中国科学: 数学 2019 年 第 49 卷 第 6 期: 879～898
SCIENTIA SINICA Mathematica
论 文

参数单指标分位数自回归模型的诊断检验

夏强[1], 梁茹冰[1], 李高荣[2*]

1. 华南农业大学数学与信息学院, 广州 510642;
2. 北京工业大学北京科学与工程计算研究院, 北京 100124
E-mail: xiaqiang@scau.edu.cn, stat2003@163.com, ligaorong@bjut.edu.cn

收稿日期: 2018-04-08; 接受日期: 2018-05-29; 网络出版日期: 2019-02-25; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 91746102, 11871001 和 11471029)、北京市自然科学基金 (批准号: 1182003)、广东省自然科学基金 (批准号: 2016A030313414) 和教育部人文社会科学研究规划基金 (批准号: 17YJA910002) 资助项目

摘要 本文研究参数单指标时间序列分位数自回归模型有效性的检验问题. 当分位数回归变量的维数较大时, 现有的检验方法将面临 "维数灾难" 问题. 为了解决这个问题, 本文基于残差经验过程, 利用降维思想构造统计量, 它有效地适应于参数单指标时间序列分位数自回归模型. 本文提出 Khmaladze 鞅转换方法来替代经验过程, 并构造检验统计量, 证明所构造的检验统计量能够渐近收敛到分布自由的标准 Brown 运动. 模拟研究和实际数据分析的结果表明, 本文所提方法在参数单指标分位数自回归模型的检验中优于已有的检验方法.

关键词 模型检验 单指标时间序列 分位数回归 残差经验过程 降维 Khmaladze 转换 渐近分布自由

MSC (2010) 主题分类 60F03, 62J12, 62M10

1 引言

在过去的几十年中, 分位数回归 [1] 的出现是回归分析的一个重大突破, 之后分位数回归模型受到了广泛的关注, 如关于分位数回归模型参数估计的研究 [2–8], 以及关于模型检验的研究 [9–14] 等. 在处理异常值或极值时, 分位数回归比均值回归更稳健, 它可以适应于协变量在不同级别的分位数上可能的不同影响. 针对线性和非线性分位数回归模型的估计和检验问题, 大部分统计学者集中在对独立同分布误差情形的研究.

本文考虑严平稳和遍历态的时间序列 $\{Y_t, t = 0, \pm1, \pm2, \ldots\}$, 并研究参数时间序列分位数自回归模型的拟合优度检验. 假设 $X_t = (Y_{t-1}, \ldots, Y_{t-p})^{\mathrm{T}}$ 是一个可观测的随机向量, 给定 X_t 和 $0 < \alpha < 1$, Y_t 的条件 α 分位数自回归函数定义为

$$Q_{Y_t}(\alpha \mid X_t) := \inf\{y : \mathbb{P}(Y_t \leqslant y \mid X_t) \geqslant \alpha\}. \tag{1.1}$$

英文引用格式: Xia Q, Liang R B, Li G R. Model checking for parametric single-index quantile autoregression (in Chinese). Sci Sin Math, 2019, 49: 879–898, doi: 10.1360/SCM-2018-0259

© 2019《中国科学》杂志社

对于非参数分位数自回归 (1.1) 的研究, 将遇到两方面的问题: (1) 当 p 很大时, 相关的估计方法会受到所谓 "维数灾难" 问题; (2) 很难对 X_t 的估计函数进行可视化和有效的解释. 为了解决这些问题, 本文将考虑半参数时间序列分位数自回归, 如单指数时间序列分位数自回归模型. 在多变量非参数回归模型的拟合中, 单指标模型通过对协变量进行线性组合, 有效避免了 "维数灾难" 问题, 因此, 它已成为一种非常有吸引力的降维方法, 并在高维数据建模中成为一种比较流行且有效的统计方法. 对于 $0<\alpha<1$, 参数单指数分位数自回归模型定义为

$$Y_t = m(\beta^{\mathrm{T}}(\alpha)X_t) + \varepsilon_t, \quad \mathrm{E}(\psi(\varepsilon_t) \mid X_t) = 0, \tag{1.2}$$

其中 $\psi(r) = \alpha I(r>0) + (\alpha-1)I(r<0)$, $\beta(\alpha) \in \mathbb{R}^p$ 为自回归分位数参数, $m(\cdot)$ 是一个已知的联系函数. 在实际应用中, 模型 (1.2) 包括多种线性和非线性模型, 其中一个主要的应用是线性分位数自回归 (quantile autoregression, QAR) 模型, 即 $m(\beta^{\mathrm{T}}(\alpha)X_t) = \beta^{\mathrm{T}}(\alpha)X_t$. 文献 [15] 研究了 QAR 模型的渐近性质及其估计理论, 并指出 QAR 模型可以被解释为随机变系数自回归模型的一种特殊形式: $Y_t = \beta^{\mathrm{T}}(U_t)X_t + \varepsilon_t$, 其中 $\{U_t\}$ 是独立同分布的随机变量序列且服从 $(0,1)$ 区间上均匀分布.

虽然单指标模型有时在描述解释变量和响应变量的关系时使用信息较少, 而且如果残差相关时, 它会低估多样化解释变量组合的方差, 但是单指标模型可以避免 "维数灾难" 的问题. 为了避免错误的结论, 例如, 基于参数单指数分位数自回归模型 (1.2) 的经济决策或解释参数是否正确, 一个重要的问题是检查联系函数 $m(\cdot)$ 是否被正确指定. 对于广义线性模型[16,17], 文献 [18,19] 提出了一些统计检验方法来检验广义线性模型是否有效. 针对单指标模型检验问题, 文献 [20] 提出了一种自适应 Nyman 检验统计量, 并研究了检验统计量的渐近性质, 以及构造了联系函数的同时置信带.

对于经典分位数回归模型的检验问题, 虽然已有文献提出了一些方法, 但是这些方法总限制在独立同分布观测值或具有固定分位数 α 的线性模型. 例如, 基于条件矩核光滑估计, 文献 [9] 提出了分位数回归识别检验方法; 文献 [11] 提出了中位数回归函数的诊断检验方法. 此外, 文献 [21] 采用经验似然方法对分位数回归和删失分位数回归进行了假设检验的研究, 但他们的检验方法在 Pitman 的局部备择假设下不具有相合性. 基于一种整合的方法, 文献 [22] 研究了线性分位数回归模型的诊断检验问题, 在独立同分布情形下, 证明了所提出的检验方法具有相合性. 对于线性和非线性分位数回归模型, 文献 [12] 引入一种失拟检验方法, 并利用自助法 (bootstrap) 计算检验统计量拒绝域的临界值. 对于时间序列分位数自回归模型, 在残差经验过程加入示性函数 $I(X_t \leqslant x)$, 文献 [10] 针对一阶非线性分位数自回归的 Markov 时间序列模型提出了渐近枢轴检验方法. 不同于文献 [10] 的方法, 在残差经验过程中加入指数函数 $\exp(\mathrm{i}x^{\mathrm{T}}X_t)$, 文献 [13] 针对严平稳和遍历态时间序列的参数动态分位数模型提出了一种相合性的检验方法.

本文基于残差经验过程, 构造了一个检验统计量对参数单指数分位数自回归模型 (1.2) 进行拟合优度检验. 正如文献 [23] 所指出, 残差的累积和过程可以作为该领域中构造各种拟合优度检验的基础. 为了将这个方法推广到时间序列模型的检验, 文献 [10] 利用具有指标权重函数 $I(X_t \leqslant x)$ 的信息鞅代替累积和过程, 并对 Markov 时间序列的一阶分位数自回归进行了诊断检验. 在残差经验过程中使用指数函数 $\exp(\mathrm{i}x^{\mathrm{T}}X_t)$, 文献 [13] 提出了参数动态分位数时间序列的识别检验. 然而, 当 X_t 维数很大时, 文献 [10,13] 的检验方法都将遭遇 "维数灾难" 的问题. 为了避免该问题, 在模型 (1.2) 的残差经验过程, 本文引入了一种基于指标权重函数 $I(\beta_0^{\mathrm{T}}X_t \leqslant x)$ 的降维检验方法, 并在参数单指标分位数自回归模型中, 对它们的信息鞅部分进行变换, 得到渐近分布自由 (asymptotically distribution-free, ADF) 的检验统计量. 数值模拟和实际数据分析的结果说明, 本文提出的检验方法比其他已有的检验方法在解释变量维数较高时将完成得更好.

为了方便, 首先引入 L_2 范数符号, 对于向量 a, $\|a\|$ 表示 L_2 范数. 本文结构如下: 第 2 节提出基于残差经验过程的检验统计量, 并研究所构造检验统计量的渐近性质; 第 3 节给出信息鞅过程转换的检验统计量; 第 4 节研究局部备择假设下的统计功效; 第 5 节通过数值模拟和一个实际数据分析来说明本文提出的方法; 附录 A 整理了本文主要理论结果的证明和一些主要引理.

2 残差经验过程

针对参数单指数分位数自回归模型 (1.2), 本文主要考虑如下的零假设:

$$H_0: Q_{Y_t}(\alpha \mid X_t) = m(\beta^{\mathrm{T}}(\alpha)X_t), \quad \text{对于一些 } \beta \in \mathbb{R}^p \text{ 和一个固定的 } \alpha \in (0,1). \tag{2.1}$$

在零假设 H_0 下, 令 $\varepsilon_t := Y_t - m(\beta^{\mathrm{T}}(\alpha)X_t)$ 表示真实的误差, 则容易得到

$$\mathrm{E}(\psi(\varepsilon_t) \mid X_t) = 0 = \mathrm{E}(\psi(\varepsilon_t) \mid \beta^{\mathrm{T}}(\alpha)X_t).$$

进一步, 可以得到

$$\mathrm{E}(\psi(\varepsilon_t)I(\beta^{\mathrm{T}}(\alpha)X_t \leqslant u)) = 0.$$

因此, 用来检验参数单指数分位数自回归模型 (1.2) 结构的残差经验过程定义如下:

$$R_n(u) := n^{-1/2}\sum_{t=1}^{n}\psi(Y_t - m(\beta^{\mathrm{T}}(\alpha)X_t))I(\beta^{\mathrm{T}}(\alpha)X_t \leqslant u), \quad u \in \mathbb{R}. \tag{2.2}$$

作为单变量过程, $R_n(u)$ 是由 ψ- 残差经验过程和将 X_t 投影到 $\beta^{\mathrm{T}}(\alpha)X_t$ 所决定. 由于自回归分位数参数 $\beta(\alpha)$ 是未知的, 因此不能直接利用 (2.2) 来检验零假设 H_0. 首先需要估计 $\beta(\alpha)$, 可以利用文献 [15,24] 提出的基于分位数自回归方法得到 $\beta(\alpha)$ 的估计量 $\beta_n(\alpha)$. 这时可以通过 $\beta_n(\alpha)$ 替换 (1.2) 中的 $\beta(\alpha)$, 进而构造如下的检验统计量:

$$R_n^1(u) = n^{-1/2}\sum_{t=1}^{n}\psi(\varepsilon_{n,t})I(\beta_n^{\mathrm{T}}(\alpha)X_t \leqslant u), \quad u \in \mathbb{R}, \tag{2.3}$$

其中 $\varepsilon_{n,t} = Y_t - m(\beta_n^{\mathrm{T}}(\alpha)X_t)$ 表示经验残差. 为了与本文方法进行比较, 分别回顾文献 [10,13] 中构造的检验统计量. 文献 [10] 构造了如下的检验统计量:

$$R_n^{11}(u) = n^{-1/2}\sum_{t=1}^{n}\psi(\varepsilon_{n,t})I(X_t \leqslant u), \quad u \in \mathbb{R}^p. \tag{2.4}$$

文献 [13] 构造了如下统计量:

$$R_n^{12}(u) = n^{-1/2}\sum_{t=1}^{n}\psi(\varepsilon_{n,t})\exp(\mathrm{i}u^{\mathrm{T}}X_t), \quad u \in \mathbb{R}^p. \tag{2.5}$$

由 (2.4) 和 (2.5) 容易看出 $R_n^{11}(u)$ 和 $R_n^{12}(u)$ 是多变量经验过程. 当维数 p 较大时, 它们将面临 "维数灾难" 问题, 从而造成检验功效的损失. 由 (2.3), 本文提出的检验统计量将考虑 X_t 的线性组合 $\beta_n^{\mathrm{T}}(\alpha)X_t$, 达到降维的目的, 然后定义 ψ- 残差经验过程, 从而避免了由 (2.4) 和 (2.5) 定义的检验统计量 $R_n^{11}(u)$ 和 $R_n^{12}(u)$ 所遇到的 "维数灾难" 问题.

为了研究检验统计量 $R_n(u)$ 的渐近性质, 首先给出下面的正则条件.

假设 2.1 在这个假设中, 需要满足以下 4 个条件:

(1) $\mathrm{E}Y_0^2 < \infty$.

(2) 存在 $\mathbb{R}$ 上的一个连续非降函数 $\tau^2(\cdot)$, 使得下式成立:

$$n^{-1}\sum_{t=1}^{n}\mathrm{E}[\psi(\varepsilon_t)^2 \mid \mathcal{F}_{t-1}]I(\beta_0^{\mathrm{T}}X_t \leqslant u) = \tau^2(u) + o_p(1), \tag{2.6}$$

其中 $\mathcal{F}_t = \sigma(Y_t, Y_{t-1}, \ldots)$.

(3) 对于一个从 $\mathbb{R}^p$ 到 $\mathbb{R}^p$ 的函数 ς, 在 $\mathcal{F}_t$ 给定的条件下, X_{t+1+p} 的条件分布函数 F_t 有 Lebesgue 密度 $f_t(x-\varsigma(X_{t+1}))$, 满足

$$\int[\mathrm{E}f_t^{1+\delta}(x-\varsigma(X_{t+1}))]^{1/(1+\delta)}dx < \infty.$$

(4) $\beta_0^{\mathrm{T}}X_1$ 的分布函数 G_0 连续.

条件 (1) 和 (2) 用来确保空间 $D[-\infty,\infty]$ 上一致的紧性, 条件 (3) 用于识别弱极限, 条件 (4) 可以简化证明.

定理 2.1 在零假设 (2.1) 和正则假设 2.1 下, 在 Skorohod 空间 $D[-\infty,\infty]$ 上, $R_n(u)$ 依分布收敛, 即

$$R_n(u) \Rightarrow R_\infty(u),$$

其中 R_∞ 是一个中心化的 Gauss 过程, 其协方差核为 $K(x,y) = \mathrm{E}[\psi(\varepsilon_1)^2 I(\beta_0^{\mathrm{T}}X_1 \leqslant x\wedge y)]$. 进一步, R_∞ 依分布有如下结果:

$$R_\infty = B\circ\tau,$$

其中 $\tau(u) := K(u,u)$, B 是一个标准 Brown 运动.

由于 $R_n(u)$ 中含有未知的自回归分位数参数 $\beta(\alpha)$, 实际中定理 2.1 的结果不能直接用于检验零假设 H_0. 为了解决这个问题, 首先估计经验过程 $R_n(u)$ 中 $\beta(\alpha)$, 进而得到 R_n^1. 为了研究 R_n^1 的渐近性质, 还需要下面一些常规条件.

假设 2.2 下面的正则条件用来推导 $R_n^1(u)$ 的渐近性质.

(1) 假定 $\beta(\alpha)$ 的估计 $\beta_n(\alpha)$ 具有 $\sqrt{n}$ 的相合性和渐近正态性:

$$\sqrt{n}(\beta_n(\alpha)-\beta(\alpha)) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{n}l(X_t,Y_t,\beta(\alpha)) + o_p(1).$$

对于 p 维向量函数 l, 满足 $\mathrm{E}\{l(X_t,Y_t,\beta(\alpha)) \mid X_t\} = 0$, 且 L 存在且是正定矩阵, 其中

$$L(\beta(\alpha)) := \mathrm{E}\{l(X_t,Y_t,\beta(\alpha))l^{\mathrm{T}}(X_t,Y_t,\beta(\alpha))\}.$$

(2) 假定 $m(\beta^{\mathrm{T}}(\alpha)x)$ 在 $\beta(\alpha)$ 邻域的每一个 β 处连续可微. 令

$$g(x,\beta) = \frac{\partial m(\beta^{\mathrm{T}}(\alpha)x)}{\partial\beta} = (g_1(x,\beta),\ldots,g_p(x,\beta))^{\mathrm{T}},$$

则存在一个 μ 可积的函数 $M(x)$, 使得

$$\mathrm{E}\|g(x,\beta)\| < M(x), \quad \text{对所有的 } \beta \text{ 都成立}.$$

(3) 分布函数族 $\{\mathrm{P}_y, \mathrm{P}_y(x) := \mathbb{P}(Y_t - m(\beta^{\mathrm{T}}(\alpha)X_t) \leqslant x \mid X_t = y), x, y \in \mathbb{R}\}$ 有条件 Lebesgue 密度 $\{p_y, y \in \mathbb{R}\}$, 它一致有界 $\sup_{x,y} p_y(x) < \infty$, 且是同等连续的: 对于每一个 $\epsilon > 0$, 存在一个 $\varrho > 0$, 使得下式成立:

$$\sup_{y\in\mathbb{R},|x-z|\leqslant\varrho} |p_y(x) - p_y(z)| \leqslant \epsilon.$$

在假设 2.2 中, 针对不同的模型和数据生成过程, 条件 (1) 均被文献证明成立, 如文献 [3, 定理 2]、[24, 定理 1] 和 [25, 定理 3.2]. 对带有独立同分布误差 $\{\varepsilon_t\}$ 的线性 AR(p) 模型, 文献 [3,24] 均证明 $f_\varepsilon[F_\varepsilon^{-1}(\alpha)]\Omega_0^{1/2}\sqrt{n}(\beta_n(\alpha) - \beta(\alpha))$ 服从 p 维的标准 Brown 桥分布, 其中 $\Omega_0 = \mathrm{E}(X_t X_t^{\mathrm{T}})$, F_ε 是 ε_t 的分布函数, 且 F_ε 有连续的密度函数 f_ε. 对于带有独立同分布误差 $\{\varepsilon_t\}$ 的非线性时间序列分位数回归模型, 在一些正则条件下, 文献 [25] 证明 $f_\varepsilon[F_\varepsilon^{-1}(\alpha)]\Omega^{1/2}\sqrt{n}(\beta_n(\alpha) - \beta(\alpha))$ 也服从 p 维的标准 Brown 桥分布, 其中 f_ε 是 ε_t 的密度函数, 且 $\Omega = \mathrm{E}\{g(X_t, \beta)g^{\mathrm{T}}(X_t, \beta)\}$. 对于任何固定的 α, $\sqrt{n}(\beta_n(\alpha) - \beta(\alpha))$ 渐近服从正态分布. 为了简化证明, 条件 (2) 是研究时间序列模型的常用假设, 详细讨论参见文献 [26]. 条件 (3) 对于经验过程 $R_n^1(u)$ 的渐近紧性是必要条件, 详细讨论见文献 [10,13].

定理 2.2 在零假设 H_0 下, 假设 2.1(3) 和 2.2 的条件成立, 则依分布有下面的结果:

$$R_n^1(u) \Rightarrow R_\infty(u) - G^{\mathrm{T}}(u)V \equiv R_\infty^1(u),$$

其中 R_∞ 是定理 2.2 中的 Gauss 过程. 此外, 定义函数 $G^{\mathrm{T}}(u) = (G_1(u), \ldots, G_p(u))$ 为

$$G_i(u) := G_i(u, \beta(\alpha)) = \mathrm{E}\{g_i(X_t, \beta(\alpha))p_{X_t}(0)I(\beta^{\mathrm{T}}(\alpha)X_t \leqslant u)\},$$

其中 V 是一个 $p+q$ 维零均值, 协方差阵为 $L(\beta(\alpha))$ 的正态向量, 则 R_∞ 和 $G^{\mathrm{T}}V$ 之间的协方差为

$$\mathrm{cov}(R_\infty(x), G^{\mathrm{T}}(y)V) = G^{\mathrm{T}}(y)\mathrm{E}\{I(\beta^{\mathrm{T}}(\alpha)X_t \leqslant x)\psi(\varepsilon_1)l(X_1, Y_1, \beta(\alpha))\}.$$

因为 R_∞^1 有复杂的协方差函数, 如果基于 $R_n^1(u)$ 构建 Kolmogorov-Smirnov 或者 Cramér-von Mises 检验统计量, 那么它不是渐近分布自由的统计量. 为了避免利用文献 [27] 提出的自助法来近似 $R_n^1(u)$ 的分布, 本文提出转换 $R_n^1(u)$ 为一个具有渐近分布自由的经验过程, 进而容易得到统计量的置信限.

3 $R_n^1(u)$ 的 Khmaladze 鞅转换

在实际情况中, 当参数需要估计时, 经验过程的结构变得复杂, 置信限的计算将变得困难. 对于 Markov 时间序列的一阶分位数自回归模型, 文献 [10] 提出了对残差经验过程作 Khmaladze 转换 [28], 转换后的结果恰为其 Doob-Meyer 分解的鞅部分, 而且得到的检验统计量是一个 Brown 运动. 因此, 当零假设 H_0 被识别时, 这个光滑且方向性的检验统计量可以用类似的鞅转换方法. 这时, Khmaladze 鞅转换方法将被推广到检验参数单指标分位数回归模型的研究中. 首先令

$$\phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \mathrm{Var}(\psi(Y_1 - \beta^{\mathrm{T}}(\alpha)X_1) \mid \beta^{\mathrm{T}}(\alpha)X_1 = u)G_0(du) = \int_{-\infty}^{x} \sigma^2(u)G_0(du),$$
$$\gamma_\psi(x) = p_{X_1=x}(0).$$

记 G 关于 ϕ 的 Radon-Nikodym 导数为 $\Lambda = \frac{\partial G}{\partial \phi}$. 然后, 定义 $(p+q)\times(p+q)$ 的矩阵为

$$A(x) = \int \gamma_\psi^{-2}(y)\Lambda(y)[\Lambda(y)]^{\mathrm{T}} I(y \geqslant x)\phi(dy) = \int \frac{\sigma^2(y)}{\gamma_\psi^2(y)}\Lambda(y)[\Lambda(y)]^{\mathrm{T}} I(y \geqslant x)G_0(dy).$$

假设 3.1 为了简化问题, 对于 $x \in \mathbb{R}^p$, 有下面的条件.

(1) 对于 $\sigma^2(x) = \mathrm{E}(\psi^2(\varepsilon_1) \mid X_1 = x)$, 假定 $\sigma^2(x) = \sigma^2$ 关于 x 几乎处处为一个正常数.

(2) 对于 $\gamma_\psi(x) = p_x(0)$, 假定 $\gamma_\psi(x) = \gamma_\psi$ 关于 x 几乎处处是一个正常数.

(3) 对于 $x_0 < \infty$, 假定 $A(x_0)$ 是非奇异矩阵.

实际上, $g(x, \beta_0) = m'(\beta_0^{\mathrm{T}} x)x$, 因而, 假设 3.1(1) 和 3.1(2) 成立, 则

$$A(x) = \sigma^{-2} \int m'_\alpha(y) r(y) r^{\mathrm{T}}(y) [m'_\alpha(y)]^{\mathrm{T}} I(y \geqslant x) G_0(dy),$$

其中 $r(y) = \mathrm{E}(X_1 \mid \beta^{\mathrm{T}}(\alpha) X_1 = y)$. 假设 3.1(3) 成立, 则 $A(y) - A(x_0)$ 的非负性表明 $A(y)$ 对于所有的 $y \leqslant x_0$ 均是非奇异矩阵. 令 $A^{-1}(y) = (A(y))^{-1}$, 定义

$$Tf(x) = f(x) - \int_{-\infty}^{x} r^{\mathrm{T}}(y) [m'_\alpha(y)]^{\mathrm{T}} A^{-1}(y) \left[\int m'_\alpha(z) r(z) I(z \geqslant y) f(dz) \right] G_0(dy). \tag{3.1}$$

定理 3.1 在零假设 H_0 下, 如果假设 2.2 和 3.1 成立, 则

$$\sup_{x \leqslant x_0} |TR_n^1(x) - TR_n(x)| = o_p(1) \tag{3.2}$$

和

$$TR_n^1(x) \Rightarrow R_\infty(x), \quad x \in D[-\infty, x_0]. \tag{3.3}$$

既然定理 3.1 中 T 是未知的, 用它的估计 T_n 替换 T, 可以得到下面的定理 3.2. 为了给出定理 3.2, 首先介绍下面的概念和假设条件. 令

$$F_n(x) = n^{-1} \sum_{t=1}^{n} I(\beta_n^{\mathrm{T}} X_t \leqslant x)$$

和

$$A_n(x) := \int m'_\alpha(y) r_n(y) r_n^{\mathrm{T}}(y) [m'_\alpha(y)]^{\mathrm{T}} I(y \geqslant x) F_n(dy),$$

则可得到 T 的估计为

$$T_n f(x) = f(x) - \int_{-\infty}^{x} r_n^{\mathrm{T}}(y) [m'_\alpha(y)]^{\mathrm{T}} A_n^{-1}(y) \left[\int m'_\alpha(z) r_n(z) I(z \geqslant y) f(dz) \right] F_n(dy), \quad x \leqslant x_0.$$

假设 3.2 对于 $p \times p$ 的矩阵 $h(X_1, \beta(\alpha))$, 存在非负且关于 x 可测的函数 $M_1(x)$, 满足

(1) 对 $j = 0, 1$, 有 $\mathrm{E}[\|h(X_1, \beta(\alpha))\|^j M_1(\beta^{\mathrm{T}}(\alpha) X_1)] < \infty$ 和 $\mathrm{E}[\|h(X_1, \beta(\alpha))\| \|g(X_1, \beta(\alpha))\|^j] < \infty$.

(2) 对于任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $\varpi > 0$, 使得 $\|\beta - \beta_0\| < \varpi$ 成立, 则

$$\|g(X_1, \beta) - g(X_1, \beta(\alpha)) - h(X_1, \beta(\alpha))(\beta - \beta(\alpha))\| \leqslant \epsilon M_1(\beta^{\mathrm{T}}(\alpha) X_1) \|\beta - \beta(\alpha)\|.$$

定理 3.2 在零假设 H_0 下, 如果假设 2.2、3.1 和 3.2 成立, 且 r_n 是相合估计, 则有

$$\sup_{x \leqslant x_0} |T_n R_n^1(x) - T_n R_n(x)| = o_p(1) \tag{3.4}$$

和

$$\sigma_n^{-1} T_n R_n^1(x) \Rightarrow B \circ G_0, \quad \forall x \in D[-\infty, x_0]. \tag{3.5}$$

进一步, Cramér-von Mises 检验统计量有下面的结果:

$$\frac{1}{\sigma_n^2 F_n^2(x)}\int_{-\infty}^{x}[T_nR_n^1]^2dF_n \Rightarrow \int_0^1 B^2(u)du, \quad \forall\, x\in D[-\infty,x_0],$$

其中

$$\sigma_n^2 = n^{-1}\sum_{t=1}^{n}\psi^2(Y_t - m(\beta_n^{\mathrm{T}}(\alpha)X_t)).$$

定理 2.1 和 2.2 分别证明了 $R_n(u)$ 和 $R_n^1(u)$ 在空间 $D[-\infty,\infty]$ 上的弱收敛性. 当变换 T 依赖于未知的 $\beta(\alpha)$ 和 G_0 时, 用 T_n 来估计变换 T, 则定理 3.2 证明了 $\sigma_n^{-1}T_nR_n^1(x)$ 依分布收敛于过程 $B\circ G_0$. 由假设 3.1(3) 知, 当条件 $x\leqslant x_0$ 时, $A(x)$ 才是正定矩阵. 因此, 从定理 3.1 和 3.2 可知, 这种弱收敛结果只能被证明在空间 $D[-\infty,x_0]$ 上成立, 其中 $x_0<\infty$. 通常这会导致变换后的检验统计量在极端的右尾中不稳定.

4 功效研究

在本节中, 当局部备择假设以 $n^{-1/2}$ 速度收敛于零假设 H_0 时, 研究 $R_n^1(u)$ 在一系列局部备择假设下的渐近分布性质. 对于一些 $\beta(\alpha)\in\mathbb{R}^p$ 且 $\mathrm{E}|s_\alpha(\beta^{\mathrm{T}}(\alpha)X_t)|<\infty$, 考虑如下的局部备择假设:

$$H_{1n}: \mathrm{E}[\psi(Y_t - m(\beta^{\mathrm{T}}(\alpha)X_t))\mid X_t] = n^{-1/2}s_\alpha(\beta^{\mathrm{T}}(\alpha)X_t). \tag{4.1}$$

在局部备择假设 H_{1n} 下, 为了得到定理 4.1, 给出下面的假设条件, 并且类似的假设条件出现在文献 [25] 所研究的非线性时间序列分位数模型.

假设 4.1 在局部备择假设 (4.1) 下, $\beta(\alpha)$ 的估计 $\beta_n(\alpha)$ 满足:

$$\sqrt{n}(\beta_n(\alpha)-\beta(\alpha)) = \eta + \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{n} l(X_t,Y_t,\beta(\alpha)) + o_p(1),$$

其中 η 是常数向量.

定理 4.1 在局部备择假设 (4.1) 和假设 4.1 下, 依分布有下面结果:

$$R_n^1(x) \Rightarrow R_\infty(x) - G^{\mathrm{T}}(V+\eta) + \mathrm{E}[s_\alpha(\beta^{\mathrm{T}}(\alpha)X_t)I(\beta^{\mathrm{T}}(\alpha)X_t\leqslant x)],$$

其中 G 和 V 见定理 2.2 中定义.

5 模拟研究与实际数据分析

本节将通过两个数值模拟例子和一个实际数据分析例子对本文所提方法的有效性和理论结果进行验证. 在数值模拟实验中, 将重复 1,000 次试验计算检验统计量的功效, 显著性水平取 $\mathfrak{a}=1\%,5\%,10\%$.

5.1 两种检验统计量和原始自助法

本小节将与已有的两种 Cramér-von Mises 检验方法进行比较: (1) 基于文献 [10] 使用的示性族函数经验过程 $I(X_t\leqslant x)$, 检验统计量定义如下:

$$CvM_{KS} = \int [V_{n,\psi}^1]^2 dF_n' = \frac{1}{(n-p)^2}\sum_{i=p+1}^{n}\Big[\sum_{j=p+1}^{n}\psi(\varepsilon_{n,j})I(X_j\leqslant X_i)\Big]^2, \tag{5.1}$$

其中 F_n' 是 $\{X_i, 1 \leqslant i \leqslant n\}$ 的经验分布函数; (2) 基于文献 [13] 提出的指数族函数经验过程 $\exp(\mathrm{i}x'X_t)$, 其中选择多元正态随机向量的累积分布函数为积分测度, 统计量定义如下:

$$CvM_{EV} = \int [S_n(x)]^2 d\Phi(x) = \frac{1}{(n-p)} \sum_{i=p+1}^{n} \sum_{j=p+1}^{n} \psi(\varepsilon_{n,i})\psi(\varepsilon_{n,j}) \exp\left(-\frac{1}{2}|X_i - X_j|^2\right), \tag{5.2}$$

其中

$$S_n(x) = n^{-1/2} \sum_{t=1}^{n} \psi(\varepsilon_{n,t}) \exp(\mathrm{i}x^{\mathrm{T}} X_t).$$

在零假设 H_0 下, 由于 CvM_{KS} 和 CvM_{EV} 都不是渐近分布自由的统计量, 为了计算在 $\mathfrak{a} = 1\%, 5\%, 10\%$ 的置信限, 将利用下面的固定设计原始自助法 (wild-bootstrap) 来进行近似检验统计量 CvM_{KS} 和 CvM_{EV} 在零假设 H_0 下的渐近分布, 其中自助样本为 $B_s = 300$. 对于模型 (1.2), 下面给出原始自助法的具体步骤.

步骤 1 利用模型 (1.2) 拟合数据 $\{(Y_t, X_t), t = 1, \ldots, n\}$, 得到参数向量 $\beta(\alpha)$ 的估计 $\hat{\beta}_n(\alpha)$, 并计算残差 $\varepsilon_{n,t}$, 其中 $t = 1, \ldots, n$.

步骤 2 通过 $\varepsilon_{n,t}^* = \omega_t|\varepsilon_{n,t}|$ 产生新的残差, 其中 $\{\omega_t\}$ 独立地来自于 Bernoulli 分布, 满足 $\mathbb{P}(\omega_t = 2(1-\alpha)) = 1-\alpha$ 和 $\mathbb{P}(\omega_t = -2\alpha) = \alpha$, 且 $\{\omega_t\}$和 $\{Y_t\}$ 独立.

步骤 3 给定 $\hat{\beta}_n(\alpha)$ 和 $\varepsilon_{n,t}^*$, 产生响应变量的 bootstrap 样本 Y_t^* 如下:

$$Y_t^* = m(\beta_n^{\mathrm{T}}(\alpha)X_t) + \varepsilon_{n,t}^*, \quad 1 \leqslant t \leqslant n.$$

步骤 4 基于自助样本 $\{(Y_t^*, X_t), t = 1, \ldots, n\}$, 重新拟合模型 (1.2), 得到自助估计 $\beta_n^*(\alpha)$, 进而计算原始自助残差如下:

$$\varepsilon_t^*(\beta_n^*) = Y_t^* - m(\beta_n^{*T}(\alpha)X_t), \quad 1 \leqslant t \leqslant n.$$

步骤 5 基于步骤 4 得到的原始自助残差, 以及 (5.1) 和 (5.2), 可以计算自助检验统计量 CvM_{KS}^* 和 CvM_{EV}^* 的值.

步骤 6 重复 B_s 次步骤 2–5, 可得到 B_s 个检验统计量的估计样本: CvM_{KS}^{*b} 和 CvM_{EV}^{*b}, 其中 $b = 1, \ldots, B_s$. 这时可以用所得的 B_s 个自助检验统计量的经验分布函数来逼近检验统计量 CvM_{KS} 和 CvM_{EV} 的渐近分布.

注 5.1 在中位数回归中, 由于损失函数是对称的, 步骤 2 中可以用残差来代替绝对值残差.

5.2 模拟研究

本节用 CvM_{XLL} 表示本文所提出的检验统计量, 并与已有的检验统计量 CvM_{KS} 和 CvM_{EV} 进行比较. 在下面的模拟例子中, 模型误差 ε_t 来自于标准正态分布 $N(0,1)$, 样本量取 $n = 100$, 模拟结果分别在表 1–3 中给出.

例 5.1 零假设模型服从下面的 AR(3) 分位数自回归模型:

$$Y_t = 0.35Y_{t-1} + 0.2Y_{t-2} - 0.15Y_{t-3} + \varepsilon_t.$$

令 $\beta_0 = (0.35, 0.2, -0.15)^{\mathrm{T}}$ 和 $X_t = (Y_{t-1}, Y_{t-2}, Y_{t-3})^{\mathrm{T}}$. 为了评价检验统计量的功效, 考虑下面的备择假设:

$$H_{11}: Y_t = \beta_0^{\mathrm{T}} X_t + \theta \exp\{-(\beta_0^{\mathrm{T}} X_t)^2\} + \varepsilon_t,$$

$$H_{12}: X_t = \beta_0^{\mathrm{T}} X_t + \theta \cos\{-0.5\pi\beta_0^{\mathrm{T}} X_t\} + \varepsilon_t.$$

在 $\alpha = 0.25$ 和 $\alpha = 0.75$ 情形下, 表 1 和 2 分别计算了 H_0 vs. H_{11} 和 H_{12} 的经验检验水平和功效. 从表 1 和 2 的结果可以得到下面的结果:

(1) $\theta = 0$ 表示零假设 H_0 下 AR(3) 模型, 对应低分位数和高分位数的情形, 所有的检验统计量都表现出比较不错的经验检验水平;

(2) 对于检验统计量的功效来说, 随着 θ 值的增加, 所有的检验统计量的功效都在提高. 但是可以看到检验统计量 CvM_{XLL} 的检验功效几乎最好, 在低分位数 $\alpha = 0.25$ 时, 检验统计量 CvM_{EV} 表现最差; 在高分位数 $\alpha = 0.75$ 时, 检验统计量 CvM_{KS} 表现最差.

表 1 在分位数水平 $\alpha = 0.25$ 时零假设 H_0 分别对应备择假设 H_{11} 和 H_{12} 的检验统计量的经验检验水平和功效

$\mathfrak{a}$		1%			5%			10%		
	θ	CvM_{XLL}	CvM_{KS}	CvM_{EV}	CvM_{XLL}	CvM_{KS}	CvM_{EV}	CvM_{XLL}	CvM_{KS}	CvM_{EV}
H_{11}	0	0.009	0.009	0.007	0.039	0.031	0.041	0.075	0.074	0.088
	0.2	0.011	0.011	0.013	0.068	0.066	0.057	0.118	0.115	0.104
	0.4	0.036	0.025	0.028	0.123	0.106	0.085	0.223	0.212	0.167
	0.6	0.098	0.073	0.079	0.259	0.220	0.206	0.387	0.352	0.302
	0.8	0.119	0.071	0.072	0.305	0.284	0.210	0.473	0.423	0.316
	1.0	0.232	0.138	0.174	0.452	0.398	0.329	0.593	0.550	0.463
H_{12}	0.2	0.010	0.010	0.009	0.057	0.063	0.048	0.115	0.103	0.114
	0.4	0.044	0.027	0.028	0.158	0.126	0.117	0.273	0.250	0.190
	0.6	0.099	0.056	0.072	0.266	0.224	0.198	0.402	0.391	0.311
	0.8	0.150	0.103	0.105	0.397	0.324	0.273	0.550	0.485	0.388
	1.0	0.219	0.111	0.162	0.487	0.401	0.354	0.632	0.582	0.478

表 2 在分位数水平 $\alpha = 0.75$ 时零假设 H_0 分别对应备择假设 H_{11} 和 H_{12} 的检验统计量的经验检验水平和功效

$\mathfrak{a}$		1%			5%			10%		
	θ	CvM_{XLL}	CvM_{KS}	CvM_{EV}	CvM_{XLL}	CvM_{KS}	CvM_{EV}	CvM_{XLL}	CvM_{KS}	CvM_{EV}
H_{11}	0	0.013	0.008	0.011	0.046	0.035	0.039	0.091	0.080	0.080
	0.2	0.037	0.035	0.069	0.106	0.090	0.157	0.186	0.164	0.245
	0.4	0.344	0.253	0.387	0.512	0.438	0.553	0.621	0.516	0.654
	0.6	0.668	0.527	0.679	0.870	0.758	0.852	0.919	0.846	0.910
	0.8	0.982	0.971	0.984	0.994	0.988	0.995	0.996	0.995	0.997
	1.0	0.998	0.995	0.998	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
H_{12}	0.2	0.024	0.021	0.050	0.081	0.084	0.129	0.141	0.147	0.215
	0.4	0.290	0.195	0.347	0.486	0.363	0.548	0.588	0.470	0.639
	0.6	0.746	0.652	0.795	0.865	0.790	0.898	0.914	0.847	0.927
	0.8	0.966	0.934	0.969	0.986	0.970	0.985	0.992	0.982	0.990
	1.0	1.000	0.998	0.999	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

表 3　非线性分位数回归模型 (5.3) 和 (5.4) 下检验统计量的功效

模型	$\mathfrak{a}$		1%			5%			10%		
	α	p	CvM_{XLL}	CvM_{KS}	CvM_{EV}	CvM_{XLL}	CvM_{KS}	CvM_{EV}	CvM_{XLL}	CvM_{KS}	CvM_{EV}
(5.1)	0.25	1	0.822	0.830	0.729	0.945	0.936	0.909	0.977	0.966	0.953
		2	0.766	0.736	0.619	0.903	0.872	0.825	0.941	0.927	0.894
		3	0.757	0.631	0.590	0.888	0.816	0.806	0.935	0.895	0.878
		5	0.699	0.406	0.574	0.836	0.644	0.771	0.887	0.751	0.869
	0.50	1	0.360	0.377	0.220	0.692	0.697	0.563	0.824	0.829	0.767
		2	0.241	0.185	0.112	0.533	0.464	0.302	0.699	0.635	0.473
		3	0.213	0.051	0.096	0.511	0.181	0.298	0.692	0.271	0.456
		5	0.185	0.012	0.049	0.426	0.055	0.161	0.588	0.108	0.277
(5.2)	0.50	1	0.387	0.445	0.260	0.678	0.706	0.538	0.811	0.826	0.685
		2	0.600	0.451	0.528	0.798	0.668	0.775	0.878	0.778	0.871
		3	0.417	0.209	0.234	0.671	0.446	0.479	0.799	0.582	0.650
		5	0.298	0.105	0.062	0.527	0.244	0.193	0.689	0.354	0.323
	0.75	1	0.808	0.772	0.717	0.913	0.886	0.873	0.949	0.925	0.929
		2	0.831	0.480	0.798	0.919	0.716	0.932	0.956	0.832	0.970
		3	0.828	0.430	0.748	0.924	0.658	0.907	0.956	0.768	0.945
		5	0.757	0.207	0.677	0.877	0.378	0.885	0.925	0.486	0.933

例 5.2　考虑下面的模型, 并且数据从下面的模型中产生:

$$Y_t = \begin{cases} \beta_{01} + \beta_{11} Y_{t-1} + \varepsilon_t, & Y_{t-1} \leqslant \gamma, \\ \beta_{02} + \beta_{12} Y_{t-1} + \varepsilon_t, & Y_{t-1} > \gamma, \end{cases} \tag{5.3}$$

$$Y_t = \begin{cases} \beta_{01} + (\beta_{11} - \delta) Y_{t-1} + \beta_{21} Y_{t-2} + \varepsilon_t, & Y_{t-1} \leqslant \gamma, \\ \beta_{02} + (\beta_{12} + \delta) Y_{t-1} + \beta_{22} Y_{t-2} + \varepsilon_t, & Y_{t-1} > \gamma, \end{cases} \tag{5.4}$$

其中 $\gamma = 0$, $\delta = 0.9$, $\beta_{01} = \beta_{02} = 0$, $\beta_{11} = -\beta_{12} = \beta_{21} = -\beta_{22} = 0.5$, $\varepsilon_t \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} t(6)$. 例 5.2 的零假设模型是线性 QAR 模型, 本例主要检验维数 p 的大小是否会影响检验统计量的功效, 取维数 $p = 1, 2, 3, 5$, 模拟结果见表 3.

从表 3 中的模拟结果可以看到, 当 $p = 1, 2$ 时, 三种检验统计量的经验功效都有很好表现, 但是随着维数 p 的增大, 三种检验方法的功效都降低. 当维数 p 增加时, 如 $p = 3, 5$, 检验统计量 CvM_{KS} 和 CvM_{EV} 的功效有类似的结果, 但是它们的经验功效明显比 CvM_{XLL} 表现要差, 尤其是 $\alpha = 0.5$ 且 $p = 5$ 的情形. 这些结果表明, 当维数 p 增大时, 本文所提的降维检验方法在检验参数单指数分位数自回归模型时比已有的检验方法具有明显的优势.

5.3　实际数据分析

失业率用于衡量一个国家的经济是非常重要的指标, 美国失业率常常由美国劳工统计局的月度、季度和年度调查来确定. 许多关于失业的研究表明, 失业率对扩张性或紧缩性冲击的反应可能会不对称. 对不同类型冲击的不对称响应在经济政策中具有重要意义. 文献 [3] 运用分位数自回归模型对美

国的失业率进行了季度和年度 (季节调整) 系列的研究, 时间从 1948 年的第一季度开始, 到 2003 年的最后一个季度结束, 研究者发现这个数据是非对称动态的时间序列. 本节将利用所提出的检验方法来检验失业率是否显示不对称动态. 数据是季度 (季节性调整) 的失业率, 从 1970 年的第一季度开始, 到 2014 年的最后一个季度截止, 共有 180 个观测数据. 这个数据集包括了美国年龄在 15 岁到 64 岁之间的被记录的数据, 这个数据的时间序列描述见图 1.

取 α 为 0.25、0.5 和 0.75, 对 $p=1,2,3,5,7$ 的 5 种情形分别对这些数据进行拟合检验, 表 4 报告

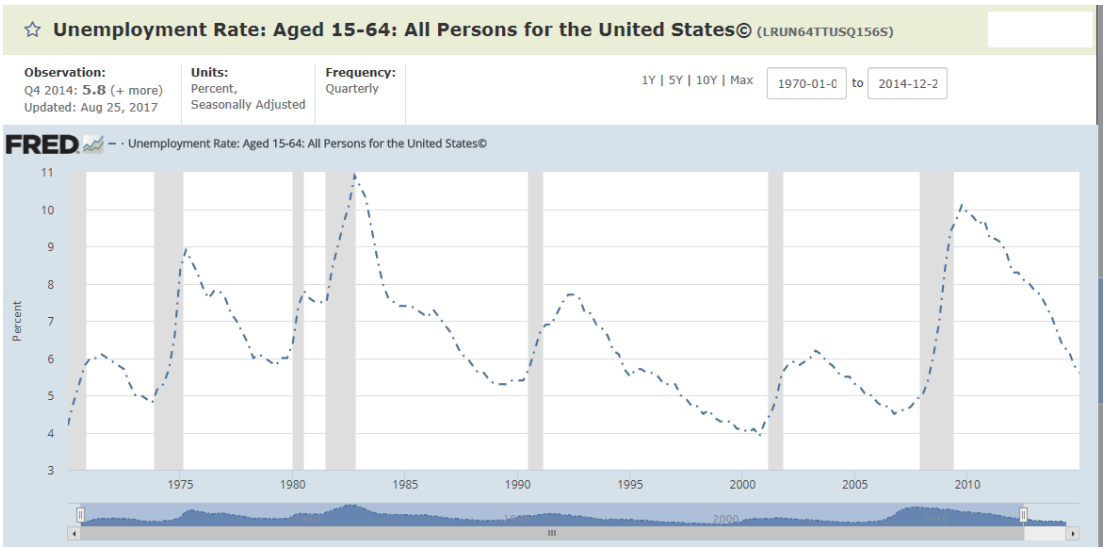

图 1　美国季节性失业率从 1970 年的第一季度到 2014 年的最后一个季度的时间序列图

表 4　美国失业率数据的非对称动态分析

α		1%			5%			10%		
	p	CvM_{XLL}	CvM_{KS}	CvM_{EV}	CvM_{XLL}	CvM_{KS}	CvM_{EV}	CvM_{XLL}	CvM_{KS}	CvM_{EV}
$\alpha=0.25$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	3	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	5	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	7	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\alpha=0.50$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	7	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\alpha=0.75$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	3	1	1	0	1	1	1	1	1	1
	5	1	1	0	1	1	1	1	1	1
	7	1	0	0	1	1	0	1	1	0

了所得计算结果, 其中 “1” 表示非对称动态, 而 “0” 表示对称性动态. 从表 4 中的结果可以发现, (1) 对 $\alpha = 0.25$, 所有检验结果都拒绝 QAR 模型; (2) 对 $\alpha = 0.5$, 所有的检验结果都拒绝 QAR(1) 模型, 但都接受高阶分位数 QAR 模型, 即 $p = 2, 3, 5, 7$, 表明高阶分位数 QAR 模型比 QAR(1) 模型能够更好地拟合实际数据; (3) 对 $\alpha = 0.75$, 所有的检验结果都接受 QAR(1) 模型, 似乎 QAR(1) 模型能够更好地拟合该实际数据; (4) 对于 $p = 7$ 且 $\mathfrak{a} = 0.99$, CvM_{XLL} 检验结果拒绝了 QAR 模型, 而 CvM_{KS} 和 CvM_{EV} 检验结果由于遇到 “维数灾难” 问题, 反而接受了 QAR 模型. 总之, 通过分析美国失业率数据, 明显发现数据具有清晰的不对称动态特点, 尤其当 $\alpha = 0.25$ 时.

致谢 衷心感谢编委和两位审稿人提出的宝贵建议, 他们的意见和建议使得本文有了进一步的提高.

参考文献

1 Koenker R, Bassett G Jr. Regression quantiles. Econometrica, 1978, 46: 33–50
2 Cai Z. Regression quantiles for time series. Econometric Theory, 2002, 18: 169–192
3 Koenker R, Xiao Z J. Quantile autoregression. J Amer Statist Assoc, 2006, 101: 980–1006
4 Li G D, Li Y, Tsai C L. Quantile correlations and quantile autoregressive modeling. J Amer Statist Assoc, 2015, 110: 246–261
5 Wu T Z, Yu K, Yu Y. Single-index quantile regression. J Multivariate Anal, 2010, 101: 1607–1621
6 Kong E, Xia Y C. A single-index quantile regression model and its estimation. Econometric Theory, 2012, 28: 730–768
7 Charlier I, Paindaveine D, Saracco J. Conditional quantile estimation through optimal quantization. J Statist Plann Inference, 2015, 156: 14–30
8 Ma S, He X. Inference for single-index quantile regression models with profile optimization. Ann Statist, 2016, 44: 1234–1268
9 Zheng J X. A consistent nonparametric test of parametric regression models under conditional quantile restrictions. Econometric Theory, 1998, 14: 123–138
10 Koul H L, Stute W. Nonparametric model checks for time series. Ann Statist, 1999, 27: 204–236
11 Horowitz J L, Spokoiny V G. An adaptive, rate-optimal test of linearity for median regression models. J Amer Statist Assoc, 2002, 97: 822–835
12 He X M, Zhu L X. A lack-of-fit test for quantile regression. J Amer Statist Assoc, 2003, 98: 1013–1022
13 Escanciano J C, Velasco C. Specification tests of parametric dynamic conditional quantiles. J Econometrics, 2010, 159: 209–221
14 Galvao A F, Kato K, Montes-Rojas G, et al. Testing linearity against threshold effects: Uniform inference in quantile regression. Ann Inst Statist Math, 2014, 66: 413–439
15 Koenker R, Xiao Z J. Inference on the quantile regression process. Econometrica, 2002, 70: 1583–1612
16 McCullagh P, Nelder J A. Generalized Linear Models, 2nd ed. London: Chapman and Hall, 1989
17 Fahrmeir L, Tutz G. Multivariate Statistical Modeling Based on Generalized Linear Models. New York: Springer-Verlag, 1994
18 Tsiatis A A. A note on a goodness-of-fit test for the logistic regression model. Biometrika, 1980, 67: 250–251
19 Stute W, Zhu L X. Model checks for generalized linear models. Scand J Statist, 2002, 29: 535–545
20 Li, G R, Peng H, Dong K, et al. Simultaneous confidence bands and hypothesis testing for single-index models. Statist Sinica, 2014, 24: 937–955
21 Whang Y J. Smoothed empirical likelihood methods for quantile regression models. Econometric Theory, 2005, 22: 173–205
22 Bierens H J, Ginther D K. Integrated conditional moment testing of quantile regression models. Empir Econom, 2001, 26: 307–324
23 Stute W. Nonparametric model checks for regression. Ann Statist, 1997, 25: 613–641
24 Xiao Z J. Time series quantile regressions. Handbook of Statist, 2012, 30: 213–257
25 Mukherjee K. Asymptotics of quantiles and rank scores in nonlinear time series. J Time Ser Anal, 1999, 20: 173–192
26 Xia Q, He K, Niu C. A model-adaptive test for parametric single-index time series models. J Time Ser Anal, 2017, 38: 981–999
27 Stute W, Presedo-Quindimil M, González-Manteiga W, et al. Modelchecks of higher order time series. Statist Probab Lett, 2006, 76: 1385–1396
28 Khmaladze E V. A martingale approach in the theory of goodness-of-fit tests. Theory Probab Appl, 1981, 26: 240–257

29 Hall P, Heyde C C. Martingale Limit Theory and Its Application. New York: Academic Press, 1980
30 Billingsley P. Convergence of Probability Measures, 2nd ed. New York: John Wiley & Sons, 1999

附录 A

引理 A.1 当假设 2.1 成立时, 对于每一个 $s \in \mathbb{R}^p$, 记 $\varepsilon_t = Y_t - \beta^{\mathrm{T}}(\alpha)X_t$,

$$R_n(u,s) := n^{-1/2}\sum_{t=1}^{n}\psi(\varepsilon_t)I((\beta(\alpha)+n^{-1/2}s)^{\mathrm{T}}X_t \leqslant u),$$

则在空间 $D[-\infty,+\infty]$ 中, 依分布有

$$R_n(\cdot,s) \Rightarrow B\circ\tau^2,$$

其中 B 是一个标准的 Brown 运动.

证明 由假设 2.1(1), 有 $\max_{1\leqslant t\leqslant n} n^{-1/2}\|X_t\| = o_p(1)$. 由假设 2.1(2), 对任意的 $\epsilon > 0$, 有

$$\begin{aligned}\tau^2(u-\epsilon) &\leqslant n^{-1}\sum_{t=1}^{n}\mathrm{E}[\psi(\varepsilon_t)^2 \mid \mathcal{F}_{t-1}]I((\beta(\alpha)+n^{-1/2}s)^{\mathrm{T}}X_t \leqslant u)\\ &\leqslant \tau^2(u+\epsilon).\end{aligned}$$

也就是说, 对于每一个 $s \in \mathbb{R}^p$, 由假设 2.1(3) 可知 τ^2 的连续性, 所以, 二次变量过程满足

$$n^{-1}\sum_{t=1}^{n}\mathrm{E}[\psi(\varepsilon_t)^2 \mid \mathcal{F}_{t-1}]I((\beta(\alpha)+n^{-1/2}s)^{\mathrm{T}}X_t \leqslant u) = \tau^2(u)+o_p(1). \tag{A.1}$$

利用文献 [29, 推论 3.1] 的鞅的中心极限定理, 如果证明 $R_n(\cdot,s)$ 的紧性, 那么其收敛序列的极限相同, 则 $R_n(\cdot,s)$ 服从鞅的中心极限定理. 进而由 (A.1) 决定 $R_n(\cdot,s)$ 的极限形式为 $B\circ\tau^2$.

类似于文献 [10] 关于紧性的证明, 对于 $-\infty < t_1 < t_2 < t_3 < \infty$, 有

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}\{[R_n(t_3,s)-R_n(t_2,s)]^2[R_n(t_2,s)-R_n(t_1,s)]^2\}\\ &\quad = n^{-2}\sum_{i,j<t}\mathrm{E}\{V_iV_jU_t^2\} + n^{-2}\sum_{i,j<t}\mathrm{E}\{U_iU_jV_t^2\},\end{aligned} \tag{A.2}$$

其中

$$U_t = \psi(\varepsilon_t)I(t_2 < (\beta(\alpha)+n^{-1/2}s)^{\mathrm{T}}X_t \leqslant t_3) \quad 和 \quad V_t = \psi(\varepsilon_t)I(t_1 < (\beta(\alpha)+n^{-1/2}s)^{\mathrm{T}}X_t \leqslant t_2).$$

下面只需要证明 (A.2) 中第一个和是有界的, 第二个可类似地进行证明. 下面证明中出现的 M 假定是非负常数, 不依赖于 n 和 t. 对于 $2 \leqslant t \leqslant n$, 有

$$\begin{aligned}\sum_{i,j<t}\mathrm{E}\{V_iV_jU_t^2\} &= \mathrm{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{t-1}V_i\right)^2U_t^2\right] = \mathrm{E}\left\{\left(\sum_{i=1}^{t-1}V_i\right)^2\mathrm{E}[U_t^2 \mid \mathcal{F}_{t-1}]\right\}\\ &\leqslant 2^p\mathrm{E}\left\{\left(\sum_{i=1}^{t-1-p}V_i\right)^2\mathrm{E}[U_t^2 \mid \mathcal{F}_{t-1}]\right\} + 2^p\sum_{i=t-p}^{t-1}\mathrm{E}\{V_i^2\mathrm{E}[U_t^2 \mid \mathcal{F}_{t-1}]\}\\ &= 2^p\mathrm{E}\left\{\mathrm{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{t-1-p}V_i\right)^2\mathrm{E}(U_t^2 \mid \mathcal{F}_{t-1}) \mid \mathcal{F}_{t-1-p}\right]\right\} + 2^p\sum_{i=t-p}^{t-1}\mathrm{E}\{V_i^2\mathrm{E}[U_t^2 \mid \mathcal{F}_{t-1}]\}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2^p \mathrm{E}\left\{\left(\sum_{i=1}^{t-1-p} V_i\right)^2 \mathrm{E}[U_t^2 \mid \mathcal{F}_{t-1-p}]\right\} + 2^p \sum_{i=t-p}^{t-1} \mathrm{E}\{V_i^2 \mathrm{E}[U_t^2 \mid \mathcal{F}_{t-1}]\} \\
&=: 2^p (K_1 + K_2),
\end{aligned}
$$

其中 $K_1 = \mathrm{E}\{(\sum_{i=1}^{t-1-p} V_i)^2 \mathrm{E}[U_t^2 \mid \mathcal{F}_{t-1-p}]\}$ 和 $K_2 = \sum_{i=t-p}^{t-1} \mathrm{E}\{V_i^2 \mathrm{E}[U_t^2 \mid \mathcal{F}_{t-1}]\}$. 由于 $\mathcal{F}_{t-p-1} \subset \mathcal{F}_{t-1}$, 则上面第二个等式可由条件期望的光滑性得到. 对于 K_1, 有

$$
\begin{aligned}
K_1 &\leqslant M \int\cdots\int_{t_2 \leqslant (\beta(\alpha)+n^{-1/2}s)^{\mathrm{T}} x \leqslant t_3} \mathrm{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{t-1-p} V_i\right)^2 f_{t-1-p}(x - \varsigma(X_{t-p}))\right] dx \\
&\leqslant M \int\cdots\int_{t_2 \leqslant (\beta(\alpha)+n^{-1/2}s)^{\mathrm{T}} x \leqslant t_3} \left[\mathrm{E}\left|\sum_{i=1}^{t-1-p} V_i\right|^{2(1+\delta)/\delta}\right]^{\delta/(1+\delta)} [\mathrm{E} f_{t-1-p}^{1+\delta}(x - \varsigma(X_{t-p}))]^{1/(1+\delta)} dx \\
&\leqslant M(t-1-p)[G_{n0}(t_2) - G_{n0}(t_1)]^{(1+\delta)/\delta} [\Gamma_n(t_3) - \Gamma_n(t_2)],
\end{aligned} \tag{A.3}
$$

其中 δ 与假设 2.1(3) 中一致, G_{n0} 是 $(\beta(\alpha) + n^{-1/2}s)^{\mathrm{T}} X_t$ 的分布函数, 且

$$
\Gamma_n(u) = \int\cdots\int_{(\beta(\alpha)+n^{-1/2}s)^{\mathrm{T}} x \leqslant u} [\mathrm{E} f_{t-1-p}^{1+\delta}(x - \varsigma(X_{t-p}))]^{1/(1+\delta)} dx.
$$

显然, $\Gamma_n(u)$ 是单调、连续且有界, 上述不等式可以由 Hölder 不等式和 $\psi(\cdot)$ 的有界性得到. 由假设 2.1 可知, G_{n0} 和 Γ_n 分别收敛到 G_0 和 Γ, 其中 Γ 对应 $s = 0$.

现在考虑 K_2, 对于 $t - p \leqslant i \leqslant t - 1$, 可得

$$
\begin{aligned}
K_2 &\leqslant pM \mathrm{E}[V_i^2 I(t_2 < (\beta(\alpha) + n^{-1/2}s)^{\mathrm{T}} X_t \leqslant t_3)] \\
&= pM \mathrm{E}\{V_i^2 \mathrm{E}[I(t_2 < (\beta(\alpha) + n^{-1/2}s)^{\mathrm{T}} X_t \leqslant t_3) \mid \mathcal{F}_i]\} \\
&\leqslant pM \int\cdots\int_{\substack{t_2 \leqslant (\beta(\alpha)+n^{-1/2}s)^{\mathrm{T}} x \leqslant t_3 \\ x = (Y_{t-p}, \ldots, Y_i, y_{i+1}, \ldots, y_{t-1})^{\mathrm{T}}}} [\mathrm{E} V_i^{2(1+\delta)/\delta}]^{\delta/(1+\delta)} [\mathrm{E} f_i^{1+\delta}(x - \varsigma(X_{i-p}))]^{1/(1+\delta)} dy_{i+1} \cdots dy_{t-1} \\
&\leqslant pM[G_{n0}(t_2) - G_{n0}(t_1)]^{(1+\delta)/\delta} [\Gamma_n^*(t_3) - \Gamma_n^*(t_2)],
\end{aligned} \tag{A.4}
$$

其中

$$
\Gamma_n^*(u) = \int\cdots\int_{\substack{t_2 \leqslant (\beta(\alpha)+n^{-1/2}s)^{\mathrm{T}} x \leqslant t_3 \\ x = (Y_{t-p}, \ldots, Y_i, y_{i+1}, \ldots, y_{t-1})^{\mathrm{T}}}} [\mathrm{E} f_i^{1+\delta}(x - \varsigma(X_{i-p}))]^{1/(1+\delta)} dy_{i+1} \cdots dy_{t-1}.
$$

结合 (A.3) 和 (A.4), 有

$$
\begin{aligned}
n^{-2} \sum_{i,j<t} \mathrm{E}\{V_i V_j U_t^2\} \leqslant{}& M[G_{n0}(t_2) - G_{n0}(t_1)]^{\delta/(1+\delta)} [\Gamma_n(t_3) - \Gamma_n(t_2)] \\
&+ M[G_{n0}(t_2) - G_{n0}(t_1)]^{(1+\delta)/\delta} [\Gamma_n^*(t_3) - \Gamma_n^*(t_2)].
\end{aligned}
$$

对于 (A.2) 中的第二个和, 使用相同的证明方法, 可以得到类似的上界. 因此, 由文献 [30, 定理 15.6] 可知, (A.2) 中的和满足紧的 Chentsov 准则, 从而完成了引理 A.1 的证明. □

定理 2.1 的证明 由引理 A.1, 令 $s = 0$, 然后 $R_n(u) = R_n(u, 0)$. 因而, 定理 2.1 得证. □

引理 A.2 当假设 2.1 成立时, 对于所有的 $s \in \mathbb{R}^p$, 有

$$\sup_u |R_n(u,s) - R_n(u)| \xrightarrow{P} 0,$$

其中 "$\xrightarrow{P}$" 表示依概率收敛.

证明 固定 u, 显然, $R_n(u,s) - R_n(u)$ 的一阶矩等于 0. 然后有

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}(R_n(u,s) - R_n(u))^2\\&\quad = n^{-1}\sum_{t=1}^n \mathrm{E}[\psi(\varepsilon_t)^2 \mid \mathcal{F}_{t-1}][I((\beta(\alpha) + n^{-1/2}s)^{\mathrm{T}}X_t \leqslant u) - I(\beta^{\mathrm{T}}(\alpha)X_t \leqslant u)]^2.\end{aligned}$$

令 $x_{nt} \equiv \max_{1\leqslant t\leqslant n}[n^{-1/2}(s^{\mathrm{T}}X_t)]$, 由假设 2.1(1), 有 $x_{nt} = o_p(1)$. 因而, 依概率可得 $\max_{1\leqslant t\leqslant n}|x_{nt}| \leqslant \delta_n$, 其中 $\delta_n \to 0$. 因此,

$$\mathrm{E}(R_n(u,s) - R_n(u))^2 \leqslant \max\{\tau^2(u+\delta_n) - \tau^2(u), \tau^2(u) - \tau^2(u-\delta_n)\} \to 0.$$

由引理 A.1 可知, $R_n(u,s)$ 和 $R_n(u)$ 都具有紧性, 且关于 u 一致收敛成立, 即

$$\sup_u |R_n(u,s) - R_n(u)| \xrightarrow{P} 0.$$

证毕. □

引理 A.3 令 $\{\xi_t\}$ 是随机变量序列, 具有有限的一阶矩, 使得 $\{(\xi_t, Z_t)\}$ 是严平稳且遍历态, 则

$$\sup_{y\in\mathbb{R}}\left|n^{-1}\sum_{t=1}^n \xi_t I(Z_t \leqslant y) - \mathrm{E}[\xi_t I(Z_1 \leqslant y)]\right| \to 0 \quad \text{a.s.}$$

定理 A.3 的证明 这个引理来自文献 [10, (4.1)], 因此证明省略. □

定理 2.2 的证明 首先, 对于 $1 \leqslant t \leqslant n$, 令

$$\begin{aligned}&d_{n,t}(\nu) := m((\beta(\alpha) + n^{-1/2}\nu)^{\mathrm{T}}X_t) - m(\beta^{\mathrm{T}}(\alpha)X_t),\\&\gamma_{n,t} := n^{-1/2}(2\kappa + \delta\|g(X_t, \beta(\alpha))\|), \quad \kappa > 0, \quad \delta > 0,\\&\mu_{n,t}(X_t, \nu, a) := \alpha - \mathbb{P}(\varepsilon_t - d_{n,t}(\nu) + a\gamma_{n,t} \leqslant 0 \mid X_t), \quad \nu \in \mathbb{R}^p.\end{aligned}$$

然后, 对于 $a \in \mathbb{R}$ 和 $\nu \in \mathbb{R}^p$, 定义

$$\begin{aligned}S_n(u,\nu,a) := n^{-1/2}\sum_{t=1}^n &\{[\alpha - I(\varepsilon_t - d_{n,t}(\nu) + a\gamma_{n,t} \leqslant 0) - \mu_{n,t}(X_t,\nu,a)]\\&\times I((\beta(\alpha) + n^{-1/2}\nu)^{\mathrm{T}}X_t \leqslant u) - [\alpha - I(\varepsilon_t \leqslant 0)]I(\beta^{\mathrm{T}}(\alpha)X_t \leqslant u)\}.\end{aligned} \tag{A.5}$$

由引理 A.2, 有

$$\begin{aligned}S_n(u,\nu,a) = n^{-1/2}\sum_{t=1}^n &[I(\varepsilon_t \leqslant 0) - I(\varepsilon_t - d_{n,t}(\nu) + a\gamma_{n,t} \leqslant 0) - \mu_{n,t}(X_t,\nu,a)]\\&\times I((\beta(\alpha) + n^{-1/2}\nu)^{\mathrm{T}}X_t \leqslant u) + o_p(1).\end{aligned}$$

对于每个 u、ν 和 a, 注意到 $S_n(u,\nu,a)$ 中的直和项构成一个零均值有界的鞅差. 因此, 由假设 2.2(2) 和引理 A.2, 有

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(S_n(u,\nu,a)) &= \mathrm{E}\Big\{n^{-1/2}\sum_{t=1}^{n}[I(\varepsilon_t\leqslant 0)-I(\varepsilon_t-d_{n,t}(\nu)+a\gamma_{n,t}\leqslant 0)-\mu_{n,t}(X_t,\nu,a)]\\ &\qquad\times I((\beta(\alpha)+n^{-1/2}\nu)^{\mathrm{T}}X_t\leqslant u)+o_p(1)\Big\}^2\\ &\leqslant \mathrm{E}\{I(\varepsilon_1\leqslant 0)-I(\varepsilon_1-d_{n,1}(\nu)+a\gamma_{n,1}\leqslant 0)-\mu_{n,1}(X_1,\nu,a)+o_p(1)\}^2\\ &\leqslant \mathrm{E}[I(\varepsilon_1\leqslant 0)-I(\varepsilon_1-d_{n,1}(\nu)+a\gamma_{n,1}\leqslant 0)+o_p(1)]^2\to 0.\end{aligned}$$

在 $R_n(u,s)$ 中, 利用 $I(\varepsilon_t-d_{n,t}(\nu)+a\gamma_{n,t}\leqslant 0)-\mu_{n,t}(X_t,\nu,a)-I(\varepsilon_t\leqslant 0)$ 替代 $\psi(\varepsilon_t)$ 可得 $R_n^0(u)$. 类似于引理 A.1, 可知 $R_n^0(u)$ 的紧性, 并且 $\tau\equiv 0$, 即

$$n^{-1}\sum_{t=1}^{n}\mathrm{E}\{[\psi(\varepsilon_t-d_{n,t}(\nu)+a\gamma_{n,t})-\mu_{n,t}(X_t,\nu,a)-\psi(\varepsilon_t)]^2\mid\mathcal{F}_{t-1}\}I((\beta(\alpha)+n^{-1/2}s)^{\mathrm{T}}X_t\leqslant u)=o_p(1).$$

因此,

$$\sup_u|S_n(u,\nu,a)|=o_p(1),\quad\forall\,a\in\mathbb{R},\quad\nu\in\mathbb{R}^p. \tag{A.6}$$

对于 $S_n(u,\nu,0)$ 和 $\mu_{n,t}(X_t,\nu,0)$, 分别记成 $S_n(u,\nu)$ 和 $\mu_{n,t}(X_t,\nu)$.

令 $\mathcal{A}_b:=\{\nu\in\mathbb{R}^p;\|\nu\|\leqslant b\}$, $0<b<\infty$. 对于每一个 $b<\infty$, 需要证明

$$\sup_{u,\nu\in\mathcal{A}_b}|S_n(u,\nu)|=o_p(1). \tag{A.7}$$

令 $\mathcal{B}_n:=\{\sup_{\nu\in\mathcal{A}_b}|d_{n,t}(\nu)|\leqslant n^{-1/2}(\kappa+b\|g(X_t,\beta(\alpha))\|),1\leqslant t\leqslant n\}$, 且对于 $\nu'\in\mathcal{A}_b$, 令

$$\mathcal{C}_n:=\Big\{\sup_{\nu\in\mathcal{A}_b,\|\nu-\omega\|\leqslant\delta}|d_{n,t}(\nu)-d_{n,t}(\omega)|\leqslant\gamma_{n,t},1\leqslant t\leqslant n\Big\}\cap\mathcal{B}_n.$$

由假设 2.2(2), 对于 N, $\forall\,b<\infty$ 和 $\forall\,\nu'\in\mathcal{A}_b$, 有

$$\mathbb{P}(\mathcal{C}_n)>1-\kappa,\quad\forall\,n>N.$$

这个结果只与 κ 有关. 因而, 在 $\mathcal{C}_n$ 上, 对于每一个固定的 $\nu'\in\mathcal{A}_b$ 和 $\forall\,\nu\in\mathcal{A}_b$, 当 $\|\nu-\omega\|\leqslant\delta$ 时, 可以得到

$$\begin{aligned}|S_n(u,\nu)|&\leqslant|S_n(u,\omega,1)|+|S_n(u,\omega,-1)|\\ &\quad+|n^{-1/2}\sum_{t=1}^{n}[\mu_{n,t}(X_t,\omega,1)-\mu_{n,t}(X_t,\omega,-1)]I((\beta(\alpha)+n^{-1/2}\omega)^{\mathrm{T}}X_t\leqslant u)|.\end{aligned}$$

记 $a_n:=\max_{1\leqslant t\leqslant n}n^{-1/2}[3\kappa+(\delta+b)\|g(X_t,\beta(\alpha))\|]$, 对于每一个 $\nu'\in\mathcal{A}_b$, 在 $\mathcal{C}_n$ 上, $|d_{n,t}(\omega)|+\gamma_{n,t}\leqslant a_n$. 由 (A.6), 前两项关于 u 依概率一致收敛到 0, 同时, 上面最后一项由 (A.8) 知有界, 即

$$n^{-1/2}\sum_{t=1}^{n}\Big[|d_{n,t}(\omega)|\sup_{y\in\mathbb{R},|x-z|\leqslant a_n}|p_y(x)-p_y(z)|+2\gamma_{n,t}p_{X_t}(0)\Big]. \tag{A.8}$$

由遍历性定理、假设 2.2(2) 和 2.2(3), 有

$$n^{-1/2}\sum_{t=1}^{n}|d_{n,t}(\omega)| = n^{-1}\sum_{t=1}^{n}(\kappa + b\|g(X_t,\beta(\alpha))\|) = O_p(1),$$
$$n^{-1/2}\sum_{t=1}^{n}\gamma_{n,t} = n^{-1}\sum_{t=1}^{n}(2\kappa + \delta\|g(X_t,\beta(\alpha))\|) = O_p(1)$$

和

$$\begin{aligned}&n^{-1/2}\sum_{t=1}^{n}\Big[|d_{n,t}(\omega)|\sup_{y\in\mathbb{R},|x-z|\leqslant a_n}|p_y(x)-p_y(z)| + 2\gamma_{n,t}p_{X_t}(0)\Big]\\&\quad\to 4\kappa\mathrm{E}[p_{X_1}(0)] + 2\delta\mathrm{E}[\|g(X_1,\beta(\alpha))\|p_{X_1}(0)].\end{aligned}$$

选择适当的 δ 满足小于 κ, 与 (A.6) 一起可以证明 (A.7).

进一步, 由假设 2.1(3)、引理 A.3 和 Fubini 定理, 有

$$\begin{aligned}&n^{-1/2}\sum_{t=1}^{n}\mu_{n,t}(X_t,\nu)I((\beta(\alpha)+n^{-1/2}\nu)^{\mathrm{T}}X_t\leqslant u)\\&=n^{-1/2}\sum_{t=1}^{n}[\mu_{n,t}(X_t,\nu)-\mu_{n,t}(X_t,0)]I((\beta(\alpha)+n^{-1/2}\nu)^{\mathrm{T}}X_t\leqslant u)\\&=-n^{-1}\sum_{t=1}^{n}g(X_t,\beta(\alpha))^{\mathrm{T}}\nu I((\beta(\alpha)+n^{-1/2}\nu)^{\mathrm{T}}X_t\leqslant u)p_{X_t}(0)+o_p(1)\\&=-\mathrm{E}[g(X_1,\beta(\alpha))^{\mathrm{T}}\nu I(\beta^{\mathrm{T}}(\alpha)X_1\leqslant u)p_{X_1}(0)]+o_p(1),\end{aligned}\tag{A.9}$$

其中

$$p_{X_1}(0)=\int_{-\infty}^{\infty}p_{X_1}(y)\psi(dy).$$

令 $\beta_n(\alpha)=\beta(\alpha)+n^{-1/2}\nu$, 由 (A.6) 和 (A.9), 对 u 一致地有

$$R_n^1(u)=R_n(u)-G^{\mathrm{T}}(u)(\sqrt{n}(\beta_n(\alpha)-\beta(\alpha)))+o_p(1).\tag{A.10}$$

由定理 2.1 知 $R_n(u)$ 紧性, 并且依分布 $R_n(u)\Rightarrow R_\infty(u)$. 再由假设 2.1(4) 知, (A.10) 中 $G^{\mathrm{T}}(u)(\sqrt{n}(\beta_n(\alpha)-\beta(\alpha)))$ 的紧性. 进一步, 依分布有

$$R_n^1(u)\Rightarrow R_\infty^1(u),$$

其中 R_∞^1 为中心化的 Gauss 过程, 其协方差函数为

$$\begin{aligned}K^1(x,y)=&K(x,y)+G^{\mathrm{T}}(x)L(\beta^{\mathrm{T}}(\alpha))G(y)\\&-G^{\mathrm{T}}(x)\mathrm{E}\{I(\beta^{\mathrm{T}}(\alpha)X_t\leqslant y)\psi(\varepsilon_1)l(X_1,Y_1,\beta(\alpha))\}\\&-G^{\mathrm{T}}(y)\mathrm{E}\{I(\beta^{\mathrm{T}}(\alpha)X_t\leqslant x)\psi(\varepsilon_1)l(X_1,Y_1,\beta(\alpha))\}.\end{aligned}$$

因此, 完成了定理 2.2 的证明. □

定理 3.1 的证明 根据 T 的定义, 有

$$TR_n^1(x)=R_n^1(x)-\int_{-\infty}^{x}r^{\mathrm{T}}(y)[m'(y)]^{\mathrm{T}}A^{-1}(y)\Big[\int m'(z)r(z)I(z\geqslant y)R_n^1(dz)\Big]G_0(dy)\tag{A.11}$$

和

$$TR_n(x) = R_n(x) - \int_{-\infty}^{x} r^{\mathrm{T}}(y)[m'(y)]^{\mathrm{T}} A^{-1}(y)\left[\int m'(z)r(z)I(z \geqslant y)R_n(dz)\right]G_0(dy). \tag{A.12}$$

令 $\nu_n := \sqrt{n}(\beta_n(\alpha) - \beta(\alpha))$, 根据定理 2.2 可得

$$R_n^1(x) = R_n(x) - \gamma_\psi \Gamma(x)\nu_n + o_p(1), \tag{A.13}$$

其中 $\Gamma(x) = \mathrm{E}[g(X_1, \beta(\alpha))I(\beta^{\mathrm{T}}(\alpha)X_1 \leqslant x)]$. 容易推得 (A.11) 和 (A.12) 中积分的差为

$$\int_{-\infty}^{x} r^{\mathrm{T}}(y)[m'(y)]^{\mathrm{T}} A^{-1}(y) D_n(y) G_0(dy), \tag{A.14}$$

其中

$$\begin{aligned} D_n(y) :=& n^{-1/2}\sum_{t=1}^{n}\{m'(\beta^{\mathrm{T}}(\alpha)X_t)r(\beta^{\mathrm{T}}(\alpha)X_t)[(\alpha - I(Y_t - m(\beta_n^{\mathrm{T}}(\alpha)X_t) \leqslant 0)) \\ &\times I(\beta_n^{\mathrm{T}}(\alpha)X_t \geqslant y) - (\alpha - I(Y_t - m(\beta^{\mathrm{T}}(\alpha)X_t) \leqslant 0))I(\beta^{\mathrm{T}}(\alpha)X_t \geqslant y)]\}. \end{aligned}$$

回顾 $d_{n,t}(\nu_n) = m(\beta_n^{\mathrm{T}}(\alpha)X_t) - m_\alpha(\beta^{\mathrm{T}}(\alpha)X_t)$ 和 $\mu_{n,t}(X_t, \nu_n) = \alpha - \mathbb{P}(\varepsilon_t - d_{n,t}(\nu_n) \leqslant 0 \mid X_t)$, 则有

$$\begin{aligned} D_n(y) :=& n^{-1/2}\sum_{t=1}^{n}\{m'(\beta^{\mathrm{T}}(\alpha)X_t)r(\beta^{\mathrm{T}}(\alpha)X_t)[(\alpha - I(Y_t - m(\beta^{\mathrm{T}}(\alpha)X_t) \leqslant 0)) \\ &\times (I(\beta_n^{\mathrm{T}}(\alpha)X_t \geqslant y) - I(\beta^{\mathrm{T}}(\alpha)X_t \geqslant y)) + (I(Y_t - m(\beta^{\mathrm{T}}(\alpha)X_t) \leqslant 0) - I(Y_t - m(\beta^{\mathrm{T}}(\alpha)X_t) \\ &- d_{n,t}(\nu_n) \leqslant 0) - \mu_{n,t}(X_t, \nu_n))I(\beta_n^{\mathrm{T}}(\alpha)X_t \geqslant y) + (\mu_{n,t}(X_t, \nu_n) - \mu_{n,t}(X_t, 0))I(\beta_n^{\mathrm{T}}(\alpha)X_t \geqslant y)]\} \\ =:& S_{n1}(y) + S_{n2}(y) + S_{n3}(y). \end{aligned} \tag{A.15}$$

令

$$\begin{aligned} S_{n1}^{(1)}(y) =& n^{-1/2}\sum_{t=1}^{n} m'(\beta^{\mathrm{T}}(\alpha)X_t)r(\beta^{\mathrm{T}}(\alpha)X_t) \\ &\times (\alpha - I(Y_t - m(\beta^{\mathrm{T}}(\alpha)X_t) \leqslant 0))I(\beta_n^{\mathrm{T}}(\alpha)X_t \geqslant y) \\ =& n^{-1/2}\sum_{t=1}^{n} m'(\beta^{\mathrm{T}}(\alpha)X_t)r(\beta^{\mathrm{T}}(\alpha)X_t) \\ &\times (\alpha - I(Y_t - m(\beta^{\mathrm{T}}(\alpha)X_t) \leqslant 0))I((\beta^{\mathrm{T}}(\alpha) + n^{-1/2}\nu_n)X_t \geqslant y). \end{aligned}$$

类似于引理 A.1 的证明, 可以证明 $S_{n1}^{(1)}(y)$ 的紧性. 由引理 A.2, 有

$$\sup_{y\in\mathbb{R}} S_{n1}(y) = o_p(1).$$

由假设 2.2(2) 和定理 2.2 的证明, 有

$$\sup_{y\in\mathbb{R}} S_{n2}(y) = o_p(1)$$

和

$$S_{n3}^{(1)}(y) = n^{-1}\sum_{t=1}^{n} m'(\beta^{\mathrm{T}}(\alpha)X_t)r(\beta^{\mathrm{T}}(\alpha)X_t)m'(\beta^{\mathrm{T}}(\alpha)X_t)X_t I(\beta_n^{\mathrm{T}}(\alpha)X_t \geqslant y).$$

再由假设 2.2(2) 和引理 A.3, 有

$$\begin{aligned}S_{n3}^{(1)}(y) &= n^{-1}\sum_{t=1}^{n} m'(\beta^{\mathrm{T}}(\alpha)X_t)r(\beta^{\mathrm{T}}(\alpha)X_t)m'(\beta^{\mathrm{T}}(\alpha)X_t)X_tI(\beta^{\mathrm{T}}(\alpha)X_t \geqslant y)+o_p(1)\\ &\to A(y).\end{aligned}$$

因此, $S_{n3}(y)=S_{n3}^{(1)}(y)\gamma_\psi\nu_n$. 由 (A.14) 和 (A.15), 以及在定理 3.1 的条件下, 可得

$$\begin{aligned}S_{n3}^{(1)}(y) &= n^{-1}\sum_{t=1}^{n} m'(\beta^{\mathrm{T}}(\alpha)X_t)r(\beta^{\mathrm{T}}(\alpha)X_t)m'(\beta^{\mathrm{T}}(\alpha)X_t)X_tI(\beta^{\mathrm{T}}(\alpha)X_t \geqslant y)+o_p(1)\\ &\to A(y).\end{aligned}$$

由上面讨论, 完成了定理 3.1 中 (3.2) 的证明.

现在, 需要证明定理 3.1 中的 (3.3). 从 (3.2) 知, 只需要证明

$$TR_n(x)\Rightarrow R_\infty(x).$$

注意到, 对于每一个 x, $TR_n(x)$ 是一个零均值平方可积鞅. 事实上, 要证明 $TR_n(x)$ 的紧性, 只需要证明 (A.11) 中第二项的紧性. 令这一项为

$$\begin{aligned}M_n(x) := n^{-1/2}\sum_{t=1}^{n}\psi(\varepsilon_t)\int_{-\infty}^{x} r^{\mathrm{T}}(y)[m'(y)]^{\mathrm{T}}A^{-1}(y)m'(\beta^{\mathrm{T}}(\alpha)X_{t-1})\\ \times r(\beta^{\mathrm{T}}(\alpha)X_{t-1})I(\beta^{\mathrm{T}}(\alpha)X_{t-1}\geqslant y)G_0(dy).\end{aligned}$$

由 M_n 的紧性以及上面的结果, 完成了定理 3.1 的证明. □

引理 A.4 令 $\mathfrak{U}$ 是 $D[-\infty,x_0]$ 的相对紧集, H 和 H_n 是 $\mathbb{R}$ 上随机分布函数序列, 并且使得下式成立:

$$\sup_{t\leqslant x_0}|H_n(t)-H(t)|\to 0,\quad \text{a.s.},$$

则有

$$\sup_{t\leqslant x_0, a\in\mathfrak{U}}\left|\int_{-\infty}^{t} a(x)[H_n(dx)-H(dx)]\right| = o_p(1).$$

证明 引理 A.4 的详细证明可参见文献 [10] 中引理 4.2 的证明, 此处省略详细证明过程. □

定理 3.2 的证明 在定理 3.2 的条件下, 利用 T_n 代替 T, 定理 3.2 与 3.1 的证明思路类似, 容易完成定理 3.2 的证明. 因此, 证明省略. □

定理 4.1 的证明 在局部备择假设 (4.1) 下, 有

$$\begin{aligned}R_n^1(x) &= n^{-1/2}\sum_{t=1}^{n}\psi(Y_t-m(\beta_n^{\mathrm{T}}(\alpha)X_t))I(\beta_n^{\mathrm{T}}(\alpha)X_t\leqslant x)\\ &= n^{-1/2}\sum_{t=1}^{n}[\psi(Y_t-m(\beta_n^{\mathrm{T}}(\alpha)X_t))-\mathrm{E}(\psi(Y_t-m(\beta_n^{\mathrm{T}}(\alpha)X_t))\mid X_t)]I(\beta_n^{\mathrm{T}}(\alpha)X_t\leqslant x)\\ &\quad + n^{-1}\sum_{t=1}^{n}s_\alpha(\beta^{\mathrm{T}}(\alpha)X_t)I(\beta_n^{\mathrm{T}}(\alpha)X_t\leqslant x)\\ &= R_\infty(u)-G^{\mathrm{T}}(V+\eta)+\mathrm{E}[s_\alpha(\beta^{\mathrm{T}}(\alpha)X_t)I(\beta^{\mathrm{T}}(\alpha)X_t\leqslant x)].\end{aligned}$$

由引理 A.1、A.2 和定理 2.2, 在局部备择假设 (4.1) 下, 可证明定理 4.1 的结果. □

Model checking for parametric single-index quantile autoregression

Qiang Xia, Rubing Liang & Gaorong Li

Abstract In this paper, we study the nonparametric tests for the validity of the parametric single-index time series quantile autoregression with a given parametric link function. When the dimension of the quantile regressors is large, the existing tests will face the "curse of dimensionality" problem. To solve this problem, we utilize a dimension reduction idea, which perfectly adapts to parametric single-index time series, based on certain empirical processes marked by the residuals. We use the Khmaladze transformation to replace the underlying test process by its martingale part, and then the resulting test statistic is an asymptotically distribution-free test related to a standard Brownian motion. The simulation results and a real data example show that the proposed method performs better than the existing methods in checking parametric single-index quantile autoregression.

Keywords **model checking, single-index time series, quantile regression, residual empirical process, dimension reduction, Khmaladze transformation, asymptotically distribution-free**

MSC(2010) **60F03, 62J12, 62M10**

doi: 10.1360/SCM-2018-0259