多项式分裂可行问题

聂家旺¹, 赵金玲^{2*}

1. Department of Mathematics, University of California, San Diego, La Jolla, CA 92093, USA;

2. 北京科技大学数理学院, 北京 100083

E-mail: njw@math.ucsd.edu, jlzhao@ustb.edu.cn

收稿日期: 2018-08-22; 接受日期: 2019-04-30; 网络出版日期: 2020-01-10; * 通信作者

美国国家科学基金 (批准号: DMS-1417985 和 DMS-1619973)、国家自然科学基金 (批准号: 11101028 和 11271206) 和中央高校基本科研业务费 (批准号: FRF-DF-19-004) 资助项目

摘要 本文研究多项式分裂可行问题, 即由多项式不等式定义的分裂可行问题, 包括凸与非凸、可行与不可行的问题; 给出多项式分裂可行问题解集的半定松弛表示; 研究其半定松弛化问题的性质; 并基于这些性质建立求解多项式分裂可行问题的半定松弛算法. 本文在较为一般的条件下证明了, 如果分裂可行问题有解, 则可通过本文建立的算法求得一个解点; 如果问题无解, 则该算法能够判别问题不可行. 最后通过数值实验对算法进行验证.

关键词 分裂可行问题 多项式 半定松弛

MSC (2010) 主题分类 90C25, 65K10, 90C33

1 引言

分裂可行问题 (the split feasibility problem, SFP) 可描述如下: 对给定两个集合 $C \subset \mathbb{R}^n$, $Q \subset \mathbb{R}^m$, 以及给定矩阵 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, 求一点 x^* 使得

$$x^* \in C, \quad Ax^* \in Q, \quad (1.1)$$

其中 $\mathbb{R}^n$ 表示实数域上的 n 维 Euclid 空间. 分裂可行问题最早由 Censor 和 Elfving^[1] 在相位恢复问题的建模中提出. 该问题可作为图像重构、信号处理和调强放射治疗等多种反问题的统一模型. 读者可参见文献 [1–4] 及其中的参考文献, 以便了解更多关于分裂可行问题的工作. 分裂可行问题后来被 Censor 等^[5] 推广为多集分裂可行问题 (the multiple-sets split feasibility problem, MSFP), 其问题形式如下: 给定集合 $C_1, \dots, C_r \subset \mathbb{R}^n$, $Q_1, \dots, Q_t \subset \mathbb{R}^m$, 以及矩阵 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, 求一点 x^* 满足

$$x^* \in \bigcap_{i=1}^r C_i \quad \text{s.t.} \quad Ax^* \in \bigcap_{j=1}^t Q_j. \quad (1.2)$$

英文引用格式: Nie J W, Zhao J L. The split feasibility problem with polynomials (in Chinese). Sci Sin Math, 2021, 51: 425–438, doi: 10.1360/SCM-2018-0582

特别地, 当 $t = r = 1$ 时, 多集分裂可行问题退化为分裂可行问题.

在已有的文献资料中, 集合 C 、 Q 、 C_i 和 Q_j 往往被假设为非空闭凸集. 从而投影类算法^[6,7] 被广泛应用于 SFP 和 MSFP 的求解中. 相关成果参见文献 [1-5,8] 以及其他 SFP 和 MSFP 相关研究文献 [9-15].

Byrne^[2,3] 提出的 CQ 算法是求解 SFP 的一个经典算法, 当前求解 SFP 和 MSFP 的许多算法是在 CQ 算法的基础上改进演化而来. CQ 算法的基本迭代格式如下:

$$x^{k+1} = P_C(x^k - \gamma A^T(I - P_Q)Ax^k),$$

其中 $\gamma \in (0, 2/\rho(A^T A))$ 可视为步长参数, $\rho(A^T A)$ 是指矩阵 $A^T A$ 的最大特征值 (谱半径). 记号 P_C (P_Q) 表示向集合 C (Q) 的正交投影. 通常, CQ 算法及其衍生算法的收敛速率与初始点 x^0 和步长参数 γ 的选择关系密切, 同时也受到集合几何形状的影响. 而且, 这类算法要求集合 C 、 Q 、 C_i 和 Q_j 为凸集. 尽管经历了大量改进, 但 CQ 类算法仍面临着巨大的计算挑战.

本文考虑多项式分裂可行问题, 即 SFP 中的集合 C 和 Q 由如下半代数集定义:

$$C := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_i(x) \geq 0, i = 1, \dots, r\}, \quad (1.3)$$

$$Q := \{y \in \mathbb{R}^m \mid g_j(y) \geq 0, j = 1, \dots, t\}, \quad (1.4)$$

其中函数 $f_i(x)$ 和 $g_j(y)$ 均为多变量实多项式. 这一问题也可描述为 MSFP 问题:

$$C_i := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_i(x) \geq 0\}, \quad Q_j := \{y \in \mathbb{R}^m \mid g_j(y) \geq 0\}.$$

需指出的是, 本文不要求集合 C 、 Q 、 C_i 和 Q_j 为凸集.

鉴于分裂可行问题由多项式不等式定义, 本文基于 Lasserre 型矩松弛 (moment relaxation) 技术, 建立求解 SFP 的半定规划 (semidefinite programming, SDP)^[16] 松弛方法, 研究 SDP 松弛的有关性质. 本文在较为一般的条件下证明了, 如果分裂可行问题是可行的 (即至少存在一个解), 则可通过本文提出的算法求得一个解点 x^* 满足 (1.1); 如果问题不可行 (即不存在 x^* 满足 (1.1)), 则该算法能够判别问题不可行.

本文余下部分结构如下: 第 2 节给出多项式分裂可行问题解集 $C \cap A^{-1}(Q)$ 的 SDP 松弛; 第 3 节建立求解这一问题的 SDP 松弛算法, 并证明该算法的收敛性; 第 4 节通过数值实验对算法进行验证; 第 5 节给出结论.

2 半定松弛

本节给出多项式分裂可行问题的半定松弛. 为此需要借助多项式优化中的特定处理方法^[17-21].

符号定义 记号 $\mathbb{N}$ 表示非负整数集, $\mathbb{R}$ 表示实数集. 对于 $s \in \mathbb{R}$, $\lceil s \rceil$ 表示不小于 s 的最小整数. 对 $x := (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ 和 $\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T \in \mathbb{N}^n$, 记

$$x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}, \quad |\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n.$$

x_i 和 α_i 分别表示 x 和 α 的第 i 分量. 对于 $d > 0$, 记

$$\mathbb{N}_d^n := \{\alpha \in \mathbb{N}^n \mid |\alpha| \leq d\}.$$

以 $[x]_d$ 记由次数不超过 d 的 x 的所有单项式构成的列向量, 形式如下:

$$[x]_d := [1, x_1, \dots, x_n, x_1^2, x_1x_2, \dots, x_{n-1}x_n^{d-1}, x_n^d]^T.$$

$\mathbb{R}[x]$ 表示关于 x 的 n 元实系数多项式环, $\mathbb{R}[x]_d$ 表示次数不超过 d 的实系数多项式集, $\deg(p)$ 表示多项式 p 的次数. 对于对称矩阵 X , $X \succeq 0$ 表示 X 半正定; 对向量 x , $\|x\|$ 表示其 Euclid 范数. 在 $\mathbb{R}^n$ 空间中, e 表示所有元素为 1 的列向量; 0 表示所有元素为零的列向量, e_i 表示第 i 个元素为 1 其余元素为 0 的列向量. 并以 I 来记单位阵.

2.1 Localizing 矩阵

记 $\mathbb{R}_d^{\mathbb{N}_d^n}$ 为 $\mathbb{N}_d^n$ 维实向量空间, 即对于每个 $y \in \mathbb{R}_d^{\mathbb{N}_d^n}$, 都有

$$y = (y_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}_d^n}.$$

在一些文献中, 如文献 [22], 这样的 y 称作度为 d 的“截断多序列” (truncated multi-sequences, TMS). 对多项式 $f \in \mathbb{R}[x]_{2k}$, 乘积 $f(x)[x]_s[x]_s^T$ 是长为 $\binom{n+s}{s}$ 的对称矩阵多项式, 其中 $s = k - \lceil \deg(f)/2 \rceil$. 将该式展开为

$$f(x)[x]_s[x]_s^T = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_{2k}^n} x^\alpha F_\alpha,$$

其中 F_α 为对称矩阵. 对 $y \in \mathbb{R}_d^{\mathbb{N}_d^n}$, 定义矩阵

$$L_f^{(k)}[y] := \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_{2k}^n} y_\alpha F_\alpha \quad (2.1)$$

为由 f 和 y 生成的 k 阶 localizing 矩阵. 易知, 对任意给定 f , $L_f^{(k)}[y]$ 关于 y 线性; 对于任意给定 y , $L_f^{(k)}[y]$ 也关于 f 线性.

事实 2.1 若 $f(u) \geq 0$ 且 $y = [u]_{2k}$, 则有

$$L_f^{(k)}[y] = f(u)[u]_s[u]_s^T \succeq 0.$$

关于 localizing 矩阵, 我们给出如下例子以便于理解.

例 2.1 对于 $n = 2$, $k = 2$ 和 $f = 1 - x_1^2 - x_2^2$ 的情形, 有

$$L_f^{(2)}[y] = \begin{bmatrix} y_{00} - y_{20} - y_{02} & y_{10} - y_{30} - y_{12} & y_{01} - y_{21} - y_{03} \\ y_{10} - y_{30} - y_{12} & y_{20} - y_{40} - y_{22} & y_{11} - y_{31} - y_{13} \\ y_{01} - y_{21} - y_{03} & y_{11} - y_{31} - y_{13} & y_{02} - y_{22} - y_{04} \end{bmatrix}.$$

2.2 半定松弛

多项式分裂可行问题希望求得一点 x^* , 使得

$$x^* \in C := \bigcap_{i=1}^t C_i, \quad Ax^* \in Q := \bigcap_{j=1}^t Q_j, \quad (2.2)$$

其中矩阵 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 给定, 且对多项式 $f_i(x)$ 和 $g_j(y)$, 有

$$C_i = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_i(x) \geq 0\}, \quad Q_j = \{y \in \mathbb{R}^m \mid g_j(y) \geq 0\}.$$

为简便, 记

$$h_j(x) := g_j(Ax). \quad (2.3)$$

显然, h_j 为 x 的多项式. 令

$$H := \{x \in \mathbb{R}^n \mid h_j(x) \geq 0, j = 1, \dots, t\}, \quad (2.4)$$

则上述 SFP 等价于求 x^* , 使得

$$x^* \in C \cap H.$$

记

$$\begin{aligned} d_{f,i} &:= \left\lceil \frac{\deg(f_i)}{2} \right\rceil, \\ d_{h,j} &:= \left\lceil \frac{\deg(h_j)}{2} \right\rceil, \\ d &:= \max_{i,j} \{d_{f,i}, d_{h,j}\}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

事实 2.2 对任意 $k \geq d$ 和任意 $u \in C \cap H$, 有

$$f_i(u), h_j(u) \geq 0$$

对任意 i 和 j 成立. 因而,

$$f_i(x)[x]_{k-d_{f,i}}([x]_{k-d_{f,i}})^T \succeq 0, \quad h_j(x)[x]_{k-d_{h,j}}([x]_{k-d_{h,j}})^T \succeq 0.$$

这意味着, 如果 $y = [u]_{2k}$ 且 $u \in C \cap H$, 则

$$L_{f_i}^{(k)}[y] \succeq 0, \quad L_{g_j}^{(k)}[y] \succeq 0.$$

若 $f_0 = 1$, 则 $f_0(x)[x]_k[x]_k^T \succeq 0$ 对任意 $x \in \mathbb{R}^n$ 成立. 故而, 对 $y = [u]_{2k}$, 有

$$L_1^{(k)}[y] \succeq 0.$$

此时的 localizing 矩阵称为 y 的 moment 矩阵.

注意到

$$C \cap H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_1(x) \geq 0, \dots, f_r(x) \geq 0, h_1(x) \geq 0, \dots, h_t(x) \geq 0\}.$$

因此, 对于所有 $k \geq d$, $C \cap H$ 总是被包含于下述集合 (注意 $f_0 = 1$):

$$S_k := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \begin{array}{l} \exists y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}_{2k}^n}, y_0 = 1, \\ x = (y_{e_1}, \dots, y_{e_n}), \\ L_{f_i}^{(k)}[y] \succeq 0 \ (i = 0, \dots, r), \\ L_{h_j}^{(k)}[y] \succeq 0 \ (j = 1, \dots, t) \end{array} \right\}. \quad (2.6)$$

每个 S_k 均是 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}_{2k}^n}$ 中由线性矩阵不等式定义的集合的投影, 且由于对任意 $k \geq d$ 均有 $C \cap H \subseteq S_k$, 故而每个 S_k 也是集合 $C \cap H$ 的半定松弛. 由文献 [23] 知, 如下嵌套包含关系成立:

$$S_d \supseteq S_{d+1} \supseteq \dots \supseteq C \cap H. \quad (2.7)$$

2.3 几个基本性质

首先考察多项式分裂可行问题的解集 $C \cap H$ 与 (2.6) 给出的半定松弛 S_k 之间可行与不可行的关系.

命题 2.1 设集合 C 和 H 如前述定义. 如果 $C \cap H \neq \emptyset$, 则对任意 $k \geq d$, 其半定松弛 $S_k \neq \emptyset$. 因此, 若对某个 $k \geq d$, 有 $S_k = \emptyset$, 则 $C \cap H = \emptyset$, 即 SFP 不可行.

证明 对任意 $u \in C \cap H$ 和 $k \geq d$, 截断序列 $y := [u]_{2k}$ 满足如下线性矩阵不等式组: $\forall i, j$,

$$L_{f_i}^{(k)}[y] \succeq 0, \quad L_{h_j}^{(k)}[y] \succeq 0.$$

注意到 $y_0 = 1$ 和 $u = (y_{e_1}, \dots, y_{e_n})$, 可知 $u \in S_k$. 故而, $C \cap H \neq \emptyset$ 意味着 $S_k \neq \emptyset$ 对任意 $k \geq d$ 成立. 因此, 如果存在某个 $k \geq d$ 使得 $S_k = \emptyset$, 则必有 $C \cap H = \emptyset$. $\square$

注 2.1 命题 2.1 不要求集合 C 或 H 为凸集. 进一步, 不必假设函数 f_i 和 h_j 为凹函数.

下面给出使得 $S_k = C \cap H$ 成立的条件. 为此, 一个典型的条件是 SOS (sum of squares)- 凸/凹性.

定义 2.1 ^[23] 多项式 $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ 称为 SOS- 凸的, 如果存在矩阵多项式 $P(x) \in \mathbb{R}[x]^{\ell \times n}$ 使得 (ℓ 可不等于 n)

$$\nabla^2 f(x) := \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j=1}^n = P(x)^T P(x).$$

类似地, $f(x)$ 称为 SOS- 凹的, 如果 $-f(x)$ 是 SOS- 凸的.

多项式 $p \in \mathbb{R}[x]$ 称为 SOS 多项式, 如果存在实多项式 $p_1, \dots, p_k \in \mathbb{R}[x]$, 使得 $p = p_1^2 + \dots + p_k^2$. 读者可参见文献 [24, 25] 以了解更多关于 SOS 多项式的内容.

定理 2.1 设 C 、 H 和 S_k 如前文所给出. 假设多项式 $f_i(x)$ 和 $h_j(x)$ 均为 SOS- 凹的, 则对任意 $k \geq d$, 有 $S_k = C \cap H$.

证明 从 (2.7) 可以看出, $C \cap H \subseteq S_k$ 对任意 $k \geq d$ 成立. 故而, 我们仅需证明 $C \cap H \supseteq S_k$. 任取一点 $u \in S_k$, 则 $u = (y_{e_1}, \dots, y_{e_n})$ 且 y 满足 (2.6) 中条件. 下证 $u \in C \cap H$. 考虑如下多项式:

$$\tilde{f}_i(x) := -f_i(x) + f_i(u) + \nabla f_i(u)^T(x - u).$$

对固定的 u , 该多项式是关于 x 的多项式. 注意到

$$\tilde{f}_i(u) = 0, \quad \nabla \tilde{f}_i(u) = 0.$$

由文献 [23, 引理 8] 知, $\tilde{f}_i$ 是 SOS 多项式, 即存在实多项式 $p_1, \dots, p_N \in \mathbb{R}[x]_k$, 使得

$$\tilde{f}_i = p_1(x)^2 + \dots + p_N(x)^2.$$

对任意 $\alpha \in \mathbb{N}_{2k}^n$, 定义线性泛函

$$\mathcal{R}_y : \mathbb{R}[x]_{2k} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathcal{R}_y(x^\alpha) = y_\alpha. \quad (2.8)$$

由 $L_1^{(k)}[y] \succeq 0$ (注意 $f_0 = 1$) 可知,

$$\mathcal{R}_y(\tilde{f}_i) = \sum_{\ell=1}^N \text{vec}(p_\ell)^T (L_1^{(k)}[y]) \text{vec}(p_\ell) \geq 0,$$

其中 $\text{vec}(p_\ell)$ 表示 p_ℓ 的系数向量. 于是, 由 $\mathcal{R}_y(\nabla f_i(u)^\top(x-u)) = 0$ 可得

$$\mathcal{R}_y(\tilde{f}_i) = -\mathcal{R}_y(f_i) + f_i(u) \geq 0.$$

又注意到 $\mathcal{R}_y(f_i)$ 是矩阵 $L_{f_i}^{(k)}[y]$ 的 $(1,1)$ -元素, 所以有 $L_{f_i}^{(k)}[y] \succeq 0$, 且由上式知,

$$f_i(u) \geq \mathcal{R}_y(f_i) \geq 0.$$

这一不等式对所有 $i = 1, \dots, r$ 成立. 类似可证, 对所有 j , $h_j(u) \geq 0$ 成立. 因此, 对任意 $u \in S_k$, 都有 $u \in C \cap H$, 即 $S_k \subseteq C \cap H$. $\square$

注 2.2 定理 2.1 中并未假设集合 C 和 H 内部非空. 换言之, 即使 C 或 H 内部为空, 在 f_i 和 h_j 为 SOS-凹的假设之下, 结论 $C \cap H = S_k$ 仍然成立. 这一结论强于文献 [23] 中的结论.

当多项式 f_i 和 h_j 并非 SOS-凹的, 仍有其他一般性条件保证 $C \cap H = S_k$ 成立. 相关内容可参见文献 [23, 26–28].

3 求解多项式分裂可行问题的 SDP 松弛法

设集合 C 和 Q 由 (1.3) 和 (1.4) 定义, 给定矩阵 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, 记 $h_j(x) = g_j(Ax)$. 集合 H 如 (2.4) 所定义. 本节无需假定 C 、 Q 和 H 为凸集, 也无需假定 f_i 和 h_j 是凹函数. 分裂可行问题欲求一点 $x^* \in C$ 使得 $Ax^* \in Q$, 这一问题等价于求 $x^* \in C \cap H$.

本节基于 (2.6) 中的 SDP 松弛来构建求解 SFP 的算法. 如问题可行, 希望能找到一点 $x^* \in C \cap H$; 如问题不可行, 则希望能够验证不可行性.

设 d 为 (2.5) 中的度. 任取向量 $\xi \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}_{2d}^n}$ 使得 $\|\xi\| \leq \frac{1}{2}$. 考察多项式优化问题

$$\begin{aligned} \min \quad & c(x) := \|[x]_d\|^2 + \xi^\top [x]_{2d} \\ \text{s.t.} \quad & f_1(x) \geq 0, \dots, f_r(x) \geq 0, \\ & h_1(x) \geq 0, \dots, h_t(x) \geq 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

由 $\|\xi\| \leq \frac{1}{2}$ 知, 目标函数 $c(x)$ 是强制 (coercive) 函数, 即水平集 $\{x \in \mathbb{R}^n : c(x) \leq M\}$ 对任意 M 是紧的, 因而只要 SFP 是可行的, (3.1) 必有全局最优解. 为求解多项式优化问题 (3.1), k ($\geq d$) 阶 Lasserre 型矩松弛如下:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{|\beta| \leq d} y_{2\beta} + \sum_{|\alpha| \leq 2d} \xi_\alpha y_\alpha \\ \text{s.t.} \quad & L_{f_i}^{(k)}[y] \succeq 0 \quad (1 \leq i \leq r), \\ & L_{h_j}^{(k)}[y] \succeq 0 \quad (1 \leq j \leq t), \\ & L_1^{(k)}[y] \succeq 0, \quad y_0 = 1, \quad y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}_{2k}^n}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

这里, 满足 (3.2) 的 y 与满足 (2.6) 的 y 相同. 因此, (3.2) 是 SFP 的半定松弛.

算法 3.1 设 f_i 和 h_j 如前文所定义. 令 $k := d$.

第 1 步 求解半定规划 (3.2). 如果不可行, 则 SFP 不可行, 算法终止; 否则, 求其最优解 y^* , 转第 2 步.

第 2 步 令 $u^k := (y_{e_1}^*, \dots, y_{e_n}^*)$. 若 $f_i(u^k) \geq 0$ 且 $h_j(u^k) \geq 0$ 对所有 i 和 j 成立, 则 u^k 是 SFP 的解; 否则, 令 $k \leftarrow k + 1$, 转第 1 步.

命题 2.1 保证了第 1 步中的不可行性结论, 而第 2 步中的结论直接易得. 当 SFP 可行时, 半定规划问题 (3.2) 不一定有最优解. 为保证 (3.2) 的可解性, 需作如下假设.

假设 3.1 存在 SOS 多项式 $a_0, a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_t$, 以及实数 $R > 0$, 使得

$$R - \|[x]_d\|^2 = a_0 + a_1 f_1 + \dots + a_r f_r + b_1 h_1 + \dots + b_t h_t, \quad (3.3)$$

且对任意 i 和 j , 有 $\deg(a_i f_i), \deg(b_j h_j) \leq 2d$.

假设 3.1 表明, $\|[x]_d\|^2 \leq R$ 对任意 $x \in C \cap H$ 成立, 因而交集 $C \cap H$ 有界. 反之未必. 然而, 当 $C \cap H$ 有界, 设 $\|[x]_d\|^2 \leq R$, 则可添加 $R - \|[x]_d\|^2$ 至集合 $\{f_1, \dots, f_r\}$, 而 $C \cap H$ 不变. 如果去除 a_i 和 b_j 的度上界, 则假设 3.1 即为经典的 Archimedean 条件^[17, 29]. 算法 3.1 的收敛性由如下定理给出.

定理 3.1 设 C, Q, f_i 和 h_j 如前文定义. 如果假设 3.1 成立, 则有如下性质:

- (i) 若 SFP 不可行, 则对充分大的 k , 半定规划问题 (3.2) 不可行;
- (ii) 若 SFP 可行, 且 ξ 的选取满足 $\|\xi\| \leq \frac{1}{2}$, 则 (3.2) 对任意 $k \geq d$ 存在最优解, 且点列 $\{u^k\}_{k=d}^\infty$ 收敛于 SFP 的解 x^* .

证明 (i) 为简便, 令 $f_{r+j} = h_j, j = 1, \dots, t$. 此时,

$$C \cap H = \{x \in \mathbb{R}^n : f_i(x) \geq 0, i = 1, \dots, r+t\}.$$

若 SFP 不可行, 则交集 $C \cap H$ 为空集. 由文献 [30] 知, 存在 SOS 多项式 s_δ ($\delta \in \{0, 1\}^{r+t}$), 使得

$$-2 = \sum_{\delta \in \{0, 1\}^{r+t}} s_\delta f_1^{\delta_1} \dots f_{r+t}^{\delta_{r+t}}.$$

定义多项式

$$p := 1 + \sum_{\delta \in \{0, 1\}^{r+t}} s_\delta f_1^{\delta_1} \dots f_{r+t}^{\delta_{r+t}},$$

易知其为常数 -1 . 显然, p 在 $C \cap H$ 上是正的. 令

$$F := (f_1, \dots, f_{r+t}).$$

定义函数集

$$\text{Qmod}_k(F) := \left\{ \sum_{i=0}^{r+t} s_i f_i \mid s_i \text{ 是 SOS 的, } \deg(s_i f_i) \leq 2k \right\},$$

其中 $f_0 = 1$. 显然, 它是一个凸锥. 由文献 [29] 可知, 当 k 充分大时, 有 $p \in \text{Qmod}_k(F)$ (由 $p = -1$ 知, $-1 \in \text{Qmod}_k(F)$). (3.2) 的对偶问题如下 (参见文献 [17]):

$$\begin{aligned} \max \quad & \gamma \\ \text{s.t.} \quad & c - \gamma \in \text{Qmod}_k(F). \end{aligned} \quad (3.4)$$

由弱对偶定理知, (3.4) 的可行解 (目标值) γ 是原问题 (3.2) 对任意可行点 y 的目标值的下界. 当 k 充分大, 使得 $-1 \in \text{Qmod}_k(F)$, 此时对偶问题 (3.4) 无上界, 由弱对偶定理, (3.2) 不可行.

(ii) 令 $\mathcal{R}_y$ 为 (2.8) 定义的线性泛函. 由假设 3.1 中的等式 (3.3), 并注意到 $f_0 = 1, y_0 = 1$, 可得

$$R - \sum_{|\beta| \leq d} y_{2\beta} = \mathcal{R}_y(R - \|[x]_d\|^2) = \sum_{i=0}^r \mathcal{R}_y(a_i f_i) + \sum_{j=1}^t \mathcal{R}_y(b_j h_j).$$

由于 $a_i = p_1^2 + \cdots + p_\ell^2$ 是 SOS 的, 且 $L_{f_i}^{(k)}[y] \succeq 0$, 不难得到

$$\mathcal{R}_y(a_i f_i) = \sum_{j=1}^{\ell} \mathcal{R}_y(p_j^2 f_i) = \sum_{j=1}^{\ell} \text{vec}(p_j)^T (L_{f_i}^{(k)}[y]) \text{vec}(p_j) \geq 0,$$

其中 $\text{vec}(p_j)$ 表示 p_j 的系数向量. 类似地, 由 $L_{h_j}^{(k)}[y] \succeq 0$ 可以证明 $\mathcal{R}_y(b_j h_j) \geq 0$. 因此,

$$R \geq \sum_{|\beta| \leq d} y_{2\beta}.$$

进一步, 对任意 $x^\theta (|\theta| \leq k-d)$, 有

$$R x^{2\theta} - \|x^\theta[x]_d\|^2 = \sum_{i=0}^r (a_i x^{2\theta}) f_i + \sum_{j=1}^t \mathcal{R}_y(b_j x^{2\theta}) h_j.$$

由类似讨论可知,

$$R y_{2\theta} \geq \sum_{|\beta| \leq d} y_{2\beta+2\theta} \quad (3.5)$$

对 (3.2) 所有可行解 y 成立. $L_1^{(k)}[y]$ 的对角元恰好是 $y_{2\beta} (|\beta| \leq k)$. 注意到 $L_1^{(k)}[y] \succeq 0$, 故而对任意 $|\beta| \leq k$, 有 $y_{2\beta} \geq 0$, 且由 $L_1^{(k)}[y]$ 的迹得 $\|y\|^2$ 有解. 递归应用 (3.5) 可得 y 的范数有解, 其上界仅依赖于 R 和 k . 从而 (3.2) 的可行集是紧集. 因此, (3.2) 必有最优解.

由于 $\|\xi\| \leq \frac{1}{2}$, 因此, 目标函数 $c(x)$ 是强制多项式. 对选定的 ξ , 目标函数 $c(x)$ 在 $C \cap H$ 上有唯一最优解. 由文献 [31, 推论 3.5] 或 [32, 定理 3.3], 点列 $\{u^k\}_{k=d}^\infty$ 必收敛于 (3.1) 的唯一最优解 (显然也是 SFP 的解). $\square$

注 3.1 在一般性条件下, 算法 3.1 可有限终止. 具体来说, 满足一般约束限制、二阶充分条件和优化问题 (3.1) 的严格互补条件时, 分层 Lasserre 型矩松弛 (3.2) 必有限收敛. 更多关于收敛性条件和有限收敛的细节可分别参见文献 [32, 33].

特别地, 当多项式 f_i 和 h_j 为 SOS-凹的, 算法 3.1 在第 1 步迭代取 $k=d$ 时即终止. 这是因为由定理 2.1, $C \cap H = S_d$, 因此, 对满足 (3.2) 中约束条件的 y , $u = (y_{e_1}, \dots, y_{e_n})$ 构成的集合恰是 (3.1) 的可行集.

4 数值实验

本节将算法 3.1 用于求解多项式分裂可行问题. 在 MATLAB R2014 平台上基于 GloptiPoly^[34] 软件进行编程, 该软件调用求解半定规划的软件包 SeDuMi^[35, 36]. 全部数值实验在笔记本电脑 (Intel(R) Core(TM) i5-3337U CPU (1.80 GHz)) 上完成. 数值结果保留 4 位小数. 为方便, 集合 C 和 Q 由形如 $-f_i(x) \leq 0$ 和 $-g_j(y) \leq 0$ 的不等式给出. 如有等式约束 $f(x) = 0$, 可等价地表示为 $-f(x) \leq 0$, $f(x) \leq 0$.

回顾求解 SFP 的经典 CQ 算法. 对 $k = 0, 1, 2, \dots$, 计算

$$x^{k+1} = P_C(x^k - \gamma A^T(I - P_Q)Ax^k),$$

其中 $0 < \gamma < 2/\rho(A^T A)$ 是参数, P_C 和 P_Q 分别表示向集合 C 和 Q 的投影. 正交投影 $P_C(u)$ 是如下优化问题的解:

$$P_C(u) = \arg \min_{z \in C} \frac{1}{2} \|z - u\|^2.$$

向 Q 的投影 P_Q 类似. 可知, 迭代过程中投影需要很大计算量, 故而, 这里采用文献 [10] 中易于计算的向超平面或半空间投影的松弛化 CQ 算法, 其迭代格式如下:

$$x^{k+1} = P_{C_k}(x^k - \gamma A^T(I - P_{Q_k})Ax^k),$$

其中 C_k 和 Q_k 是由 x^k 构造的分别包含 C 和 Q 的半空间. 例 4.1 中, 选取 $\gamma = 1.8/[\rho(A^T A)]$. 迭代终止条件为 $f_i(x^k) < 10^{-5}$ 和 $g_j(Ax^k) < 10^{-5}$, 或迭代步数 $k \geq \max := 10^6$. 我们发现, 松弛化 CQ 算法往往依赖于初始点 x^0 及 C 和 Q 的几何形状, 且 CQ 类算法不能应用于集合 C 和 Q 非凸的问题. 而本文算法 3.1 不要求集合为凸集, 并且能判定问题的不可行性.

首先通过一个例子将本文算法与松弛化 CQ 算法进行比较.

例 4.1 设 SFP 中集合 C 和 Q 如下:

$$C = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : \frac{1}{2}(x - e)^T B_1(x - e) + b_1^T(x - e) \leq 0 \right\},$$

$$Q = \left\{ y \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2}(y - Ae)^T B_2(y - Ae) + b_2^T(y - Ae) \leq 0 \right\},$$

其中 a 为参数, 矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 6 \\ 2 & 6 & 7 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} 18 \\ 28 \\ 38 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

求一点 $x^* \in C$ 使得 $Ax^* \in Q$.

易知, $e = (1, 1, 1)^T$ 是此例的一个解点. 由于矩阵 B_1 半正定, 因此, 集合 C 为凸集. 当 $a \geq \frac{1}{2}$ 时, B_2 半正定, 且 Q 为凸集. 针对 a 的不同取值, 将算法 3.1 与松弛化 CQ 算法进行比较. 选取与解点 $(1, 1, 1)^T$ 有一定距离的初始点 $(-50, 50, 50)^T$. 数值结果见表 1, 表中时间均以秒为单位.

当 $a \leq 500$ 时, 松弛化 CQ 算法可以更快得到解. 但是, 对更大的 a , 例如, 取 $a = 5,000$ 或 $a = 20,000$, 算法 3.1 求解更快. 随着 a 的增加, 算法 3.1 的计算时间变化不大, 而松弛 CQ 算法的计算时间则随之显著增加. 从而半定松弛方法在求解中表现更稳定.

例 4.2 设 SFP 中集合 C 和 Q 如下:

$$C = \{x \in \mathbb{R}^5 \mid x_1^2 + x_2^2 - x_3^5 + x_4x_5 - 3 \leq 0, x_1(x_1 - 1) = 0, x_1^4 + x_2^4 + x_5^4 - 2 \leq 0, 3x_2 + 2 \leq 0\},$$

$$Q = \left\{ y \in \mathbb{R}^4 \mid \frac{1}{2}y^T B_1 y + b_1^T y - 1 \leq 0, \frac{1}{2}y^T B_2 y + b_2^T y - 2 \leq 0 \right\},$$

表 1 比较算法 3.1 和松弛 CQ 算法

	$a = 5$	$a = 50$	$a = 500$	$a = 5,000$	$a = 20,000$
松弛 CQ 算法	0.1055	0.4126	0.6487	1.4480	2.7401
算法 3.1	0.5931	0.6237	0.6538	0.6756	0.6697

其中

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6.5 & 6 \\ 4 & 2 & 0.5 & 2.5 \\ 6 & 0.5 & 10 & 2.5 \\ 6 & 2.5 & 2.5 & 9 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 18 & 12 & 7 & 19.5 \\ 12 & 2 & 2.5 & 7.5 \\ 7 & 2.5 & 10 & 14 \\ 19.5 & 7.5 & 14 & 18 \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 & 3 & 6 \\ 1 & 0 & 4 & 2 & 5 \\ 6 & 9 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

此例中, C 和 Q 非凸. 由算法 3.1, 可求得如下解点:

$$(0.0000, -0.6667, 0.8611, -0.2181, -0.3341)^T.$$

计算用时 2.95 秒. 由于集合 C 和 Q 为非凸集, CQ 类算法无法用于这一问题的求解.

例 4.3 考虑 SFP 中集合 (其中 R 为参数) 如下:

$$C = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid -f_1(x) := x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + 2x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2 - 4x_1 - 4x_2 - 4x_3 + 1 \leq 0\},$$

$$Q = \{y \in \mathbb{R}^3 \mid (y_1 - 2)^2 + (y_2 - 2)^2 + (y_3 - 2)^2 - R \leq 0\}.$$

易知, 函数 $-f_1(x)$ 在 $\mathbb{R}^3$ 上为凸函数. 事实上,

$$-\nabla^2 f_1(x) = \begin{bmatrix} 12x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 & 8x_1x_2 & 4x_1x_3 \\ 8x_1x_2 & 4x_1^2 + 12x_2^2 + 2x_3^2 & 4x_2x_3 \\ 4x_1x_3 & 4x_2x_3 & 2x_1^2 + 2x_2^2 + 12x_3^2 \end{bmatrix}$$

$$= 4 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}^T + 4 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix}^T + \text{diag} \left(\begin{bmatrix} 4x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 \\ 4x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 \\ 2x_1^2 + 2x_2^2 + 8x_3^2 \end{bmatrix} \right).$$

易见, 对任意 $x \in \mathbb{R}^3$, $-\nabla^2 f_1(x)$ 为半正定的 (这里 $\text{diag}(w)$ 表示由向量 w 生成的对角阵). 集合 C 和 Q 均为凸集. 对于 $A = I$ 的情形, 这一 SFP 等价于求 $x^* \in C \cap Q$, 使得 $C \cap Q \neq \emptyset$ (问题有解) 的最小 R 值为 $R_0 \approx 2.0623$, 即为点 $(2, 2, 2)$ 到集合 C 距离的平方.

对 R 的不同取值, 应用算法 3.1 求解此 SFP, 相应计算结果见表 2.

例 4.4 设集合 C 定义同例 4.3, 集合 Q 定义如下:

$$Q := \{y \in \mathbb{R}^3 \mid (y_1 - 2)^2 + (y_2 - 2)^2 + a(y_3 - 2)^2 - 1.5 \leq 0\},$$

其中 a 是变化参数. 矩阵 A 仍为单位阵 I . 当 $a = 1$ 时, 由 $1.5 < R_0$ (上例) 知, SFP 不可行. 然而, 问题的可行性随着 a 的变化而变化. 表 3 给出了 a 的不同取值所对应的 SFP 可行性, 以及算法 3.1 求解此 SFP 的计算结果. 通过在 C 和 Q 中约束条件下极大化 a 计算可知, 使得问题可行, 即 $C \cap Q \neq \emptyset$ 的参数 a 的最大值约为 0.2786.

表 2 例 4.3 的计算结果

R	可行性	所得解点 x^*
4.00	可行	(0.8228, 0.8604, 0.8531)
3.00	可行	(1.0012, 0.9655, 1.0345)
2.07	可行	(1.1813, 1.1285, 1.1998)
2.06	不可行	无
2.00	不可行	无
1.00	不可行	无

表 3 例 4.4 的计算结果

a	可行性	所得解点 x^*
1.00	不可行	无
0.50	不可行	无
0.25	可行	(1.2745, 1.2381, 0.7461)
0.10	可行	(1.2237, 1.2001, 0.3954)
0.00	可行	(1.1187, 1.1495, -0.0248)
-5.00	可行	(0.0912, 0.0374, 0.1216)

例 4.5 考虑 SFP 由如下集合 C 和 Q 给出:

$$C = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 5x_1^{10} + 3x_1^5x_3 + x_2^4 + x_3^2 + 8x_3 + 1 \leq 0, x_1^4 + 5x_1^2x_2^2 - 8x_1x_2 + 3x_2x_3^3 + x_2^4 + x_3^4 - 1 \leq 0\},$$

$$Q = \left\{y \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{2}y^T B_1 y + b_1^T y \leq 0, \frac{1}{2}y^T B_2 y + b_2^T y - 1 \leq 0\right\},$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1.5 \\ 1.5 & 5 \end{bmatrix},$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 5 & 0.5 \\ 0.5 & 2 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

显然, 集合 C 和 Q 非凸. 由算法 3.1 可知该 SFP 可行, 并计算求得一个解点

$$(0.0138, -0.0128, -0.1270)^T,$$

用时约 2 秒.

例 4.6 设 SFP 中的集合如下 (R 为参数):

$$C = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid f(x) := x_1^5 - 10x_1^4x_2 + 8x_1^2x_2^3 - 6x_1^2x_2^2 + 5x_1^3 - 7x_1^2x_2 + 3x_1x_2^2 - 9x_2^3 + 2x_1^2 + 1 \leq 0\},$$

$$Q = \{y \in \mathbb{R}^2 \mid y_1^2 + y_2^2 - R \leq 0\}.$$

给定矩阵 $A = I$.

此例中 C 非凸且无界. 对于 R 的不同取值, 应用算法 3.1 求解此 SFP, 数值计算结果见表 4.

表 4 例 4.6 的计算结果

R	可行性	所得解点 x^*
100.0	可行	$(-0.0845, 0.4690)$
10.0	可行	$(-0.0126, 0.4793)$
1.0	可行	$(-0.2343, 0.4292)$
0.5	可行	$(-0.2128, 0.4370)$
0.2	不可行	无
0.1	不可行	无

表 5 例 4.7 的计算结果

a	$C \cap Q$	可行性	所得解点 x^*
-2.0	非凸	可行	$(0.4520, -0.8920)$
-1.5	非凸	可行	$(0.4059, -0.9139)$
-1.0	非凸	可行	$(-0.0922, -0.0922)$
0.0	非凸	可行	$(1.0000, 0.0000)$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	凸	可行	$(0.7071, 0.7071)$
1.8	凸	不可行	无

例 4.7 设 SFP 中矩阵 $A = I$, 集合 C 和 Q 如下 (a 为参数):

$$C = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{9}x_1^2 + \frac{1}{4}x_2^2 - 1 \leq 0, x_1^2 + x_2^2 - 1 \geq 0 \right\},$$

$$Q = \{ y \in \mathbb{R}^2 \mid y_2 - y_1 \leq 0, y_1 \leq 2, y_2 \geq a \}.$$

集合 C 非凸, 且解集 $C \cap Q$ 当 $a < \sqrt{2}/2$ 时非凸. 当 $a > \sqrt{36/13} \approx 1.6641$ 时, 该 SFP 不可行.

对不同 a 的取值, 应用算法 3.1 求解此 SFP, 相应计算结果见表 5.

5 结论

本文研究了多项式分裂可行问题. 该问题中的集合为半代数集, 由多项式不等式定义. 与已有研究工作不同, 本文中的多项式分裂可行问题允许为非凸的, 甚至为不可行 (无解) 的. 首先给出了多项式分裂可行问题解集的半定松弛表示, 并提出了保证松弛化表示是紧的条件; 然后基于前述松弛化结果, 建立了算法 3.1 求解多项式分裂可行问题, 证明了算法的收敛性. 在较为一般的条件下, 证明了如果分裂可行问题有解, 则可通过本文建立的算法求得一个解点; 如果问题无解, 则该算法能够判别问题不可行. 最后通过数值实验对算法进行了检验. 数值实验结果进一步验证了算法的有效性和上述理论分析结论的正确性.

致谢 本文工作系赵金玲访问加州大学圣地亚哥分校期间完成.

参考文献

- 1 Censor Y, Elfving T. A multiprojection algorithm using Bregman projections in a product space. Numer Algorithms, 1994, 8: 221-239

- 2 Byrne C. Iterative oblique projection onto convex sets and the split feasibility problem. *Inverse Problems*, 2002, 18: 441–453
- 3 Byrne C. A unified treatment of some iterative algorithms in signal processing and image reconstruction. *Inverse Problems*, 2004, 20: 103–120
- 4 Censor Y, Bortfeld T, Martin B, et al. A unified approach for inversion problems in intensity-modulated radiation therapy. *Phys Med Biol*, 2006, 51: 2353–2365
- 5 Censor Y, Elfving T, Kopf N, et al. The multiple-sets split feasibility problem and its applications for inverse problems. *Inverse Problems*, 2005, 21: 2071–2084
- 6 Rockafellar R T. *Convex Analysis*. Princeton: Princeton University Press, 1970
- 7 Zarantonello E. Projections on convex sets in Hilbert space and spectral theory. In: *Contributions to Nonlinear Functional Analysis*. New York: American Academic Press, 1971, 237–424
- 8 Censor Y, Motova A, Segal A. Perturbed projections and subgradient projections for the multiple-sets split feasibility problem. *J Math Anal Appl*, 2007, 327: 1244–1256
- 9 Echebest N, Guardarucci M T, Scolnik H, et al. An acceleration scheme for solving convex feasibility problems using incomplete projection algorithms. *Numer Algorithms*, 2004, 35: 331–350
- 10 Yang Q. The relaxed CQ algorithm solving the split feasibility problem. *Inverse Problems*, 2004, 20: 1261–1266
- 11 Qu B, Xiu N. A note on the CQ algorithm for the split feasibility problem. *Inverse Problems*, 2005, 21: 1655–1665
- 12 Xu H. A variable Krasnoselskii-Mann algorithm and the multiple-set split feasibility problem. *Inverse Problems*, 2006, 22: 2021–2034
- 13 Zhang W, Han D, Li Z. A self-adaptive projection method for solving the multiple-sets split feasibility problem. *Inverse Problems*, 2009, 25: 115001
- 14 Dang Y, Gao Y. The strong convergence of a KM-CQ-like algorithm for a split feasibility problem. *Inverse Problems*, 2011, 27: 015007
- 15 Zhao J, Yang Q. Self-adaptive projection methods for the multiple-sets split feasibility problem. *Inverse Problems*, 2011, 27: 035009
- 16 Wolkowicz H, Saigal R, Vandenberghe L. *Handbook of Semidefinite Programming: Theory, Algorithms, and Applications*. International Series in Operations Research & Management Science. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2000
- 17 Lasserre J B. Global optimization with polynomials and the problem of moments. *SIAM J Optim*, 2001, 11: 796–817
- 18 Lasserre J B. *Moments, Positive Polynomials and Their Applications*. London: Imperial College Press, 2009
- 19 Lasserre J B. *An Introduction to Polynomial and Semi-Algebraic Optimization*. Cambridge: Cambridge University Press, 2015
- 20 Laurent M. Sums of squares, moment matrices and optimization over polynomials. In: *Emerging Applications of Algebraic Geometry*. The IMA Volumes in Mathematics and Its Applications, vol. 149. New York: Springer, 2009, 157–270
- 21 Laurent M. Optimization over polynomials: Selected topics. In: *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*. Seoul: Kyung Moon SA Co. Ltd., 2014, 843–869
- 22 Nie J. The A -truncated K -moment problem. *Found Comput Math*, 2014, 14: 1243–1276
- 23 Helton J W, Nie J. Semidefinite representation of convex sets. *Math Program*, 2010, 122: 21–64
- 24 Blekherman G, Parrilo P, Thomas R. *Semidefinite Optimization and Convex Algebraic Geometry*. MPS-SIAM Series on Optimization, vol. 13. Philadelphia: SIAM, 2013
- 25 Reznick B. Some concrete aspects of Hilbert’s 17th problem. *Contemp Math*, 2000, 253: 251–272
- 26 Helton J W, Nie J. Sufficient and necessary conditions for semidefinite representability of convex hulls and sets. *SIAM J Optim*, 2009, 20: 759–791
- 27 Lasserre J B. Convex sets with semidefinite representation. *Math Program*, 2009, 120: 457–477
- 28 Lasserre J B. Convexity in semialgebraic geometry and polynomial optimization. *SIAM J Optim*, 2008, 19: 1995–2014
- 29 Putinar M. Positive polynomials on compact semi-algebraic sets. *Indiana Univ Math J*, 1993, 42: 969–984
- 30 Bochnak J, Coste M, Roy M F. *Real Algebraic Geometry*. New York: Springer, 1998
- 31 Schweighofer M. Optimization of polynomials on compact semialgebraic sets. *SIAM J Optim*, 2005, 3: 805–825
- 32 Nie J. Certifying convergence of Lasserre’s hierarchy via flat truncation. *Math Program*, 2013, 142: 485–510
- 33 Nie J. Optimality conditions and finite convergence of Lasserre’s hierarchy. *Math Program*, 2014, 146: 97–121
- 34 Henrion D, Lasserre J, Loeferberg J. GloptiPoly 3: Moments, optimization and semidefinite programming. [Http://homepages.laas.fr/henrion/software/gloptipoly3](http://homepages.laas.fr/henrion/software/gloptipoly3), 2008
- 35 Pólik I. Addendum to the SeDuMi user guide version 1.1. [Http://sedumi.ie.lehigh.edu/sedumi/files/sedumi-downloads/SeDuMi_Guide_11.pdf](http://sedumi.ie.lehigh.edu/sedumi/files/sedumi-downloads/SeDuMi_Guide_11.pdf), 2005

- 36 Sturm J. Using SeDuMi 1.02. A Matlab toolbox for optimization over symmetric cones. *Optim Methods Softw*, 1999, 11: 625–653

The split feasibility problem with polynomials

Jiawang Nie & Jinling Zhao

Abstract This paper discusses the split feasibility problem with polynomials. The sets are semi-algebraic, defined by polynomial inequalities. They can be either convex or nonconvex, either feasible or infeasible. We give semidefinite relaxations for representing the intersection of the sets. Properties of the semidefinite relaxations are studied. Based on the representation, a semidefinite relaxation algorithm is given for solving the split feasibility problem. Under a general condition, we prove that if the split feasibility problem is feasible, we can get a feasible point; if it is infeasible, we can obtain a certificate for the infeasibility. Some numerical examples are given.

Keywords split feasibility problem, polynomial, semidefinite relaxation

MSC(2010) 90C25, 65K10, 90C33

doi: 10.1360/SCM-2018-0582