非光滑系统不同簇发模式之间的演化及其机理

张正娣¹, 李静¹, 刘亚楠¹, 毕勤胜^{2*}

1. 江苏大学理学院, 镇江 212013;

2. 江苏大学土木工程与力学学院, 镇江 212013

* E-mail: qbi@ujs.edu.cn

收稿日期: 2018-05-30; 接受日期: 2018-11-06; 网络版发表日期: 2019-09-06

国家自然科学基金(批准号: 11632008, 11472115, 11472116)资助项目

摘要 非光滑和不同尺度耦合均具有非常广泛的工程背景,也是当前国内外研究中的热点课题.由于传统的非线性分析方法无法解决其中的诸如轨迹穿越分界面时的非光滑分岔和不同尺度之间相互作用等问题,非光滑系统中的不同尺度耦合效应一直是非线性动力学领域内的重要挑战之一.本文旨在探索由频域上不同尺度耦合导致的非光滑系统的复杂动力学特性及其演化过程,提出一般性的处理方法以揭示其复杂振荡的产生机制.以常见的直流功率变换器电路系统为例,通过引入周期变化的电流源,选择适当参数,建立了周期激励下分段光滑频域两尺度Filippov模型.指出当周期激励频率远小于系统的固有频率时,可以将整个周期激励项视为慢变参数,从而得到相应的广义自治系统.分析了两种典型参数条件下不同区域内相应子系统随慢变参数变化的平衡曲线及其分岔,进而探讨这两种情形下频域两尺度耦合系统的动力学特性,给出其相应的簇发振荡,得到不同簇发振荡之间的演化过程.通过转换相图,揭示了两种簇发振荡的产生机制,指出平衡曲线及其分岔不仅会影响簇发振荡吸引子的结构,也会改变其中的沉寂态或激发态的形式及其相互转化时的分岔机制,从而导致不同的簇发模式.同时发现,位于由非光滑分界面划分的不同区域中的稳定吸引子直接影响到簇发振荡吸引子的结构,如当多条稳定平衡曲线参与簇发时,其几何结构通常表现点-点型振荡,而随着参数的变化,不同区域中存在的稳定极限环又会导致激发态定性改变,产生点-环型簇发.

关键词 非光滑Filippov系统, 频域两尺度耦合, 簇发振荡, 分岔机制

1 引言

实际工程系统中存在着大量的诸如摩擦^[1]、碰撞^[2]、脉冲^[3,4]等非光滑因素,导致相应的数学模型产生向量场的非光滑特性.而根据向量场光滑性程度的不同,非光滑系统一般可以被分为三类:(1)非光滑连续系统,系统的向量场连续, Jacobi矩阵不连续,如蔡氏

电路系统^[5]; (2) Filippov系统,系统的向量场和Jacobi矩阵不连续,状态空间连续,如干摩擦系统^[6]; (3) 非光滑脉冲系统,系统的向量场、Jacobi矩阵和状态空间均不连续,如碰撞系统^[7].而电路系统中的开关会引起向量场的分段光滑现象^[8],这种不连续的分段光滑,使得轨线通常会被限制于切换流形上,并由此导致滑动现象,从而产生丰富的动力学行为^[9,10],如Benmerzouk和

引用格式: 张正娣, 李静, 刘亚楠, 等. 非光滑系统不同簇发模式之间的演化及其机理. 中国科学: 技术科学, 2019, 49: 1031–1039

Zhang Z D, Li J, Liu Y N, et al. The evolution mechanism of different forms of bursting oscillations in non-smooth dynamical systems (in Chinese). Sci Sin Tech, 2019, 49: 1031–1039, doi: 10.1360/N092018-00175

Barbot^[11]运用Poincaré映射对三维的分段光滑系统中的由滑动分岔(sliding bifurcation)引起的混沌现象进行了分析. Battelli和Fečkan^[12]基于Melnikov函数给出了分段光滑系统在滑动过程中同宿和异宿分岔.

本文主要目的在于探讨这类分段光滑系统中由不同尺度耦合导致的簇发振荡及其产生机制. 簇发振荡的研究最早可以追溯到Poincaré在探索行星轨迹时建立的奇异摄动方程^[13], 但是, 直到诺贝尔奖获得者Hodgkin和Huxley^[14]建立了两快一慢的神经元模型, 成功地再现了神经元的簇发放电行为以来, 相关工作才引起了国内外学者的高度关注^[15,16]. 随着Rinzel快慢分析法的引入, 大量有关簇发振荡机理分析的研究成果见诸报道. 通过将耦合系统分解为快子系统和慢子系统, 可以揭示大幅振荡的激发态和微幅振荡的沉寂态之间的分岔转换关系, 从而给出不同类型簇发振荡的产生机制^[17,18]. 迄今为止, 相关工作大都是围绕光滑系统开展的, 而对于分段光滑的Filippov系统的簇发振荡研究尚处在初始阶段, 因此, 深入探索簇发振荡及其分岔机制, 对于深入理解分段光滑系统的不同尺度耦合效应具有重要的理论意义.

本文以一般的直流功率变换器为例^[19], 通过引入周期变化的交流电源, 选择适当参数, 建立了频域两尺度耦合的分段光滑周期激励模型, 得到了两种典型参数条件下的不同非光滑周期簇发振荡, 揭示了其相应的转换机制. 其主要意义在于: (1) 指出了如何分析分段光滑系统由频域上不同尺度耦合导致的簇发振荡及其机制; (2) 揭示了不同区域中的稳态解及其分岔对整个系统的动力学特性的影响规律.

2 数学模型

电路中的开关经常会导致系统中产生各种非光滑行为, 如Cristiano等人^[19]建立了如图1所示的含滑模控制和滤波器的直流功率变换器电路系统, 得到了三维分段光滑Filippov数学模型, 表示为

$$\begin{cases} L \frac{di_L}{dt} = V_{in} - uv_C, \\ C \frac{dv_C}{dt} = ui_L - \frac{v_C}{R}, \\ \frac{dz_F}{dt} = \omega_F(i_L - z_F), \end{cases} \quad (1)$$

图1 分段光滑直流功率变换器电路系统

Figure 1 Piecewise smooth electrical system of DC power converter.

其中, i_L 为电感电流, V_{in} 为输入电压, 而电容电压 v_C 为输出电压. 电感电流 i_L 经过滤波器导致新变量 z_F , 其中 ω_F 为滤波器截止频率. 引入的控制律定义为 $u = 1/2(1 + \text{sign}[h])$.

在此电路中的电感 L 上串联一周期变化的交流电源, 定义为 $w = A \sin(\omega t)$, 引入变换

$$\begin{cases} i_L = x V_{in} \sqrt{C/L}, \\ v_C = y V_{in}, \\ z_F = i_L + (v_C - z V_{in}) / K, \\ t = \tau \sqrt{LC}, \end{cases} \quad (2)$$

并定义新参数 $a = \sqrt{L/C} / R$, $k = K \sqrt{C/L}$, $\beta = \omega_F \sqrt{LC}$, $\Omega = \omega \sqrt{LC}$, 可以建立如下无量纲周期激励下的分段光滑Filippov模型(为方便起见, 在此仍以 t 代表无量纲时间 τ):

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - uy + \alpha_1 y^3 + w, \\ \dot{y} = \beta x - \alpha y, \\ \dot{z} = u(x - ky) - (\beta - a)y + \beta z + k, \end{cases} \quad (3)$$

其中, $u = [1 + \text{sgn}(z)]/2$ 和 $w = A \sin(\Omega t)$ 分别表示无量纲开关控制器和周期变换的电流特性. 显然, 系统状态空间由非光滑分界面 $\Sigma = \{(x, y, z) | z = 0\}$, 划分为两个子空间, 分别记为 D_+ , 分别对应存在着两光滑子系统, 记为 S_+ , 系统行为受两子系统交替控制, 并在非光滑分界面上相互连接.

系统(3)为周期激励系统, 其中激励频率为 Ω . 同时, 系统还存在着固有频率, 对于非线性系统, 其固有频率与系统的运动状态密切相关. 其固有频率的确定

方法为, 设定 $A=0$, 也即没有周期激励项存在时, 得到相应自治系统的各种平衡点, 计算各平衡点的特征值, 其共轭特征值的虚部即为系统在该平衡点附近振荡时的固有频率. 当周期激励频率 Ω 远小于系统的固有频率, 记为 ω_N 时, 也即 $\Omega \ll \omega_N$, 对应于存在频域上不同尺度的耦合, 系统会产生不同尺度耦合效应, 通常表现为大幅振荡与微幅振荡之间来回变化的簇发振荡. 为揭示这些非光滑 Filippov 模型中由频域不同尺度耦合导致的簇发振荡的产生机制, 首先考察不同区域中子系统的分岔行为及其穿越分界面时可能存在的复杂现象.

3 两广义自治系统的分岔分析

由于周期激励频率 Ω 远小于系统的固有频率 ω_N , 因此, 固有频率对应的任一周期 $T \in [t_0, t_0 + 2\pi/\omega_N]$ 内, 外激励项 w 将在 $w_A = A \sin(\Omega t_0)$ 和 $w_B = A \sin(\Omega t_0 + 2\pi\Omega/\omega_N)$ 之间变化, 由于 $\Omega \ll \omega_N$, $w_A \approx w_B$, 也就是说, 虽然外激励项会在 $\pm A$ 之间变化, 但在固有频率所对应的一个周期内, w 变化非常缓慢, 因此, 整个外激励项 w 可视为慢变参数, 从快慢耦合的角度, 也可以称之为慢子系统. 另一方面, 当将整个外激励项 w 视为慢变参数后, 系统(1)可以视为含慢变参数的广义自治系统, 从快慢耦合的角度看, 也可当作与慢子系统相互耦合的快子系统.

由于存在着非光滑分界面 Σ , 该广义自治系统在不同 $D_+ := \{(x, y, z) | z > 0\}$ 和 $D_- := \{(x, y, z) | z < 0\}$ 区域内, 分别对应着不同形式的自治子系统 $S_{\pm}$. 下面分别考察广义自治子系统的分岔特性.

3.1 平衡点及其分岔

由广义自治系统(1)可知, $D_{\pm}$ 中两子系统的平衡点可以表示为

$$E_{\pm}(x, y, z) = E_{\pm}\{X_0, X_0\beta/\alpha, -M/\beta\}, \quad (4)$$

其中,

$$M = u(X_0 - k\beta X_0/\alpha) - (\beta - a)X_0\beta/\alpha + k,$$

X_0 满足

$$1 - u\beta X_0/\alpha + \alpha_1\beta^3 X_0^3/\alpha^3 + w = 0, \quad (5)$$

其稳定性由如下特征方程决定:

$$P(\lambda) = \lambda^3 + \Delta_1\lambda^2 + \Delta_2\lambda + \Delta_3 = 0, \quad (6)$$

式中, $\Delta_1 = \alpha - \beta$,

$$\Delta_2 = u\beta - 3\alpha_1\beta^3 X_0^2/\alpha^2 - \alpha\beta,$$

$$\Delta_3 = -u\beta^2 + 3\alpha_1\beta^4 X_0^2/\alpha^2.$$

因此, 当满足条件 $\Delta_1 > 0$, $\Delta_1\Delta_2 - \Delta_3 > 0$, $\Delta_3 > 0$ 时, $E_{\pm}$ 为稳定的平衡点, 从而导致两种可能的余维一分岔失稳模式. 当参数满足

$$\text{FB: } \Delta_3 = -u\beta^2 + 3\alpha_1\beta^4 X_0^2/\alpha^2 = 0, \quad (7)$$

且 $\Delta_1 > 0$, $\Delta_1\Delta_2 - \Delta_3 > 0$, 此时出现单零及两负实部特征值, 会产生 fold 分岔, 导致平衡点跳跃现象, 而当参数满足

$$\text{HB: } \Delta_1\Delta_2 - \Delta_3 = 0, \quad (8)$$

且 $\Delta_1 > 0$, $\Delta_3 > 0$ 时, 此时出现一对纯虚根和单负实部特征值, 可能会产生 Hopf 分岔, 从平衡点引起频率为 $\omega_H^2 = \Delta_3/\Delta_1$ 的周期振荡.

3.2 两种典型参数条件下的平衡曲线及其分岔

为进一步说明这些平衡点及其分岔行为, 固定参数 $\alpha_1 = 1.0$, $\alpha = 1.0$, $k = 4.0$, $a = 2.0$, 图2分别给出了 $\beta = -4.5$ 和 $\beta = -5.0$ 时随慢变量 w 变化的平衡曲线及其分岔特性.

从图2中可以看出, 当 β 不同时, 随慢变量 w 的变化, 存在着定性不同的分岔行为. 当 $\beta = -4.5$ 时, 由 D_+ 区域内子系统决定的平衡曲线 E_+ 分别由 fold 分岔点 FB_1^+ 和 FB_2^+ 及平衡曲线与分界面 Σ 的交点 G_2 分为 4 段, 其中稳定平衡曲线 EB_1^+ 和 EB_3^+ 及不稳定平衡曲线 EB_2^+ 均位于区域 D_+ 内, 也即这些平衡曲线与相应的子系统在同一定义域内, 而稳定平衡曲线 EB_4^+ 则位于区域 D_- 内, 也即该平衡曲线虽然存在但无法实现. 而由 D_- 区域内子系统决定的平衡曲线 E_- 则由平衡曲线与分界面的交点 G_1 分为两段, 其中稳定平衡曲线 EB_2^- 和其相应的子系统均位于 D_- 区域内, 而稳定平衡曲线 EB_1^- 与相应子系统位于不同区域内, 说明该稳定平衡曲线虽然存在, 同样是无法实现的.

随着 β 的减小, 虽然两子系统所对应的平衡曲线定性一致, 但是, 由于参数的变化, 导致了新的分岔行为, 如在 $\beta = -5.0$ 时, 当慢变量 w 变化到截面 Π_4 和 Π_6 之间时, 分别会出现 fold limit cycle 分岔, 也即出现稳定极限环 LC_s 和不稳定 LC_u 的折叠, 从而导致围绕分界面 Σ , 并按照稳定极限环 LC_s 的振荡(图2(b)).

图 2 (网络版彩图)平衡曲线及其分岔特性. (a) $\beta=-4.5$; (b) $\beta=-5.0$

Figure 2 (Color online) Equilibrium branches and their bifurcations. (a) $\beta=-4.5$; (b) $\beta=-5.0$.

随慢变参数变化的平衡曲线和分岔行为以及非光滑分界面, 不仅会直接影响簇发振荡的性质, 同时也会影响吸引子轨迹穿越非光滑分界面的特性. 针对上述两种典型的平衡曲线及分岔的分布情况, 下面将探讨其相应的簇发振荡的特性及其相应的产生机制.

4 簇发振荡的演化

由上述分析可知, 在 $\beta=-4.5$ 及 $\beta=-5.0$ 两种情形下, 其平衡曲线存在着不同的分岔行为, 因此在这两参数条件下, 可能存在着不同的簇发振荡行为. 同时, 上述平衡曲线及其分岔图均是基于将慢变参数作为变化参数得到的, 也即反映了平衡曲线及其分岔与慢变参数之间的关系. 为进一步说明这些平衡曲线及其分岔与实际振荡行为之间的关系, 在此引入转换相图的概念^[20].

对于系统(1), 传统的相图可以表示为 $\Gamma := \{[x(t), y(t), z(t)], \forall t \in R\}$, 现在定义

$$\begin{aligned}\Gamma_G &:= \{[x(t), y(t), z(t), w(t)] \\ &= [x(t), y(t), z(t), A \sin(\Omega t)], \\ &\forall t \in R\}\end{aligned}$$

为转换相图, 也即将 w 视为广义状态变量. 转换相图能够描述状态变量与慢变量 w 之间的相互关系, 结合图2中的平衡曲线, 可以揭示这些平衡曲线及其分岔对系统振荡的影响规律.

4.1 情形一: $\beta=-4.5$

选取激励频率 $\Omega=0.01$, 振幅 $A=3.0$, 图3给出了 $\beta=-$

-4.5 时 (x, z) 平面上的相图及相应状态变量 z 的时间历程. 从图3(a)中可知, 系统表现为周期性的簇发振荡, 这也可以从图3(b)中的时间历程得到证实, 同时, 系统轨迹分别在 $D_{\pm}$ 区域中振荡, 并通过分界面上两个非光滑点相互连接.

其轨迹在 $D_{\pm}$ 区域中的行为存在着很大的区别, 在 D_{+} 区域中, 轨迹围绕3个稳定平衡点振荡, 类似于非光滑蔡氏电路中的涡卷运动^[21], 而在 D_{-} 区域中, 轨迹围绕着单个平衡点振荡. 围绕4个稳定平衡点的振荡形成4种不同形式的激发态, 分别记为 $SP_i (i=1, 2, 3, 4)$, 如图3(b)所示. 连接这4种激发态的4种沉寂态, 分别记为 $QS_i (i=1, 2, 3, 4)$, 也不相同, 如 QS_1 和 QS_4 均仅包含着一种光滑运动的过程, 而是在 QS_2 和 QS_3 中, 系统轨迹将穿越非光滑分界面, 也即均包含着非光滑运动过程.

为进一步说明这些沉寂态和激发态的形成机制, 图4给出了在 (w, z) 平面上的转换相图及其与平衡曲线之间的叠加图. 由图4(b)中可以看出, S型稳定平衡曲线 E_{+} 在区域 D_{+} 内由两fold分岔点形成一个滞后环, 且其相应的稳定段 EB_1^{+} 和 EB_3^{+} 均与控制轨迹运动的子系统 S_{+} 在同一区域 D_{+} 内, 因此, 在轨迹的来回过程中形成两次由fold分岔导致的跳跃现象.

假设轨迹从 M_1 点出发, 对应于 w 取最小值 $w=-3.0$, 由于稳定的平衡曲线 EB_1^{+} 和控制系统均在区域 D_{+} 内, 因此轨迹几乎严格沿 EB_1^{+} 运动, 表现为沉寂态 QS_1 , 直到抵达分岔点 FB_1^{+} , 由fold分岔跳向稳定平衡曲线 EB_3^{+} , 形成大幅振荡, 进入激发态 SP_1 , 并逐渐稳定于平衡曲线 EB_3^{+} , 进入沉寂态 QS_2 . 当轨迹运动到 EB_3^{+} 与分界面 Σ 的交点 G_2 点, 随着慢变量 w 的继续增加, 轨迹

图 3 (网络版彩图) $\beta=-4.5$ 时的簇发振荡. (a) (x, z) 平面上的相图; (b) z 的时间历程

Figure 3 (Color online) Bursting oscillations for $\beta=-4.5$. (a) Phase portrait on the (x, z) plane; (b) time history of z .

图 4 (网络版彩图) $\beta=-4.5$ 时的簇发振荡. (a) (x, z) 平面上转换相图; (b) 转换相图与平衡曲线的叠加图

Figure 4 (Color online) Bursting oscillations for $\beta=-4.5$. (a) Transformed phase portrait on the (x, z) plane; (b) overlap of the transformed phase portrait and the equilibrium branches.

穿越分界面, 转而受 D_- 区域内子系统 S_- 控制, 对应于 D_- 区域内的稳定平衡曲线 EB_2^- , 导致轨迹跳向 EB_2^- , 形成大幅振荡 SP_2 . 而后轨迹逐渐稳定于平衡曲线 EB_2^- , 进入沉寂态 QS_3 . 当慢变量 w 增大到最大值 $w=+3.0$ 后, 随着时间的推移, w 将逐渐减小, 导致轨迹几乎严格按照 EB_2^- 反向运动. 当轨迹运动到 EB_2^- 与分界面 Σ 的交点 G_1 点后, 轨迹将穿越分界面, 进而受 D_+ 区域内的子系统 S_+ 控制, 对应于稳定的平衡曲线 EB_3^+ , 从而使得轨迹跳向 EB_3^+ , 形成激发态 SP_3 . 当轨迹随 w 的减小逐渐稳定于 EB_3^+ 后, 几乎严格沿该稳定平衡曲线运动, 进入沉寂态 QS_4 , 直到轨迹抵达分岔点 FB_2^+ 时, 由 fold 分岔产生跳跃现象, 进入激发态 SP_4 , 而后沿 EB_1^+ 运动到出发点 M_1 , 完成一个周期的运动.

从几何结构上看, 上述簇发吸引子围绕着四稳定平衡点振荡, 可以称为周期非光滑点-点-点-点型簇发,

而从分岔连接上, 则可称为周期非光滑 fold-fold 型簇发.

备注

(1) 簇发振荡过程中的这些跳跃现象的机制不尽相同. 在 D_+ 区域内的 FB_1^+ 和 FB_2^+ 两点处, 由于随慢变参数变化在平衡曲线上会产生 fold 分岔, 使得轨迹在不同的稳定平衡线之间引起跳跃. 而在分界面上的 G_1 和 G_2 点, 由于轨迹穿越分界面会导致控制子系统产生变化, 导致轨迹迅速收敛到该子系统相应的位于同一区域内的稳定曲线而引起跳跃现象.

(2) 大幅振荡的激发态均是由于跳跃点与相应的稳定平衡曲线之间存在着一定的距离导致的, 因此, 这些激发态也可视为从跳跃点到相应平衡曲线之间的暂态过程, 其相应的振荡频率可以根据位于稳定平衡曲线上相应平衡点特征值共轭复根的虚部来近似.

4.2 情形二: $\beta=-5.0$

随着参数 β 的变化, 广义自治系统随 w 变化的分岔行为也会产生变化, 从而导致系统产生不同形式的簇发振荡. 在此仍选用与情形一相同的激励, 图5分别给出了 $\beta=-5.0$ 时系统在 (x, z) 和 (y, z) 平面上的相图.

从图5(a)中可以看出, 系统轨迹分别围绕 D_+ 区域内的稳定平衡点振荡, 而随着时间的推移, D_+ 区域内的轨迹会沿大幅极限环振荡并穿越非光滑分界面, 进一步分析可以看出, 轨迹沿大幅极限环振荡后会逐渐稳定于 D_- 区域内的稳定平衡点, 而后快速穿越分界面并跳向 D_+ 区域内的稳定平衡点(图5(b)), 随后跳向 D_+ 区域内的另一稳定的平衡点.

为进一步说明这一现象, 图6给出了 z 的时间历程及其相应的局部放大图. 从图6(a)中发现, 随着时间的推移, 轨迹从 D_+ 区域内的沉寂态 QS_1 转为围绕分界面

的大幅振荡(图6(b)), 然后稳定到 D_- 区域内的稳定平衡点 E_1^- , 而后穿越分界面并逐渐稳定到 D_+ 内的平衡点 E_2^+ , 进而跳向 D_+ 内的另一平衡点 E_1^+ . 由此可见, 轨迹在该簇发振荡过程中存在两种穿越分界面的方式, 一种是由大幅振荡反复穿越, 另一种是单次穿越. 与情形一中的簇发振荡相比产生了非常明显的区别.

为揭示这种簇发振荡的产生机制, 同样借助于转换相图及其与平衡曲线的分岔分析. 假设轨迹依然从图7(a)中 M_1 点出发, 对应于 w 取最小值 $w=-3.0$, 由于稳定的平衡曲线 EB_1^+ 和控制系统均在区域 D_+ 内, 因此轨迹几乎严格沿 EB_1^+ 运动, 表现为沉寂态 QS_1 , 直到抵达分岔点 FB_1^+ , 由fold分岔跳向稳定的极限环 LC_S , 如图7(b)所示, 产生围绕 LC_S 的大幅振荡, 进入激发态 SP_1 . 随着 w 的继续增加, 轨迹反复穿越分界面 Σ , 并几乎严格按照稳定极限环 LC_S 运动, 直到 w 抵达截面 Π_6 , 此时由稳定极限环与不稳定极限环 LC_U 相互作用的

图5 (网络版彩图) $\beta=-5.0$ 时簇发振荡. (a) (x, z) 平面上的相图; (b) (y, z) 平面上的相图

Figure 5 (Color online) Bursting oscillations for $\beta=-5.0$. (a) Phase portrait on the (x, z) plane; (b) phase portrait on the (y, z) plane.

图6 (网络版彩图) $\beta=-5.0$ 时簇发振荡. (a) z 的时间历程; (b) 局部放大图

Figure 6 (Color online) Bursting oscillations for $\beta=-5.0$. (a) Time history of z ; (b) locally enlarged part.

图 7 (网络版彩图) $\beta=-5.0$ 时簇发振荡. (a) (x, z) 平面上转换相图; (b) 转换相图与平衡曲线的叠加图

Figure 7 (Color online) Bursting oscillations for $\beta=-5.0$. (a) Transformed phase portrait on the (x, z) plane; (b) overlap of transformed phase portrait and the equilibrium branches.

fold limit cycle 分岔, 导致稳定极限环消失(参见图2(b)), 导致轨迹趋向 D_- 区域内稳定平衡曲线 EB_2^- , 使得大幅振荡的幅值逐渐减小, 直到稳定于平衡曲线 EB_2^- , 进而几乎严格沿 EB_2^- 运动, 进入沉寂态 QS_2 .

当轨迹沿 EB_2^- 运动到图7(a)中 M_2 时, 也即 w 取最大值 $w=+3.0$, 随着时间的继续增加, w 将逐渐减小, 导致轨迹掉头并几乎严格沿 EB_2^- 反向运动. 当轨迹运动到截面 Π_2 时, 也即 EB_2^- 与分界面的交点 G_2 (图7(a)), 轨迹穿越分界面 Σ 进入区域 D_+ , 进而受子系统 S_+ 控制, 轨迹将从分界面跳向其中的稳定平衡曲线 EB_3^+ , 产生大幅振荡, 形成激发态 SP_2 (图6(a)).

随着 w 的继续减小, 轨迹将逐渐稳定于平衡曲线 EB_3^+ , 并几乎严格沿 EB_3^+ 运动, 进入沉寂态 QS_3 , 直到轨迹抵达分岔点 FB_2^+ 时, 由 fold 分岔产生跳跃现象, 进入激发态 SP_3 , 而后沿 EB_1^+ 运动到出发点 M_1 , 完成一个周期的运动.

从几何结构上看, 上述簇发吸引子围绕着三稳定平衡点和一极限环振荡, 可以称为周期非光滑点-点-环型簇发, 而从分岔连接上, 则可称为周期非光滑 fold-fold-fold limit cycle 型簇发.

备注

(1) 当慢变量 w 变化到截面 Π_4 和 Π_6 之间时, 分别会出现 fold limit cycle 分岔, 也即出现稳定极限环 LC_s 和不稳定 LC_u 的折叠. 虽然此时存在的稳定平衡曲线 EB_3^+ 与相应控制子系统 S_+ 均位于同一区域 D_+ 内, 但由于平衡曲线 EB_3^+ 为稳定极限环 LC_s 和不稳定 LC_u 所包围, 因此由 FB_1^+ 产生的 fold 分岔只能导致轨迹跳向 LC_s , 而不能收敛到 EB_3^+ .

(2) 三种激发态的振荡频率的产生机制不同, 其中 SP_2 和 SP_3 的振荡频率可以由所围绕振荡的平衡曲线上相应平衡点的特征值共轭复根的虚部来近似, 而 SP_1 的振荡频率则由稳定极限环 LC_s 的频率来决定.

(3) 必须指出的是, 虽然由于在不同区域中两子系统的稳定极限环 LC_s 随 w 变化产生一致的分岔行为, 但是由两区域中合成的极限环是不光滑的. 同样, 虽然稳定平衡曲线 EB_2^- 与分界面存在交点 G_2 , 但轨迹在 G_2 的穿越过程依然是非光滑的.

(4) 这些簇发所对应的物理现象表现为, 系统相应的输出电压和电流呈现出大幅振荡和微幅振荡之间的组合, 也即张弛振荡特性.

5 结论

当周期激励下的分段光滑 Filippov 系统中激励频率与系统固有频率之间存在量级差距时, 系统会产生大幅振荡与微幅振荡耦合的簇发振荡. 而当激励频率远小于系统的固有频率时, 整个激励项可以视为慢变参数, 从而得到分段光滑的广义自治系统. 非光滑分界面将相空间划分为不同的区域, 分别对应于该自治系统相应的子系统. 通过分析不同区域中子系统的平衡点, 可以得到随慢变参数变化的平衡曲线及其分岔行为, 指出参数变化会影响这些平衡曲线的结构及其分岔特性. 考察了两种典型参数情形, 发现平衡曲线及其分岔不仅会影响簇发振荡吸引子的结构, 也会改变其中的沉寂态或激发态的形式及其相互转化时的分岔机制. 特别地, 本文的研究表明, 转换相图与平衡曲

线及其分岔之间的叠加, 能够清楚地揭示各种稳态解及其分岔与簇发振荡中沉寂态和激发态及其相互转化

机制之间的关系, 因此成为一种分析周期激励系统频域上不同尺度耦合时簇发振荡及其机理的有效方法.

参考文献

- 1 Jiang J, Shang Z Y, Hong L. Characteristics of dry friction backward whirl—A self-excited oscillation in rotor-to-stator contact systems. *Sci China Tech Sci*, 2010, 53: 674–683
- 2 Siefert A, Henkel F O. Nonlinear analysis of commercial aircraft impact on a reactor building—Comparison between integral and decoupled crash simulation. *Nucl Eng Des*, 2014, 269: 130–135
- 3 Sung H C, Kim D W, Park J B, et al. Robust digital control of fuzzy systems with parametric uncertainties: LMI-based digital redesign approach. *Fuzzy Sets Syst*, 2010, 161: 919–933
- 4 Ghassemlooy Z, Hayes A R. Digital pulse interval modulation for IR communication systems—A review. *Int J Commun Syst*, 2015, 13: 519–536
- 5 Galvanetto U. Some discontinuous bifurcations in a two-block stick-slip system. *J Sound Vib*, 2001, 248: 653–669
- 6 Xu C, Li D W, Chen X Q, et al. Vibration analysis for a micro-slip frictional system considering variable normal load (in Chinese). *J Vib Shock*, 2017, 36: 122–127 [徐超, 李东武, 陈学前, 等. 考虑法向载荷变化的微滑摩擦系统振动分析. *振动与冲击*, 2017, 36: 122–127]
- 7 Dercole F, Gragnani A, Rinaldi S. Bifurcation analysis of piecewise smooth ecological models. *Theor Popul Biol*, 2007, 72: 197–213
- 8 Gao X, Chen Q, Liu X B. Nonlinear dynamics design for piecewise smooth vibration isolations system (in Chinese). *Chin J Theoret Appl Mech*, 2016, 48: 192–200 [高雪, 陈前, 刘先斌. 一类分段光滑隔振系统的非线性动力学设计方法. *力学学报*, 2016, 48: 192–200]
- 9 Efstathiou K, Liu X, Broer H W. The boundary-hopf-fold bifurcation in Filippov systems. *Siam J Appl Dyn Syst*, 2015, 14: 914–941
- 10 Chen H. Global bifurcation for a class of planar Filippov systems with symmetry. *Qual Theor Dyn Syst*, 2016, 15: 349–365
- 11 Benmerzouk D, Barbot J P. Chaotic behavior analysis based on corner bifurcations. *Nonlinear Anal Hybrid Syst*, 2009, 3: 543–550
- 12 Battelli F, Fečkan M. Bifurcation and chaos near sliding homoclinics. *J Differ Equ*, 2010, 248: 2227–2262
- 13 Cardin P T, de Moraes J R, da Silva P R. Persistence of periodic orbits with sliding or sewing by singular perturbation. *J Math Anal Appl*, 2015, 423: 1166–1182
- 14 Rinzel J. Discussion: Electrical excitability of cells, theory and experiment: Review of the Hodgkin-Huxley foundation and an update. *Bltin Mathcal Biol*, 1990, 52: 3–23
- 15 Wang H, Wang Q, Lu Q. Bursting oscillations, bifurcation and synchronization in neuronal systems. *Chaos Solitons Fractals*, 2011, 44: 667–675
- 16 Ferrari F A S, Viana R L, Lopes S R, et al. Phase synchronization of coupled bursting neurons and the generalized Kuramoto model. *Neural Networks*, 2015, 66: 107–118
- 17 Song X L, Jin W Y, Ma J. Energy dependence on the electric activities of a neuron. *Chin Phys B*, 2015, 24: 128710
- 18 Fang X, Chen W. Synchronization of complex dynamical networks with time-varying inner coupling. *Nonlinear Dyn*, 2016, 85: 13–21
- 19 Cristiano R, Carvalho T, Tonon D J, et al. Hopf and Homoclinic bifurcations on the sliding vector field of switching systems in $\mathbb{R}^3$: A case study in power electronics. *Physica D*, 2017, 347: 12–20
- 20 Wu T Y, Chen X K, Zhang Z D, et al. Structures of the asymmetrical bursting oscillation attractors and their bifurcation mechanisms (in Chinese). *Acta Phys Sin*, 2017, 66: 35–45 [吴天一, 陈小可, 张正娣, 等. 非对称型簇发振荡吸引子结构及其机理分析. *物理学报*, 2017, 66: 35–45]
- 21 Stouboulos I N, Miliou A N, Valaristos A P, et al. Crisis induced intermittency in a fourth-order autonomous electric circuit. *Chaos Solitons Fractals*, 2007, 33: 1256–1262

The evolution mechanism of different forms of bursting oscillations in non-smooth dynamical systems

ZHANG ZhengDi¹, LI Jing¹, LIU YaNan¹ & BI QinSheng²

¹ Faculty of Science, Jiangsu University, Zhenjiang 212013, China;

² Faculty of Civil Engineering and Mechanics, Jiangsu University, Zhenjiang 212013, China

The dynamics of the systems with non-smoothness and the coupling of multiple scales have become the key subject because of their wide applications in science and engineering problems. The main purpose of the manuscript is to investigate the complicated dynamics in non-smooth systems caused by the coupling of two scales in frequency domain. Based on a common model of the boost converter controlled by a SMC-Washout as an example, By introducing a periodically changed electric power source and taking suitable parameter values, a piecewise non-smooth Filippov system with two scales in frequency domain is established. For the case when the exciting frequency is far less than the natural frequency, the whole exciting term can be regarded as a slow-varying parameter. Upon the analysis of the two subsystems located in two regions divided by the non-smooth boundary, the evolution of the equilibrium branches as well as the bifurcations with the variation of the slow-varying parameter are derived. Two typical cases corresponding to different distribution of the equilibrium branches as well as the bifurcations with the variation of the slow-varying parameter are taken into consideration, in which different types of bursting oscillations can be observed. By introducing the concept of the transformed phase portrait, the associated bifurcation mechanism of the bursting oscillations is presented. It is found that, the equilibrium branches and the related bifurcations may change with the variation of parameters, which may not only affect the quiescent states and the spiking states, but also influence the bifurcations between the two states, leading to different forms of bursting oscillations. It is pointed out that, when the trajectory of system jumps between different stable equilibrium branches of the two subsystems located in two associated regions, the types of point/point bursting oscillations may be obtained, while with the variation of the parameters, when the stable limit cycles involves the attractors, the types of point/cycle bursting oscillations may appear.

non-smooth Filippov system, coupling of two scales in frequency domain, bursting oscillations, bifurcation mechanism

doi: [10.1360/N092018-00175](https://doi.org/10.1360/N092018-00175)