涉及微分多项式的正规规定则

献给杨乐教授 80 华诞

杨锦华¹, 庞学诚^{2*}

1. 新疆师范大学数学科学学院, 乌鲁木齐 830054;

2. 华东师范大学数学科学学院, 上海 200241

E-mail: 1511337295@qq.com, xcpang@math.ecnu.edu.cn

收稿日期: 2019-03-06; 接受日期: 2019-05-07; 网络出版日期: 2019-07-17; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11461070 和 11871216)、新疆师范大学优秀青年教师科研基金 (批准号: XJNU201506) 和新疆师范大学“十三五”校级重点学科数学招标课题 (批准号: 17SDKD1104) 资助项目

摘要 本文研究一类微分多项式的正规规定则, 得到下面的结果. 设 $\mathcal{F}$ 为区域 D 内的一族亚纯函数, $k \geq 4$ 为正整数, $a(z) (\neq 0)$, $a_1(z)$ 和 $b(z)$ 为区域 D 内的全纯函数. 若 $a(z) = 0$ 时, $f(z) \neq \infty$ 且对于 $\mathcal{F}$ 中的每一个函数 f , 有 $f'(z) + a_1(z)f(z) - a(z)f^k(z) \neq b(z)$, 则 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规.

关键词 亚纯函数 正规规定则 微分多项式

MSC (2010) 主题分类 30D35, 30D45

1 引言

正规族理论是单复变函数研究中的一项重要课题, 最初由 Montel 引入正规族概念. 正规族本质上是一族全纯函数或亚纯函数的列紧性. 1985 年, 李先进^[1] 证明了 Hayman^[2] 提出的猜测: 设 $\mathcal{F}$ 为区域 D 内的一族亚纯函数, $k \geq 5$, $a \neq 0, \infty$, $b \neq \infty$, 如果对于 $\mathcal{F}$ 中的每一个函数 f , 有 $f' - af^k \neq b$, 则 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规. Chen 和 Fang^[3] 及 Pang^[4] 证明了当 $k = 3, 4$ 时, 正规规定则成立. Yang 等^[5] 将上述正规定理中的复常数换成全纯函数, 得到了下面结果:

定理 A 设 $\mathcal{F}$ 为区域 D 内的一族亚纯函数, $a(z) (\neq 0)$ 和 $b(z)$ 为区域 D 内两个全纯函数, k 为正整数. 当 $a(z) = 0$ 时, $f(z) \neq \infty$ 且 $k \geq 4$ 时, 对于 $\mathcal{F}$ 中的每一个函数 f , 有 $f'(z) - a(z)f^k(z) \neq b(z)$, 则 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规.

1988 年, 庞学诚^[6] 研究了微分多项式的正规规定则, 得到如下结论:

定理 B 设 n 和 k 为正整数, $k \geq n + 4$, $\mathcal{F}$ 为区域 D 内的亚纯函数族, $a_i(z) (i = 0, 1, \dots, n-1)$ 和 $b_j(z) (j = 1, 2, \dots, k-1)$ 均为区域 D 内全纯函数, a 为有穷非零复数. 若对任意 $f \in \mathcal{F}$, 有

$$f^{(n)}(z) + \sum_{i=1}^{n-1} a_i(z)f^{(i)}(z) + \sum_{j=1}^{k-1} b_j(z)f^j(z) - af^k(z) \neq a_0(z),$$

英文引用格式: Yang J H, Pang X C. A normal criterion concerning the differential polynomials (in Chinese). Sci Sin Math, 2019, 49: 1439–1444, doi: 10.1360/N012019-00072

则 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规.

Ye 和 Pang^[7] 证明了 $k \geq n+3$ 时下面定理成立.

定理 C 设 $\mathcal{F}$ 为区域 D 内的亚纯函数族. 若对任意 $f \in \mathcal{F}$, 有

$$f^k(z) + f^{(n)}(z) + \sum_{i=1}^{n-1} a_i(z)f^{(i)}(z) + a_n(z)f(z) \neq a_0(z),$$

其中 $k \geq n+3$, $a_i(z)$ ($i = 0, 1, \dots, n$) 均为区域 D 内全纯函数, 则 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规.

本文继续研究涉及微分多项式的亚纯函数族的正规定则, 即研究区域 D 内满足条件

$$f'_n(z) + \sum_{i=1}^{k-1} a_i(z)f_n^i(z) - a(z)f_n^k(z) \neq b(z)$$

的亚纯函数族 $\{f_n\}$ 的正规性, 其中 $a(z)$ ($\neq 0$)、 $b(z)$ 和 $a_i(z)$ ($i = 1, \dots, k-1$) 均为 D 内全纯函数. 在这里, 我们发现了一个“奇怪”的现象, 下面这个例子表明, 当 $k = 4$ 时, 亚纯函数族 $\{f_n\}$ 是不正规的.

例 1.1 令 $D = \{z : |z| < 1\}$, $\mathcal{F} = \{f_n\}$, 其中 $f_n(z) = \frac{z}{(z-\frac{1}{n})(z+\frac{1}{n})}$, $a(z) = z^2$, $a_1(z) = 0$, $a_2(z) = -1$, $a_3(z) = 3z$, $b(z) = 0$. 显然, $\mathcal{F}$ 在 0 的邻域内不等度连续, 从而不正规. 然而, $\{f_n\}$ 满足

$$f'_n(z) + \sum_{i=1}^3 a_i(z)f_n^i(z) - a(z)f_n^4(z) = -\frac{1}{n^6(z^2 - n^{-2})^4} \neq b(z).$$

对 $k \geq 5$ 时的亚纯函数族 $\{f_n\}$ 是否正规我们还不清楚. 但是, 我们得到了一类特殊微分多项式的正规定则:

定理 1.1 设 $\mathcal{F}$ 为区域 D 内的一族亚纯函数, k 为正整数. $a(z)$ ($\neq 0$)、 $a_1(z)$ 和 $b(z)$ 为区域 D 内全纯函数. 若 $a(z) = 0$ 时, $f(z) \neq \infty$ 且 $k \geq 4$ 时, 对于 $\mathcal{F}$ 中的每一个函数 f , 有

$$f'(z) + a_1(z)f(z) - a(z)f^k(z) \neq b(z), \quad (1.1)$$

则 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规.

注 1.1 设 $\delta > 0$, 记 $\Delta_\delta = \{z : |z| < \delta\}$, $\Delta'_\delta = \{z : 0 < |z| < \delta\}$, $\Delta = \{z : |z| < 1\}$, $\Delta' = \{z : 0 < |z| < 1\}$. 在区域 D 内, $f_n(z) \rightrightarrows f(z)$ 表示 $\{f_n(z)\}$ 在 D 内按球距内闭一致收敛到 $f(z)$, $f_n(z) \rightarrow f(z)$ 表示 $\{f_n(z)\}$ 在 D 内按 Euclid 距离内闭一致收敛到 $f(z)$.

2 引理

为了证明本文的结果, 我们需要下列引理:

引理 2.1^[4, 8, 9] 设 $\mathcal{F}$ 为区域 D 内的一族亚纯函数, 对于每一个 $f \in \mathcal{F}$, f 的零点重数至少为 k , 存在一个数 $A \geq 1$, 使得当 $f \in \mathcal{F}$ 且 $f(z) = 0$ 时, $|f^{(k)}(z)| \leq A$. 若 $\mathcal{F}$ 在 D 内一点 z_0 不正规, 则对 $-1 < \alpha \leq k$, 存在

- (1) 点列 $z_n \in D, z_n \rightarrow z_0$;
- (2) $\mathcal{F}$ 中函数列 f_n ;
- (3) 正数序列 $\rho_n \rightarrow 0^+$,

使得函数列 $g_n(\zeta) = \rho_n^{-\alpha} f_n(z_n + \rho_n \zeta)$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 上按球面距离一致收敛到一个非常数的亚纯函数 $g(\zeta)$, 其零点重数至少为 k , 满足 $g^\#(0) \leq g^\#(0) = kA + 1$ 且 $g(\zeta)$ 的级至多是 2.

引理 2.2^[10] 令 f 是一个非常数有穷级亚纯函数, 若 f 的零点均为重级零点, 且 $f'(z) \neq c, c \neq 0$, 则 $f(z) = \frac{c(z-a)^2}{z-b}$, 其中 $a \neq b$ 为有穷复数.

引理 2.3^[11,12] 设 f 是一个超越亚纯函数, R 是一个不恒为 0 的有理函数. 若 f 的零点和极点除有限个外均为重级, 则 $f' - R$ 有无限多个零点.

引理 2.4^[13,14] 设 Q 是一个非常数有理函数, m 和 k 是正整数. 若 Q 的零点重级均大于等于 $k+2$, 且它的极点的重级除 $z=0$ 外均大于等于 2, 则对于任意的正整数 m , 在复平面 $\mathbb{C}$ 上 $Q^{(k)}(z) = z^m$ 有解.

引理 2.5 设 $\mathcal{F}$ 为区域 D 内的一族亚纯函数, k 为正整数. $a(z) (\neq 0), a_1(z), \dots, a_{k-1}(z), b(z)$ 为区域 D 内全纯函数. 当 $k \geq 3$ 时, 对于 $\mathcal{F}$ 中的每一个函数 f , 有

$$f'(z) + \sum_{i=1}^{k-1} a_i(z) f^i(z) - a(z) f^k(z) \neq b(z), \quad (2.1)$$

则 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规.

证明 不失一般性, 假设 $\mathcal{F}$ 在单位圆 Δ 内一点 z_0 处不正规, $a(z_0) \neq 0$. 由引理 2.1 知, 存在 $f_n \in \mathcal{F}, z_n \rightarrow z_0, \rho_n \rightarrow 0^+$, 使得 $g_n(\zeta) = \rho_n^{\frac{1}{k-1}} f_n(z_n + \rho_n \zeta)$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 上按球距内闭一致收敛到一个非常数的亚纯函数 $g(\zeta)$. 由于

$$\begin{aligned} g'_n(\zeta) + \sum_{i=1}^{k-1} \rho_n^{\frac{k-i}{k-1}} a_i(z_n + \rho_n \zeta) g_n^i(\zeta) - a(z_n + \rho_n \zeta) g_n^k(\zeta) \\ = \rho_n^{\frac{k}{k-1}} \left[f'_n(z_n + \rho_n \zeta) + \sum_{i=1}^{k-1} a_i(z_n + \rho_n \zeta) f_n^i(z_n + \rho_n \zeta) - a(z_n + \rho_n \zeta) f_n^k(z_n + \rho_n \zeta) \right], \end{aligned}$$

由 (2.1), 可得

$$g'_n(\zeta) + \sum_{i=1}^{k-1} \rho_n^{\frac{k-i}{k-1}} a_i(z_n + \rho_n \zeta) g_n^i(\zeta) - a(z_n + \rho_n \zeta) g_n^k(\zeta) \neq \rho_n^{\frac{k}{k-1}} b(z_n + \rho_n \zeta).$$

又因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n^{\frac{k}{k-1}} b(z_n + \rho_n \zeta) = 0$, 且 $g'_n(\zeta) + \sum_{i=1}^{k-1} \rho_n^{\frac{k-i}{k-1}} a_i(z_n + \rho_n \zeta) g_n^i(\zeta) - a(z_n + \rho_n \zeta) g_n^k(\zeta)$ 在 Δ 去掉 $g(\zeta)$ 的极点的区域内内闭一致收敛于 $g'(\zeta) - a(z_0)g^k(\zeta)$, 根据 Hurwitz 定理知, $g'(\zeta) - a(z_0)g^k(\zeta) \equiv 0$ 或 $g'(\zeta) - a(z_0)g^k(\zeta) \neq 0$.

若 $g'(\zeta) - a(z_0)g^k(\zeta) \equiv 0$, 则 $g(\zeta) = \frac{1}{\sqrt[k-1]{(1-k)(a(z_0)\zeta+c)}}$, 其中 c 为常数. 因为 $k \geq 3, a(z_0) \neq 0$, 这与 $g(\zeta)$ 是亚纯函数矛盾.

若 $g'(\zeta) - a(z_0)g^k(\zeta) \neq 0$, 则 $\frac{g'(\zeta)}{g^k(\zeta)} \neq a(z_0)$. 令 $G(\zeta) = \frac{1}{g(\zeta)}$, 则有 $G^{k-2}(\zeta)G'(\zeta) \neq -a(z_0)$. 由于 $k \geq 3$, 由文献 [15] 得 $G(\zeta)$ 是常数, 故 $g(\zeta)$ 也是常数, 这与 $g(\zeta)$ 是非常数的亚纯函数矛盾. 综上, $\mathcal{F}$ 在 z_0 处正规, 从而, $\mathcal{F}$ 在单位圆 Δ 内正规. $\square$

3 定理 1.1 的证明

由引理 2.5, 我们只需证明 $\mathcal{F}$ 在 $a(z)$ 的零点处正规. 不妨设 $D = \Delta$, 并且

$$a(z) = z^m \varphi(z), \quad z \in \Delta,$$

其中 $m \geq 1$, $\varphi(0) = 1$, 且在 Δ' 内 $a(z) \neq 0$. 由 (1.1) 以及条件 $a(0) = 0$ 时 $f(0) \neq \infty$, 可得

$$\frac{f'(z)}{a(z)f^k(z)} + \frac{a_1(z)f(z)}{a(z)f^k(z)} - \frac{b(z)}{a(z)f^k(z)} \neq 1. \quad (3.1)$$

令 $\mathcal{F}_1 = \{g \mid g(z) = \frac{1}{a(z)f^{k-1}(z)}\}$, 则 g 的零点至少是 $k-1$ 重, 0 是 g 的至少 m 重极点, 其余极点至少是 $k-1$ 重.

假设 $\mathcal{F}_1$ 在 $z = 0$ 处不正规. 由引理 2.1 可知, 存在 $g_n \in \mathcal{F}_1$, $z_n \rightarrow 0$, $\rho_n \rightarrow 0^+$, 使得 $G_n(\zeta) = \frac{g_n(z_n + \rho_n \zeta)}{\rho_n}$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 上按球距内闭一致收敛到一个非常数的有限级亚纯函数 $G(\zeta)$. $G(\zeta)$ 的零点和极点至少是 $k-1$ 重, 一个极点除外, 该极点重级至少为 m . 以下分两种情形讨论:

情形 1 $\frac{z_n}{\rho_n} \rightarrow \infty$. 此时 $G(\zeta)$ 的极点都至少为 $k-1$ 重. 我们断言

$$\begin{aligned} (1-k) \left[\frac{f'_n(z_n + \rho_n \zeta)}{a(z_n + \rho_n \zeta)f_n^k(z_n + \rho_n \zeta)} + \frac{a_1(z_n + \rho_n \zeta)f_n(z_n + \rho_n \zeta)}{a(z_n + \rho_n \zeta)f_n^k(z_n + \rho_n \zeta)} - \frac{b(z_n + \rho_n \zeta)}{a(z_n + \rho_n \zeta)f_n^k(z_n + \rho_n \zeta)} \right] \\ \Rightarrow G'(\zeta). \end{aligned} \quad (3.2)$$

事实上,

$$\begin{aligned} G'_n(\zeta) &= \left[\frac{1}{\rho_n a(z_n + \rho_n \zeta)f_n^{k-1}(z_n + \rho_n \zeta)} \right]' \\ &= (1-k) \frac{f'_n(z_n + \rho_n \zeta)}{a(z_n + \rho_n \zeta)f_n^k(z_n + \rho_n \zeta)} - \frac{a'(z_n + \rho_n \zeta)}{a^2(z_n + \rho_n \zeta)f_n^{k-1}(z_n + \rho_n \zeta)} \\ &= (1-k) \left[\frac{f'_n(z_n + \rho_n \zeta)}{a(z_n + \rho_n \zeta)f_n^k(z_n + \rho_n \zeta)} + \frac{a_1(z_n + \rho_n \zeta)f_n(z_n + \rho_n \zeta)}{a(z_n + \rho_n \zeta)f_n^k(z_n + \rho_n \zeta)} - \frac{b(z_n + \rho_n \zeta)}{a(z_n + \rho_n \zeta)f_n^k(z_n + \rho_n \zeta)} \right] \\ &\quad + (1-k) \left[\frac{b(z_n + \rho_n \zeta)}{a(z_n + \rho_n \zeta)f_n^k(z_n + \rho_n \zeta)} - \frac{a_1(z_n + \rho_n \zeta)f_n(z_n + \rho_n \zeta)}{a(z_n + \rho_n \zeta)f_n^k(z_n + \rho_n \zeta)} \right] \\ &\quad - \frac{a'(z_n + \rho_n \zeta)}{a^2(z_n + \rho_n \zeta)f_n^{k-1}(z_n + \rho_n \zeta)}. \end{aligned}$$

记

$$\begin{aligned} I_1 &= (1-k) \frac{b(z_n + \rho_n \zeta)}{a(z_n + \rho_n \zeta)f_n^k(z_n + \rho_n \zeta)}, \\ I_2 &= (1-k) \frac{a_1(z_n + \rho_n \zeta)f_n(z_n + \rho_n \zeta)}{a(z_n + \rho_n \zeta)f_n^k(z_n + \rho_n \zeta)}, \\ I_3 &= \frac{a'(z_n + \rho_n \zeta)}{a^2(z_n + \rho_n \zeta)f_n^{k-1}(z_n + \rho_n \zeta)}. \end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned} I_1^{k-1} &= a(z_n + \rho_n \zeta)[(1-k)b(z_n + \rho_n \zeta)]^{k-1}[\rho_n G_n(\zeta)]^k \Rightarrow 0, \\ I_2 &= (1-k)\rho_n a_1(z_n + \rho_n \zeta)G_n(\zeta) \Rightarrow 0, \\ I_3 &= \frac{m(z_n + \rho_n \zeta)^{m-1}\varphi(z_n + \rho_n \zeta) + (z_n + \rho_n \zeta)^m \varphi'(z_n + \rho_n \zeta)}{(z_n + \rho_n \zeta)^m \varphi(z_n + \rho_n \zeta)} G_n(\zeta) \rho_n \\ &= \frac{m\rho_n}{z_n + \rho_n \zeta} G_n(\zeta) + \frac{\rho_n \varphi'(z_n + \rho_n \zeta)}{\varphi(z_n + \rho_n \zeta)} G_n(\zeta) \Rightarrow 0. \end{aligned}$$

从而, (3.2) 成立.

再由 (3.1) 和 Hurwitz 定理有 $G'(\zeta) \equiv 1-k$ 或 $G'(\zeta) \neq 1-k$. 若 $G'(\zeta) \equiv 1-k$, 则 $G(\zeta)$ 是一个一次多项式, 而这与 $G(\zeta)$ 的零点重级至少是 $k-1$ 矛盾. 若 $G'(\zeta) \neq 1-k$, 则由引理 2.2 得 $G(\zeta) = (1-k)\frac{(\zeta-a)^2}{\zeta-b}$ ($a \neq b$), 这与 $G(\zeta)$ 的极点重级至少是 $k-1$ 矛盾.

情形 2 $\frac{z_n}{\rho_n} \rightarrow \alpha \neq \infty$. 令

$$\Phi_n(\zeta) = \frac{1}{\rho_n^{1+m} f_n^{k-1}(\rho_n \zeta)} = \zeta^m \varphi(\rho_n \zeta) \frac{g_n(z_n + \rho_n(\zeta - \frac{z_n}{\rho_n}))}{\rho_n},$$

则 $\Phi_n(\zeta) \Rightarrow \zeta^m G(\zeta - \alpha) = \Phi(\zeta)$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 上去掉 $G(\zeta - \alpha)$ 的极点后的区域内一致成立. 因为 $G(\zeta - \alpha)$ 在 $\zeta = 0$ 处至少有 m 重极点, 因此, $\Phi(0) \neq 0$. 由于

$$\begin{aligned} \Phi'_n(\zeta) &= \left[\frac{f_n^{1-k}(\rho_n \zeta)}{\rho_n^{1+m}} \right]' = (1-k) \frac{f'_n(\rho_n \zeta)}{\rho_n^m f_n^k(\rho_n \zeta)} \\ &= (1-k) \zeta^m \varphi(\rho_n \zeta) \left[\frac{f'_n(\rho_n \zeta)}{a(\rho_n \zeta) f_n^k(\rho_n \zeta)} + \frac{a_1(\rho_n \zeta) f_n(\rho_n \zeta)}{a(\rho_n \zeta) f_n^k(\rho_n \zeta)} - \frac{b(\rho_n \zeta)}{a(\rho_n \zeta) f_n^k(\rho_n \zeta)} \right] \\ &\quad + (1-k) \zeta^m \varphi(\rho_n \zeta) \left[\frac{b(\rho_n \zeta)}{a(\rho_n \zeta) f_n^k(\rho_n \zeta)} - \frac{a_1(\rho_n \zeta) f_n(\rho_n \zeta)}{a(\rho_n \zeta) f_n^k(\rho_n \zeta)} \right], \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} I_4^{k-1} &= \left[(1-k) \zeta^m \varphi(\rho_n \zeta) \frac{b(\rho_n \zeta)}{a(\rho_n \zeta) f_n^k(\rho_n \zeta)} \right]^{k-1} \\ &= a(\rho_n \zeta) [(1-k) \zeta^m \varphi(\rho_n \zeta) b(\rho_n \zeta)]^{k-1} \left[\rho_n G_n \left(\zeta - \frac{z_n}{\rho_n} \right) \right]^k \Rightarrow 0, \\ I_5 &= (1-k) \rho_n \zeta^m \varphi(\rho_n \zeta) a_1(\rho_n \zeta) G_n \left(\zeta - \frac{z_n}{\rho_n} \right) \Rightarrow 0, \end{aligned}$$

故由 (3.1) 和 Hurwitz 定理有 $\Phi'(\zeta) \equiv (1-k)\zeta^m$ 或 $\Phi'(\zeta) \neq (1-k)\zeta^m$. 若 $\Phi'(\zeta) \equiv (1-k)\zeta^m$, 则 $\Phi(\zeta) = \frac{1-k}{m+1} \zeta^{m+1} + c$, 其中 c 为常数. 令 $\Phi(\zeta_0) = 0$, 则 ζ_0 是 $\Phi(\zeta)$ 的至少 $k-1$ 重零点, 故 $\Phi'(\zeta_0) = 0 = (1-k)\zeta_0^m$, 从而, $\zeta_0 = 0$, 而这与 $\Phi(0) \neq 0$ 矛盾. 若 $\Phi'(\zeta) \neq (1-k)\zeta^m$, 则由引理 2.3 知, $\Phi(\zeta)$ 是一个有理函数, 但这又与引理 2.4 矛盾. 因此, $\mathcal{F}_1$ 在 0 处正规.

下面将证明 $\mathcal{F}$ 在 0 处正规. 根据 $\mathcal{F}_1$ 在 0 处正规且 $g_n(0) = \infty$, 存在 $\delta > 0$ 使得 Δ_δ 内 $|g_n(z)| \geq 1$, 故 $|a(z)f_n^{k-1}(z)| \leq 1$, 因此, 在 Δ_δ 内 $f_n(z) \neq \infty$. 于是, f_n 在 Δ_δ 内全纯. 选取 δ 足够小, 使得当 n 足够大时, 在 $|z| \leq \delta$ 内 $|a(z)| \geq \frac{|z|^m}{2}$. 我们有

$$|f_n(z)| = \left| \frac{1}{a(z)g_n(z)} \right|^{\frac{1}{k-1}} \leq \left(\frac{2^{m+1}}{\delta^m} \right)^{\frac{1}{k-1}}, \quad |z| = \frac{\delta}{2}.$$

由最大模原理和 Montel 正规定则知, 存在 $\mathcal{F}$ 的子列在 Δ_δ 内正规, 即 $\mathcal{F}$ 在 0 处正规.

致谢 感谢审稿人对本文提出的修改意见.

参考文献

- 1 李先进. 关于正规族的 Hayman 猜测. 中国科学 A 辑, 1985, 15: 24-31
- 2 Hayman W K. Picard values of meromorphic functions and their derivatives. Ann of Math (2), 1959, 70: 9-42
- 3 Chen H H, Fang M L. The value distribution of $f^n f'$. Sci China Ser A, 1995, 38: 789-798
- 4 Pang X C. On normal criterion of meromorphic functions. Sci China Ser A, 1990, 33: 521-527

- 5 Yang J H, Yang Q, Pang X C. Normal criterion of meromorphic functions. *Acta Math Sin Engl Ser*, 2019, in press
- 6 庞学诚. 微分多项式的正规规定则. *科学通报*, 1988, 33: 1690–1693
- 7 Ye Y S, Pang X C. On the zeros of a differential polynomial and normal families. *J Math Anal Appl*, 1997, 205: 32–42
- 8 Pang X C, Zalcman L. Normal families and shared values. *Bull Lond Math Soc*, 2000, 32: 325–331
- 9 Zhang G M, Pang X C, Zalcman L. Normal families and omitted functions II. *Bull Lond Math Soc*, 2009, 41: 63–71
- 10 Pang X C, Nevo S, Zalcman L. Quasinormal families of meromorphic functions II. In: *Selected Topics in Complex Analysis. Operator Theory: Advances and Applications*, vol. 158. Basel: Birkhäuser, 2005, 177–189
- 11 Bergweiler W, Pang X C. On the derivative of meromorphic functions with multiple zeros. *J Math Anal Appl*, 2003, 278: 285–292
- 12 Pang X C, Nevo S, Zalcman L. Derivatives of meromorphic functions with multiple zeros and rational functions. *Comput Methods Funct Theory*, 2008, 8: 483–491
- 13 Pang X C, Yang D G, Zalcman L. Normal families of meromorphic functions whose derivatives omit a function. *Comput Methods Funct Theory*, 2002, 2: 257–265
- 14 Pang X C, Zalcman L. Normal families of meromorphic functions with multiple zeros and poles. *Israel J Math*, 2003, 136: 1–9
- 15 Bergweiler W, Eremenko A. On the singularities of the inverse to a meromorphic function of finite order. *Rev Mat Iberoamericana*, 1995, 11: 355–373

A normal criterion concerning the differential polynomials

Jinhua Yang & Xuecheng Pang

Abstract In this paper, we discuss the normal criterion of differential polynomials and get the following result. Let $\mathcal{F}$ be a family of meromorphic functions on a domain D , $k \geq 4$ be a positive integer, and let $a(z)$, $a_1(z)$ and $b(z)$ be three holomorphic functions on D , where $a(z) \not\equiv 0$ and $f(z) \neq \infty$ whenever $a(z) = 0$. If for any $f \in \mathcal{F}$, $f'(z) + a_1(z)f(z) - a(z)f^k(z) \neq b(z)$, then $\mathcal{F}$ is normal on D .

Keywords meromorphic function, normal criterion, differential polynomial

MSC(2010) 30D35, 30D45

doi: 10.1360/N012019-00072