $C(\mathbb{R})$ 中所有二阶及二阶以下导函数均属于 $C(\mathbb{R})$ 的函数组成的集合, $C_0^2(\mathbb{R})$ 为 $C_0(\mathbb{R})$ 中所有二阶及二阶以下导函数均属于 $C_0(\mathbb{R})$ 的函数组成的集合. 我们用上标 “+” 来表示空间中非负元素组成的集合, 如 $B(\mathbb{R})^+$ 和 $C(\mathbb{R})^+$ 等. 对于 $\mathbb{R}$ 上的 Borel 函数 f 和 g , 如果 $\int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)dx$ 存在, 则将其记为 $\langle f, g \rangle$. 记 $\mathbb{R}$ 上有限 Borel 测度空间为 $M(\mathbb{R})$, 该空间赋予弱收敛拓扑. 对任意 $\mu \in M(\mathbb{R})$ 和 $f \in B(\mathbb{R})$, 记 $\mu(f) = \int f d\mu$. 对度量空间 E , 令 $D([0, \infty), E)$ 为赋有 Skorokhod 拓扑的从 $[0, \infty)$ 到 E 的左极右连轨道的函数空间. 对 $\mathbb{R}$ 上满足 $f(-\infty) = 0$ 的有界右连续单调递增函数的全体, 我们将其记为 $D(\mathbb{R})$, 则 $M(\mathbb{R})$ 与 $D(\mathbb{R})$ 之间有测度及其分布函数的一一对应关系. 根据 $M(\mathbb{R})$ 上的弱收敛拓扑, 我们赋予 $D(\mathbb{R})$ 由这种对应得到的拓扑. 本文用 C 来表示一个非负的常数, 其值可以随所在位置的变化而变化. 如果常数依赖于另一个常数 T 的话, 我们将其记为 C_T .

我们通常假设所有的随机元素都定义在一个带流的完备的概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ 上, 并且此概率空间满足通常条件. 令 $\xi := \{\xi_t : t \geq 0\}$ 为 $(\mathcal{F}_t)$ Lévy 过程, 其生成元如下定义: 对任意 $f \in C^2(\mathbb{R})$, 有

$$Af(x) = af'(x) + \frac{1}{2}\sigma^2 f''(x) + \int_{\mathbb{R}^o} [f(x+z) - f(x) - f'(x)z1_{\{|z| \leq 1\}}] \pi_1(dz),$$

其中 $a \in \mathbb{R}$, σ 是非负常数, $(1 \wedge z^2)\pi_1(dz)$ 是 $\mathbb{R}^o := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 上的有限 Borel 测度. 由 Lévy-Itô 分解可得

$$\xi(t) = at + \sigma B(t) + \int_0^t \int_{[-1, 1]} z \tilde{N}_1(ds, dz) + \int_0^t \int_{[-1, 1]^c} z N_1(ds, dz),$$

其中 $[-1, 1]^c := \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$, $\{B(t) : t \geq 0\}$ 是 $(\mathcal{F}_t)$ Brown 运动, $N_1(ds, dz)$ 是 $(0, \infty) \times \mathbb{R}$ 上强度为 $ds\pi_1(dz)$ 的 $(\mathcal{F}_t)$ Poisson 随机测度, 其中 $\pi_1(dz)$ 满足 $\int_{\mathbb{R}} (1 \wedge z^2)\pi_1(dz) < \infty$, 而 $\tilde{N}_1(ds, dz) = N_1(ds, dz) - ds\pi_1(dz)$ 为补偿测度. 使用上述随机噪声, 可以定义另一个 $(\mathcal{F}_t)$ Lévy 过程 $U = \{U_t : t \geq 0\}$ 如下:

$$U(t) = \beta t + \sigma B(t) + \int_0^t \int_{[-1, 1]} (e^z - 1) \tilde{N}_1(ds, dz) + \int_0^t \int_{[-1, 1]^c} (e^z - 1) N_1(ds, dz), \quad (1.2)$$

其中

$$\beta = a + \frac{\sigma^2}{2} + \int_{[-1, 1]} [e^z - 1 - z]\pi_1(dz).$$

注意 U 的跳幅不小于 -1 .

现在令 $\pi_0(dz)$ 是 $(0, \infty)$ 上的一个 Borel 测度, 满足 $\int_0^\infty (z \wedge z^2)\pi_0(dz) < \infty$. 假设 $W(ds, du)$ 是 $(0, \infty)^2$ 上强度为 $dsdu$ 的 $(\mathcal{F}_t)$ Gauss 白噪声, 而 $\tilde{N}_0(ds, dz, du)$ 是 $(0, \infty)^3$ 上强度为 $ds\pi_0(dz)du$ 的带补偿的 $(\mathcal{F}_t)$ Poisson 随机测度, 且二者独立于 Lévy 过程 $U = \{U_t : t \geq 0\}$. 考虑如下左极右连的 $D(\mathbb{R})$ 值过程 $Y = \{Y_t : t \geq 0\}$ 的 SPDE:

$$\begin{aligned} Y_t(x) = Y_0(x) &+ \int_0^t A^* Y_s(x) ds - b \int_0^t Y_s(x) ds + \sqrt{2c} \int_0^t \int_0^{Y_s(x)} W(ds, du) \\ &+ \int_0^t \int_0^\infty \int_0^{Y_{s-}(x)} z \tilde{N}_0(ds, dz, du) + \int_0^t Y_{s-}(x) dU(s), \end{aligned} \quad (1.3)$$

其中 $Y_0 \in D(\mathbb{R})$, A^* 是 A 的对偶算子, 而 b 和 $c \geq 0$ 都是常数. 上式是 (1.1) 的推广, 且兼具了随机环境的结构. 给定方程 (1.3) 的解 $Y = \{Y_t : t \geq 0\}$, 我们可以通过 $Y_t(x) = X_t(-\infty, x]$ 确定左极右连的 $M(\mathbb{R})$ 值过程 $\{X_t : t \geq 0\}$, 这就是我们所称的随机环境超 Lévy 过程, 即 SLRE.

下面讨论 SLRE 的构造. 将 U 的表达式 (1.2) 代入到 (1.3) 中, 得到

$$\begin{aligned} Y_t(x) = Y_0(x) &+ \int_0^t A^* Y_s(x) ds + \sqrt{2c} \int_0^t \int_0^{Y_s(x)} W(ds, du) \\ &+ \int_0^t \int_0^\infty \int_0^{Y_{s-}(x)} z \tilde{N}_0(ds, dz, du) + (\beta - b) \int_0^t Y_s(x) ds \\ &+ \sigma \int_0^t Y_s(x) dB(s) + \int_0^t \int_{[-1, 1]} (e^z - 1) Y_{s-}(x) \tilde{N}_1(ds, dz) \\ &+ \int_0^t \int_{[-1, 1]^c} (e^z - 1) Y_{s-}(x) N_1(ds, dz). \end{aligned} \quad (1.4)$$

令 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 为 $\mathbb{R}$ 上全体无穷可微速降函数组成的 Schwartz 空间. 下面给出 SPDE (1.4) 的弱解的定义:

定义 1.1 方程 (1.4) 有一个初值为 $Y_0 \in D(\mathbb{R})$ 的弱解 (Y, W, N_0, B, N_1) , 如果 (Y, W, N_0, B, N_1) 定义在同一个概率空间上且满足

(i) $W = \{W(ds, du) : s > 0, u > 0\}$ 是 $(\mathcal{F}_t)$ 时空 Gauss 白噪声, 其强度为 $dsdu$, $B = \{B(t) : t \geq 0\}$ 是 $(\mathcal{F}_t)$ Brown 运动, $N_0 = \{N_0(ds, dz, du) : s > 0, z > 0, u > 0\}$ 和 $N_1 = \{N_1(ds, dz) : s > 0, z \in \mathbb{R}\}$ 都是 $(\mathcal{F}_t)$ Poisson 随机测度, 其强度分别为 $ds\pi_0(dz)du$ 和 $ds\pi_1(dz)$. 另外, W 、 B 、 N_0 和 N_1 相互独立.

(ii) 两参数实值过程 $Y = \{Y_t : t \geq 0\} = \{Y_t(x) : t > 0, x \in \mathbb{R}\}$ 是 $(\mathcal{F}_t)$ 循序可测的 $D(\mathbb{R})$ 值左极右连的过程.

(iii) 对任意 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, 有

$$\begin{aligned}
\langle Y_t, f \rangle &= \langle Y_0, f \rangle + \int_0^t \langle Y_s, Af \rangle ds + \sqrt{2c} \int_{\mathbb{R}} f(x) dx \int_0^t \int_0^{Y_s(x)} W(ds, du) \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}} f(x) dx \int_0^t \int_0^\infty \int_0^{Y_{s-}(x)} z \tilde{N}_0(ds, dz, du) \\
&\quad + (\beta - b) \int_0^t \langle Y_s, f \rangle ds + \sigma \int_{\mathbb{R}} f(x) dx \int_0^t Y_s(x) dB(s) \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}} f(x) dx \int_0^t \int_{[-1,1]} (e^z - 1) Y_{s-}(x) \tilde{N}_1(ds, dz) \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}} f(x) dx \int_0^t \int_{[-1,1]^c} (e^z - 1) Y_{s-}(x) N_1(ds, dz), \tag{1.5}
\end{aligned}$$

其中 $\tilde{N}_0(ds, dz, du) = N_0(ds, dz, du) - ds\pi_0(dz)du$ 和 $\tilde{N}_1(ds, dz) = N_1(ds, dz) - ds\pi_1(dz)$ 为补偿测度.

定理 1.1 (i) 方程 (1.4) 存在弱解.

(ii) 假设 (Y^1, W, N_0, B, N_1) 和 (Y^2, W, N_0, B, N_1) 定义在相同的带流概率空间上, 同为 (1.4) 的弱解, 并且初值 $Y_0^1 = Y_0^2 \in D(\mathbb{R})$ 相同, 则以概率 1 有对任意 $t > 0$, $Y_t^1(x) = Y_t^2(x)$ 对所有 x 都成立.

定理 1.1 给出了随机环境超 Lévy 过程的构造. 我们还可以给出此过程的生成元和鞅问题的刻画. 为此, 令 $\mathcal{D}$ 是 $M(\mathbb{R})$ 上具有形式 $F(\mu) = G(\mu(f_1), \dots, \mu(f_n))$ 的函数, 其中 $G \in C^2(\mathbb{R}^n)$ 且 $\{f_1, \dots, f_n\} \subset C^2(\mathbb{R})$. 对任意 $F \in \mathcal{D}$, 定义

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(F(\mu)) &= F'(\mu)\mu((A + \beta - b)f) + c \int_{\mathbb{R}} F''(\mu; x)\mu(dx) \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}} \mu(dx) \int_0^\infty [F(\mu + z\delta_x) - F(\mu) - zF'(\mu; x)]\pi_0(dz) \\
&\quad + \int_{[-1,1]} [F(e^z\mu) - F(\mu) - (e^z - 1)F'(\mu)]\pi_1(dz) \\
&\quad + \int_{[-1,1]^c} [F(e^z\mu) - F(\mu)]\pi_1(dz) + \frac{\sigma^2}{2}F''(\mu),
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
F'(\mu; x) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} [F(\mu + s\delta_x) - F(\mu)] = \frac{d}{ds} F(\mu + s\delta_x) \Big|_{s=0} = \sum_{i=1}^n G'_i(\mu(f_1), \dots, \mu(f_n)) f_i(x), \\
F''(\mu; x) &= \frac{d^2}{ds^2} F(\mu + s\delta_x) \Big|_{s=0} = \frac{d}{ds} F'(\mu + s\delta_x) \Big|_{s=0} = \sum_{i,j=1}^n G''_{i,j}(\mu(f_1), \dots, \mu(f_n)) f_i(x) f_j(x)
\end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}
F'(\mu) &= \frac{d}{ds} F(\mu + s\mu) \Big|_{s=0} = \sum_{i=1}^n G'_i(\mu(f_1), \dots, \mu(f_n)) \mu(f_i), \\
F''(\mu) &= \frac{d^2}{ds^2} F(\mu + s\mu) \Big|_{s=0} = \sum_{i,j=1}^n G''_{i,j}(\mu(f_1), \dots, \mu(f_n)) \mu(f_i) \mu(f_j).
\end{aligned}$$

以下的定理给出了 SLRE 的生成元和鞅问题的刻画.

定理 1.2 SLRE 过程 $X := \{X_t : t \geq 0\}$ 是如下鞅问题的唯一解: 对任意 $F \in \mathcal{D}$, 有

$$F(X_t) = F(X_0) + \int_0^t \mathcal{L}(F(X_s))ds + \text{局部鞅}. \quad (1.6)$$

这里鞅问题 (1.6) 的解的唯一性是指其任何两个具有相同初始分布的解具有同样的有限维分布. 本文的框架如下: 第 2 节给出定理 1.1(ii) 的证明, 其方法与文献 [22] 中的类似; 第 3 节给出定理 1.1(i) 的证明; 第 4 节给出定理 1.2 的证明.

2 SPDE 的轨道唯一性

本节给出定理 1.1(ii) 的证明, 即建立 SPDE (1.4) 的轨道唯一性, 这是文献 [12, 定理 6.12] 和 [22, 定理 4.2] 的推广.

定理 1.1(ii) 的证明 我们将证明分成 4 步.

第 1 步 令 $\Phi \in C^2(\mathbb{R})^+$ 满足 $\text{supp}(\Phi) \subset (-1, 1)$ 和 $\int_{-1}^1 \Phi(y)dy = 1$. 对任意 $m \geq 1$ 和 $x, y \in \mathbb{R}$, 令 $\Phi_m(x) = m\Phi(mx)$ 和 $\Phi_m^x(y) = \Phi_m(x - y) = m\Phi(m(x - y))$. 对 $t, u \geq 0$ 和 $x \in \mathbb{R}$, 令

$$\bar{Y}_t(x) = Y_t^1(x) - Y_t^2(x) \quad \text{和} \quad \bar{g}_t(u, x) = 1_{\{u \leq Y_t^1(x)\}} - 1_{\{u \leq Y_t^2(x)\}}.$$

根据 (1.5) 和随机 Fubini 定理可以得到

$$\begin{aligned} \langle \bar{Y}_t, \Phi_m^x \rangle &= \int_0^t \langle \bar{Y}_s, (A + \beta - b)\Phi_m^x \rangle ds + \sigma \int_0^t \langle \bar{Y}_s, \Phi_m^x \rangle dB_s + \sqrt{2c} \int_0^t \int_0^\infty \langle \bar{g}_s(u, \cdot), \Phi_m^x \rangle W(ds, du) \\ &\quad + \int_0^t \int_0^\infty \int_0^\infty z \langle \bar{g}_{s-}(u, \cdot), \Phi_m^x \rangle \tilde{N}_0(ds, dz, du) + \int_0^t \int_{[-1, 1]} (e^z - 1) \langle \bar{Y}_{s-}, \Phi_m^x \rangle \tilde{N}_1(ds, dz) \\ &\quad + \int_0^t \int_{[-1, 1]^c} (e^z - 1) \langle \bar{Y}_{s-}, \Phi_m^x \rangle N_1(ds, dz). \end{aligned} \quad (2.1)$$

对 $k \geq 1$, 定义停时

$$\tau_k := \inf \left\{ t \geq 0 : (Y_t^1(\infty) + Y_t^2(\infty)) \vee \int_{\{t\}} \int_1^\infty z N_1(ds, dz) > k \right\}.$$

我们约定 $\inf \phi = \infty$. 由于 $\{Y_t^1(\infty) : t \geq 0\}$ 和 $\{Y_t^2(\infty) : t \geq 0\}$ 都是左极右连的过程并且 $N_1(ds, dz)$ 的跳幅超过 k 的跳的数目是有限的, 则

$$\int_0^{t \wedge \tau_k} \int_1^\infty (e^z - 1) N_1(ds, dz) = \int_0^{t \wedge \tau_k} \int_1^k (e^z - 1) N_1(ds, dz) \quad (2.2)$$

和

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k = \infty, \quad \mathbb{P}\text{-a.s.} \quad (2.3)$$

第 2 步 对 $n \geq 1$, 令 $a_n = \exp\{-n(n+1)/2\}$ 和 $\psi_n \in C^2(\mathbb{R})$ 满足 $\text{supp}(\psi_n) \subset (a_n, a_{n-1})$, $\int_{a_n}^{a_{n-1}} \psi_n(x)dx = 1$, 对任意 $x > 0$ 都有 $0 \leq \psi_n(x) \leq \frac{2}{nx}$. 对任意 $n \geq 1$, 如下定义函数 ϕ_n :

$$\phi_n(x) = \int_0^{|x|} dy \int_0^y \psi_n(z)dz, \quad x \in \mathbb{R},$$

则 $\sup_{x \in \mathbb{R}} |\phi'_n(x)| \leq 1$, $0 \leq |z| \phi''_n(z) \leq 2/n$ 并且当 $n \rightarrow \infty$ 时 $\phi_n(x) \rightarrow |x|$. 由 (2.1) 和 Itô 公式有

$$\begin{aligned} \phi_n(\langle \bar{Y}_{t \wedge \tau_k}, \Phi_m^x \rangle) &= \int_0^{t \wedge \tau_k} \phi'_n(\langle \bar{Y}_s, \Phi_m^x \rangle) \langle \bar{Y}_s, (A + \beta - b) \Phi_m^x \rangle ds + \frac{\sigma^2}{2} \int_0^{t \wedge \tau_k} \phi''_n(\langle \bar{Y}_s, \Phi_m^x \rangle) |\langle \bar{Y}_s, \Phi_m^x \rangle|^2 ds \\ &\quad + c \int_0^{t \wedge \tau_k} ds \int_0^\infty \phi''_n(\langle \bar{Y}_s, \Phi_m^x \rangle) |\langle \bar{g}_s(u, \cdot), \Phi_m^x \rangle|^2 du \\ &\quad + \int_0^{t \wedge \tau_k} ds \int_0^\infty \pi_0(dz) \int_0^\infty D_n(\langle \bar{Y}_s, \Phi_m^x \rangle, z \langle \bar{g}_s(u, \cdot), \Phi_m^x \rangle) du \\ &\quad + \int_0^{t \wedge \tau_k} ds \int_{[-1, 1]} D_n(\langle \bar{Y}_s, \Phi_m^x \rangle, (e^z - 1) \langle \bar{Y}_s, \Phi_m^x \rangle) \pi_1(dz) \\ &\quad + \int_0^{t \wedge \tau_k} ds \int_{[-1, 1]^c} V_n(\langle \bar{Y}_{s-}, \Phi_m^x \rangle, (e^z - 1) \langle \bar{Y}_{s-}, \Phi_m^x \rangle) N_1(ds, dz) + \text{鞅}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

其中

$$V_n(x, z) = \phi_n(x + z) - \phi_n(x) \quad \text{和} \quad D_n(x, z) = V_n(x, z) - z \phi'_n(x).$$

定义函数 ρ 为 $\rho(x) = K e^{-1/(1-x^2)} 1_{\{|x| < 1\}}$, 其中 K 是一个常数且满足 $\int_{\mathbb{R}} \rho(x) dx = 1$. 令

$$J(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-|y|} \rho(x - y) dy, \quad x \in \mathbb{R}.$$

根据 (2.4) 和 Fubini 定理, 我们有

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left\{ \int_{\mathbb{R}} \phi_n(\langle \bar{Y}_{t \wedge \tau_k}, \Phi_m^x \rangle) J(x) dx \right\} \\ &= \mathbb{E} \left\{ \int_0^{t \wedge \tau_k} ds \int_{\mathbb{R}} \phi'_n(\langle \bar{Y}_s, \Phi_m^x \rangle) \langle \bar{Y}_s, (A + \beta - b) \Phi_m^x \rangle J(x) dx \right\} \\ &\quad + \frac{\sigma^2}{2} \mathbb{E} \left\{ \int_0^{t \wedge \tau_k} ds \int_{\mathbb{R}} \phi''_n(\langle \bar{Y}_s, \Phi_m^x \rangle) |\langle \bar{Y}_s, \Phi_m^x \rangle|^2 J(x) dx \right\} \\ &\quad + c \mathbb{E} \left\{ \int_0^{t \wedge \tau_k} ds \int_0^\infty du \int_{\mathbb{R}} \phi''_n(\langle \bar{Y}_s, \Phi_m^x \rangle) |\langle \bar{g}_s(u, \cdot), \Phi_m^x \rangle|^2 J(x) dx \right\} \\ &\quad + \mathbb{E} \left\{ \int_0^{t \wedge \tau_k} ds \int_0^\infty \pi_0(dz) \int_0^\infty du \int_{\mathbb{R}} D_n(\langle \bar{Y}_s, \Phi_m^x \rangle, z \langle \bar{g}_s(u, \cdot), \Phi_m^x \rangle) J(x) dx \right\} \\ &\quad + \mathbb{E} \left\{ \int_0^{t \wedge \tau_k} ds \int_{[-1, 1]} \pi_1(dz) \int_{\mathbb{R}} D_n(\langle \bar{Y}_s, \Phi_m^x \rangle, (e^z - 1) \langle \bar{Y}_s, \Phi_m^x \rangle) J(x) dx \right\} \\ &\quad + \mathbb{E} \left\{ \int_0^{t \wedge \tau_k} ds \int_{[-1, 1]^c} \pi_1(dz) \int_{\mathbb{R}} V_n(\langle \bar{Y}_{s-}, \Phi_m^x \rangle, (e^z - 1) \langle \bar{Y}_{s-}, \Phi_m^x \rangle) J(x) dx \right\} \\ &=: \sum_{i=1}^6 I_i^{m, n, k}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

第 3 步 此步我们讨论当 $m, n \rightarrow \infty$ 时 (2.5) 的极限. 令

$$J_1(x) := J(x) + \int_{|z| \geq 1} J(x + z) \nu(dz).$$

与文献 [22, 引理 4.10 和 4.7] 类似, 可以得到

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} I_1^{m, n, k} \leq C \mathbb{E} \left\{ \int_0^{t \wedge \tau_k} \langle |\bar{Y}_s|, J_1 \rangle ds \right\} \quad (2.6)$$

和

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} I_2^{m,n,k} \leq \frac{Ck}{n}, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} I_3^{m,n,k} \leq \frac{C}{n}. \quad (2.7)$$

类似于文献 [22, 引理 4.8], 我们有

$$\lim_{m \rightarrow \infty} I_4^{m,n,k} = \mathbb{E} \left\{ \int_0^{t \wedge \tau_k} ds \int_0^\infty \pi_0(dz) \int_0^\infty du \int_{\mathbb{R}} D_n(\bar{Y}_s(x), z\bar{g}_s(u, x)) J(x) dx \right\} =: I_4^{n,k}, \quad (2.8)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} I_5^{m,n,k} = \mathbb{E} \left\{ \int_0^{t \wedge \tau_k} ds \int_{[-1,1]} \pi_1(dz) \int_{\mathbb{R}} D_n(\bar{Y}_s(x), (e^z - 1)\bar{Y}_s(x)) J(x) dx \right\} =: I_5^{n,k}. \quad (2.9)$$

由文献 [22, 引理 4.5] 可得

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left\{ \int_{\mathbb{R}} \phi_n(\langle \bar{Y}_{t \wedge \tau_k}, \Phi_m^x \rangle) J(x) dx \right\} = \mathbb{E} \left\{ \int_{\mathbb{R}} \phi_n(\bar{Y}_{t \wedge \tau_k}(x)) J(x) dx \right\}. \quad (2.10)$$

由 (2.2) 和 [22, 引理 4.5] 可知, 当 $m \rightarrow \infty$ 时,

$$\begin{aligned} I_6^{m,n,k} &\leq \mathbb{E} \left\{ \int_0^{t \wedge \tau_k} ds \int_{[-1,1]^c} \pi_1(dz) \int_{\mathbb{R}} |(e^z - 1)\langle \bar{Y}_s, \Phi_m^x \rangle| J(x) dx \right\} \\ &= \mathbb{E} \left\{ \int_0^{t \wedge \tau_k} ds \int_{(-\infty, -1] \cup [1, k]} \pi_1(dz) \int_{\mathbb{R}} |(e^z - 1)\langle \bar{Y}_s, \Phi_m^x \rangle| J(x) dx \right\} \\ &\leq C_k \mathbb{E} \left\{ \int_0^{t \wedge \tau_k} ds \int_{\mathbb{R}} \langle |\bar{Y}_s|, \Phi_m^x \rangle J(x) dx \right\} \rightarrow C_k \mathbb{E} \left\{ \int_0^{t \wedge \tau_k} \langle |\bar{Y}_s|, J \rangle ds \right\}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

由文献 [23, 引理 3.1] 可得

$$D_n(\bar{Y}_s(x), z\bar{g}_s(u, x)) \leq \frac{2|z\bar{g}_s(u, x)|^2}{n|\bar{Y}_s(x)|}$$

和

$$D_n(\bar{Y}_s(x), (e^z - 1)\bar{Y}_s(x)) \leq \frac{2|(e^z - 1)\bar{Y}_s(x)|^2}{n|\bar{Y}_s(x)|}.$$

从而由 (2.8) 和 (2.9) 知,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (I_4^{n,k} + I_5^{n,k}) = 0, \quad k \geq 1. \quad (2.12)$$

利用 (2.6)、(2.7) 和 (2.10)–(2.12), 对 (2.5) 先令 $m \rightarrow \infty$, 然后令 $n \rightarrow \infty$, 可得

$$\mathbb{E}\{\langle |\bar{Y}_{t \wedge \tau_k}|, J \rangle\} \leq C_k \int_0^t \mathbb{E}\{\langle |\bar{Y}_{s \wedge \tau_k}|, J_1 \rangle\} ds.$$

第 4 步 重复第 3 步可以得到

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{\langle |\bar{Y}_{t \wedge \tau_k}|, J \rangle\} &\leq C_k^2 \int_0^t ds_1 \int_0^{s_1} \mathbb{E}\{\langle |\bar{Y}_{s_2 \wedge \tau_k}|, J_2 \rangle\} ds_2 \\ &\leq C_k^3 \int_0^t ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \int_0^{s_2} \mathbb{E}\{\langle |\bar{Y}_{s_3 \wedge \tau_k}|, J_3 \rangle\} ds_3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\leq C_k^n \int_0^t ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \cdots \int_0^{s_{n-1}} \mathbb{E}\{\langle |\bar{Y}_{s_{n-1} \wedge \tau_k}|, J_n \rangle\} ds_n,$$

其中 J_n 定义如下:

$$J_n(x) := J_{n-1}(x) + \int_{|z| \geq 1} J_{n-1}(x+z) \nu(dz), \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \geq 2.$$

类似于文献 [22, 命题 4.2] 证明的最后部分, 可以得到

$$\mathbb{E}\{\langle |\bar{Y}_{t \wedge \tau_k}|, J \rangle\} = 0.$$

最后, 令 $k \rightarrow \infty$ 并利用 (2.3) 及 $t \mapsto Y_t^1$ 和 $t \mapsto Y_t^2$ 的右连续性即可得定理 1.1(ii) 的结论. $\square$

3 SPDE 弱解的存在性

本节给出定理 1.1(i) 的证明, 即证明 (1.4) 的解的存在性. 首先建立以下引理, 即考虑随机环境由带漂移复合 Poisson 过程给出的情形.

引理 3.1 假设 π' 是完备可分的度量空间 E 上的一个有限测度, h 是 E 上的一个可测函数. 若在方程 (1.4) 中 $\sigma = 0$, π_1 和 $e^z - 1$ 分别被 π' 和函数 $h(z)$ 代替, 则 (1.4) 有一个取值于 $D(\mathbb{R})$ 的轨道唯一的强解.

证明 在本引理的条件下, 随机环境 U 满足 $U(t) = \beta_1 t + \int_0^t \int_E h(z) N_1(ds, dz)$, 其中 $\beta_1 \in \mathbb{R}$. 定义停时 $\tau_0 = 0$ 和 $\tau_k = \inf\{s \geq \tau_{k-1} : N_1([0, s], E) - N_1([0, s], E) = 1\}$. 由于对于每个 $s \geq 0$, $\mathbb{E}(N_1([0, s], E)) = s\pi'(E) < \infty$, 于是, $N_1([0, s], E) < \infty$ 几乎必然成立, 从而有 $\lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k = \infty$ 几乎必然成立. 由文献 [12, 定理 3.1 和 6.12], 下面的方程有一个取值于 $D(\mathbb{R})$ 的轨道唯一的强解 (将此解记为 $\{Y_t^0 : t \geq 0\}$):

$$\begin{aligned} Y_t(x) = & Y_0(x) + \int_0^t (A^* + \beta_1 - b) Y_s ds + \sqrt{2c} \int_0^t \int_0^{Y_s(x)} W(ds, du) \\ & + \int_0^t \int_0^\infty \int_0^{Y_{s-}(x)} z \tilde{N}_0(ds, dz, du). \end{aligned} \quad (3.1)$$

对任意 $0 \leq t < \tau_1$, 令 $Y_t = Y_t^0$. 假设对 $0 \leq t < \tau_k$ 已定义 Y_t 且

$$\xi(x) = Y_{\tau_k-}(x) + \int_{\{\tau_k\}} \int_E h(z) Y_{\tau_k-}^0(x) \tilde{N}_1(ds, dz). \quad (3.2)$$

再次利用文献 [12, 定理 3.1 和 6.12] 可得下面的方程有一个轨道唯一的非负强解 (记为 $\{Y_t^k : t \geq 0\}$):

$$\begin{aligned} Y_t(x) = & \xi(x) + \int_0^t (A^* + \beta_1 - b) Y_s ds + \sqrt{2c} \int_0^t \int_0^{Y_s(x)} W(\tau_k + ds, du) \\ & + \int_0^t \int_0^\infty \int_0^{Y_{s-}(x)} z \tilde{N}_0(\tau_k + ds, dz, du). \end{aligned} \quad (3.3)$$

对 $\tau_k \leq t < \tau_{k+1}$, 令 $Y_t = Y_{t-\tau_k}^k$. 根据前面的推断我们可定义一个过程 $\{Y_t : t \geq 0\}$ 使其为方程 (1.4) 的一个强解. 另一方面, 如果 $\{Y_t : t \geq 0\}$ 是方程 (1.4) 的一个解, 那么对 $0 \leq t < \tau_1$, 它满足 (3.1), 且对 $0 \leq t < \tau_{k+1} - \tau_k$ 过程 $\{Y_{\tau_k+t} : t \geq 0\}$ 满足 (3.3), 其中 ξ 由 (3.2) 给出, 则方程 (1.4) 的轨道唯一性可由 (3.1) 和 (3.3) 的轨道唯一性得到. $\square$

在下面的证明中, 我们从一系列随机环境是带漂移的复合 Poisson 过程的超 Lévy 过程出发, 构造随机方程 (1.4) 的解.

定理 1.1(i) 的证明 假设 $Y_0 \in D(\mathbb{R})$ 且 $X_0(dx)$ 由 $Y_0(x) = X_0(-\infty, x]$ 决定. 定义 Lévy 过程

$$\begin{aligned} U_n(t) = & \int_0^t \int_{[-1,1]} (e^z - 1) \tilde{N}_1^n(ds, dz) + \sigma \int_0^t \int_{\mathbb{R}} z \tilde{N}_2^n(ds, dz) \\ & + \beta t + \int_0^t \int_{[-1,1]^c} (e^z - 1) N_1^n(ds, dz), \end{aligned}$$

其中 $\{N_1^n(ds, dz) : s \geq 0, z \in \mathbb{R}\}$ 和 $\{N_2^n(ds, dz) : s \geq 0, z \in \mathbb{R}\}$ 是相互独立的 Poisson 随机测度且强度分别为

$$ds\pi_1^n(dz) := ds1_{[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]^c}(z)\pi_1(dz) \quad \text{和} \quad ds\pi_2^n(dz) := ds\frac{3}{2}n1_{[-\frac{1}{3n}, \frac{1}{3n}]}(z)dz,$$

这里

$$\tilde{N}_1^n(ds, dz) = N_1^n(ds, dz) - ds\pi_1^n(dz), \quad \tilde{N}_2^n(ds, dz) = N_2^n(ds, dz) - ds\pi_2^n(dz).$$

根据引理 3.1, 对由 U_n 决定的随机环境, 如下方程有一个取值于 $D(\mathbb{R})$ 的唯一强解 $\{Y_t^n : t \geq 0\}$:

$$\begin{aligned} Y_t^n(x) = & Y_0(x) + \int_0^t (A^* + \beta - b)Y_s^n(x)ds + \sqrt{2c} \int_0^t \int_0^{Y_s^n(x)} W(ds, du) \\ & + \int_0^t \int_0^\infty \int_0^{Y_{s-}^n(x)} z \tilde{N}_0(ds, dz, du) + \sigma \int_0^t \int_{\mathbb{R}} z Y_{s-}^n(x) \tilde{N}_2^n(ds, dz) \\ & + \int_0^t \int_{[-1,1]} (e^z - 1) Y_{s-}^n(x) \tilde{N}_1^n(ds, dz) + \int_0^t \int_{[-1,1]^c} (e^z - 1) Y_{s-}^n(x) N_1^n(ds, dz). \end{aligned}$$

由 $Y_t^n(x) = X_t^n(-\infty, x]$ 决定的测度值过程满足如下方程:

$$\begin{aligned} X_t^n(f) = & X_0(f) + \int_0^t X_s^n((A + \beta - b)f)ds + \sqrt{2c} \int_0^t \int_0^\infty f((Y_s^n)^{-1}(u))W(ds, du) \\ & + \int_0^t \int_0^\infty \int_0^\infty f((Y_{s-}^n)^{-1}(u))z \tilde{N}_0(ds, dz, du) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} X_{s-}^n(f)z \tilde{N}_2^n(ds, dz) \\ & + \int_0^t \int_{[-1,1]} X_{s-}^n(f)(e^z - 1) \tilde{N}_1^n(ds, dz) \\ & + \int_0^t \int_{[-1,1]^c} X_{s-}^n(f)(e^z - 1) N_1^n(ds, dz), \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \end{aligned} \quad (3.4)$$

这里用到了等式 $\langle Y_t^n, f' \rangle = -X_t^n(f)$.

对 $t \geq 0$ 和 $n \geq 1$, 定义

$$\zeta_t^n := \int_0^t \int_{[1,\infty)} (e^z - 1) N_1^n(ds, dz), \quad Z_t^n(dx) := X_t^n(dx) \exp\{-\zeta_t^n\},$$

则由 (3.4) 和分部积分公式可得

$$Z_t^n(f) = Z_0(f) + \int_0^t Z_s^n((A + \beta - b)f)ds + \sqrt{2c} \int_0^t \int_0^\infty f((Y_s^n)^{-1}(u)) \exp\{-\zeta_s^n\} W(ds, du)$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^t \int_0^\infty \int_0^\infty f((Y_{s-}^n)^{-1}(u)) \exp\{-\zeta_{s-}^n\} z \tilde{N}_0(ds, dz, du) \\
& + \sigma \int_0^t \int_{\mathbb{R}} Z_{s-}^n(f) z \tilde{N}_2^n(ds, dz) + \int_0^t \int_{[-1,1]} Z_{s-}^n(f) (e^z - 1) \tilde{N}_1^n(ds, dz) \\
& + \int_0^t \int_{-\infty}^{-1} Z_{s-}^n(f) (e^z - 1) N_1^n(ds, dz). \tag{3.5}
\end{aligned}$$

我们通过以下 6 步完成证明.

第 1 步 由 (3.5) 可得

$$\begin{aligned}
Z_t^n(1) &= Z_0(1) + (\beta - b) \int_0^t Z_s^n(1) ds + \sqrt{2c} \int_0^t \int_0^{X_s^n(1)} \exp\{-\zeta_s^n\} W(ds, du) \\
&+ \int_0^t \int_0^\infty \int_0^{X_{s-}^n(1)} \exp\{-\zeta_{s-}^n\} z \tilde{N}_0(ds, dz, du) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} Z_{s-}^n(1) z \tilde{N}_2^n(ds, dz) \\
&+ \int_0^t \int_{[-1,1]} Z_{s-}^n(1) (e^z - 1) \tilde{N}_1^n(ds, dz) + \int_0^t \int_{-\infty}^{-1} Z_{s-}^n(1) (e^z - 1) N_1^n(ds, dz), \tag{3.6}
\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\{Z_t^n(1)\} &\leq Z_0(1) + (\beta - b) \int_0^t \mathbb{E}\{Z_s^n(1)\} ds + \mathbb{E}\left\{ \int_0^t \int_{-\infty}^{-1} Z_{s-}^n(1) N_1^n(ds, dz) \right\} \\
&\leq Z_0(1) + [\beta - b + \pi_1(-\infty, -1)] \int_0^t \mathbb{E}\{Z_s^n(1)\} ds.
\end{aligned}$$

从而由 Gronwall 不等式可得

$$\mathbb{E}\{Z_t^n(1)\} \leq Z_0(1) \exp\{[\beta - b + \pi_1(-\infty, -1)]t\}. \tag{3.7}$$

根据 (3.6) 和 Itô 公式, 对 $h(x) = \ln(x+1)$, 有

$$\begin{aligned}
h(Z_t^n(1)) &= h(Z_0(1)) + (\beta - b) \int_0^t h'(Z_s^n(1)) Z_s^n(1) ds + c \int_0^t h''(Z_s^n(1)) Z_s^n(1) \exp\{-\zeta_s^n\} ds \\
&+ \int_0^t ds \int_0^\infty X_s^n(1) D(Z_s^n(1), z \exp\{-\zeta_s^n\}) \pi_0(dz) + \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} D(Z_s^n(1), Z_s^n(1)z) \pi_2^n(dz) \\
&+ \int_0^t ds \int_{[-1,1]} D(Z_s^n(1), Z_s^n(1)(e^z - 1)) \pi_1^n(dz) \\
&+ \sqrt{2c} \int_0^t \int_0^{X_s^n(1)} h'(Z_s^n(1)) \exp\{-\zeta_s^n\} W(ds, du) \\
&+ \int_0^t \int_0^1 \int_0^{X_{s-}^n(1)} V(Z_{s-}^n(1), z \exp\{-\zeta_{s-}^n\}) \tilde{N}_0(ds, dz, du) \\
&+ \int_0^t \int_1^\infty \int_0^{X_{s-}^n(1)} V(Z_{s-}^n(1), z \exp\{-\zeta_{s-}^n\}) \tilde{N}_0(ds, dz, du) \\
&+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}} V(Z_{s-}^n(1), Z_{s-}^n(1)z) \tilde{N}_2^n(ds, dz) \\
&+ \int_0^t \int_{[-1,1]} V(Z_{s-}^n(1), Z_{s-}^n(1)(e^z - 1)) \tilde{N}_1^n(ds, dz)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^t \int_{-\infty}^{-1} V(Z_{s-}^n(1), Z_{s-}^n(1)(e^z - 1)) N_1^n(ds, dz) \\
& =: h(Z_0(1)) + \sum_{i=1}^{11} I_i^n(t),
\end{aligned} \tag{3.8}$$

其中对 $x, y \in \mathbb{R}$, 有 $D(x, y) := h(x+y) - h(x) - h'(x)y$ 和 $V(x, y) := h(x+y) - h(y)$.

第 2 步 给出 $D(x, y)$ 和 $V(x, y)$ 的估计. 由 Taylor 公式可得

$$\begin{aligned}
|D(x, y)| &= \frac{y^2}{2} \int_0^1 |h''(x + \theta y)| d\theta = \frac{y^2}{2} \int_0^1 [1 + \theta(x+y) + (1-\theta)x]^{-2} d\theta \\
&\leq \frac{y^2}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} [1 + (1-\theta)x]^{-2} d\theta + \frac{y^2}{2} \int_{\frac{1}{2}}^1 [1 + \theta(x+y)]^{-2} d\theta \\
&\leq \frac{y^2}{(2+x)^2} + \frac{y^2}{(2+x+y)^2}, \quad x \geq 0, \quad x+y \geq 0.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

从而有

$$|D(x, y)| \leq \frac{2y^2}{x^2}, \quad x, y > 0$$

和

$$|D(x, y)| \leq \frac{y^2}{x^2} + \frac{y^2}{(x+y)^2}, \quad x > 0, \quad x+y > 0. \tag{3.10}$$

类似地,

$$|V(x, y)| = |y| \int_0^1 |h'(x + \theta y)| d\theta \leq \frac{|y|}{2+x} + \frac{|y|}{2+x+y}, \quad x \geq 0, \quad x+y \geq 0, \tag{3.11}$$

则

$$|V(x, y)| \leq \frac{2y}{x}, \quad x, y > 0 \tag{3.12}$$

和

$$|V(x, y)| \leq \frac{|y|}{x} + \frac{|y|}{x+y}, \quad x > 0, \quad x+y > 0. \tag{3.13}$$

第 3 步 这一步, 我们证明

$$\sup_{n \geq 1} \mathbb{E} \left\{ \sup_{t \in [0, T]} h(Z_t^n(1)) \right\} < \infty. \tag{3.14}$$

为此我们只需要估计 (3.8) 中的 I_i^n ($1 \leq i \leq 11$). 由于对 $x \geq 0$, 有 $[|h'(x)| + |h''(x)|]x \leq 1$, 因此,

$$\mathbb{E} \left\{ \sup_{t \in [0, T]} |I_1^n(t)| + \sup_{t \in [0, T]} |I_2^n(t)| \right\} \leq CT. \tag{3.15}$$

由 (3.9) 和 (3.11) 可得

$$|X_s^n(1)D(Z_s^n(1), \exp\{-\zeta_s^n\}z)| \leq (4z) \wedge (2z^2), \quad z \geq 0,$$

这里用到了 $\zeta_s^n \geq 0$, 从而有

$$\mathbb{E}\left\{\sup_{t \in [0, T]} |I_3^n(t)|\right\} \leq \mathbb{E}\left\{\int_0^T ds \int_0^\infty X_s^n(1) |D(Z_s^n(1), z \exp\{-\zeta_s^n\})| \pi_0(dz)\right\} \leq CT. \quad (3.16)$$

由 (3.10) 可得

$$\mathbb{E}\left\{\sup_{t \in [0, T]} |I_4^n(t)|\right\} \leq 2(1 - n^{-1/3})^{-2} T \int_0^1 z^2 \pi_2^n(dz) = (1 - n^{-1/3})^{-2} T \quad (3.17)$$

和

$$\mathbb{E}\left\{\sup_{t \in [0, T]} |I_5^n(t)|\right\} \leq CT \int_{-1}^1 z^2 \pi_1^n(dz) \leq CT \int_{-1}^1 z^2 \pi_1(dz). \quad (3.18)$$

由 Burkholder-Davis-Gundy 不等式可得

$$\mathbb{E}\left\{\sup_{t \in [0, T]} |I_6^n(t)|^2\right\} \leq C \mathbb{E}\left\{\int_0^T \exp\{-2\zeta_s^n\} |h'(Z_s^n(1))|^2 X_s^n(1) ds\right\} \leq CT, \quad (3.19)$$

这里用到了 $|h'(x)|^2 x \leq 1$ 对所有的 $x \geq 0$ 都成立. 由 (3.12) 和 Burkholder-Davis-Gundy 不等式, 可得

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left\{\sup_{t \in [0, T]} |I_7^n(t)|^2\right\} &\leq C \mathbb{E}\left\{\int_0^T ds \int_0^1 z^2 X_{s-}^n(1) |V(Z_{s-}^n(1), \exp\{-\zeta_{s-}^n\} z)|^2 \pi_0(dz)\right\} \\ &\leq CT \int_0^1 z^2 \pi_0(dz). \end{aligned} \quad (3.20)$$

由 (3.12) 知,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left\{\sup_{t \in [0, T]} |I_8^n(t)|\right\} &\leq \mathbb{E}\left\{\int_0^T \int_1^\infty \int_0^{X_{s-}^n(1)} |V(Z_{s-}^n(1), \exp\{-\zeta_{s-}^n\} z)| N_0(ds, dz, du)\right\} \\ &\quad + \mathbb{E}\left\{\int_0^T ds \int_1^\infty \pi_0(dz) \int_0^{X_{s-}^n(1)} |V(Z_{s-}^n(1), \exp\{-\zeta_{s-}^n\} z)| du\right\} \\ &\leq 4T \int_1^\infty z \pi_0(dz). \end{aligned} \quad (3.21)$$

类似地, 根据 (3.13) 可得

$$\mathbb{E}\left\{\sup_{t \in [0, T]} |I_9^n(t)|^2\right\} \leq C(1 - n^{-1/3})^{-1} T \int_{\mathbb{R}} z^2 \pi_2^n(dz) = C(1 - n^{-1/3})^{-1} T \quad (3.22)$$

和

$$\mathbb{E}\left\{\sup_{t \in [0, T]} |I_{10}^n(t)|^2\right\} \leq C e^{-1} T \int_{[-1, 1]} z^2 \pi_1^n(dz) \leq CT \int_{[-1, 1]} z^2 \pi_1(dz). \quad (3.23)$$

由 (3.11) 可得对 $x \geq 0$ 且 $x + y \geq 0$ 有 $|h(x + y) - h(x)| \leq |y|$, 从而根据 (3.7) 可得

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left\{\sup_{t \in [0, T]} |I_{11}^n(t)|\right\} &\leq \mathbb{E}\left\{\int_0^T \int_{-\infty}^{-1} |V(Z_{s-}^n(1), Z_{s-}^n(1)(e^z - 1))| N_1^n(ds, dz)\right\} \\ &\leq C \pi_1(-\infty, -1] \int_0^T \mathbb{E}\{Z_s^n(1)\} ds \leq C_T. \end{aligned} \quad (3.24)$$

因此, 由 (3.8) 和 (3.15)–(3.24) 即得 (3.14).

第 4 步 证明 $Z^n := \{Z^n(t) : t \geq 0\}$ 在 $D([0, \infty), M(\bar{\mathbb{R}}))$ 上的胎紧性, 这里 $\bar{\mathbb{R}}$ 是 $\mathbb{R}$ 的单点紧化. 根据 (3.14) 可得

$$\sup_{n \geq 1} \mathbb{P} \left\{ \sup_{t \in [0, T]} Z_t^n(1) \geq \varepsilon \right\} \leq h(\varepsilon)^{-1} \sup_{n \geq 1} \mathbb{E} \left\{ \sup_{t \in [0, T]} h(Z_t^n(1)) \right\} < \infty. \quad (3.25)$$

根据 (3.5)、(3.14) 和 Itô 公式可得下面的鞅问题: 对任意 $G \in C_c^2(\mathbb{R})$ 和 $f \in C^2(\mathbb{R})$,

$$G(Z_t^n(f)) = G(Z_0^n(f)) + \int_0^t L^n(G(Z_s^n(f)), s) ds + \text{鞅}$$

对某函数 L^n 成立. 从而由 (3.25) 和文献 [24, 引理 2.2] (或文献 [25, 定理 9.1 和 9.4]) 可得, 对任意 $f \in C^2(\mathbb{R})$, $\{Z_t^n(f) : t \geq 0\}$ 在 $D([0, \infty), \mathbb{R})$ 上是胎紧的, 则由 Mitoma 定理可得 Z^n 在 $D([0, \infty), M(\bar{\mathbb{R}}))$ 上是胎紧的, 可参见文献 [26, 第 361–365 页].

第 5 步 由第 4 步可以得到在空间 $D([0, \infty), M(\bar{\mathbb{R}}))$ 上 Z^n (如有必要取其子列) 依分布收敛到一个取值于 $M(\bar{\mathbb{R}})$ 的左极右连的过程 Z . 令 $(P_t)_{t \geq 0}$ 表示一个强生成元为 A 的 Lévy 过程的转移半群且 $\bar{P}_t = e^{(\beta-b)t} P_t$, 则如同文献 [12, 命题 3.4], 我们可以将 (3.5) 写成如下形式:

$$\begin{aligned} Z_t^n(f) &= Z_0(\bar{P}_t f) + \sqrt{2c} \int_0^t \int_0^\infty \bar{P}_{t-s} f((Y_s^n)^{-1}(u)) \exp\{-\zeta_s^n\} W(ds, du) \\ &\quad + \int_0^t \int_0^\infty \int_0^\infty \bar{P}_{t-s} f((Y_{s-}^n)^{-1}(u)) \exp\{-\zeta_{s-}^n\} z \tilde{N}_0(ds, dz, du) \\ &\quad + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} z Z_{s-}^n(\bar{P}_{t-s} f) \tilde{N}_2^n(ds, dz) + \int_0^t \int_{[-1, 1]} Z_{s-}^n(\bar{P}_{t-s} f) (e^z - 1) \tilde{N}_1^n(ds, dz) \\ &\quad + \int_0^t \int_{-\infty}^{-1} Z_{s-}^n(\bar{P}_{t-s} f) (e^z - 1) N_1^n(ds, dz), \end{aligned}$$

其中 $f \in B(\mathbb{R})$. 对上式取期望得

$$\mathbb{E}\{Z_t^n(f)\} = Z_0(\bar{P}_t f) + \int_0^t \mathbb{E}\{Z_s^n(\bar{P}_{t-s} f)\} ds \int_{-\infty}^{-1} (e^z - 1) \pi_1(dz),$$

从而有

$$\mathbb{E}\{Z_t^n(\bar{P}_{T-t} f)\} = Z_0(\bar{P}_T f) + \int_0^t \mathbb{E}\{Z_s^n(\bar{P}_{T-s} f)\} ds \int_{-\infty}^{-1} (e^z - 1) \pi_1(dz), \quad 0 < t < T.$$

由 Gronwall 引理可得

$$\mathbb{E}\{Z_t^n(\bar{P}_{T-t} f)\} \leq Z_0(\bar{P}_T f) e^{Ct}, \quad 0 < t < T,$$

从而有 $\mathbb{E}\{Z_t^n(f)\} \leq Z_0(\bar{P}_t f) e^{Ct} \leq Z_0(P_t f) e^{Ct}$. 故

$$\mathbb{E}\{Z_t(f)\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}\{Z_t^n(f)\} \leq Z_0(P_t f) e^{Ct}$$

对任意的 $f \in B(\bar{\mathbb{R}})$ 都成立, 其中 $B(\bar{\mathbb{R}})$ 如同 $B(\mathbb{R})$ 的定义. 当 $x \in [-m, m]$ 时, 取 $f_m(x) = 0$; 当 $x \in \bar{\mathbb{R}} \setminus [-m, m]$ 时, 取 $f_m(x) = 1$. 由 Fatou 引理和控制收敛定理可得

$$\mathbb{E}\{Z_t(\bar{\mathbb{R}} \setminus \mathbb{R})\} = \mathbb{E}\left\{ \lim_{m \rightarrow \infty} Z_t(f_m) \right\} \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{E}\{Z_t(f_m)\} \leq \lim_{m \rightarrow \infty} Z_0(P_t f_m) e^{Ct} = 0,$$

故 Z 是 $D([0, \infty), M(\mathbb{R}))$ 上的一个随机过程.

第 6 步 这一步我们结束证明. 由文献 [27, 定理 2.1] 可知, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 依分布有如下收敛:

$$\xi_t^n := \int_0^t \int_{\mathbb{R}} z \tilde{N}_2^n(ds, dz) \rightarrow B(t),$$

其中 $\{B(t) : t \geq 0\}$ 是一个 Brown 运动. 可以观察到 N_1^n 依分布收敛于 N_1 . 令 $X_t(dx) = Z_t(dx) \exp\{\zeta_t^n\}$, 设取值于 $D(\mathbb{R})$ 的过程 $Y := \{Y_t : t \geq 0\}$ 由 $Y_t(x) := X_t(-\infty, x]$ 定义, 那么在 $D([0, \infty), D(\mathbb{R}))$ 上 Y^n 依分布收敛于 Y . 从而可以得到 $(Y^n, W, N_0, \xi^n, N_1^n)$ 依分布收敛于 (Y, W, N_0, B, N_1) . 利用 Skorokhod 表示可得 $(Y^n, W^n, N_0^n, \xi^n, N_1^n)$ 是 (1.4) 的一个解且依概率收敛于 (Y, W, N_0, B, N_1) , 则由文献 [28, 定理 5.5] 或 [24, 引理 2.4] 可得 (Y, W, N_0, B, N_1) 是 (1.4) 的一个弱解, 从而证得定理 1.1(i). $\square$

4 SLRE 的鞅问题

假定 $\{X_t : t \geq 0\}$ 是 $M(\mathbb{R})$ 值过程, 其相应的分布函数值过程记为 $\{Y_t : t \geq 0\}$, 由方程 (1.4) 的解给出, 也就是 $Y_t(x) = X_t(-\infty, x]$. 下面是本节的主要结果, 是 [21, 定理 1.3] 和 [12, 定理 3.1] 的推广.

命题 4.1 左极右连 $M(\mathbb{R})$ 值过程 $\{X_t : t \geq 0\}$ 是鞅问题 (1.6) 的解当且仅当相应的左极右连 $D(\mathbb{R})$ 值过程 $\{Y_t : t \geq 0\}$ 满足 (1.4).

证明 首先证明充分性. 如果 $\{Y_t : t \geq 0\}$ 满足 (1.4), 则存在 (W, N_0, B, N_1) 使得 (Y, W, N_0, B, N_1) 满足 (1.4). 令 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. 由于 $X_t(f) = -\langle Y_t, f' \rangle$, 我们得到

$$\begin{aligned} X_t(f) &= X_0(f) + \int_0^t X_s((A + \beta - b)f)ds + \sqrt{2c} \int_0^t \int_0^\infty f(Y_s^{-1}(u))W(ds, du) \\ &\quad + \int_0^t \int_0^\infty \int_0^\infty f(Y_s^{-1}(u))z \tilde{N}_0(ds, dz, du) + \sigma \int_0^t X_s(f)dB(s) \\ &\quad + \int_0^t \int_{[-1,1]} X_{s-}(f)(e^z - 1) \tilde{N}_1(ds, dz) + \int_0^t \int_{[-1,1]^c} X_{s-}(f)(e^z - 1)N_1(ds, dz). \end{aligned}$$

从而根据 Itô 公式可得 $\{X_t : t \geq 0\}$ 满足鞅问题 (1.6).

以下给出必要性的证明, 假设 $\{X_t : t \geq 0\}$ 是鞅问题 (1.6) 的解, 则对任意 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\{X_t(f) : t \geq 0\}$ 是半鞅. 令 $S(\mathbb{R})$ 表示 $\mathbb{R}$ 上的有限 Borel 符号测度, 赋予其 σ 代数由映射 $\mu \rightarrow \mu(B)$ 生成, 其中 B 为任意的 Borel 集. 令 $S(\mathbb{R})^\circ = S(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$. 定义 $[0, \infty) \times S(\mathbb{R})^\circ$ 上可选的随机测度 $N(ds, d\nu)$ 如下:

$$N(ds, d\nu) = \sum_{s>0} 1_{\{\Delta X_s \neq 0\}} \delta_{(s, \Delta X_s)}(ds, d\nu),$$

其中 $\Delta X_s := X_s - X_{s-}$. 令 $\hat{N}(ds, d\nu)$ 表示 $N(ds, d\nu)$ 的可选的补偿且

$$\tilde{N}(ds, d\nu) := N(ds, d\nu) - \hat{N}(ds, d\nu),$$

则利用类似于文献 [29, 第 154 和 155 页] 中的方法可以得到如下的分解:

$$X_t(f) = X_0(f) + A_t(f) + M_t^c(f) + M_t^d(f), \quad (4.1)$$

其中 $\{A_t(f) : t \geq 0\}$ 是具有局部有界变差的可选过程, $\{M_t^c(f) : t \geq 0\}$ 是一个连续的局部鞅且其二次变差为 $\langle M^c(f) \rangle_t$,

$$M_t^d(f) = \int_0^t \int_{S(\mathbb{R})^\circ} \nu(f) \tilde{N}(ds, d\nu) \quad (4.2)$$

是一个纯跳局部鞅. 接下来用三步来完成此命题的证明.

第 1 步 给出 $A_t(f)$ 和 $M_t^c(f)$ 的积分表达式. 由 (4.1) 和 Itô 公式, 对任意 $G \in C^2(\mathbb{R})$, 有

$$\begin{aligned} G(X_t(f)) &= G(X_0(f)) + \int_0^t G'(X_s(f)) dA_s(f) + \frac{1}{2} \int_0^t G''(X_s(f)) d\langle M^c(f) \rangle_t \\ &\quad + \int_0^t \int_{S(\mathbb{R})^\circ} [G(X_s(f) + \nu(f)) - G(X_s(f)) - \nu(f)G'(X_s(f))] \hat{N}(ds, d\nu) \\ &\quad + \text{局部鞅}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

根据鞅问题 (1.6) 的定义可得

$$\begin{aligned} G(X_t(f)) &= G(X_0(f)) + \int_0^t G'(X_s(f)) X_s((A + \beta - b)f) ds \\ &\quad + c \int_0^t G''(X_s(f)) X_s(f^2) ds + \frac{\sigma^2}{2} \int_0^t G''(X_s(f)) |X_s(f)|^2 ds \\ &\quad + \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} X_s(dx) \int_0^\infty [G(X_s(f) + zf(x)) - G(X_s(f)) - zf(x)G'(X_s(f))] \pi_0(dz) \\ &\quad + \int_0^t ds \int_{[-1,1]} [G(X_s(f)e^z) - G(X_s(f)) - (e^z - 1)X_s(f)G'(X_s(f))] \pi_1(dz) \\ &\quad + \int_0^t ds \int_{[-1,1]^c} [G(X_s(f)e^z) - G(X_s(f))] \pi_1(dz) + \text{局部鞅}. \end{aligned}$$

与 (4.3) 比较并利用半鞅标准分解的唯一性 (参见文献 [30, 第 213 页]) 可得

$$A_s(f) = \int_0^t X_s((A + \beta - b)f) ds + \int_0^t ds \int_{[-1,1]^c} (e^z - 1) X_s(f) \pi_1(dz) \quad (4.4)$$

和

$$\langle M^c(f) \rangle_t = 2c \int_0^t X_s(f^2) ds + \sigma^2 \int_0^t |X_s(f)|^2 ds. \quad (4.5)$$

对任意 $G \in C^2(\mathbb{R})$, 有

$$\begin{aligned} &\int_{S(\mathbb{R})^\circ} [G(X_s(f) + \nu(f)) - G(X_s(f)) - \nu(f)G'(X_s(f))] \hat{N}(ds, d\nu) \\ &= \int_{\mathbb{R}} X_s(dx) \int_0^\infty [G(X_s(f) + zf(x)) - G(X_s(f)) - zf(x)G'(X_s(f))] \pi_0(dz) \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} [G(X_s(f)e^z) - G(X_s(f)) - (e^z - 1)X_s(f)G'(X_s(f))] \pi_1(dz). \end{aligned} \quad (4.6)$$

鉴于 (4.5), 我们有

$$M_t^c(f) = M_t^{c,1}(f) + M_t^{c,2}(f),$$

其中 $M_t^{c,1}(f)$ 和 $M_t^{c,2}(f)$ 是正交的连续的局部鞅, 二次变差分别为 $2c \int_0^t X_s(f^2) ds$ 和 $\sigma^2 \int_0^t |X_s(f)|^2 ds$.

类似于文献 [12, 第 1532 和 1533 页] 中的讨论, 在一个扩展的概率空间上存在一个 $(0, \infty)^2$ 上的时空 Gauss 白噪声 $W(ds, du)$, 其强度为 $dsdu$ 并且

$$M_t^{c,1}(-\infty, x] := M_t^{c,1}(1_{(-\infty, x]}) = \sqrt{2c} \int_0^t \int_0^\infty 1_{\{u \leq Y_s(x)\}} W(ds, du). \quad (4.7)$$

由文献 [31, 第 84 页], 存在一个 Brown 运动 $\{B(t) : t \geq 0\}$ 使得

$$M_t^{c,2}(f) = \sigma \int_0^t X_s(f) dB(s). \quad (4.8)$$

第 2 步 为 $M_t^d(f)$ 建立一个积分表达式, 令 $K_1(\mu, d\nu)$ 和 $K_2(\mu, d\nu)$ 为从 $M(\mathbb{R})$ 到 $S(\mathbb{R})^\circ$ 的核且满足对任意 $S(\mathbb{R})^\circ$ 上的函数 F 都有

$$\int_{S(\mathbb{R})^\circ} F(\nu) K_1(\mu, d\nu) = \int_{\mathbb{R}} \mu(dx) \int_0^\infty F(z\delta_x) \pi_0(dz)$$

和

$$\int_{S(\mathbb{R})^\circ} F(\nu) K_2(\mu, d\nu) = \int_{\mathbb{R}} F((e^z - 1)\mu) \pi_1(dz). \quad (4.9)$$

鉴于 (4.2) 和 (4.6), 我们有

$$M_t^d(f) = \int_0^t \int_{S(\mathbb{R})^\circ} \nu(f) \tilde{N}^1(ds, d\nu) + \int_0^t \int_{S(\mathbb{R})^\circ} \nu(f) \tilde{N}^2(ds, d\nu) =: M_t^{d,1}(f) + M_t^{d,2}(f),$$

其中 $\tilde{N}^1(ds, d\nu)$ 和 $\tilde{N}^2(ds, d\nu)$ 是 $[0, \infty) \times S(\mathbb{R})^\circ$ 上正交的带补偿的随机测度, 其可料补偿分别为 $dsK_1(X_{s-}, d\nu)$ 和 $dsK_2(X_{s-}, d\nu)$.

类似于文献 [12, 第 1533–1544 页] 中的讨论, 在一个扩大的概率空间上存在一个 $(0, \infty)^3$ 上的 Poisson 随机测度 $N_0(ds, dz, du)$, 其强度为 $ds\pi_0(dz)du$ 且满足

$$M_t^{d,1}(-\infty, x] := M_t^{d,1}(1_{(-\infty, x]}) = \int_0^t \int_0^\infty \int_0^{Y_{s-}(x)} z \tilde{N}_0(ds, dz, du), \quad (4.10)$$

其中 $\tilde{N}_0(ds, dz, du) = N_0(ds, dz, du) - ds\pi_0(dz)du$. 鉴于 (4.9), 我们有

$$K_2(\mu, d\nu) = 1_{\{\nu=(e^z-1)\mu\}} \pi_1(dz).$$

从而, 根据文献 [31, 第 93 页] 可知, 在一个扩展的概率空间上存在 $(0, \infty) \times \mathbb{R}$ 上的 Poisson 随机测度 $N_1(ds, dz)$, 其强度为 $ds\pi_1(dz)$ 且

$$\int_0^t \int_{S(\mathbb{R})^\circ} F(\nu) \tilde{N}^2(ds, d\nu) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} F((e^z - 1)\mu) \tilde{N}_1(ds, dz),$$

其中 $\tilde{N}_1(ds, dz) = N_1(ds, dz) - ds\pi_1(dz)$. 故

$$M_t^{d,2}(f) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} (e^z - 1) X_{s-}(f) \tilde{N}_1(ds, dz). \quad (4.11)$$

第 3 步 这一步我们结束命题的证明. 对任意的 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, 令 $\bar{f}(x) = \int_x^\infty f(y)dy$. 容易验证 $A\bar{f} = \overline{Af}$ 和 $\langle Y_t, f \rangle = X_t(\bar{f})$. 由随机 Fubini 定理及 (4.1)、(4.2)、(4.4)、(4.8) 和 (4.11) 可得

$$\begin{aligned} \langle Y_t, f \rangle &= X_0(\bar{f}) + A_t(\bar{f}) + M_t^c(\bar{f}) + M_t^d(\bar{f}) \\ &= \langle Y_0, f \rangle + \int_0^t \langle Y_s, Af + (\beta - b)f \rangle ds + \sigma \int_0^t \langle Y_s, f \rangle dB(s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\mathbb{R}} M_t^{c,1}(-\infty, x] f(x) dx + \int_{\mathbb{R}} M_t^{d,1}(-\infty, x] f(x) dx \\
& + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} (e^z - 1) \langle Y_{s-}, f \rangle \tilde{N}_1(ds, dz) + \int_0^t ds \int_{[-1,1]^c} (e^z - 1) \langle Y_{s-}, f \rangle \pi_1(dz).
\end{aligned}$$

从而根据 (4.7) 和 (4.10) 可得 (1.5), 这说明了 (Y, W, N_0, B, N_1) 是 (1.4) 的一个弱解. $\square$

定理 1.2 的证明 本定理可直接由定理 1.1 和命题 4.1 得到. $\square$

参考文献

- 1 Smith W L. Necessary conditions for almost sure extinction of a branching process with random environment. *Ann Math Statist*, 1968, 39: 2136–2140
- 2 Smith W L, Wilkinson W E. On branching processes in random environments. *Ann Math Statist*, 1969, 40: 814–827
- 3 Afanasyev V I, Böinghoff C, Kersting G, et al. Limit theorems for weakly subcritical branching processes in random environment. *J Theoret Probab*, 2012, 25: 703–732
- 4 Afanasyev V I, Geiger J, Kersting G, et al. Criticality for branching processes in random environment. *Ann Probab*, 2012, 33: 645–673
- 5 Guivarc’h Y, Liu Q. Propriétés asymptotiques des processus de branchement en environnement aléatoire. *C R Acad Sci Ser I Math*, 2001, 332: 339–344
- 6 Vatutin V A. Limit theorem for an intermediate subcritical branching process in a random environment. *Theory Probab Appl*, 2004, 48: 481–492
- 7 Bansaye V, Millan J C P, Smadi C. On the extinction of continuous state branching processes with catastrophes. *Electron J Probab*, 2013, 18: 1–31
- 8 He H, Li Z H, Xu W. Continuous-state branching processes in Lévy random environments. *J Theoret Probab*, 2018, 31: 1952–1974
- 9 Palau S, Pardo J C. Branching processes in a Lévy random environment. *Acta Appl Math*, 2018, 153: 55–79
- 10 Li Z H, Xu W. Asymptotic results for exponential functionals of Lévy processes. *Stochastic Process Appl*, 2018, 128: 108–131
- 11 Palau S, Pardo J C, Smadi C. Asymptotic behaviour of exponential functionals of Lévy processes with applications to random processes in random environment. *ALEA Lat Am J Probab Math Stat*, 2016, 13: 1235–1258
- 12 He H, Li Z H, Yang X. Stochastic equations of super-Lévy processes with general branching mechanism. *Stochastic Process Appl*, 2014, 124: 1519–1565
- 13 Dawson D A, Etheridge A M, Fleischmann K, et al. Mutually catalytic branching in the plane: Finite measure states. *Ann Probab*, 2002, 30: 1681–1762
- 14 Dawson D A, Etheridge A M, Fleischmann K, et al. Mutually catalytic branching in the plane: Infinite measure states. *Electron J Probab*, 2002, 7: 1–61
- 15 Dawson D A, Fleischmann K. Longtime behavior of a branching process controlled by branching catalysts. *Stochastic Process Appl*, 1997, 71: 241–257
- 16 Dawson D A, Fleischmann K. Catalytic and mutually catalytic branching. *Infin Dimens Stoch Anal*, 2000, 33: 145–170
- 17 Mytnik L. Superprocesses in random environments. *Ann Probab*, 1996, 24: 1953–1978
- 18 Crisan D. Superprocesses in a Brownian environment. *Proc R Soc Lond Ser A Math Phys Eng Sci*, 2004, 460: 243–270
- 19 Dawson D A, Li Z. Stochastic equations, flows and measure-valued processes. *Ann Probab*, 2012, 40: 813–857
- 20 Wang L, Yang X, Zhou X. A distribution-function-valued SPDE and its applications. *J Differential Equations*, 2017, 262: 1085–1118
- 21 Xiong J. Super-Brownian motion as the unique strong solution to an SPDE. *Ann Probab*, 2013, 41: 1030–1054
- 22 Xiong J, Yang X. Superprocesses with interaction and immigration. *Stochastic Process Appl*, 2016, 126: 3377–3401
- 23 Li Z, Pu F. Strong solutions of jump-type stochastic equations. *Electron Commun Probab*, 2012, 17: 1–13
- 24 Xiong J, Yang X. Existence and pathwise uniqueness to an SPDE driven by α -stable colored noise. *Stochastic Process Appl*, 2019, 129: 2681–2722
- 25 Ethier S N, Kurtz T G. *Markov Processes: Characterization and Convergence*. New York: John Wiley & Sons, 1986

- 26 Walsh J. An introduction to stochastic partial differential equations. In: École d'Été de Probabilités de Saint Flour XIV-1984. Berlin-Heidelberg: Springer, 1986, 265–439
- 27 Asmussen S, Rosiński J. Approximations of small jumps of Lévy processes with a view towards simulation. J Appl Probab, 2001, 38: 482–493
- 28 Kurtz T G, Protter P E. Weak convergence of stochastic integrals and differential equations II: Infinite-dimensional case. In: Probabilistic Models for Nonlinear Partial Differential Equations. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1627. Berlin: Springer, 1996, 197–285
- 29 Li Z. Measure-Valued Branching Markov Processes. Berlin: Springer, 2011
- 30 Dellacherie C, Meyer P A. Probabilities and Potential. Amsterdam: North-Holland, 1982
- 31 Ikeda N, Watanabe S. Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes, 2nd ed. Amsterdam-Kodansha-Tokyo: North-Holland, 1989

A class of super-Lévy processes in random environment

Zenghu Li, Xu Yang & Guowei Zong

Abstract We prove the existence and pathwise uniqueness of a type of stochastic partial differential equations for distribution function-valued stochastic processes. The results give the construction of a class of super-Lévy processes in random environments. The process is also characterized in terms of its generator and martingale problem.

Keywords super-Lévy process, random environment, stochastic partial differential equation, distribution function

MSC(2010) 60J68, 60K37, 60H15

doi: 10.1360/N012018-00119