带有相依移民的连续状态分枝过程

献给王梓坤教授 90 华诞

李增沪*, 张卫

北京师范大学数学科学学院, 北京 100875

E-mail: lizh@bnu.edu.cn, zhangweimaths@mail.bnu.edu.cn

收稿日期: 2018-02-01; 接受日期: 2018-12-10; 网络出版日期: 2019-02-22; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11531001 和 11626245) 资助项目

摘要 通过求解由轨道空间上的 Poisson 随机测度驱动的随机积分方程, 对于满足 Yamada-Watanabe 型条件的移民速度函数, 本文给出了带相依移民连续状态分枝过程的构造. 此构造改进了 Dawson 和 Li (2003)、Fu 和 Li (2004) 和 Li (2011) 等在 Lipschitz 条件下的结果.

关键词 连续状态分枝过程 相依移民 随机积分方程 Poisson 随机测度 Yamada-Watanabe 型条件

MSC (2010) 主题分类 60J80, 60H10, 60H20

1 引言

连续状态分枝过程和带移民的连续状态分枝过程是描述群体发展的数学模型, 在生物、物理和金融等领域有广泛的应用. 关于连续状态分枝过程和带移民的连续状态分枝过程的早期研究, 可参见文献 [1, 2]. 有关该模型在金融方面应用的讨论, 可参见文献 [3, 4]. 下面简单介绍若干基本概念. 假设 $c \geq 0$ 和 $b \in \mathbb{R}$ 是常数, 而 $(z \wedge z^2)m(dz)$ 是 $(0, \infty)$ 上的有限测度. 定义 $[0, \infty)$ 上的函数

$$\phi(\lambda) = b\lambda + c\lambda^2 + \int_0^\infty (e^{-z\lambda} - 1 + z\lambda)m(dz), \quad \lambda \geq 0, \quad (1.1)$$

则有 $\phi'(0) = b$ 和

$$\phi''(0) = 2c + \int_0^\infty z^2 m(dz) \leq \infty. \quad (1.2)$$

称以 $[0, \infty)$ 为状态空间的 Markov 过程 $\{x(t) : t \geq 0\}$ 为连续状态分枝过程, 如果其转移半群为 $(Q_t)_{t \geq 0}$, 由下式确定:

$$\int_{[0, \infty)} e^{-\lambda y} Q_t(x, dy) = e^{-xv_t(\lambda)}, \quad \lambda \geq 0, \quad x \geq 0, \quad (1.3)$$

英文引用格式: Li Z, Zhang W. Continuous-state branching processes with dependent immigration (in Chinese). Sci Sin Math, 2019, 49: 415–432, doi: 10.1360/N012018-00021

其中 $t \mapsto v_t(\lambda)$ 是下列方程的唯一非负解:

$$\frac{\partial}{\partial t} v_t(\lambda) = -\phi(v_t(\lambda)), \quad v_0(\lambda) = \lambda. \quad (1.4)$$

此时称 ϕ 为 $\{x(t) : t \geq 0\}$ 的分枝机制. 转移半群 $(Q_t)_{t \geq 0}$ 显然具有 Feller 性, 因此, $\{x(t) : t \geq 0\}$ 有左极右连的强 Markov 实现.

我们可以用随机积分方程的强解给出上述连续状态分枝过程的构造. 为此, 设 $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbf{P})$ 是一个带流的概率空间, 满足通常条件. 设 $\{B(t)\}$ 是标准的 $(\mathcal{G}_t)$ Brown 运动, 而 $\{M(ds, dz, du)\}$ 是强度为 $dsm(dz)du$ 的 $(\mathcal{G}_t)$ Poisson 随机测度. 根据文献 [5, 定理 5.1 和 5.2], 对任意的 $\mathcal{G}_0$ 可测非负随机变量 $x(0)$, 下面随机方程存在轨道唯一的解:

$$x(t) = x(0) - \int_0^t bx(s)ds + \int_0^t \sqrt{2cx(s)}dB(s) + \int_0^t \int_0^\infty \int_0^{x(s-)} z\tilde{M}(ds, dz, du), \quad t \geq 0, \quad (1.5)$$

其中 $\tilde{M}(ds, dz, du) = M(ds, dz, du) - dsm(dz)du$. Dawson 和 Li [5] 还证明了 (1.5) 的解 $\{x(t)\}$ 是以 ϕ 为分枝机制的连续状态分枝过程. 另外, Bertoin 和 Le Gall [6] 研究了 (1.5) 的一个特例.

下面介绍连续状态分枝过程的一个推广的形式. 假设 $\beta \geq 0$ 是常数, 而 $z\nu(dz)$ 是 $(0, \infty)$ 上的有限测度. 称以 $[0, \infty)$ 为状态空间的 Markov 过程 $\{y(t) : t \geq 0\}$ 为带移民的连续状态分枝过程, 如果其转移半群为 $(P_t)_{t \geq 0}$, 由下式确定:

$$\int_{[0, \infty)} e^{-\lambda y} P_t(x, dy) = \exp \left\{ -xv_t(\lambda) - \int_0^t \psi(v_s(\lambda))ds \right\}, \quad (1.6)$$

其中

$$\psi(\lambda) = \beta\lambda + \int_0^\infty (1 - e^{-z\lambda})\nu(dz), \quad \lambda \geq 0. \quad (1.7)$$

在这种情形下, 分别称 ϕ 和 ψ 为其分枝机制和移民机制.

带移民的连续状态分枝过程也可以用随机积分方程的强解进行构造. 事实上, 我们可以构造一种更广的模型. 假设 h 和 q 分别是定义在 $[0, \infty)$ 和 $[0, \infty) \times (0, \infty)$ 上的非负 Borel 可测函数. 对 $x \geq 0$, 令

$$\rho_1(x) = \int_0^\infty q(x, z)z\nu(dz), \quad \rho_2(x) = \int_0^\infty q(x, z)z^2\nu(dz).$$

如果存在常数 $K \geq 0$ 使得

$$h(x) + \rho_1(x) \leq K(1 + x), \quad x \geq 0, \quad (1.8)$$

就称 (h, q) 满足线性增长条件. 如果存在 $[0, \infty)$ 上的单增的凹函数 r 使得 $\int_{0+} r(u)^{-1}du = \infty$ 且

$$|h(x) - h(y)| + \int_0^\infty |q(x, z) - q(y, z)|z\nu(dz) \leq r(|x - y|), \quad x, y \geq 0, \quad (1.9)$$

称 (h, q) 满足 Yamada-Watanabe 型条件. 假设 $\{N(ds, dz, du)\}$ 是定义在概率空间 $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbf{P})$ 上且强度为 $ds\nu(dz)du$ 的 $(\mathcal{G}_t)$ Poisson 随机测度. 再假设 $\{B(t)\}$ 、 $\{M(ds, dz, du)\}$ 和 $\{N(ds, dz, du)\}$ 相互独立. 给定 $\mathcal{G}_0$ 可测的随机变量 $y(0)$, 考虑随机方程

$$y(t) = y(0) + \int_0^t \sqrt{2cy(s)}dB(s) + \int_0^t \int_0^\infty \int_0^{y(s-)} z\tilde{M}(ds, dz, du)$$

$$+ \int_0^t [h(y(s)) - by(s)]ds + \int_0^t \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^{q(y(s-), z)} zN(ds, dz, du), \quad t \geq 0. \quad (1.10)$$

根据文献 [7, 定理 5.1], 若 (h, q) 满足线性增长条件 (1.8) 和 Yamada-Watanabe 型条件 (1.9), 则 (1.10) 有轨道唯一解 $\{y(t) : t \geq 0\}$. 特别地, 若 $h(x) \equiv \beta$ 和 $q(x, z) \equiv 1$ 为常数, 则 $\{y(t)\}$ 是带移民的连续状态分枝过程, 且分别以 ϕ 和 ψ 为分枝机制和移民机制. 在一般情形下, 称 (1.10) 的解为带相依移民的连续状态分枝过程, 其中函数对 (h, q) 决定移民发生的速度.

本文的目的是从一个连续状态分枝过程出发, 再利用轨道空间上的 Poisson 随机测度, 通过求解另一随机积分方程, 给出带相依移民的连续状态分枝过程的另外一种构造. 这种构造将给出的分枝机制和移民机制更为清晰和直观的解释. 在移民速度函数 (h, q) 满足 Lipschitz 条件的情形下, 文献 [8–10] 研究了类似的测度值过程的构造. 关于带独立移民的连续状态分枝过程的构造, 可参见文献 [10–12] 及其参考文献. 我们将在 Yamada-Watanabe 型条件下讨论带相依移民的连续状态分枝过程的构造问题.

令 $D[0, \infty)$ 表示 $[0, \infty)$ 到自身的所有左极右连的轨道构成的空间, 并赋予 Skorokhod 拓扑. 对于 $w \in D[0, \infty)$, 令 $\tau_0(w) = \inf\{s > 0 : w(s) = 0\}$. 再令 $D_0[0, \infty) = \{w \in D[0, \infty) : \text{对任意 } t \geq \tau_0(w), \text{ 有 } w(t) = 0\}$. 我们用 $\mathbf{Q}_x(dw)$ 表示初值为 $x(0) = x$ 的连续状态分枝过程 $\{x(t) : t \geq 0\}$ 在 $D[0, \infty)$ 上的分布. 由 (1.3) 不难看出, 零点是 $\{x(t) : t \geq 0\}$ 的吸收态, 因此也可以假定 $\mathbf{Q}_x(dw)$ 是 $D_0[0, \infty)$ 上的 Borel 概率测度.

令 $(Q_t^\circ)_{t \geq 0}$ 为 $(Q_t)_{t \geq 0}$ 在 $(0, \infty)$ 上的限制. 若分枝机制 ϕ 满足 $\phi'(\infty) = \infty$, 根据文献 [10, 定理 3.10], 存在 $(0, \infty)$ 上的 σ 有限测度族 $(l_t)_{t > 0}$ 使得

$$\int_0^\infty (1 - e^{-\lambda y}) l_t(dy) = v_t(\lambda), \quad t > 0, \quad \lambda \geq 0. \quad (1.11)$$

根据文献 [10, 定理 8.22] 或 [12, 定理 6.1], 此时存在 $D_0[0, \infty)$ 上的 σ 有限测度 $\mathbf{N}_0$ 满足

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_0(w(t_1) \in dx_1, w(t_2) \in dx_2, \dots, w(t_n) \in dx_n) \\ = l_{t_1}(dx_1) Q_{t_2-t_1}^\circ(x_1, dx_2) \cdots Q_{t_n-t_{n-1}}^\circ(x_{n-1}, dx_n), \end{aligned} \quad (1.12)$$

其中 $\{t_1 < \cdots < t_n\} \subset (0, \infty)$, 而 $\{x_1, \dots, x_n\} \subset (0, \infty)$. 测度 $\mathbf{N}_0$ 称为连续状态分枝过程的游弋率 (excursion law).

本文此后总假定 $\phi'(\infty) = \infty$. 对于 $\phi'(\infty) < \infty$ 的情形, 我们将另行讨论.

假设 $\{X_t : t \geq 0\}$ 是一个连续状态分枝过程, 且满足 $\mathbf{E}(X_0^2) < \infty$. 再设 $\{N_0(ds, du, dw)\}$ 和 $\{N_1(ds, dz, du, dw)\}$ 分别是 $(0, \infty)^2 \times D_0[0, \infty)$ 和 $(0, \infty)^3 \times D_0[0, \infty)$ 上强度为 $dsdu\mathbf{N}_0(dw)$ 和 $ds\nu(dz)du\mathbf{Q}_z(dw)$ 的 Poisson 随机测度. 假设 $\{X_t\}$ 、 $\{N_0(ds, du, dw)\}$ 和 $\{N_1(ds, dz, du, dw)\}$ 定义在同一个完备的概率空间之上, 且相互独立. 考虑随机积分方程

$$\begin{aligned} Y_t = X_t + \int_0^t \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^{h(Y_{s-})} w(t-s) N_0(ds, du, dw) \\ + \int_0^t \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^{q(Y_{s-}, z)} w(t-s) N_1(ds, dz, du, dw). \end{aligned} \quad (1.13)$$

称非负左极右连的过程 $\{Y_t : t \geq 0\}$ 是 (1.13) 的解, 是指上述方程对任意的 $t \geq 0$ 几乎必然成立. 这里及以后对于 $a \leq b \in \mathbb{R}$, 规定

$$\int_a^b = \int_{(a, b]}, \quad \int_b^a = -\int_{(a, b]}, \quad \int_a^\infty = \int_{(a, \infty)}.$$

下面是本文的主要定理:

定理 1.1 假设线性增长条件 (1.8) 和 Yamada-Watanabe 型条件 (1.9) 成立, 再设 $\phi''(0) < \infty$ 且 $\rho_2(x)$ 关于 $x \geq 0$ 局部有界, 则方程 (1.13) 存在轨道唯一的解 $\{Y_t : t \geq 0\}$.

定理 1.2 在定理 1.1 的条件下, 方程 (1.13) 的解 $\{Y_t : t \geq 0\}$ 是 (1.10) 的弱解.

由于我们不假定 (h, q) 满足 Lipschitz 条件, 这里关于 (1.13) 的解的存在性的证明比较冗长. 条件 $\phi''(0) < \infty$ 和 $\rho_2(x)$ 关于 $x \geq 0$ 局部有界只用于解的存在性的证明, 而且可能并不是必须的.

2 预备内容

本节给出有关连续状态分枝过程的若干结果, 为下一节主要定理的证明做准备. 假设 $X = (W, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, x(t), \mathbf{P}_x)$ 是以 ϕ 为分枝机制的连续状态分枝过程的 Hunt 过程实现, 再设 $\mathbf{N}_0$ 由 (1.12) 给出. 本节采用 Markov 过程理论中的若干常用的表示, 如文献 [13]. 特别地, 相对于概率测度 $\mathbf{P}_x$ 的数学期望仍用记号 $\mathbf{P}_x$ 表示.

引理 2.1 (i) 对于 $x, t \geq 0$ 有 $\mathbf{P}_x[x(t)] = xe^{-bt}$. (ii) 若 $\phi''(0) < \infty$, 则对 $x, t \geq 0$, 有

$$\mathbf{P}_x[x(t)^2] = x^2 e^{-2bt} + x\phi''(0)e^{-bt}\beta(t),$$

其中

$$\beta(t) = \int_0^\infty e^{-bs} ds = \begin{cases} b^{-1}(1 - e^{-bt}), & b \neq 0, \\ t, & b = 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

证明 文献 [10] 建立了关于测度值分枝过程的相应结论. 这里的结果是文献 [10, 推论 2.26、命题 2.27 和 2.38] 的结果的特例. $\square$

引理 2.2 假设 $\phi''(0) < \infty$, 则存在 $[0, \infty)$ 上的非负递增函数 $t \mapsto C(t)$ 使对任意 $t \geq 0$, 有

$$\mathbf{P}_x \left[\sup_{0 \leq s \leq t} x(s)^2 \right] \leq (1 + x^2)C(t).$$

证明 由引理 2.1(i), 有 $\mathbf{P}_x[x(t)] = xe^{-bt}$, 由此易证 $\{e^{bt}x(t) : t \geq 0\}$ 是非负鞅, 应用 Doob 不等式有

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_x \left[\sup_{0 \leq s \leq t} x(s)^2 \right] &\leq e^{2|b|t} \mathbf{P}_x \left[\sup_{0 \leq s \leq t} |e^{bs}x(s)|^2 \right] \\ &\leq e^{2|b|t} \mathbf{P}_x[|e^{bt}x(t)|^2] \\ &\leq e^{4|b|t} \mathbf{P}_x[x(t)^2]. \end{aligned}$$

由引理 2.1(ii) 即得结论. $\square$

引理 2.3 假设 $\phi''(0) < \infty$, 则存在 $[0, \infty)$ 上的非负递增函数 $t \mapsto C(t)$ 使对任意 $t \geq 0$, 有

$$\mathbf{P}_x[|x(t) - x(0)|^2] \leq tC(t)(x + x^2). \quad (2.2)$$

证明 不妨假定 $\{X_t : t \geq 0\}$ 是 (1.5) 的以 $X_0 = x$ 为初值的解. 于是,

$$\mathbf{P}_x[|x(t) - x(0)|^2] \leq 3b^2 \mathbf{P}_x \left[\left(\int_0^t x(s) ds \right)^2 \right] + 3c \mathbf{P}_x \left[\left(\int_0^t x(s) dB_s \right)^2 \right]$$

$$\begin{aligned}
& + 3\mathbf{P}_x \left[\left(\int_0^t \int_0^\infty \int_0^{x(s-)} z \tilde{M}(ds, dz, du) \right)^2 \right] \\
& \leq 3b^2 t \int_0^t \mathbf{P}_x[x(s)^2] ds + 3c \int_0^t \mathbf{P}_x[x(s)] ds \\
& \quad + 3 \int_0^t \mathbf{P}_x[x(s)] ds \int_0^\infty z^2 m(dz).
\end{aligned}$$

再利用引理 2.1 即得要证结果. $\square$

引理 2.4 (i) 对于 $t \geq 0$, 有

$$\int_{D_0[0, \infty)} w(t) \mathbf{N}_0(dw) = e^{-bt}; \quad (2.3)$$

(ii) 若 $\phi''(0) < \infty$, 则对 $t \geq 0$, 有

$$\int_{D_0[0, \infty)} w(t)^2 \mathbf{N}_0(dw) = \phi''(0) e^{-bt} \beta(t), \quad (2.4)$$

其中 $\beta(t)$ 由 (2.1) 定义.

证明 (i) 由 (1.3)、(1.11) 和 (1.12), 有

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_x[e^{-\lambda x(t)}] &= \exp \left\{ -x \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda y}) l_t(dy) \right\} \\
&= \exp \left\{ -x \int_{D_0[0, \infty)} (1 - e^{-\lambda w(t)}) \mathbf{N}_0(dw) \right\}.
\end{aligned}$$

对上式的两端关于 $\lambda \geq 0$ 微分得

$$\mathbf{P}_x[x(t)e^{-\lambda x(t)}] = x \exp \left\{ -x \int_{D_0[0, \infty)} (1 - e^{-\lambda w(t)}) \mathbf{N}_0(dw) \right\} \int_{D_0[0, \infty)} e^{-\lambda w(t)} w(t) \mathbf{N}_0(dw). \quad (2.5)$$

再令 $\lambda \rightarrow 0$, 得到

$$\mathbf{P}_x[x(t)] = x \int_{D_0[0, \infty)} w(t) \mathbf{N}_0(dw).$$

由引理 2.1(i) 有 $\mathbf{P}_x[x(t)] = x e^{-bt}$, 进而有 (2.3).

(ii) 对 (2.5) 的两端关于 $\lambda \geq 0$ 求导, 令 $\lambda \rightarrow 0$ 并应用 (2.3), 得到

$$\mathbf{P}_x[x(t)^2] = x^2 e^{-2bt} + x \int_{D_0[0, \infty)} w^2(t) \mathbf{N}_0(dw).$$

由引理 2.1 即得 (2.4). $\square$

3 定理的证明

本节给出主要定理的证明. 首先证明 (1.13) 的解具有轨道唯一性, 然后证明 (1.13) 存在一个弱解. 有关标准的随机方程的理论, 可参见文献 [14, 第 163–166 页] 或 [15, 第 76 和 104 页]. 假设 $X = (W, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, x(t), \mathbf{P}_x)$ 是以 ϕ 为分枝机制的连续状态分枝过程的 Hunt 过程实现. 本节仍然会用到 Markov 过程理论中的若干常用的表示. 在下面的证明中, 我们用 $t \mapsto C(t)$ 表示 $[0, \infty)$ 上的非负递增函数, 其具体定义可以逐行调整.

命题 3.1 假设线性增长条件 (1.8) 成立, 则对于 (1.13) 的任意解 $\{Y_t : t \geq 0\}$, 有

$$\mathbf{E}(1 + Y_t) \leq [1 + \mathbf{E}(X_0)e^{|b|t}] \exp\{tKe^{|b|t}\}, \quad t \geq 0,$$

其中 $K \geq 0$ 为 (1.8) 中的常数.

证明 对于 $n \geq 1$ 令 $T_n = \inf\{t \geq 0 : Y_t \geq n\}$, 则几乎必然有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \infty.$$

根据引理 2.1(i) 和 2.4(i), 再利用 (1.8), 有

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(1 + Y_{t \wedge T_n}) &= 1 + \mathbf{E}(X_{t \wedge T_n}) + \mathbf{E} \left[\int_0^{t \wedge T_n} \int_0^{h(Y_{s-})} \int_{D_0[0, \infty)} w(t-s) N_0(ds, du, dw) \right] \\ &\quad + \mathbf{E} \left[\int_0^{t \wedge T_n} \int_0^\infty \int_0^{q(Y_{s-}, z)} \int_{D_0[0, \infty)} w(t-s) N_1(ds, dz, du, dw) \right] \\ &= 1 + \mathbf{E}(X_{t \wedge T_n}) + \mathbf{E} \left[\int_0^{t \wedge T_n} h(Y_{s-}) ds \int_{D_0[0, \infty)} w(t-s) \mathbf{N}_0(dw) \right] \\ &\quad + \mathbf{E} \left[\int_0^{t \wedge T_n} ds \int_0^\infty q(Y_{s-}, z) \nu(dz) \int_{D_0[0, \infty)} w(t-s) \mathbf{Q}_z(dw) \right] \\ &\leq 1 + \mathbf{E}(X_{t \wedge T_n} e^{b(t \wedge T_n)}) e^{|b|t} + \mathbf{E} \left[\int_0^{t \wedge T_n} e^{-b(t-s)} h(Y_{s-}) ds \right] \\ &\quad + \mathbf{E} \left[\int_0^{t \wedge T_n} e^{-b(t-s)} ds \int_0^\infty q(Y_{s-}, z) z \nu(dz) \right] \\ &\leq 1 + \mathbf{E}(X_0) e^{|b|t} + Ke^{|b|t} \mathbf{E} \left[\int_0^{t \wedge T_n} (1 + Y_{s-}) ds \right] \\ &\leq 1 + \mathbf{E}(X_0) e^{|b|t} + Ke^{|b|t} \int_0^t \mathbf{E}(1 + Y_{s \wedge T_n}) ds. \end{aligned}$$

根据 Gronwall 不等式, 有

$$\mathbf{E}(1 + Y_{t \wedge T_n}) \leq [1 + \mathbf{E}(X_0)e^{|b|t}] \exp\{tKe^{|b|t}\}.$$

在上式中令 $n \rightarrow \infty$ 并利用 Fatou 引理即得要证结论. $\square$

引理 3.2 假设线性增长条件 (1.8) 和 Yamada-Watanabe 型条件 (1.9) 成立, 则 (1.13) 的解满足轨道唯一性.

证明 假设 $\{Y_1(t) : t \geq 0\}$ 和 $\{Y_2(t) : t \geq 0\}$ 是方程 (1.13) 的两个解. 对 $t \geq 0$, 令

$$\begin{aligned} Y^*(t) &= X(t) + \int_0^t \int_0^{h(Y_1(s-)) \vee h(Y_2(s-))} \int_{D_0[0, \infty)} w(t-s) N_0(ds, du, dw) \\ &\quad + \int_0^t \int_0^\infty \int_0^{q(Y_1(s-), z) \vee q(Y_2(s-), z)} \int_{D_0[0, \infty)} w(t-s) N_1(ds, dz, du, dw), \\ Y_*(t) &= X(t) + \int_0^t \int_0^{h(Y_1(s-)) \wedge h(Y_2(s-))} \int_{D_0[0, \infty)} w(t-s) N_0(ds, du, dw) \\ &\quad + \int_0^t \int_0^\infty \int_0^{q(Y_1(s-), z) \wedge q(Y_2(s-), z)} \int_{D_0[0, \infty)} w(t-s) N_1(ds, dz, du, dw), \end{aligned}$$

注意

$$|Y_1(t) - Y_2(t)| \leq Y^*(t) - Y_*(t) \leq Y^*(t) \leq Y_1(t) + Y_2(t).$$

由命题 3.1, 函数 $t \mapsto f(t) := \mathbf{E}[Y^*(t) - Y_*(t)]$ 在任意有界区间上有界. 根据文献 [16, 定理 25.22] 以及本文引理 2.1(i) 和 2.4(ii), 有

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathbf{E} \left[\int_0^t \int_{h(Y_1(s-)) \wedge h(Y_2(s-))}^{h(Y_1(s-)) \vee h(Y_2(s-))} \int_{D_0[0, \infty)} w(t-s) N_0(ds, du, dw) \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t \int_0^\infty \int_{q(Y_1(s-), z) \wedge q(Y_2(s-), z)}^{q(Y_1(s-), z) \vee q(Y_2(s-), z)} \int_{D_0[0, \infty)} w(t-s) N_1(ds, dz, du, dw) \right] \\ &= \mathbf{E} \left[\int_0^t |h(Y_1(s)) - h(Y_2(s))| ds \int_{D_0[0, \infty)} w(t-s) \mathbf{N}_0(dw) \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t ds \int_0^\infty |q(Y_1(s), z) - q(Y_2(s), z)| \nu(dz) \int_{D_0[0, \infty)} w(t-s) \mathbf{Q}_z(dw) \right] \\ &= \mathbf{E} \left\{ \int_0^t e^{-b(t-s)} \left[|h(Y_1(s)) - h(Y_2(s))| + \int_0^\infty |q(Y_1(s), z) - q(Y_2(s), z)| z \nu(dz) \right] ds \right\}. \end{aligned}$$

再由 Yamada-Watanabe 型条件 (1.9) 和 Jensen 不等式得

$$\begin{aligned} f(t) &\leq \mathbf{E} \left[\int_0^t e^{-b(t-s)} r(|Y_1(s) - Y_2(s)|) ds \right] \\ &\leq e^{b|t|} \int_0^t \mathbf{E}[r(|Y_1(s) - Y_2(s)|)] ds \leq e^{b|t|} \int_0^t r(f(s)) ds. \end{aligned}$$

于是, 对于任意给定的 $T \geq 0$, 存在常数 $M_T \geq 0$ 使得

$$f(t) \leq M_T \int_0^t r(f(s)) ds, \quad 0 \leq t \leq T.$$

由此容易推得 $f(t) = 0, 0 \leq t \leq T$, 参见文献 [14, 第 184 页]. 故对任意的 $t \geq 0$, 有 $\mathbf{E}[|Y_1(t) - Y_2(t)|] = 0$. 因此, 左极右连过程 $\{Y_1(t) : t \geq 0\}$ 和 $\{Y_2(t) : t \geq 0\}$ 不可区分. $\square$

下面讨论方程 (1.13) 解的存在性. 我们的基本思路是, 首先定义一个逼近序列, 并证明序列的胎紧性, 然后证明此胎紧序列的弱极限即为 (1.13) 的弱解. 令 $Y_0(t) = X_t$. 对于 $n \geq 1$, 定义

$$\begin{aligned} Y_n(t) &= X_t + \int_0^t \int_0^{h(Y_{n-1}(s-))} \int_{D_0[0, \infty)} w(t-s) N_0(ds, du, dw) \\ &\quad + \int_0^t \int_0^\infty \int_0^{q(Y_{n-1}(s-), z)} \int_{D_0[0, \infty)} w(t-s) N_1(ds, dz, du, dw). \end{aligned} \quad (3.1)$$

由文献 [10, 定理 10.18], 我们可以取 $\{Y_n(t) : t \geq 0\}$ 的左极右连的版本.

引理 3.3 假设函数组 (h, ρ_1) 有界且 Yamada-Watanabe 型条件 (1.9) 成立, 则对任意 $t \geq 0$, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[|Y_n(t) - Y_{n-1}(t)|] = 0. \quad (3.2)$$

证明 由 (3.1), 再根据引理 2.1(i) 和 2.4(ii), 有

$$\mathbf{E}[Y_n(t)] = \mathbf{E}[X_t] + \mathbf{E} \left[\int_0^t h(Y_{n-1}(s)) ds \int_{D_0[0, \infty)} w(t-s) \mathbf{N}_0(dw) \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \mathbf{E} \left[\int_0^t ds \int_0^\infty q(Y_{n-1}(s), z) \nu(dz) \int_{D_0[0, \infty)} w(t-s) \mathbf{Q}_z(dw) \right] \\
& \leq \mathbf{E}[X_t] + \mathbf{E} \left[\int_0^t e^{-b(t-s)} \rho_1(Y_{n-1}(s)) ds \right].
\end{aligned} \tag{3.3}$$

显然, 上式右端关于 $t \geq 0$ 局部有界. 注意

$$\begin{aligned}
Y_n(t) - Y_{n-1}(t) &= \int_0^t \int_{h(Y_{n-2}(s-))}^{h(Y_{n-1}(s-))} \int_{D_0[0, \infty)} w(t-s) N_0(ds, du, dw) \\
&+ \int_0^t \int_0^\infty \int_{q(Y_{n-2}(s-), z)}^{q(Y_{n-1}(s-), z)} \int_{D_0[0, \infty)} w(t-s) N_1(ds, dz, du, dw).
\end{aligned}$$

于是, 由引理 2.1(i) 和 2.4(ii) 得

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[|Y_n(t) - Y_{n-1}(t)|] &\leq \mathbf{E} \left[\int_0^t \int_{h(Y_{n-2}(s-)) \wedge h(Y_{n-1}(s-))}^{h(Y_{n-2}(s-)) \vee h(Y_{n-1}(s-))} \int_{D_0[0, \infty)} w(t-s) N_0(ds, du, dw) \right. \\
&\quad \left. + \int_0^t \int_0^\infty \int_{q(Y_{n-2}(s-), z) \wedge q(Y_{n-1}(s-), z)}^{q(Y_{n-2}(s-), z) \vee q(Y_{n-1}(s-), z)} \int_{D_0[0, \infty)} w(t-s) N_1(ds, dz, du, dw) \right] \\
&\leq \mathbf{E} \left[\int_0^t |h(Y_{n-1}(s)) - h(Y_{n-2}(s))| ds \int_{D_0[0, \infty)} w(t-s) \mathbf{N}_0(dw) \right. \\
&\quad \left. + \int_0^t ds \int_0^\infty |q(Y_{n-1}(s), z) - q(Y_{n-2}(s), z)| \nu(dz) \int_{D_0[0, \infty)} w(t-s) \mathbf{Q}_z(dw) \right] \\
&= \mathbf{E} \left[\int_0^t e^{-b(t-s)} \left(|h(Y_{n-1}(s)) - h(Y_{n-2}(s))| \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \int_0^\infty |q(Y_{n-1}(s), z) - q(Y_{n-2}(s), z)| z \nu(dz) \right) ds \right] \\
&\leq e^{b|t} \int_0^t \mathbf{E}[r(|Y_{n-1}(s) - Y_{n-2}(s)|)] ds \\
&\leq e^{b|t} \int_0^t r(\mathbf{E}[|Y_{n-1}(s) - Y_{n-2}(s)|]) ds.
\end{aligned}$$

令 $L_n(t) = \mathbf{E}[|Y_n(t) - Y_{n-1}(t)|]$. 根据 Fatou 引理, 可得

$$\begin{aligned}
\limsup_{n \rightarrow \infty} L_n(t) &\leq e^{b|t} \int_0^t r \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} L_{n-1}(s) \right) ds \\
&\leq e^{b|t} \int_0^t r \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} L_n(s) \right) ds.
\end{aligned}$$

故有

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} L_n(t) = 0.$$

证毕. □

引理 3.4 假设函数组 (h, ρ_1, ρ_2) 有界. 若 $\{\tau_n : n \geq 1\}$ 为一致有界的停时序列, 则当 $t \rightarrow 0$, 有

$$\sup_{n \geq 1} \mathbf{E}[|Y_n(\tau_n + t) - Y_n(\tau_n)|^2] \rightarrow 0. \tag{3.4}$$

证明 取常数 $T \geq 0$ 使 $0 \leq \tau_n \leq T$ 对所有 $n \geq 1$ 成立. 由 (3.1), 有

$$\begin{aligned}
 & Y_n(\tau_n + t) - Y_n(\tau_n) \\
 &= X_{\tau_n+t} - X_{\tau_n} + \int_0^{\tau_n+t} \int_0^{h(Y_{n-1}(s-))} \int_{D_0[0,\infty)} w(\tau_n + t - s) N_0(ds, du, dw) \\
 &\quad - \int_0^{\tau_n} \int_0^{h(Y_{n-1}(s-))} \int_{D_0[0,\infty)} w(\tau_n - s) N_0(ds, du, dw) \\
 &\quad + \int_0^{\tau_n+t} \int_0^\infty \int_0^{q(Y_{n-1}(s-), z)} \int_{D_0[0,\infty)} w(\tau_n + t - s) N_1(ds, dz, du, dw) \\
 &\quad - \int_0^{\tau_n} \int_0^\infty \int_0^{q(Y_{n-1}(s-), z)} \int_{D_0[0,\infty)} w(\tau_n - s) N_1(ds, dz, du, dw). \tag{3.5}
 \end{aligned}$$

由引理 2.2 和 2.3 得

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}[|X_{\tau_n+t} - X_{\tau_n}|^2] &= \mathbf{E}\{\mathbf{P}_{X_{\tau_n}}[|x(t) - x(0)|^2]\} \\
 &\leq tC(t)\mathbf{E}(X_{\tau_n} + X_{\tau_n}^2) \\
 &\leq tC(T+t)\mathbf{E}(1 + X_0^2).
 \end{aligned}$$

当 $t \rightarrow 0$ 时, 上式右边关于 $n \geq 1$ 一致地趋于零. 利用测度 $\mathbf{N}_0$ 的 Markov 性、引理 2.1、2.3 和 2.4, 我们有

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{E}\left\{\left|\int_0^{\tau_n+t} \int_0^{h(Y_{n-1}(s-))} \int_{D_0[0,\infty)} w(\tau_n + t - s) N_0(ds, du, dw) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \int_0^{\tau_n} \int_0^{h(Y_{n-1}(s-))} \int_{D_0[0,\infty)} w(\tau_n - s) N_0(ds, du, dw)\right|^2\right\} \\
 & \leq 2\mathbf{E}\left\{\left[\int_0^{\tau_n} \int_0^{h(Y_{n-1}(s-))} \int_{D_0[0,\infty)} (w(\tau_n + t - s) - w(\tau_n - s)) N_0(ds, du, dw)\right]^2\right\} \\
 & \quad + 2\mathbf{E}\left\{\left[\int_{\tau_n}^{\tau_n+t} \int_0^{h(Y_{n-1}(s-))} \int_{D_0[0,\infty)} w(\tau_n + t - s) N_0(ds, du, dw)\right]^2\right\} \\
 & = 2\mathbf{E}\left\{\int_0^{\tau_n} h(Y_{n-1}(s)) ds \int_{D_0[0,\infty)} (w(\tau_n + t - s) - w(\tau_n - s))^2 \mathbf{N}_0(dw)\right\} \\
 & \quad + 2\mathbf{E}\left\{\left[\int_0^{\tau_n} h(Y_{n-1}(s)) ds \int_{D_0[0,\infty)} (w(\tau_n + t - s) - w(\tau_n - s)) \mathbf{N}_0(dw)\right]^2\right\} \\
 & \quad + 2\mathbf{E}\left\{\int_{\tau_n}^{\tau_n+t} h(Y_{n-1}(s)) ds \int_{D_0[0,\infty)} w(\tau_n + t - s)^2 \mathbf{N}_0(dw)\right\} \\
 & \quad + 2\mathbf{E}\left\{\left[\int_{\tau_n}^{\tau_n+t} h(Y_{n-1}(s)) ds \int_{D_0[0,\infty)} w(\tau_n + t - s) \mathbf{N}_0(dw)\right]^2\right\},
 \end{aligned}$$

其中的等号是根据关于 Poisson 随机测度积分的一个矩不等式, 可参见文献 [10, 第 14 页中的命题 1.28(2)]. 再利用测度 $\mathbf{N}_0$ 的 Markov 性、引理 2.1、2.3 和 2.4, 可得

$$\mathbf{E}\left\{\left|\int_0^{\tau_n+t} \int_0^{h(Y_{n-1}(s-))} \int_{D_0[0,\infty)} w(\tau_n + t - s) N_0(ds, du, dw) \right.\right.$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^{\tau_n} \int_0^h(Y_{n-1}(s-)) \int_{D_0[0,\infty)} w(\tau_n - s) N_0(ds, du, dw) \Big|^2 \Big\} \\
& \leq 2\mathbf{E} \left\{ \int_0^{\tau_n} h(Y_{n-1}(s)) ds \int_{D_0[0,\infty)} \mathbf{P}_{w(\tau_n-s)}[(x(t) - x(0))^2] \mathbf{N}_0(dw) \right\} \\
& \quad + 2\mathbf{E} \left\{ \left[\int_0^{\tau_n} h(Y_{n-1}(s)) ds \int_{D_0[0,\infty)} \mathbf{P}_{w(\tau_n-s)}[x(t) - x(0)] \mathbf{N}_0(dw) \right]^2 \right\} \\
& \quad + C(t) \mathbf{E} \left\{ \int_{\tau_n}^{\tau_n+t} h(Y_{n-1}(s)) ds + \left[\int_{\tau_n}^{\tau_n+t} h(Y_{n-1}(s)) ds \right]^2 \right\} \\
& \leq tC(t) \mathbf{E} \left\{ \int_0^{\tau_n} h(Y_{n-1}(s)) ds \int_{D_0[0,\infty)} [w(\tau_n - s) + w(\tau_n - s)^2] \mathbf{N}_0(dw) \right\} \\
& \quad + 2(1 - e^{-bt})^2 \mathbf{E} \left\{ \left[\int_0^{\tau_n} h(Y_{n-1}(s)) ds \int_{D_0[0,\infty)} w(\tau_n - s) \mathbf{N}_0(dw) \right]^2 \right\} \\
& \quad + C(t) \mathbf{E} \left\{ \int_{\tau_n}^{\tau_n+t} h(Y_{n-1}(s)) ds + \left[\int_{\tau_n}^{\tau_n+t} h(Y_{n-1}(s)) ds \right]^2 \right\} \\
& \leq tC(t) \mathbf{E} \left\{ \int_0^{\tau_n} h(Y_{n-1}(s)) ds + \left[\int_0^{\tau_n} h(Y_{n-1}(s)) ds \right]^2 \right\} \\
& \quad + C(t) \mathbf{E} \left\{ \int_{\tau_n}^{\tau_n+t} h(Y_{n-1}(s)) ds + \left[\int_{\tau_n}^{\tau_n+t} h(Y_{n-1}(s)) ds \right]^2 \right\}.
\end{aligned}$$

因为 h 有界, 由引理 2.4, 上式右边当 $t \rightarrow 0$ 时关于 $n \geq 1$ 一致地趋于零. 与上面运算类似, 我们有

$$\begin{aligned}
& \mathbf{E} \left\{ \left[\int_0^{\tau_n+t} \int_0^\infty \int_0^q(Y_{n-1}(s-), z) \int_{D_0[0,\infty)} w(\tau_n + t - s) N_1(ds, dz, du, dw) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \int_0^{\tau_n} \int_0^\infty \int_0^q(Y_{n-1}(s-), z) \int_{D_0[0,\infty)} w(\tau_n - s) N_1(ds, dz, du, dw) \right]^2 \right\} \\
& \leq 2\mathbf{E} \left\{ \left[\int_0^{\tau_n} \int_0^\infty \int_0^q(Y_{n-1}(s-), z) \int_{D_0[0,\infty)} (w(\tau_n + t - s) - w(\tau_n - s)) N_1(ds, dz, du, dw) \right]^2 \right\} \\
& \quad + 2\mathbf{E} \left\{ \left[\int_{\tau_n}^{\tau_n+t} \int_0^\infty \int_0^q(Y_{n-1}(s-), z) \int_{D_0[0,\infty)} w(\tau_n + t - s) N_1(ds, dz, du, dw) \right]^2 \right\} \\
& = 2\mathbf{E} \left\{ \int_0^{\tau_n} ds \int_0^\infty q(Y_{n-1}(s), z) \nu(dz) \int_{D_0[0,\infty)} (w(\tau_n + t - s) - w(\tau_n - s))^2 \mathbf{Q}_z(dw) \right\} \\
& \quad + 2\mathbf{E} \left\{ \left[\int_0^{\tau_n} ds \int_0^\infty q(Y_{n-1}(s), z) \nu(dz) \int_{D_0[0,\infty)} (w(\tau_n + t - s) - w(\tau_n - s)) \mathbf{Q}_z(dw) \right]^2 \right\} \\
& \quad + 2\mathbf{E} \left\{ \int_{\tau_n}^{\tau_n+t} ds \int_0^\infty q(Y_{n-1}(s), z) \nu(dz) \int_{D_0[0,\infty)} w(\tau_n + t - s)^2 \mathbf{Q}_z(dw) \right\} \\
& \quad + 2\mathbf{E} \left\{ \left[\int_{\tau_n}^{\tau_n+t} ds \int_0^\infty q(Y_{n-1}(s), z) \nu(dz) \int_{D_0[0,\infty)} w(\tau_n + t - s) \mathbf{Q}_z(dw) \right]^2 \right\} \\
& \leq 2\mathbf{E} \left\{ \int_0^{\tau_n} ds \int_0^\infty q(Y_{n-1}(s), z) \nu(dz) \int_{D_0[0,\infty)} \mathbf{P}_{w(\tau_n-s)}[(x(t) - x(0))^2] \mathbf{Q}_z(dw) \right\} \\
& \quad + 2\mathbf{E} \left\{ \left[\int_0^{\tau_n} ds \int_0^\infty q(Y_{n-1}(s), z) \nu(dz) \int_{D_0[0,\infty)} \mathbf{P}_{w(\tau_n-s)}[x(t) - x(0)] \mathbf{Q}_z(dw) \right]^2 \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + C(t) \mathbf{E} \left\{ \int_{\tau_n}^{\tau_n+t} [\rho_1(Y_{n-1}(s)) + \rho_2(Y_{n-1}(s))] ds + \left[\int_{\tau_n}^{\tau_n+t} \rho_1(Y_{n-1}(s)) ds \right]^2 \right\} \\
\leq & tC(t) \mathbf{E} \left\{ \int_0^{\tau_n} ds \int_0^\infty q(Y_{n-1}(s), z) \nu(dz) \int_{D_0[0, \infty)} [w(\tau_n - s) + w(\tau_n - s)^2] \mathbf{Q}_z(dw) \right\} \\
& + 2(e^{-bt} - 1)^2 \mathbf{E} \left\{ \left[\int_0^{\tau_n} ds \int_0^\infty q(Y_{n-1}(s), z) \nu(dz) \int_{D_0[0, \infty)} w(\tau_n - s) \mathbf{Q}_z(dw) \right]^2 \right\} \\
& + C(t) \mathbf{E} \left\{ \int_{\tau_n}^{\tau_n+t} [\rho_1(Y_{n-1}(s)) + \rho_2(Y_{n-1}(s))] ds + \left[\int_{\tau_n}^{\tau_n+t} \rho_1(Y_{n-1}(s)) ds \right]^2 \right\} \\
\leq & tC(t) \mathbf{E} \left\{ \int_0^{\tau_n} [\rho_1(Y_{n-1}(s)) + \rho_2(Y_{n-1}(s))] ds + \left[\int_0^{\tau_n} \rho_1(Y_{n-1}(s)) ds \right]^2 \right\} \\
& + C(t) \mathbf{E} \left\{ \int_{\tau_n}^{\tau_n+t} [\rho_1(Y_{n-1}(s)) + \rho_2(Y_{n-1}(s))] ds + \left[\int_{\tau_n}^{\tau_n+t} \rho_1(Y_{n-1}(s)) ds \right]^2 \right\}.
\end{aligned}$$

当 $t \rightarrow 0$ 时, 上式右边关于 $n \geq 1$ 一致地趋于零. 再由 (3.5) 知 (3.4) 成立. $\square$

为了方便叙述, 下面限定在有界时间区间上讨论. 取定常数 $T \geq 0$, 用 $D[0, T]$ 表示 $[0, T]$ 到 $[0, \infty)$ 的所有左极右连的轨道构成的空间, 并赋予 Skorokhod 拓扑. 对 $w \in D[0, T]$ 作如下延拓: 当 $t < 0$ 时, 令 $w(t) = 0$; 当 $t > T$ 时, 令 $w(t) = w(T)$. 对于整数 $i \geq 1$, 定义 $\mathbb{R}$ 上的非负连续函数

$$\gamma_i(x) = \begin{cases} 4i^2x, & \text{若 } 0 < x \leq \frac{1}{2i}, \\ 2i - 4i^2\left(x - \frac{1}{2i}\right), & \text{若 } \frac{1}{2i} < x \leq \frac{1}{i}, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

再定义 $[0, \infty)^2$ 上的连续函数

$$f_i(u, x) = \begin{cases} 1, & \text{若 } u < x\left(1 - \frac{1}{i}\right), \\ \frac{i(x-u)}{x}, & \text{若 } x\left(1 - \frac{1}{i}\right) \leq u < x, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

对于 $t \in [0, T]$ 和 $w \in D[0, T]$, 令

$$l_i(w, t) = \int_0^{1/i} w(t+s) \gamma_i(s) ds = \int_{-\infty}^\infty w(s) \gamma_i(s-t) ds. \quad (3.6)$$

显然, $(t, w) \mapsto l_i(w, t)$ 是 $(0, T] \times D[0, T]$ 上的连续函数.

令 $\{t_j : j \geq 1\}$ 是 $[0, T]$ 中的有理数的一个排列. 对于 $(s, u, w) \in (0, T] \times (0, \infty) \times D[0, T]$, 定义

$$F(s, u, w) = e^{-u} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-i-j} l_i(w, t_j - s),$$

则 F 是 $(0, T] \times (0, \infty) \times D[0, T]$ 上正的连续函数. 令 $\mathbf{M}_0$ 表示乘积空间 $(0, T] \times (0, \infty) \times D[0, T]$ 上满足

$$\int_0^T \int_0^\infty \int_{D[0, T]} F(s, u, w) \eta(ds, du, dw) < \infty$$

的 Borel 测度 η 构成的空间, 并如下定义此空间上的拓扑: 对于 $\eta_k, \eta \in \mathbf{M}_0$, 规定 $\eta_k \rightarrow \eta$ 当且仅当在 $(0, T] \times (0, \infty) \times D[0, T]$ 上的有限测度的弱收敛意义下, 有

$$F(s, u, w)\eta_k(ds, du, dw) \rightarrow F(s, u, w)\eta(ds, du, dw),$$

即对 $(0, T] \times (0, \infty) \times D[0, T]$ 上的任意有界连续函数 f , 有

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^\infty \int_{D[0, T]} f(s, u, w) F(s, u, w) \eta_k(ds, du, dw) \\ & \rightarrow \int_0^T \int_0^\infty \int_{D[0, T]} f(s, u, w) F(s, u, w) \eta(ds, du, dw). \end{aligned}$$

类似地, 令 $\mathbf{M}_1$ 表示乘积空间 $(0, T] \times (0, \infty)^2 \times D[0, T]$ 上满足

$$\int_0^T \int_0^\infty \int_0^\infty \int_{D[0, T]} z F(s, u, w) \eta(ds, dz, du, dw) < \infty$$

的 Borel 测度 η 构成的空间, 并如下定义此空间上的拓扑: 对于 $\eta_k, \eta \in \mathbf{M}_1$, 规定 $\eta_k \rightarrow \eta$ 当且仅当在 $(0, T] \times (0, \infty)^2 \times D[0, T]$ 上的有限测度的弱收敛意义下有

$$z F(s, u, w) \eta_k(ds, dz, du, dw) \rightarrow z F(s, u, w) \eta(ds, dz, du, dw).$$

记 $X = \{X_t : t \in [0, T]\}$ 和 $Y_n = \{Y_n(t) : t \in [0, T]\}$. 我们可以视 $\{(X, Y_n, Y_{n-1}, N_0, N_1) : n \geq 1\}$ 为取值于 $D[0, T]^3 \times \mathbf{M}_0 \times \mathbf{M}_1$ 的随机变量列. 事实上, 根据引理 2.4, 有

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \left[\int_0^T \int_0^\infty \int_{D_0[0, T]} F(s, u, w) N_0(ds, du, dw) \right] \\ &= \sum_{i=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty 2^{-i-j} \mathbf{E} \left[\int_0^T \int_0^\infty \int_{D_0[0, T]} e^{-u} l_i(w, t_j - s) N_0(ds, du, dw) \right] \\ &= \sum_{i=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty 2^{-i-j} \int_0^T ds \int_0^\infty e^{-u} du \int_{D_0[0, T]} l_i(w, t_j - s) \mathbf{N}_0(dw) \\ &= \sum_{i=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty 2^{-i-j} \int_{D_0[0, T]} \mathbf{N}_0(dw) \int_0^T ds \int_0^1 w(t_j - s + r) \gamma_i(r) dr \\ &= \sum_{i=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty 2^{-i-j} \int_{D_0[0, T]} \mathbf{N}_0(dw) \int_0^1 \gamma_i(r) dr \int_{t_j+r-T}^{t_j+r} w(s) ds \\ &\leq \sum_{i=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty 2^{-i-j} \int_{D_0[0, T]} \mathbf{N}_0(dw) \int_0^{T+1} w(s) ds \\ &\leq \sum_{i=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty 2^{-i-j} \int_0^{T+1} e^{-bs} ds \\ &< \infty. \end{aligned}$$

因此, $\mathbf{P}(N_0 \in \mathbf{M}_0) = 1$. 类似地可以证明 $\mathbf{P}(N_1 \in \mathbf{M}_1) = 1$.

引理 3.5 假设定理 1.1 的条件成立, 且函数组 (h, ρ_1, ρ_2) 有界, 则序列 $\{(X, Y_n, Y_{n-1}, N_0, N_1) : n \geq 1\}$ 在 $D[0, T]^3 \times \mathbf{M}_0 \times \mathbf{M}_1$ 中胎紧.

证明 由于 (X, N_0, N_1) 的分布不依赖于 $n \geq 1$, 我们只需证明序列 $\{(Y_n, Y_{n-1}) : n \geq 1\}$ 在 $D[0, T]^2$ 中胎紧. 由 (3.3) 不难推出, 对于任意 $t \in [0, T]$, 随机变量列 $\{(Y_n(t), Y_{n-1}(t)) : n \geq 1\}$ 胎紧. 再由引理 3.4 可知, 对任意一致有界的停时序列 $\{\tau_n : n \geq 1\}$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$\sup_{n \geq 1} \mathbf{E}\{|Y_n(\tau_n + t) - Y_n(\tau_n)|^2 + |Y_{n-1}(\tau_n + t) - Y_{n-1}(\tau_n)|^2\} \rightarrow 0.$$

根据 Aldous^[17] 的判别准则, 序列 $\{(Y_n, Y_{n-1}) : n \geq 1\}$ 在 $D[0, T]^2$ 中胎紧, 也可参见文献 [18, 第 137 和 138 页]. $\square$

引理 3.6 假设定理 1.1 的条件成立, 且函数组 (h, ρ_1, ρ_2) 有界, 则存在子列 $\{n_k\} \subset \{n\}$, 以及定义在某个概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ 上且取值于 $D[0, T]^2 \times \mathbf{M}_0 \times \mathbf{M}_1$ 的随机变量 (X', Y', N', N'') 和取值于 $D[0, T]^3 \times \mathbf{M}_0 \times \mathbf{M}_1$ 的随机变量列 $\{(X'_k, Y'_k, Z'_k, N'_k, N''_k) : k \geq 1\}$ 使得 $(X'_k, Y'_k, Z'_k, N'_k, N''_k)$ 和 $(X, Y_{n_k}, Y_{n_k-1}, N_0, N_1)$ 同分布, 且当 $k \rightarrow \infty$ 时几乎必然有 $(X'_k, Y'_k, Z'_k, N'_k, N''_k) \rightarrow (X', Y', Y', N', N'')$.

证明 由引理 3.5, 有子列 $\{n_k\} \subset \{n\}$ 使当 $k \rightarrow \infty$ 时 $(X, Y_{n_k}, Y_{n_k-1}, N_0, N_1)$ 依分布收敛. 根据 Skorokhod 表示定理, 存在概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ 以及定义在此空间上取值于 $D[0, T]^3 \times \mathbf{M}_0 \times \mathbf{M}_1$ 的随机变量 (X', Y', Z', N', N'') 和 $(X'_k, Y'_k, Z'_k, N'_k, N''_k)$ ($k \geq 1$) 使得 $(X'_k, Y'_k, Z'_k, N'_k, N''_k)$ 与 $(X, Y_{n_k}, Y_{n_k-1}, N_0, N_1)$ 同分布, 且当 $k \rightarrow \infty$ 时 $(X'_k, Y'_k, Z'_k, N'_k, N''_k)$ 几乎必然收敛于 (X', Y', Z', N', N'') . 由引理 3.3 和 Fatou 引理, 对任意的 $t \in [0, T]$, 有

$$\mathbf{E}[|Y'(t) - Z'(t)|] \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{E}[|Y'_k(t) - Z'_k(t)|] = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{E}[|Y_{n_k}(t) - Y_{n_k-1}(t)|] = 0.$$

所以, $\{Y'(t) : t \in [0, T]\}$ 和 $\{Z'(t) : t \in [0, T]\}$ 不可区分. $\square$

下面的主要任务是证明 (X', Y', N', N'') 是方程 (1.13) 的弱解. 因 $(X'_k, Y'_k, Z'_k, N'_k, N''_k)$ 与 $(X, Y_{n_k}, Y_{n_k-1}, N_0, N_1)$ 同分布, 所以,

$$\begin{aligned} Y'_k(t) &= X'_k(t) + \int_0^t \int_0^{h(Z'_k(s-))} \int_{D_0[0, \infty)} w(t-s) N'_k(ds, du, dw) \\ &\quad + \int_0^t \int_0^\infty \int_0^{q(Z'_k(s-), z)} \int_{D_0[0, \infty)} w(t-s) N''_k(ds, dz, du, dw) \\ &= X'_k(t) + \int_0^t \int_0^{h(Y'(s-))} \int_{D_0[0, \infty)} w(t-s) N'_k(ds, du, dw) \\ &\quad + \int_0^t \int_0^\infty \int_0^{q(Y'(s-), z)} \int_{D_0[0, \infty)} w(t-s) N''_k(ds, dz, du, dw) + \epsilon_k(t), \end{aligned} \quad (3.7)$$

其中

$$\begin{aligned} \epsilon_k(t) &= \int_0^t \int_{h(Y'(s-))}^{h(Z'_k(s-))} \int_{D_0[0, \infty)} w(t-s) N'_k(ds, du, dw) \\ &\quad + \int_0^t \int_0^\infty \int_{q(Y'(s-), z)}^{q(Z'_k(s-), z)} \int_{D_0[0, \infty)} w(t-s) N''_k(ds, dz, du, dw). \end{aligned}$$

为了简化后面的表述, 令

$$U(t) = \int_0^t \int_0^{h(Y'(s-))} \int_{D_0[0, \infty)} w(t-s) N'(ds, du, dw),$$

$$U_k(t) = \int_0^t \int_0^\infty \int_{D_0[0,\infty)}^{h(Y'(s-))} w(t-s) N'_k(ds, du, dw).$$

类似地, 定义

$$\begin{aligned} V(t) &= \int_0^t \int_0^\infty \int_{D_0[0,\infty)}^{q(Y'(s-), z)} w(t-s) N''(ds, dz, du, dw), \\ V_k(t) &= \int_0^t \int_0^\infty \int_{D_0[0,\infty)}^{q(Y'(s-), z)} w(t-s) N''_k(ds, dz, du, dw). \end{aligned}$$

引理 3.7 假设定理 1.1 的条件成立, 且函数组 (h, ρ_1, ρ_2) 有界, 则有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{E}[|\epsilon_k(t)|] = 0.$$

证明 由 $\epsilon_k(t)$ 的定义, 以及引理 2.1(i) 和 2.4(ii), 不难看出

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[|\epsilon_k(t)|] &\leq \mathbf{E}\left\{ \int_0^t \int_{h(Y'(s-)) \wedge h(Z'_k(s-))}^{h(Y'(s-)) \vee h(Z'_k(s-))} \int_{D_0[0,\infty)} w(t-s) N'_k(ds, du, dw) \right\} \\ &\quad + \mathbf{E}\left\{ \int_0^t \int_0^\infty \int_{q(Y'(s-), z) \wedge q(Z'_k(s-), z)}^{q(Y'(s-), z) \vee q(Z'_k(s-), z)} \int_{D_0[0,\infty)} w(t-s) N''_k(ds, dz, du, dw) \right\} \\ &\leq \mathbf{E}\left\{ \int_0^t |h(Y'(s)) - h(Z'_k(s))| ds \int_{D_0[0,\infty)} w(t-s) \mathbf{N}_0(dw) \right\} \\ &\quad + \mathbf{E}\left\{ \int_0^t ds \int_0^\infty |q(Y'(s), z) - q(Z'_k(s), z)| \nu(dz) \int_{D_0[0,\infty)} w(t-s) \mathbf{Q}_z(dw) \right\} \\ &\leq \mathbf{E}\left\{ \int_0^t \left[|h(Y'(s)) - h(Z'_k(s))| + \int_0^\infty |q(Y'(s), z) - q(Z'_k(s), z)| z \nu(dz) \right] e^{-b(t-s)} ds \right\} \\ &\leq \mathbf{E}\left\{ \int_0^t [r(|Y'(s) - Z'_k(s)|) \wedge (2\|h + \rho_1\|)] e^{-b(t-s)} ds \right\}. \end{aligned}$$

根据控制收敛定理, 上式右端当 $k \rightarrow \infty$ 时趋近于零. $\square$

引理 3.8 假设定理 1.1 的条件成立, 且函数组 (h, ρ_1, ρ_2) 有界, 则对任意有理数 $t \in [0, T]$, 有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{E}[|U_k(t) - U(t)| \wedge 1] = 0$$

和

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{E}[|V_k(t) - V(t)| \wedge 1] = 0.$$

证明 由于方法和计算类似, 这里只证明第二个结论. 记 $\eta_k = N'_k + N''$ 和 $\zeta_k = N''_k - N''$. 我们有

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}[|V_k(t) - V(t)| \wedge 1] \\ &= \mathbf{E}\left[\left| \int_0^T \int_0^\infty \int_{D_0[0,\infty)} 1_{\{s \leq t\}} 1_{\{u \leq q(Y'(s-), z)\}} w(t-s) \zeta_k(ds, dz, du, dw) \right| \wedge 1 \right] \\ &\leq \zeta_{k,i}(t) + \mathbf{E}\left[\left| \int_0^T \int_0^\infty \int_{D_0[0,\infty)} 1_{\{s \leq t\}} 1_{\{u \leq q(Y'(s-), z)\}} w(t-s) \right| \right] \end{aligned}$$

$$-f_i(s, t)f_i(u, q(l_i(Y', s), z) \wedge i)l_i(w, t-s)]\zeta_k(ds, dz, du, dw)\Bigg], \quad (3.8)$$

其中

$$\zeta_{k,i}(t) = \mathbf{E}\left[\left|\int_0^T \int_0^\infty \int_0^\infty \int_{D_0[0,\infty)} f_i(s, t)f_i(u, q(l_i(Y', s), z) \wedge i)l_i(w, t-s)\zeta_k(ds, dz, du, dw)\right| \wedge 1\right].$$

注意当 $k \rightarrow \infty$ 时, 在 $\mathbf{M}_1$ 中几乎必然地 $N_k'' \rightarrow N''$. 由控制收敛定理可知, 对任意有理数 $t \in [0, T]$, 有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \zeta_{k,i}(t) = 0,$$

而 (3.8) 右边第二项被下面的值所控制:

$$\begin{aligned} \eta_i(t) &:= \mathbf{E}\left[\int_0^T \int_0^\infty \int_0^\infty \int_{D_0[0,\infty)} |1_{\{s \leq t\}} 1_{\{u \leq q(Y'(s-), z)\}} w(t-s) \right. \\ &\quad \left. - f_i(s, t)f_i(u, q(l_i(Y', s), z) \wedge i)l_i(w, t-s)|\eta_k(ds, dz, du, dw)\right] \\ &= 2\mathbf{E}\left[\int_0^T ds \int_0^\infty \nu(dz) \int_0^\infty du \int_{D_0[0,\infty)} |1_{\{s \leq t\}} 1_{\{u \leq q(Y'(s), z)\}} w(t-s) \right. \\ &\quad \left. - f_i(s, t)f_i(u, q(l_i(Y', s), z) \wedge i)l_i(w, t-s)|\mathbf{Q}_z(dw)\right]. \end{aligned}$$

注意上面的值并不依赖于 $k \geq 1$. 对有理数 $t \in [0, T]$, 在 (3.8) 两端取极限得

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \mathbf{E}[|V_k(t) - V(t)| \wedge 1] \leq \eta_i(t). \quad (3.9)$$

另一方面, 不难发现

$$\begin{aligned} \eta_i(t) &\leq 2\mathbf{E}\left[\int_0^T ds \int_0^\infty \nu(dz) \int_0^\infty du \int_{D_0[0,\infty)} |1_{\{s \leq t\}} 1_{\{u \leq q(Y'(s), z)\}} w(t-s) \right. \\ &\quad \left. - 1_{\{s \leq t\}} 1_{\{u \leq q(Y'(s), z)\}} l_i(w, t-s)|\mathbf{Q}_z(dw)\right] \\ &\quad + 2\mathbf{E}\left[\int_0^T ds \int_0^\infty \nu(dz) \int_0^\infty du \int_{D_0[0,\infty)} |1_{\{s \leq t\}} 1_{\{u \leq q(Y'(s), z)\}} l_i(w, t-s) \right. \\ &\quad \left. - 1_{\{s \leq t\}} 1_{\{u \leq q(Y'(s), z) \wedge i\}} l_i(w, t-s)|\mathbf{Q}_z(dw)\right] \\ &\quad + 2\mathbf{E}\left[\int_0^T ds \int_0^\infty \nu(dz) \int_0^\infty du \int_{D_0[0,\infty)} |1_{\{s \leq t\}} 1_{\{u \leq q(Y'(s), z) \wedge i\}} l_i(w, t-s) \right. \\ &\quad \left. - 1_{\{s \leq t\}} f_i(u, q(l_i(Y', s)) \wedge i)l_i(w, t-s)|\mathbf{Q}_z(dw)\right] \\ &\quad + 2\mathbf{E}\left[\int_0^T ds \int_0^\infty \nu(dz) \int_0^\infty du \int_{D_0[0,\infty)} |1_{\{s \leq t\}} f_i(u, q(l_i(Y', s)) \wedge i)l_i(w, t-s) \right. \\ &\quad \left. - f_i(s, t)f_i(u, q(l_i(Y', s), z) \wedge i)l_i(w, t-s)|\mathbf{Q}_z(dw)\right] \\ &\leq 2\mathbf{E}\left[\int_0^t ds \int_0^\infty q(Y'(s), z)\nu(dz) \int_{D_0[0,\infty)} |w(t-s) - l_i(w, t-s)|\mathbf{Q}_z(dw)\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2\mathbf{E} \left[\int_0^t ds \int_0^\infty |q(Y'(s), z) - q(Y'(s), z) \wedge i| \nu(dz) \int_{D_0[0, \infty)} l_i(w, t-s) \mathbf{Q}_z(dw) \right] \\
& + 2i^{-1} \mathbf{E} \left[\int_0^t ds \int_0^\infty (q(Y'(s), z) \wedge i) \nu(dz) \int_{D_0[0, \infty)} l_i(w, t-s) \mathbf{Q}_z(dw) \right] \\
& + 2\mathbf{E} \left[\int_{t(1-1/i)}^t ds \int_0^\infty (q(l_i(Y', s), z) \wedge i) \nu(dz) \int_{D_0[0, \infty)} l_i(w, t-s) \mathbf{Q}_z(dw) \right]. \quad (3.10)
\end{aligned}$$

由 (3.6) 有

$$\begin{aligned}
\int_{D_0[0, \infty)} l_i(w, t-s) \mathbf{Q}_z(dw) &= \int_0^1 \gamma_i(r) dr \int_{D_0[0, \infty)} w(t-s+r) \mathbf{Q}_z(dw) \\
&= z \int_0^1 \gamma_i(r) e^{-b(t-s+r)} dr \\
&\leq z e^{|b|(t+1)},
\end{aligned}$$

并进而有

$$\begin{aligned}
& \int_{D_0[0, \infty)} |w(t-s) - l_i(w, t-s)| \mathbf{Q}_z(dw) \\
& \leq \int_{D_0[0, \infty)} [w(t-s) + l_i(w, t-s)] \mathbf{Q}_z(dw) \\
& \leq 2z e^{|b|(t+1)}.
\end{aligned}$$

上式左端当 $i \rightarrow \infty$ 时趋于零. 这样, 对 (3.10) 右端应用控制收敛定理得

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \eta_i(t) = 0.$$

再由 (3.9) 可知,

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \mathbf{E}[|V_k(t) - V(t)| \wedge 1] = 0$$

对有理数 $t \in [0, T]$ 成立. □

引理 3.9 假设定理 1.1 的条件成立, 且函数组 (h, ρ_1, ρ_2) 有界. 再设 (X', Y', N', N'') 由引理 3.6 给出, 则对于任意 $t \geq 0$ 几乎必然有

$$\begin{aligned}
Y'(t) &= X'(t) + \int_0^t \int_0^{h(Y'(s-))} \int_{D_0[0, \infty)} w(t-s) N'(ds, du, dw) \\
&+ \int_0^t \int_0^\infty \int_0^{q(Y'(s-), z)} \int_{D_0[0, \infty)} w(t-s) N''(ds, dz, du, dw). \quad (3.11)
\end{aligned}$$

证明 在等式 (3.7) 两端取极限 $k \rightarrow \infty$, 并利用引理 3.7 和 3.8 知 (3.11) 对有理数 $t \in [0, T]$ 几乎必然成立. 利用各项的右连续性知该方程对于任意 $t \in [0, T]$ 几乎必然成立. 再由 $T \geq 0$ 的任意性即得要证结论. □

定理 1.1 的证明 方程 (1.13) 的解的轨道唯一性由引理 3.2 给出. 如果函数组 (h, ρ_1, ρ_2) 有界, 方程 (1.13) 的弱解的存在性由引理 3.9 得到. 下面考虑 (h, ρ_1, ρ_2) 无界的情形. 对于任意 $n \geq 1$, 考虑方程

$$Y(t) = X_t + \int_0^t \int_0^{h(n \wedge Y(s-))} \int_{D_0[0, \infty)} w(t-s) N_0(ds, du, dw)$$

$$+ \int_0^t \int_0^\infty \int_0^{q(n \wedge Y(s-), z)} \int_{D_0[0, \infty)} w(t-s) N_1(ds, dz, du, dw). \quad (3.12)$$

因为 (h, ρ_1, ρ_2) 在 $[0, \infty)$ 上局部有界, 由引理 3.2 和 3.9, 上方程有轨道唯一的解 $\{Y_n(t) : t \geq 0\}$. 对于 $n \geq 1$, 令

$$T_n = \inf\{t \geq 0 : Y_n(t) \geq n\}.$$

由 (3.12) 的轨道唯一性, 停时列 $\{T_n\}$ 递增, 且对 $0 \leq t \leq T_{n-1}$, 有 $Y_n(t) = Y_{n-1}(t)$. 再由命题 3.2 易知,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \infty.$$

因此, 极限 $Y_t = \lim_{n \rightarrow \infty} Y_n(t)$ 存在, 显然, $\{Y_t : t \geq 0\}$ 为 (1.13) 的解. $\square$

定理 1.2 的证明 假设 $\{Y_t : t \geq 0\}$ 是 (1.13) 的解. 令 f 是 $[0, \infty)$ 上的二次连续可微函数, 且自身及其前两阶导函数均有界且连续. 对 $x \geq 0$, 令

$$\begin{aligned} Lf(x) &= cx f''(x) + x \int_0^\infty [f(x+z) - f(x) - z f'(x)] m(dz) \\ &\quad + [h(x) - bx] f'(x) + \int_0^\infty [f(x+z) - f(x)] q(x, z) \nu(dz). \end{aligned}$$

利用 (1.13) 和 Itô 公式不难发现

$$M_t := f(Y_t) - f(Y_0) - \int_0^t Lf(Y_s) ds, \quad t \geq 0$$

为平方可积鞅. 局部地应用文献 [7, 命题 4.2] 可知 $\{Y_t : t \geq 0\}$ 是 (1.10) 的弱解. $\square$

致谢 非常感谢审稿人对本文的细致阅读和有益建议.

参考文献

- 1 Lamperti J. The limit of a sequence of branching processes. *Z Wahrsch Verw Gebiete*, 1967, 7: 271–288
- 2 Kawazu K, Watanabe S. Branching processes with immigration and related limit theorems. *Theory Probab Appl*, 1971, 16: 36–54
- 3 Cox J C, Ingersoll J E Jr, Ross S A. A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica*, 1985, 53: 385–408
- 4 Lambertson D, Lapeyre B. *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance*. London: Chapman and Hall, 1996
- 5 Dawson D A, Li Z. Skew convolution semigroups and affine Markov processes. *Ann Probab*, 2006, 34: 1103–1142
- 6 Bertoin J, Le Gall J F. Stochastic flows associated to coalescent processes III: Limit theorems. *Illinois J Math*, 2006, 50: 147–181
- 7 Fu Z, Li Z. Stochastic equations of non-negative processes with jumps. *Stochastic Process Appl*, 2010, 120: 306–330
- 8 Dawson D A, Li Z. Construction of immigration superprocesses with dependent spatial motion from one-dimensional excursions. *Probab Theory Related Fields*, 2003, 127: 37–61
- 9 Fu Z, Li Z. Measure-valued diffusions and stochastic equations with Poisson process. *Osaka J Math*, 2004, 41: 724–744
- 10 Li Z. *Measure-Valued Branching Markov Processes*. Heidelberg: Springer, 2011
- 11 Li Z. Immigration structures associated with Dawson-Watanabe superprocesses. *Stochastic Process Appl*, 1996, 62: 73–86
- 12 Li Z. Continuous-state branching processes with immigration. *ArXiv:1901.03521*, 2019
- 13 Sharpe M. *General Theory of Markov Processes*. New York: Academic Press, 1988
- 14 Ikeda N, Watanabe S. *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes*, 2nd ed. Amsterdam-Kodansha-Tokyo: North-Holland, 1989
- 15 Situ R. *Theory of Stochastic Differential Equations with Jumps and Applications*. Berlin: Springer, 2005
- 16 Kallenberg O. *Foundations of Modern Probability*, 2nd ed. New York: Springer, 2002

17 Aldous D. Stopping times and tightness. *Ann Probab*, 1978, 6: 335–340

18 Ethier S N, Kurtz T G. *Markov Processes: Characterization and Convergence*. New York: John Wiley & Sons, 1986

Continuous-state branching processes with dependent immigration

Zenghu Li & Wei Zhang

Abstract By solving a stochastic integral equation driven by Poisson random measures on a path space, we construct a continuous-state branching process with dependent immigration under a Yamada-Watanabe type condition for the immigration rate functions. This construction improves the results under Lipschitz conditions obtained by Dawson and Li (2003), Fu and Li (2004), Li (2011) and others.

Keywords continuous-state branching process, dependent immigration, stochastic integral equation, Poisson random measure, Yamada-Watanabe type condition

MSC(2010) 60J80, 60H10, 60H20

doi: 10.1360/N012018-00021