随机游动轨道中的分枝结构

献给王梓坤教授 90 华诞

王华明¹, 张琳², 张美娟³, 洪文明^{4*}

1. 安徽师范大学数学与统计学院, 芜湖 241003;

2. 北京邮电大学理学院, 北京 100876;

3. 中央财经大学统计与数学学院, 北京 100081;

4. 北京师范大学数学科学学院, 北京 100875

E-mail: hmking@ahnu.edu.cn, zhanglin2011@bupt.edu.cn, zhangmeijuan1227@163.com, wnhong@bnu.edu.cn

收稿日期: 2018-03-06; 接受日期: 2018-08-05; 网络出版日期: 2019-03-07; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11501008, 11801596 和 11131003) 资助项目

摘要 随机游动是一类经典的随机过程. 利用母函数等分析方法, 已有丰富且深入的研究. 而基于对 (紧邻) 随机游动轨道分解而得到的内在分枝结构, 是研究非 (空间) 齐次随机游动的基本工具. 这一方法首先被 Kesten 等 (1975) 用于研究随机环境中紧邻随机游动, 得到游动深刻的极限性质. 对于非紧邻情形, 一直没有建立游动相应的内在分枝结构. 本文综述了近年来作者在这方面的研究工作, 建立了有界跳幅及带形上随机游动的内在分枝结构, 并应用分枝结构得到相应随机游动的极限性质.

关键词 分枝结构 随机游动 首中时

MSC (2010) 主题分类 60G50, 60J80

1 引言

简单随机游动可表示为独立同分布随机变量的和, 因而可用分析工具研究其极限定理. 对一般的随机游动, 当转移概率为空间非齐次 (依赖于游动所处的位置) 或游动非紧邻 (每一步的跳幅不再为 1) 时, 无法将游动表示为独立同分布随机变量之和的形式, 此时如母函数和特征函数等分析工具已不能使用, 所以, 欲准确刻画游动的轨道性质及遍历性质, 需要发展新的工具. 下面通过一个直观的问题说明研究随机游动时可能会遇到的困境.

首先考虑简单随机游动 $\{X_n\}$, 其初值 $X_0 = 0$, 转移概率

$$P(X_{n+1} = X_n + 1 \mid X_n) = 1 - P(X_{n+1} = X_n - 1 \mid X_n) = p \in (0, 1).$$

英文引用格式: Wang H M, Zhang L, Zhang M J, et al. Branching structure within random walk (in Chinese). Sci Sin Math, 2019, 49: 517–534, doi: 10.1360/N012018-00049

一个简单的问题是 $\{X_n\}$ 何时击中正半轴, 即研究首中时 $T_1 = \inf\{n > 0 : X_n = 1\}$. 由反射原理, 可得

$$P(T_1 = 2n + 1) = \frac{1}{2n + 1} \binom{2n + 1}{n + 1} p^{n+1} (1 - p)^n, \quad n \geq 0. \quad (1.1)$$

进一步计算 T_1 的母函数得

$$\zeta(s) := E(s^{T_1}) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4pqs^2}}{2qs}, \quad |s| < 1. \quad (1.2)$$

现在考虑更一般的随机游动. 设 $\{X_n\}$ 为一个从 0 开始的 Markov 链, 其转移概率为

$$P(X_{n+1} = X_n + 1 \mid X_n = i) = 1 - P(X_{n+1} = X_n - 1 \mid X_n = i) = p_i \in (0, 1).$$

注意到此时 $\{X_n\}$ 依然是紧邻随机游动, 但转移概率依赖于其当前所在的位置 i . 同样定义首中时 $T_1 = \inf\{n > 0 : X_n = 1\}$. 这种情形下要得出形如 (1.1) 和 (1.2) 的结果已经不可能了.

1975 年, Kesten 等^[1] 通过分析随机游动的轨道发现, 紧邻随机游动轨道中蕴含着一个单物种分枝过程. 因此, 首中时 T_1 可表示为一个下临界分枝过程总人口数的泛函. 基于这个事实, Kesten 等证明了著名的随机环境中随机游动稳定律: 在各种情形之下, 经过适当的重整化和中心化, 游动收敛到一个稳定分布. 随机游动和分枝过程都是非常经典的随机过程, 由文献 [1] 可得到启示: 如果能够建立起联系两者之间的桥梁, 就能够以分枝过程为工具研究随机游动. 从上述例子可看出, 处理转移概率非齐次的紧邻随机游动已经颇为不易, 对于一般的非紧邻随机游动, 游动的轨道变得更加复杂, 揭示出隐藏于游动轨道之中的分枝结构就显得更为重要. 这项工作是由作者在文献 [2-5] 中完成的.

作者建立有界跳幅随机游动分枝结构的初衷是希望用分枝结构去研究随机环境中具有有界跳幅随机游动的性质, 最初的想法是将 Kesten 等关于随机环境中紧邻随机游动的稳定律推广到有界跳幅的情形. 后来发现, 随机游动轨道中的分枝结构不但对于研究随机环境中随机游动有重要作用, 也是研究非随机环境中随机游动性质的重要工具. 下面首先介绍有界跳幅随机游动的模型, 然后给出各种情形下的分枝结构和应用.

2 随机游动轨道中的内在分枝结构

首先介绍整数轴 $\mathbb{Z}$ 上有界跳幅随机游动的具体模型. 固定 $L, R \in \{1, 2, \dots\}$. 对 $i \in \mathbb{Z}$, 假设

$$\omega_i = (\omega_i(-L), \dots, \omega_i(-1), \omega_i(1), \dots, \omega_i(R))$$

是 $\mathbb{Z}$ 上的一个概率测度. 它将被用来表示随机游动在位置 i 处的转移概率. 令

$$\omega = (\dots, \omega_{-1}, \omega_0, \omega_1, \dots),$$

通常称为游动的环境. 固定环境 ω , 假设 $\{X_n\}$ 是一个 Markov 链, 其初始分布为

$$P_\omega(X_0 = x) = 1, \quad (2.1)$$

转移概率为

$$P_\omega(X_{n+1} = i + j \mid X_n = i) = \omega_i(j), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad j \in \{-L, \dots, R\} \setminus \{0\}. \quad (2.2)$$

将由 (2.1) 和 (2.2) 诱导出的 $\{X_n\}$ 的概率记为 P_ω^x , 其对应的期望算子记为 E_ω^x . 当上标 $x = 0$ 时, 将之省略, 简记为 P_ω 和 E_ω .

定义 2.1 称如上定义的 Markov 链 $\{X_n\}$ 为一个有界跳幅的随机游动, 简记为 (L, R) 随机游动, L 和 R 分别表示游动向左和向右的最大跳幅. 特别地, 也称 $(1, 1)$ 随机游动为紧邻随机游动.

本文旨在介绍随机游动轨道中的分枝结构, 细节上并不涉及随机环境中随机游动的内容, 但会讨论分枝结构在随机环境中随机游动中的应用, 所以, 为方便读者阅读, 这里给随机环境中随机游动下一个定义. 简单地说, 若 $\omega := (\dots, \omega_{-1}, \omega_0, \omega_1, \dots)$ 是一个随机序列, 则称 ω 为一个随机环境. 若 ω 是一个独立同分布的序列, 则称 ω 为一个独立同分布的环境. 若 ω 为一个平稳遍历的序列, 则称 ω 为一个平稳遍历的环境. 准确地说, 设 Ω 为所有序列 ω 构成的空间, Υ 为 Ω 上由测度弱收敛所诱导的拓扑, $\mathcal{F}$ 为 Υ 中开集生成的 Borel σ -代数, $\mathbb{P}$ 为 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上的一个概率测度. 所谓随机环境就是 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上根据概率 $\mathbb{P}$ 抽出的一个随机元 ω . 给定环境 ω , 设 $\{X_n\}$ 是由 (2.1) 和 (2.2) 定义的 Markov 链, 称 $\{X_n\}$ 为随机环境 ω 中的 (L, R) 随机游动. 给定环境 ω , 由 $\{X_n\}$ 所诱导出的概率 P_ω^x 称为淬火 (quenched) 概率. 定义 $\mathbb{Z}^N$ 上一个新的概率测度

$$\mathbf{P}^x(\cdot) := \int_{\Omega} P_\omega^x(\cdot) \mathbb{P}(d\omega).$$

称 $\mathbf{P}^x$ 为退火 (annealed) 概率.

在本文中, 随机游动简记为 RW (random walk); 随机环境中随机游动简记为 RWRE (random walk in random environment); (L, R) 随机游动简记为 (L, R) RW; 类似地, 随机环境中 (L, R) 随机游动简记为 (L, R) RWRE.

对于 RWRE, 通常需要分别在淬火概率和退火概率之下来讨论其性质, 两种概率之下的性质表现出很大的差异. 环境的随机化也导致 RWRE 的研究变得很困难, 与简单 RW 相比, RWRE 展现出了一些非常有趣的性质, 有兴趣的读者可以参见文献 [6].

本节将介绍作者在文献 [2–5] 中所构造的非紧邻 RW 轨道中的内在分枝结构, 并系统介绍分枝结构在 RWRE 的大数定律、稳定律、更新定理、局部时、平稳分布、统计推断和非随机环境中 RW 的遍历性等方面的应用.

由于 (L, R) RW 的分枝结构较为复杂, 所以, 首先介绍紧邻情形即 $(1, 1)$ RW 的分枝结构, 以体现随机游动轨道中分枝结构的基本思想, 然后分别介绍 $(L, 1)$ RW、 $(1, R)$ RW 和 (L, R) RW 的分枝结构, 最后介绍带形上 RW 的分枝结构.

2.1 $(1, 1)$ RW

考虑 $(1, 1)$ RW $\{X_n\}$, 其为 Markov 链, 初始分布 $P_\omega(X_0 = 0) = 1$, 转移概率为

$$\begin{aligned} P_\omega(X_{n+1} = k + 1 \mid X_n = k) &= \omega_k(1), \\ P_\omega(X_{n+1} = k - 1 \mid X_n = k) &= \omega_k(-1) = 1 - \omega_k(1). \end{aligned}$$

关于 $(1, 1)$ RW 分枝结构的研究可追溯到 Harris^[7]. Kesten 等^[1] 和 Dwass^[8] 从不同的角度刻画了 $(1, 1)$ RW 的内蕴分枝结构. 其中文献 [1] 研究的是转移概率空间非齐次的情形; 文献 [8] 研究的是转移概率空间齐次的情形. 本节对文献 [1] 中的结果给出详细介绍.

记 $T_0 = 0$, 对 $k \geq 1$, 用 $T_k = \inf\{n : X_n = k\}$ 表示游动首次击中位置 k 的时间. 如果游动 $\{X_n\}$ 常返或暂留趋于 $+\infty$, 则 $\forall k \geq 0$, 总有 $P_\omega(T_n < \infty) = 1$. 对于 $(1, 1)$ RW, 当空间非齐次时, 常返暂留性在作者所了解的文献中并未发现, 所以下面给出常返和暂留的判定准则.

2.1.1 常返性与暂留性

对 $x \in \mathbb{Z}$, 定义 $\rho_x = \frac{\omega_x(-1)}{\omega_x(1)}$. 记

$$S_+ := \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{x=1}^{j-1} \rho_x, \quad S_- := \sum_{j=0}^{\infty} \prod_{x=0}^j \rho_{-x}^{-1}.$$

定理 2.1 设 $\forall x \in \mathbb{Z}$, 有 $\omega_x(1), \omega_x(-1) > 0$, 则

- (i) 当 $S_+ < \infty$ 和 $S_- = \infty$ 时, $P_\omega(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = +\infty) = 1$;
- (ii) 当 $S_+ = \infty$ 和 $S_- < \infty$ 时, $P_\omega(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = -\infty) = 1$;
- (iii) 当 $S_+ = \infty$ 和 $S_- = \infty$ 时, $P_\omega(\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n = -\infty, \limsup_{n \rightarrow \infty} X_n = +\infty) = 1$;
- (iv) 当 $S_+ < \infty$ 和 $S_- < \infty$ 时, $P_\omega(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = -\infty) > 0$, $P_\omega(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = +\infty) > 0$.

证明 利用 Lyapunov 函数的方法及鞅收敛定理来证明该定理. 记 $\mathcal{F}_n = \sigma\{X_k, 0 \leq k \leq n\}$. 假设可找到函数 f , 使得

$$E_\omega(f(X_{n+1}) | \mathcal{F}_n) = f(X_n), \quad (2.3)$$

则 $\{f(X_n)\}_{n \geq 0}$ 是一个鞅. 事实上, 由 (2.3) 知, f 满足

$$\omega_k(1)f(k+1) + \omega_k(-1)f(k-1) = f(k).$$

整理得 $f(k+1) - f(k) = \rho_k(f(k) - f(k-1))$. 若令 $f(1) = 1, f(0) = 0$, 则有

$$f(k) = \sum_{j=1}^k \prod_{x=1}^{j-1} \rho_x, \quad k \geq 2; \quad f(k) = - \sum_{j=k+1}^0 \prod_{x=j}^0 \rho_x^{-1}, \quad k \leq -1.$$

易知

$$S_+ = \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{x=1}^{j-1} \rho_x = \lim_{k \rightarrow \infty} f(k), \quad S_- = \sum_{j=0}^{\infty} \prod_{x=0}^j \rho_{-x}^{-1} = - \lim_{k \rightarrow -\infty} f(k).$$

证明 X_n 的常返暂留性需用到如下鞅收敛定理的结论: 如果 $\{Y_n\}$ 是一个鞅且它有一致的上界(下界), 则极限 $Y_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} Y_n$ 几乎必然存在且 $E_\omega(|Y_\infty|) < \infty$.

现完成常返暂留性的证明. 首先证 (i), 假设 $S_+ < \infty, S_- = \infty$, 则 $\{f(X_n)\}$ 是鞅且有一致的上界, 由鞅收敛定理可知, $f(X_n)$ 几乎必然地收敛到一个有限的极限. 但 $f(X_n)$ 仅在 X_n 等于无穷处有聚点, 所以, $P_\omega(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = +\infty) = 1$. 类似可证 (ii).

下证 (iv). 设 $S_+ < \infty, S_- < \infty$, 则 $f(X_n)$ 几乎必然地收敛到一个有限的极限, 且 $X_n = -\infty$ 或 $X_n = +\infty$ 处皆有可能为其聚点. 此外, 由控制收敛定理可知, $\forall k \in \mathbb{Z}, E_\omega^k(f(X_\infty)) = f(k)$, 且 $-S_- < f(k) < S_+$, 所以, $P_\omega(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = -\infty) > 0, P_\omega(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = +\infty) > 0$.

最后证明 (iii). 设 $S_+ = \infty, S_- = \infty$. 对 $M \in \mathbb{R}$, 定义 $\tau_M = \inf\{n \geq 0 : f(X_n) \geq M\}$, $\sigma_M = \inf\{n \geq 0 : f(X_n) \leq M\}$, 则 $f(X_{n \wedge \tau_M})$ 是鞅且有一致的上界, 故它几乎必然地收敛到一个有限极限, 因此几乎必然地有 $\tau_M < \infty$. 由于 M 是任意的, 所以, $P_\omega(\limsup_{n \rightarrow \infty} X_n = +\infty) = 1$. 同理可得 $P_\omega(\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n = -\infty) = 1$. $\square$

2.1.2 (1, 1) RW 的分枝结构

假定游动 $\{X_n\}$ 常返或暂留趋于 $+\infty$, 即 $\limsup_{n \rightarrow \infty} X_n = +\infty$. 此时, $P_\omega(T_n < \infty) = 1, \forall n \geq 0$. 现固定 $n \geq 1$. 记 $U_n^n = 0$, 且对 $k \leq n-1$, 定义

$$U_k^n := \#\{0 \leq m < T_n : X_m = k, X_{m+1} = k-1\}.$$

在本文中, 记号 $\#\{\cdot\}$ 用于表示集合 $\{\cdot\}$ 中元素的个数. 由定义可知, U_k^n 表示游动击中 n 之前从 k 跳到 $k-1$ 的次数. Kesten 等^[1] 建立起了 (1, 1) RW 轨道中的分枝结构.

定理 2.2^[1] 假定 $\limsup_{n \rightarrow \infty} X_n = +\infty$, 则

(i) $U_n^n, U_{n-1}^n, U_{n-2}^n, \dots$ 构成一个单物种带移民的分枝过程, 其移民机制和分枝机制分述如下. 分枝过程前 n 代中, 每一代有且仅有一个移民, 其他每一代皆没有移民. $\{U_k^n\}_{k < n}$ 的分枝机制为

$$P_\omega(U_k^n = m \mid U_{k+1}^n = 1) = (1 - \omega_k(1))^m \omega_k(1), \quad k \leq n-1, \quad m \geq 0. \quad (2.4)$$

(ii) T_n 可表示为 U_k^n ($k \leq n$) 的函数,

$$T_n = n + 2 \sum_{i \leq n-1} U_i^n. \quad (2.5)$$

注 2.1 (i) (1, 1) RW 分枝结构的构造思想非常清楚, 不过其严格证明较为复杂, 这里略去证明. 在下文中将给出更为一般的 $(L, 1)$ RW 分枝结构的证明. 注意到, (2.4) 中的分枝机制是几何分布, 可解释如下: 站在 k 处, 如果游动从 k 跳到 $k+1$ 视为成功 (概率为 $\omega_k(1)$), 从 k 跳到 $k-1$ 视为失败 (概率为 $1 - \omega_k(1)$), 则第一次成功所需试验次数服从几何分布.

(ii) (2.5) 中关于 T_n 的表达式可分析如下: 游动的最终目的是到达位置 n , 而 U_k^n 记录了它从 k 跳到 $k-1$ 的次数, 所以, $\sum_{k \leq n-1} U_k^n$ 为游动往下跳的总次数. 为了最终达到位置 n , 游动每从 k 跳到 $k-1$ 一次, 必然会对应地从 $k-1$ 跳到 k 一次, 所以, (2.5) 中会有 $2 \sum_{k \leq n-1} U_k^n$ 这一项. 注意到, 对 $0 \leq k \leq n-1$, 游动首次从 k 向上到 $k+1$ 的跳并没有任何从 $k+1$ 向下到 k 的跳与之对应, 故 (2.5) 右端会出现 n 这一项.

2.1.3 (1, 1) RW 分枝结构的应用综述

由于随机游动轨道与分枝过程之间有如上对应关系, 故可用分枝过程的理论来研究随机游动的极限性质. 关于 (1, 1) RW 分枝结构, 在研究 RW, 特别是 RWRE 时有很多重要的应用, 现综述如下.

首先介绍分枝结构在 (1, 1) RWRE 概率性质的研究中的一些应用. 随机环境带来了一些新的现象, 但环境的随机化使原来研究经典随机游动的一些分析的方法不再适用. 内在分枝结构是研究 RWRE 的极限理论的一个基础工具. 在研究 (1, 1) RWRE 中, 以分枝结构为工具, Kesten 等^[1] 证明了游动的稳定性; Gantert 和 Shi^[9] 证明了在暂留情形下, 以一个正概率, 游动在某个位置的占位时会占所有时间的一个正比例. Zeitouni^[6] 给出了随机环境测度相对于“从粒子看环境”得到的等价测度的密度函数的显式表达, 从而利用“从粒子看环境”的方法证明游动的大数定律; Afanasyev^[10] 证明了 (1, 1) RWRE 泛函形式的 Ritter 定理, 而在另一篇文献^[11] 中, 证明了条件 Ritter 定理. Hong 和 Yang^[12] 证明了常返的 (1, 1) RWRE (Sinai 游动) 的局部时的重整化极限过程为 Brox 扩散过程的局部时.

此外, 分枝结构对研究 (1, 1) RWRE 的参数估计也有重要作用. 文献^[13, 14] 利用分枝结构, 给出了一类 (1, 1) RWRE 环境参数的极大似然估计, 并研究了估计量的相合性和渐近正态性等性质.

除了 RWRE, 分枝结构对研究固定环境中 RW 的极限行为也有重要作用. 例如, Rogers^[15] 证明了紧邻简单随机游动的局部时收敛到 Brown 运动局部时. 虽然对紧邻随机游动而言, 平稳分布可以直接计算, 但也可利用分枝结构, 从另一角度研究半直线上正常返随机游动的平稳分布.

总之, $(1, 1)$ RW 分枝结构是发展随机 (或非随机) 环境中随机游动的极限理论的重要工具. 通过建立 (L, R) RW 的分枝结构, 寻找蕴藏于 (L, R) RW 轨道中的分枝过程, 将上述部分研究成果推广到更为一般的随机游动, 例如, (L, R) RW 是很有吸引力的. 下面分别介绍 $(L, 1)$ RW、 $(1, R)$ RW 和 (L, R) RW 及带形上随机游动的内在分枝结构及其应用.

2.2 $(L, 1)$ RW

为更清晰地介绍 (L, R) RW 中的分枝结构, 首先在本节中介绍 $(L, 1)$ RW 的分枝结构及其应用. 由于向右的跳是紧邻的, 所以, $(L, 1)$ RW 继承了 $(1, 1)$ RW 的部分特性; 但向左的跳是非紧邻的, 所以其轨道会展现出新的性质, 其分枝结构也蕴含着新的思想. 本节主要引用文献 [2] 中的结果, 为方便阅读, 给出其详细证明.

2.2.1 $(L, 1)$ RW 的分枝结构

类似地, 定义 $(L, 1)$ RW 的首中时 $T_0 = 0$, $T_n = \inf\{k \geq 0 : X_k = n\}$, $n \geq 1$. 对 $-\infty < i < n$, $1 \leq l \leq L$, 定义 $U_{i,l}^n := \#\{0 < k < T_n : X_{k-1} > i, X_k = i - l + 1\}$, 则 $U_{i,l}$ 表示游动在 T_n 之前从 i 之上的某个位置跳到 $i - l + 1$ 的次数. 记 $U_i^n := (U_{i,1}^n, U_{i,2}^n, \dots, U_{i,L}^n)$, 则 $|U_i^n| := U_{i,1}^n + U_{i,2}^n + \dots + U_{i,L}^n$ 记录了从 i 之上某位置往下到达或者穿过 i 的总次数.

通过分析随机游动 $\{X_n\}$ 的轨道, 如下定理建立了 $(L, 1)$ RW 轨道中的分枝结构: 一个 L -物种带移民的非齐次分枝过程. 虽然直接准确计算出 T_n 的分布几乎不可能, 但由如下定理可知, T_n 可用一个多物种分枝过程表示, 这为研究 T_n 的性质提供了方法.

首先叙述几个关于向量的约定. $\mathbf{e}_i$ ($i \geq 1$) 表示第 i 个分量为 1 且所有其他分量为 0 的 L 维标准单位向量. $\mathbf{v}^T$ 表示向量 $\mathbf{v}$ 的转置.

定理 2.3 假定 $\limsup_{n \rightarrow \infty} X_n = +\infty$, 则对 $n > 0$, 有

(i) $T_n = n + \sum_{i=-\infty}^{n-1} U_i^n \mathbf{x}_0$, 其中 $\mathbf{x}_0 = (2, 1, \dots, 1)^T$.

(ii) 过程 $\{U_i^n\}_{i < n}$ 形成一个 L -物种带移民的非齐次分枝过程, 其移民具有如下特点: 以概率 1, 一个第 1 个物种的个体在 k ($0 \leq k \leq n-1$) 处移入, 但在 k ($k \geq n$ 或 $k < 0$) 处, 没有任何移民. $\{U_i^n\}_{i < n}$ 的分枝机制如下: 对 $(u_1, \dots, u_L) \in \mathbb{N}^L$, 有

$$P_\omega(U_{i-1}^n = (u_1, \dots, u_L) \mid U_i^n = \mathbf{e}_1) = \frac{(u_1 + \dots + u_L)!}{u_1! \dots u_L!} \omega_i(-1)^{u_1} \dots \omega_i(-L)^{u_L} \omega_i(1), \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} P(U_{i-1}^n = \mathbf{e}_{l-1} + (u_1, \dots, u_L) \mid U_i^n = \mathbf{e}_l) \\ = \frac{(u_1 + \dots + u_L)!}{u_1! \dots u_L!} \omega_i(-1)^{u_1} \dots \omega_i(-L)^{u_L} \omega_i(1), \quad 2 \leq l \leq L. \end{aligned} \quad (2.7)$$

注 2.2 (i) 由于向上的跳是紧邻的, 所以, $(L, 1)$ RW 分枝结构的移民结构与 $(1, 1)$ RW 相同. 但由于向下的跳并非紧邻的, 而是有界跳幅, 所以需要用一个 L -物种分枝过程来刻画.

(ii) 第 l ($l \geq 2$) 物种个体的后代分布具有如下特点: 首先, 它以概率 1 产生一个第 $l-1$ 物种的个体, 然后, 它再以与第 1 个物种个体相同的分布产生一定数量的后代.

(iii) 从 (2.6) 和 (2.7) 中的分枝机制可以看出, i 处个体的分枝机制仅依赖于 i 处的转移概率. 若在随机环境中讨论, 则意味着仅依赖于 i 处的环境, 这一特性使得可以将 (1, 1) RWRE 的许多结果推广到 $(L, 1)$ RWRE 中. 易知, 如果游动的随机环境 ω_i ($i \in \mathbb{Z}$) 是独立同分布的, 则其对应的多物种分枝过程的随机环境也是独立同分布的.

定理 2.3 的证明 此处引用文献 [2] 中的证明. 先证 (i). T_n 等于游动在击中 n 之前所有向下的跳 (负跳) 和向上的跳 (正跳) 数量的总和. 负跳有 L 种可能, 比较复杂. 不过换一种观点, 每一个负跳必然会达到某个位置 i , 而 $U_{i,1}^n$ 记录了 T_n 之前游动从 i 之上向下跳到 i 的次数. 所以, T_n 之前游动负跳的总数为 $\sum_{i \leq n-1} U_{i,1}^n$.

下面计算 T_n 之前正跳的总数. 一方面, 由于 $\{X_n\}$ 最终要达到 n , 所以, 如果游动从 i 之上向下到达或者穿过 i 一次, 必然对应着从 i 跳到 $i+1$ 一次. 所以, 从 i 跳到 $i+1$ 的总跳数, 与从 i 之上向下到达或者穿过 i 跳的总数相同. 而从 i 之上向下到达或者穿过 i 跳的总数为 $|U_i^n| = U_{i,1}^n + U_{i,2}^n + \cdots + U_{i,L}^n$. 另一方面, 对于 $k = 0, 1, \dots, n-1$, 游动首次从 k 向上击中 $k+1$ 这一跳没有任何负跳与它对应. 所以, T_n 之前正跳的总数为 $n + \sum_{i \leq n-1} U_{i,1}^n + U_{i,2}^n + \cdots + U_{i,L}^n$. 于是,

$$T_n = n + \sum_{i \leq n-1} 2U_{i,1}^n + U_{i,2}^n + \cdots + U_{i,L}^n = n + \sum_{i=-\infty}^{n-1} U_i^n \mathbf{x}_0,$$

其中 $\mathbf{x}_0 = (2, 1, \dots, 1)^T$.

其次证 (ii). 令 $J_{s,h}$ 表示游动从 s 到 h 的一个跳. 首先将游动在 0 和 T_n 之间的轨道分割称为 n 个互不重叠的片段. 对 $k = 0, 1, \dots, n-1$, 定义

$$\tau_k := \{t : T_k \leq t < T_{k+1}\}, \quad I_k := \{X_t : t \in \tau_k\}.$$

由强 Markov 性知, $(I_0, \tau_0), (I_1, \tau_1), \dots, (I_{n-1}, \tau_{n-1})$ 相互独立. 事实上, 每个游程 (I_k, τ_k) ($0 \leq k \leq n-1$) 对应着一个移民结构.

现固定 $0 \leq k \leq n-1$, 目的是在游程 I_k 中构造一个 L -物种分枝过程. 为此, 对 $1 \leq l \leq L, i < k$, 定义 $U_l^n(k, i) = \#\{T_k \leq m < T_{k+1} : X_{m-1} > i, X_m = i-l+1\}$, 它记录了在游程 I_k 中游动从 i 之上跳到 $i-l+1$ 的总跳数. 从而,

$$U^n(k, i) \equiv (U_1^n(k, i), U_2^n(k, i), \dots, U_L^n(k, i))$$

记录了 I_k 中从 i 之上到达或者穿过 i 的负跳总数.

在游程 I_k 中, 从 i 之上到达或者穿过 i 的跳将作为多物种分枝过程的个体. 由定义知, 在游程 I_k 中, 有 $X_n \leq k$, 也就是说, 它从未到达过 $k+1$ 及以上. 所以, 对 $i \geq k+1$, 没有任何从 $i+1$ 之上到达或者穿过 i 的跳. 于是, 对 $i \geq k+1$, 可令 $U^n(k, i) = \mathbf{0}$.

注意到 I_k 是游动从 k 出发, 最终到达 $k+1$ 的一个游程. 游动的最后一步是一个从 k 到 $k+1$ 的正跳, 然而这个正跳并没有任何从 k 之上向下到达或者穿过 k 的负跳与之对应. 为此可以在游程 I_k 开始之前加上一个虚拟的从 $k+1$ 到 k 的负跳 $J_{k+1,k}$, 即令 $U^n(k, k) =: \mathbf{e}_1$. 它将被看作在 k 处移入的移民, I_k 中所有的个体都被视为其后代. 很自然会问, 为什么不虚拟一个从 $k+1$ 向下穿过 k 的跳呢? 原因是, 如果这个虚拟的跳向下穿过 k , 则其必然会到达某个 $i \leq k-1$, 必然需要有别的从 i 到 $i+1$ 的跳与之对应. 然而这样的对应关系是不存在的. 一方面是因为此时游程 I_k 还未开始, 另一方面是因为构造这个虚拟的跳的目的在于让它与那个从 k 到 $k+1$ 的跳相对应. 图 1 演示了 (1, 2) RW ($L=2$)

图 1 移民结构

的移民结构, 每个游程 I_k 对应一个移民结构, 且由强 Markov 性, 每个移民结构相互独立, 图中虚线箭头为虚拟移民.

下证 $\{U^n(k, i)\}_{i \leq k}$ 构成一个非齐次 L -物种分枝过程. 固定 $i < k$, 记 $\eta_{i,0}^k = T_k$. 对 $j \geq 1$, 定义

$$\eta_{i,j}^k = \min\{\eta_{i,j-1}^k < m < T_{k+1} : X_{m-1} > i, X_m \leq i\},$$

则 $\eta_{i,j}^k$ ($j \geq 1$) 是 τ_k 中的一系列停时, 它们分别记录了每次游动从 i 之上向下到达或者穿过 i 的时间. 对 $i \leq k-1$, $1 \leq l \leq L$, 有

$$U_l^n(k, i) = \sum_{j=1}^{\infty} 1_{\{T_k < \eta_{i,j}^k < T_{k+1}, X_{\eta_{i,j}^k} = i-l+1\}}. \quad (2.8)$$

进一步定义

$$\xi_{i,l}^{k,j} = \#\{\eta_{i+1,j}^k \leq m < \eta_{i+1,j+1}^k < T_{k+1} : X_{m-1} > i, X_m = i-l+1\}.$$

可见 $\xi_{i,l}^{k,j}$ 记录了在 τ_k 中, 游动第 j 次至第 $j+1$ 次, 从 $i+1$ 之上到达或穿过 $i+1$ 的这段时间内, 游动从 i 之上跳到 $i-l+1$ 的次数. 记

$$\xi_i^{k,j} = (\xi_{i,1}^{k,j}, \dots, \xi_{i,L}^{k,j}).$$

通过对 I_k 的轨道进行分解, 由强 Markov 性知, 对固定的 k 和 i , $\xi_i^{k,j}$ ($j = 1, 2, \dots$) 是一列独立同分布随机变量. 现对 $\xi_{i,l}^{k,j}$ 的定义加以研究, 特别是对时间 $[\eta_{i+1,j}^k, \eta_{i+1,j+1}^k)$ 中的第一个跳, 需仔细分析.

首先, 限制在事件 $\{X_{\eta_{i+1,j}^k} = i+1\}$ 上 (类属于 $i+1$ 处的第 1 物种), 在时间 $[\eta_{i+1,j}^k, \eta_{i+1,j+1}^k)$ 中, 不可能有 $J_{s,h}$ 这样的跳, 其中 $s > i+1$, $h \leq i$. 因此, 对 $1 \leq l \leq L$, 有

$$\begin{aligned} \xi_{i,l}^{k,j} &= \#\{\eta_{i+1,j}^k \leq m < \eta_{i+1,j+1}^k < T_n : X_{m-1} > i, X_m = i-l+1\} \\ &= \#\{\eta_{i+1,j}^k \leq m < \eta_{i+1,j+1}^k < T_n : X_{m-1} = i+1, X_m = i-l+1\} \\ &= \#\{\text{位于时间 } [\eta_{i+1,j}^k, \eta_{i+1,j+1}^k) \text{ 内的跳 } J_{i+1,i-l+1}\}. \end{aligned}$$

图 2 演示了某第 1 物种个体的后代分布. 该个体有 4 个类属于第 1 物种的后代, 3 个类属于第 2 物种的后代. 图中省略了所有向上的正跳.

其次, 对 $2 \leq m \leq L$, 限制在事件 $\{X_{\eta_{i+1,j}^k} = i-(m-1)+1\}$ 上 (类属于 $i+1$ 处的第 m 物种), 在时间 $[\eta_{i+1,j}^k, \eta_{i+1,j+1}^k)$ 内的第一个跳是从 $i+1$ 之上某位置往下达到 $i-(m-1)+1$, 所以, 这个跳无条件地给 $\xi_{i,m-1}^{k,j}$ 贡献了 1. 除该跳之外, 时间 $[\eta_{i+1,j}^k, \eta_{i+1,j+1}^k)$ 内再无其他跳 $J_{s,h}$, $s > i+1$, $h \leq i$. 因此,

$$\xi_{i,m-1}^{k,j} = 1 + \#\{\text{时间 } [\eta_{i+1,j}^k, \eta_{i+1,j+1}^k) \text{ 内的跳 } J_{i+1,i-(m-1)+1}\},$$

图 2 某第 1 物种个体的后代分布

并且, 对 $2 \leq l \leq L, l \neq m-1$, 有 $\xi_{i,l}^{k,j} = \#\{\text{时间 } [\eta_{i+1,j}^k, \eta_{i+1,j+1}^k) \text{ 内的跳 } J_{i+1,i-l+1}\}$. 图 3 演示了某第 2 物种个体的后代分布. 与图 2 的区别在于, 该个体在产生别的后代前, 以概率 1 产生了一个第 1 物种的后代. 然后, 它再以与第 1 物种相同的后代分布产生后代.

于是, 由上述讨论以及 $\{U^n(k, i)\}_{i \leq k}$ 的定义知,

$$\begin{aligned} P_\omega(U^n(k, i-1) = (u_1, \dots, u_L) \mid U^n(k, i) = e_1) \\ = P_\omega(\xi_{i-1,m}^{k,j} = u_m, 1 \leq m \leq L \mid X_{\eta_{i,j}^k} = i) \\ = \frac{(u_1 + \dots + u_L)!}{u_1! \dots u_L!} \omega_i(-1)^{u_1} \dots \omega_i(-L)^{u_L} \omega_i(1), \end{aligned} \quad (2.9)$$

并且, 对 $2 \leq l \leq L$, 有

$$\begin{aligned} P_\omega(U^n(k, i-1) = (u_1, \dots, 1 + u_{l-1}, \dots, u_L) \mid U^n(k, i) = e_l) \\ = P_\omega(\xi_{i-1,l-1}^{k,j} = u_{l-1} + 1, \xi_{i-1,m}^{k,j} = u_m, m \neq l-1, 1 \leq m \leq L \mid X_{\eta_{i,j}^k} = i + 1 - l) \\ = \frac{(u_1 + \dots + u_L)!}{u_1! \dots u_L!} \omega_i(-1)^{u_1} \dots \omega_i(-L)^{u_L} \omega_i(1). \end{aligned} \quad (2.10)$$

此处对 (2.9) 和 (2.10) 中出现的 $\frac{(u_1 + \dots + u_L)!}{u_1! \dots u_L!}$ 稍作解释. 事实上, 假定 $\xi_{i-1,m}^{k,j} = u_m, 1 \leq m \leq L$, 则这 $u_1 + \dots + u_L$ 个跳所有可能的组合数是 $\frac{(u_1 + \dots + u_L)!}{u_1! \dots u_L!}$. 综上所述, $\{U^n(k, i)\}_{i \leq k}$ 构成了一个 L -物种的非齐次分枝过程. 且由 $\{(I_k, \tau_k)\}_{k=0}^{n-1}$ 的独立性可知, $U^n(k, *)$ ($k = n-1, \dots, 1, 0$) 相互独立. 此外, 由游程 I_k 内部的轨道分解知, $U^n(k, i)$ 中的每个个体独立地产生后代. 由 $U_{i,l}^n$ 的定义知, 对 $1 \leq l \leq L$, 有

$$U_{i,l}^n = \sum_{k=(i+1) \vee 0}^{n-1} \sum_{j=1}^{\infty} 1_{\{\eta_{i,j}^k < T_n, X_{\eta_{i,j}^k} = i-l+1\}}. \quad (2.11)$$

于是, 由 (2.8) 和 (2.11) 可得 $U_{i,l}^n = \sum_{k=(i+1) \vee 0}^{n-1} U_l^n(k, i)$. 因而, $U_i^n = \sum_{k=(i+1) \vee 0}^{n-1} U^n(k, i)$. 定理 2.3(ii) 证毕. $\square$

图 3 某第 2 物种个体的后代分布

2.2.2 $(L, 1)$ RW 分枝结构的应用综述

由于向右跳是紧邻的, $(L, 1)$ RW 的分枝结构继承了 $(1, 1)$ RW 的部分性质, 但由于向左的跳是非紧邻的, 所以其分枝结构又具有一些新的特性. $(L, 1)$ RW 的分枝结构有很多应用前景.

一个重要应用是利用 $(L, 1)$ RW 的内在分枝结构, 刻画 $(L, 1)$ RWRE 的极限行为. 以分枝结构为工具, Wang^[16] 通过研究随机环境中带移民多物种分枝过程, 给出了在再生之前的总人口数的尾概率, 证明了 $(L, 1)$ RWRE 的稳定律, 推广了文献 [1] 中 $(1, 1)$ RWRE 的结果. Hong 和 Sun^[17] 利用分枝结构, 证明了 $(L, 1)$ RWRE 的一个更新定理.

除了 $(L, 1)$ RWRE 的极限性质, 分枝结构对研究固定环境中 $(L, 1)$ RW 的极限性质也有重要作用. 借助内在分枝结构, Hong 和 Zhou^[18] 及 Hong 等^[19] 得到了半直线上正常返 $(L, 1)$ RW 和 $(1, R)$ RW 的平稳分布的显式表达. 其主要思想是游动的平稳分布在 i 处的质量等于游动在 i 处的占位时与游动从 0 点出发返回 0 点的总时间 (首返时) 之比. 而游动在 i 处的占位时和首返时可分别表示为多物种分枝过程在 i 处的人口数和总人口数的泛函, 故而得到平稳分布的显式表达. Hong 和 Yang^[20] 利用分枝结构, 证明了时齐的 $(1, R)$ RW 的局部时收敛到 Brown 运动的局部时.

这里为感兴趣的读者提供一些可以进一步研究的问题.

- (1) 推广文献 [9], 研究暂留的 $(L, 1)$ RWRE 可能以一个正概率在某些位置逗留总时间的一个比例.
- (2) 推广文献 [10, 11], 研究 $(L, 1)$ RWRE 的泛函形式的 Ritter 定理.

2.3 $(1, R)$ RW 的分枝结构

在 (L, R) RW 中固定 $L = 1$, 本节介绍 $(1, R)$ RW 的分枝结构及其应用. 在建立内在分枝结构时, 同样假定游动常返或右暂留到 $+\infty$, $(1, R)$ RW 的分枝结构不能通过 $(L, 1)$ RW 简单对称得到, 其分枝结构蕴含着新的思想, 也更为复杂. 为避免记号烦琐, 本节特别地令 $R = 2$, 研究 $(1, 2)$ RW, 此时可允许的跳幅集合为 $\Lambda = \{-1, 1, 2\}$. 对一般的 R , 可用相同的思想进行推广. 本节主要引用文献 [4] 中的结果.

考虑 $(1, 2)$ RW $\{X_n\}$, 令 $T_0 = 0$, $T_k = \inf\{n > T_{k-1} : X_n > X_{T_{k-1}}\}$ ($k \geq 1$) 为游动的首中时 (阶梯时间). 特别地, $X_0 = 0$ 时, $T_1 = \inf\{n > 0 : X_n > 0\}$ 为游动首次到达 1 或 2 的时间. 假定游动常返或右暂留趋于 $+\infty$, 则游动以概率 1 到达 0 点的右边.

为了精确计算 T_1 , 需要记录 T_1 之前所有向左和向右跳的次数. 注意到如下事实: 当游动从任意位置 i ($i \leq 0$) 向左跳至 $i-1$, 它将以如下三种方式之一 (因为 $R = 2$) 回到 i 或 $i+1$: 从 $i-1$ 至 i , 从 $i-2$ 至 i 或者从 $i-1$ 至 $i+1$. 于是, 将向左的跳根据返回方式的不同分成三类, 并且分别记录它们的次数. 图 4 是游动轨道的示意图, 演示了定理 2.4 中游动的内在多物种分枝结构的后代类型. 根据返回方式的不同, 得到了三种不同物种.

对任意 $i \leq 1$, 令

$$\begin{aligned} A(i) &= \#\{0 < k < T_1 : X_{k-1} = i, X_k = i-1; \text{并且最终从 } i-1 \text{ 跳至 } i\}, \\ B(i) &= \#\{0 < k < T_1 : X_{k-1} = i, X_k = i-1; \text{并且最终从 } i-2 \text{ 跳至 } i\}, \\ C(i) &= \#\{0 < k < T_1 : X_{k-1} = i, X_k = i-1; \text{并且最终从 } i-1 \text{ 跳至 } i+1\}. \end{aligned}$$

令 $U(i) = (A(i), B(i), C(i))$. 对 $j = 1, 2$, 定义随机游动的逃逸概率为

$$P_\omega^{i-1}[(-\infty, i-1), i-1+j] := P_\omega^{i-1}\{X_n \text{ 首次到达 } [i, +\infty) \text{ 时落在 } i-1+j\}.$$

图 4 游动的内在多物种分枝结构的后代类型

记

$$\gamma(i) = \omega_i(-1) \cdot P_{\omega}^{i-1}[(-\infty, i-1), i+1], \quad (2.12)$$

$$\alpha(i) = \omega_i(-1) \cdot P_{\omega}^{i-1}[(-\infty, i-1), i] \cdot \frac{\omega_{i-1}(1)}{\omega_{i-1}(1) + \gamma(i-1)}, \quad (2.13)$$

$$\beta(i) = \omega_i(-1) \cdot P_{\omega}^{i-1}[(-\infty, i-1), i] \cdot \frac{\gamma(i-1)}{\omega_{i-1}(1) + \gamma(i-1)}. \quad (2.14)$$

定理 2.4 假定 $\limsup_{n \rightarrow \infty} X_n = +\infty$, 则

(i) $T_1 = 1 + \sum_{i \leq 0} (2A(i) + 2B(i) + C(i))$;

(ii) $\{U(i) = (A(i), B(i), C(i))\}_{i \leq 1}$ 是一个非齐次的带移民的 3 物种分枝过程. 其移民 (祖先) $U(1)$ 的分布为

$$P_{\omega}[U(1) = (1, 0, 0)] = \frac{\omega_0(1)}{1 - \alpha(0) - \beta(0)},$$

$$P_{\omega}[U(1) = (0, 1, 0)] = \frac{\gamma(0)}{1 - \alpha(0) - \beta(0)},$$

$$P_{\omega}[U(1) = (0, 0, 1)] = \frac{\omega_0(2)}{1 - \alpha(0) - \beta(0)},$$

对 $i \leq 0$, 后代的分枝机制如下 (见图 5):

$$P_{\omega}(U(i) = (a, b, 0) \mid U(i+1) = (1, 0, 0)) = (1 - \alpha(i) - \beta(i))C_{a+b}^a \alpha(i)^a \beta(i)^b,$$

$$P_{\omega}(U(i) = (a, b, 1) \mid U(i+1) = (0, 1, 0)) = (1 - \alpha(i) - \beta(i))C_{a+b}^a \alpha(i)^a \beta(i)^b,$$

$$P_{\omega}(U(i) = (a, b, 0) \mid U(i+1) = (0, 0, 1)) = (1 - \alpha(i) - \beta(i))C_{a+b}^a \alpha(i)^a \beta(i)^b,$$

其中 $\gamma(i)$ 、 $\alpha(i)$ 和 $\beta(i)$ 分别由 (2.12)–(2.14) 给出.

图 5 演示了三种物种产生后代的分枝机制. A 和 C 物种产生后代的机制相同, 如图左半部分. B 物种除了产生与 A 和 C 相同后代, 还因为其返回方式, 必然产生一个 C 物种的后代, 如图右半部分.

注 2.3 (i) T_1 之前游动的步数都已记录在 $U(i)$ 中, 且 T_1 可用 $U(i) = (A(i), B(i), C(i))$ 表示. 跳

图 5 三种物种产生后代的分枝机制

幅是 2 的跳需要格外注意: 它们将记录在 $B(i)$ 中. 因此, 借助轨道分解, 得到 T_1 的表达式如下:

$$T_1 = 1 + \sum_{i \leq 0} [2A(i) + 2B(i) + C(i)] = 1 + \left\langle (2, 2, 1), \sum_{i \leq 0} U(i) \right\rangle.$$

(ii) 因为 $X_0 = 0$, 为了理解 $U(1)$, 可以想象有一个从 1 下来的跳. 该跳将不会记录在 T_1 中, 而是在分枝结构中扮演“移民”的角色.

(iii) 通过多物种分枝过程的后代均值矩阵, 可进一步得到 T_1 的均值表达. 对 $i \leq 0$, 多物种分枝过程第 $(-i+1)$ -代均值矩阵为

$$N(i) = \begin{pmatrix} \frac{\alpha(i)}{1-\alpha(i)-\beta(i)} & \frac{\beta(i)}{1-\alpha(i)-\beta(i)} & 0 \\ \frac{\alpha(i)}{1-\alpha(i)-\beta(i)} & \frac{\beta(i)}{1-\alpha(i)-\beta(i)} & 1 \\ \frac{\alpha(i)}{1-\alpha(i)-\beta(i)} & \frac{\beta(i)}{1-\alpha(i)-\beta(i)} & 0 \end{pmatrix},$$

进而

$$E_\omega(T_1) = 1 + \left\langle (2, 2, 1), \frac{1}{1-\alpha(0)-\beta(0)} (\omega_0(1), \gamma(0), \omega_0(2)) \cdot \sum_{i \leq 0} N(0) \cdots N(i) \right\rangle.$$

2.4 (2, 2) RW

构造一般 (L, R) RW 分枝结构的思想与 $(2, 2)$ RW 类似, 但记号过于复杂. 在本节中, 固定 $L = R = 2$, 考虑 $(2, 2)$ RW 的分枝结构. 注意到, 此时随机游动向左和向右的最大跳幅皆为 2, 故向左向右的跳皆不是紧邻的.

定义

$$T = \inf\{n \geq 0 : X_n > 0\},$$

这是游动首次击中 $[1, \infty)$ 的时间. 有 $P(X_T = 1) > 0$, $P(X_T = 2) > 0$. 随机变量 T 对研究 (随机环境中) 有界跳幅随机游动的极限定理有重要作用. 为研究 T 的性质, 需要对游动轨道进行分解. 首先定义游动各种可能的游程.

定义 2.2 (i) 称形如 $\{X_k = i, X_{k+1} = i-1, X_{k+2} \leq i-1, \dots, X_{k+l} \leq i-1, X_{k+l+1} \geq i\}$ 的游程为游动在 i 处的一个 $\mathcal{A}$ -型的游程. 针对 i 处 $\mathcal{A}$ -型游程最后一跳的三种不同的形式, 即 $\{i-1 \rightarrow i\}$ 、 $\{i-2 \rightarrow i\}$ 或 $\{i-1 \rightarrow i+1\}$, 将 i 处 $\mathcal{A}$ -型的游程分为三个子类, $\mathcal{A}_{i,1}$ 、 $\mathcal{A}_{i,2}$ 和 $\mathcal{A}_{i,3}$.

(ii) 称形如 $\{X_k = i, X_{k+1} = i-2, X_{k+2} \leq i-1, \dots, X_{k+l} \leq i-1, X_{k+l+1} \geq i\}$ 的游程为游动在 i 处一个 $\mathcal{B}$ -型的游程. 针对 i 处 $\mathcal{B}$ -型游程最后一跳的三种不同的形式, 即 $\{i-1 \rightarrow i\}$ 、 $\{i-2 \rightarrow i\}$ 或 $\{i-1 \rightarrow i+1\}$, 将 i 处 $\mathcal{B}$ -型的游程分为三个子类, $\mathcal{B}_{i,1}$ 、 $\mathcal{B}_{i,2}$ 和 $\mathcal{B}_{i,3}$.

(iii) 称形如 $\{X_k = i + 1, X_{k+1} = i - 1, X_{k+2} \leq i - 1, \dots, X_{k+l} \leq i - 1, X_{k+l+1} \geq i\}$ 的游程为游动在 i 处一个 C -型的游程. 针对 i 处 C -型游程最后一跳的三种不同的形式, 即 $\{i - 1 \rightarrow i\}$ 、 $\{i - 2 \rightarrow i\}$ 或 $\{i - 1 \rightarrow i + 1\}$, 将 i 处 C -型的游程分为三个子类, $C_{i,1}$ 、 $C_{i,2}$ 和 $C_{i,3}$.

图 6 演示了 i 处 A 、 B 和 C 三种类型的游程, 这里只画出每个游程第一个跳和最后一个跳, 其他处于 $i - 1$ 之下的跳皆未画出.

对 $i \leq 0, j = 1, 2, 3$, 定义

$$A_{i,j} = \#\{\text{时间 } T \text{ 前的 } A_{i,j}\text{-型游程}\},$$

$$B_{i,j} = \#\{\text{时间 } T \text{ 前的 } B_{i,j}\text{-型游程}\},$$

$$C_{i,j} = \#\{\text{时间 } T \text{ 前的 } C_{i,j}\text{-型游程}\}.$$

并记

$$U_i = (A_{i,1}, A_{i,2}, A_{i,3}, B_{i,1}, B_{i,2}, B_{i,3}, C_{i,1}, C_{i,2}, C_{i,3}), \quad (2.15)$$

它记录了时间 T 之前游动在 i 处的所有游程的个数. 下面的定理表明 T 可表示为 $\{U_i\}_{i \leq 0}$ 的泛函.

定理 2.5 假定 $\limsup_{n \rightarrow \infty} X_n = +\infty$, 则

$$T = 1 + \sum_{i \leq 0} U_i(2, 2, 1, 1, 1, 0, 2, 2, 1)^T. \quad (2.16)$$

对于向左向右皆为非紧邻的情形, 直接求出 T 的分布是不可能的. 但由 (2.16) 知, 可通过研究 $\{U_i\}_{i \leq 0}$ 的性质来刻画 T . 事实上, 由下述讨论和定理 2.5 知, $\{U_i\}_{i \leq 0}$ 形成一个 9-物种带移民的非齐次分枝过程. 过程 $\{U_i\}_{i \leq 0}$ 的移民分布及后代分布都非常复杂, 具体的构造方法和细节可参见文献 [3]. 这里给出移民分布的构造思想.

注意到, 游动在 $[0, T]$ 之间的轨道为 $\{X_0 = 0, X_1, \dots, X_{T_1}\}$. 对比定义 2.2 中几种类型的游程定义, 它不属于任何一种游程. 但如果在游动开始之前加上一个虚拟的项 $X_{-1} = 1$, 则 $\{X_{-1} = 1, X_0 = 0, X_1, \dots, X_{T_1}\}$ 构成了 1 处的一个 A -型游程. 根据 X_T 的值, 该游程可能有三种取值 $A_{1,1}$ 、 $A_{1,2}$ 或 $A_{1,3}$, 并且有 $P_\omega(A_{1,1} + A_{1,2} + A_{1,3} = 1) = 1$. 于是, 可由 (2.15) 定义 U_1 . 但由于 T 之前没有 $B_{1,j}$ 和 $C_{1,j}$ ($j = 1, 2, 3$) 类型的游程, 所以, U_1 只可能有三种取值, 即 $U_1 = e_1$ 、 $U_1 = e_2$ 或 $U_1 = e_3$. 如果 $\{U_i\}_{i \leq 0}$ 形成一个分枝过程, 则所有 T 之前在 $i \leq 0$ 处的游程皆可视为 U_1 的后代. U_1 可视为分枝过程的初始分布. 由于它是通过虚拟而得到的, 故将其称之为“移民”更为恰当. 下面介绍 U_1 的分布.

对 $k \leq i, j \in \{i + 1, i + 2\}$, 定义逃逸概率

$$f_k(i, j) = P_\omega^k(\text{游动在 } j \text{ 击中 } (i, \infty)).$$

图 6 i 处 A 、 B 和 C 三种类型的游程

$f_k(i, j)$ 可通过一些矩阵的乘积表示出来. 在文献 [3] 中证明了当 $X_0 = 0$ 时,

$$P_\omega(U_1 = e_1) = \frac{\omega_0(1)}{1 - \omega_0(-1)f_{-1}(-1, 0) - \omega_0(-2)f_{-2}(-1, 0)}, \quad (2.17)$$

$$P_\omega(U_1 = e_2) = \frac{\omega_0(2)}{1 - \omega_0(-1)f_{-1}(-1, 0) - \omega_0(-2)f_{-2}(-1, 0)}, \quad (2.18)$$

$$P_\omega(U_1 = e_3) = \frac{1 - \omega_0(1) - \omega_0(2) - \omega_0(-1)f_{-1}(-1, 0) - \omega_0(-2)f_{-2}(-1, 0)}{1 - \omega_0(-1)f_{-1}(-1, 0) - \omega_0(-2)f_{-2}(-1, 0)}. \quad (2.19)$$

定理 2.6 假定 $\limsup_{n \rightarrow \infty} X_n = +\infty$, 则 $\{U_i\}_{i \leq 1}$ 构成一个带移民的 9-物种非齐次分枝过程, 其移民分布由 (2.17)–(2.19) 给出.

分枝机制涉及由 9 种游程决定的 9 个指数, 写起来很复杂, 这里未给出分枝机制, 有兴趣的读者可参见文献 [3].

与 $(L, 1)$ RW 相比, (L, R) RW 的分枝结构表现出如下特点: (i) 物种多, 不易书写和表达. (ii) 在 i 处的分枝机制不仅仅依赖于 i 处的转移概率 (环境) ω_i , 事实上, 它依赖于 $\omega_k, k \leq i$. 所以, 对于 (L, R) RWRE, 虽然假定原来的环境是独立同分布的, 但其对应的分枝过程的环境并不是独立同分布的, 而是平稳遍历的.

不过 (L, R) RW 的分枝结构在研究 (L, R) RWRE 的极限定理方面依然有重要的作用. 对 $(L, 1)$ RWRE, 总能给出其大数定律速度的显式表达, 参见文献 [21]. 但是对于 (L, R) RWRE, 虽然 Brémont 在文献 [22] 中也证明了其大数定律, 但这种情形下, 无法给出大数定律速度的表达式. 文献 [3] 利用 (L, R) RW 的分枝结构, 给出了随机环境原有测度关于“从粒子看环境”得到的环境测度密度函数的公式, 从而给出了 (L, R) RWRE 速度的显式表达. 同样的方法也可以用于随机环境中跳幅有界的生灭过程的研究中, 参见文献 [23]. 希望将来 (L, R) RW 的分枝结构能够得到更广泛的应用.

这里提供一个潜在的研究问题. 文献 [24] 利用 $(L, 1)$ RWRE 的分枝结构, 给出了 $(L, 1)$ RWRE 环境参数的极大似然估计并讨论了其相合性. 有兴趣的读者可针对 (L, R) RWRE 讨论类似的问题.

2.5 带形上随机游动

在一定条件下, (L, R) RW 是带形上随机游动的一个特例. 本节研究带形上随机游动的分枝结构及其应用.

带形上随机游动, 简称为带形上 RW, 其状态空间为 $S = \mathbb{Z} \times \mathcal{D}$, 其中 $\mathbb{Z}$ 为整数集, $\mathcal{D}$ 为有限集 $\{1, 2, \dots, d\}$, 正整数 $d \geq 1$. 带形上 RW, 介于一维 RW 与高维 RW 之间, 会呈现出不同但有趣的极限性质. 带形上 RW 与通常意义上二维空间的 RW 不同. 带形上的 RW, 主要研究游动 $\mathbb{Z}$ -方向的极限性质, $\mathbb{Z}$ 是游动的主要运动空间, $\mathcal{D}$ 上的游动起着影响 $\mathbb{Z}$ 上游动的作用, 并不会在本质上影响游动的极限行为. 由于 $\mathcal{D}$ 可用来描述系统的内部状态或操作框架, 带形上的 RW 在排队论、风险理论、通信系统和金融中有广泛应用.

带形上 RW 记为 $\{X_t = (\xi_t, Y_t), t \geq 0\}$, 其中 $\xi_t \in \mathbb{Z}$ 表示游动所处的列, Y_t 取值于 $\mathcal{D}$. 游动在 $\mathbb{Z}$ -方向紧邻, 对 $n \in \mathbb{Z}$, 令 $\omega_n = (P_n, Q_n, R_n)$ 表示随机游动在第 n 列的转移概率, 其中 (P_n, Q_n, R_n) 为 $d \times d$ 维非负矩阵三元组, 满足 $\forall n, (P_n + Q_n + R_n)\mathbf{1} = \mathbf{1}$, $\mathbf{1}$ 为各个元素均为 1 的列向量, 如图 7 所示.

通常称 $\omega = (\dots, \omega_{-1}, \omega_0, \omega_1, \dots)$ 为游动的环境. 固定环境 ω , 假设 $\{X_n\}$ 是一个 Markov 链, 令初

图 7 带形 $S = \mathbb{Z} \times \mathcal{D}$ 上随机游动

始分布 μ_ω 满足 $\mu_\omega \mathbf{1} = \mathbf{1}$, 转移概率 $\Omega_\omega(z, z_1)$ 为

$$\Omega_\omega(z, z_1) = \begin{cases} P_n(i, j), & \text{若 } z = (n, i), \quad z_1 = (n+1, j), \\ R_n(i, j), & \text{若 } z = (n, i), \quad z_1 = (n, j), \\ Q_n(i, j), & \text{若 } z = (n, i), \quad z_1 = (n-1, j), \\ 0, & \text{其他情形,} \end{cases}$$

其中 $P_n(i, j)$ ($1 \leq i, j \leq d$) 为 P_n 中各元素, $Q_n(i, j)$ 和 $R_n(i, j)$ 类似定义. 假设 P_n 和 Q_n 的行和与列和均严格大于 0. 将由如上初始分布及转移概率诱导出的 $\{X_n\}$ 的概率记为 P_ω^μ , 其对应的期望算子记为 E_ω^μ .

令 $L_n := \{(n, j), 1 \leq j \leq d\}$. 设 T_n 为游动从点 $z \in L_0$ 出发, 首次到达第 n 列的时间, 即

$$T_n = \inf\{k : X_k \in L_n\}.$$

对任意 $a \in \mathbb{Z}$, 以及任意的矩阵 ρ , $\rho \mathbf{1} = \mathbf{1}$, 递归地定义矩阵 $\psi_n = \psi_{n,a,\rho}$, $n \geq a$. 定义 $\psi_a = \rho$, $\psi_n = (I - R_n - Q_n \psi_{n-1})^{-1} P_n$, $n > a$. 由文献 [25] 知, $d \times d$ 维矩阵 $\zeta_n := \lim_{a \rightarrow -\infty} \psi_{n,a,\rho}$ 存在, 并且满足 $\zeta_n \mathbf{1} = \mathbf{1}$, $\zeta_n = (I - Q_n \zeta_{n-1} - R_n)^{-1} P_n$, $n \in \mathbb{Z}$. 令 $\eta_n(i, j)$ 表示从位置 (n, i) 出发, 到达负无穷之前先到第 $n+1$ 列, 并且落在点 $(n+1, j)$ 的概率. 我们通常称为逃逸概率. 如果随机游动右暂留, 则有 $\eta_n = \zeta_n$, a.s. (参见文献 [26]), 并且有 $\zeta_n > 0$, a.s.

2.5.1 带形上 RW 的分枝结构

本小节主要引用作者在文献 [5] 中的结果. 固定 ω , 假设游动以初始分布 μ_ω 从第 0 列出发, 其中 $\mu_\omega(i) = P_\omega^\mu(\xi_0 = 0, Y_0 = i)$. 假设随机游动 $X_t = (\xi_t, Y_t)$ 右暂留, 即 $X_t \rightarrow +\infty$, a.s., 实质上是 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \xi_n = \infty$, a.s., 那么对任意的正整数 k ($k \geq 1$), 有 $T_k < \infty$, a.s., 并且 $T_0 = 0$. 对任意的 $n \leq 1$, 定义 $\mathbf{U}_n = (U_n^1, U_n^2, \dots, U_n^d)$, 其中 U_n^i ($1 \leq i \leq d$) 为时间 T_1 之前从第 n 列跳到第 $n-1$ 列并且落在 $(n-1, i)$ 点的步数. 定义 $\mathbf{Z}_n = (Z_n^1, Z_n^2, \dots, Z_n^d)$, 其中 Z_n^i ($1 \leq i \leq d$) 为时间 T_1 之前, 从第 n 列跳到第 n 列, 并且落在 (n, i) 点的步数. 令 $|\mathbf{U}_n| := \sum_{i=1}^d U_n^i = \mathbf{U}_n \mathbf{1}$, $|\mathbf{Z}_n| := \sum_{i=1}^d Z_n^i = \mathbf{Z}_n \mathbf{1}$.

定理 2.7 假设带形上 RW 右暂留, 游动以初始分布 μ_ω 从第 0 列出发, 则

- (i) T_1 可表示为 $T_1 = 1 + \sum_{n \leq 0} (2|\mathbf{U}_n| + |\mathbf{Z}_n|)$;
- (ii) 带形上 RW 内在分枝结构的分枝机制可表述为, 对任意的 $n \leq 0$, $1 \leq i \leq d$, 有

$$\begin{aligned} & P_\omega^\mu(|\mathbf{U}_n| = m, |\mathbf{Z}_n| = K \mid \mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{e}_i) \\ &= \mathbf{e}_i \sum_{k_0 + k_1 + \dots + k_m = K} R_n^{k_0} Q_n \zeta_{n-1} R_n^{k_1} \dots Q_n \zeta_{n-1} R_n^{k_m} P_n \mathbf{1} \end{aligned} \quad (2.20)$$

或

$$\begin{aligned} P_{\omega}^{\mu}(|U_n| = m, |Z_n| = K \mid U_{n+1} = e_i) \\ = e_i \sum_{m_0+m_1+\dots+m_K=m} (Q_n \zeta_{n-1})^{m_0} R_n(Q_n \zeta_{n-1})^{m_1} \cdots R_n(Q_n \zeta_{n-1})^{m_K} P_n \mathbf{1}, \end{aligned} \quad (2.21)$$

其中 $\zeta_n = \eta_n$ 为逃逸概率矩阵;

(iii) $\{|U_n|\}_{n \leq 1}$ 和 $\{|Z_n|\}_{n \leq 1}$ 为非齐次的带移民的多物种分枝过程. 对任意的 $n \leq 0, 1 \leq i \leq d$, 其后代分布为

$$P_{\omega}^{\mu}(|U_n| = m \mid U_{n+1} = e_i) = e_i [(I - R_n)^{-1} Q_n \zeta_{n-1}]^m (I - R_n)^{-1} P_n \mathbf{1}, \quad (2.22)$$

$$P_{\omega}^{\mu}(|Z_n| = K \mid U_{n+1} = e_i) = e_i [(I - Q_n \zeta_{n-1})^{-1} R_n]^K (I - Q_n \zeta_{n-1})^{-1} P_n \mathbf{1}, \quad (2.23)$$

其移民分布为 $P_{\omega}^{\mu}(U_1 = e_i) = \mu_{\omega}(i), i \in \mathcal{D}$, 其中 $\zeta_n = \eta_n$ 为逃逸概率矩阵.

注 2.4 (i) 我们仅讨论游动在时间 $[0, T_1]$ 内的轨道. 游动所有步数均被记录于 $\{|U_n|, |Z_n|, n \leq 1\}$ 中. 在时间 T_1 之后, 游动 $\{X_t\}$ 的轨道也有类似的结构. 例如, 当讨论时间 $[T_1, T_2]$ 内游动的轨道时, 游动的所有步数均可被记录于 $\{|U_n|, |Z_n|, n \leq 2\}$ 之中, 对 $n \leq 1$, 分枝机制同样为 (2.20) 和 (2.21), $\{|U_n|, n \leq 2\}$ 和 $\{|Z_n|, n \leq 2\}$ 也同样是后代分布为 (2.22) 和 (2.23) 的带移民分枝过程, 只是所带移民分布为 $P_{\omega}^{\mu}(U_2 = e_i)$. 类似可对时间 $[T_2, T_3], [T_3, T_4], \dots$ 内游动的轨道进行讨论.

(ii) 事实上, 在揭示游动的内在分枝结构的过程中, 基本想法是将游动的位置与分枝过程的时间相对应. 例如, 在对时间 $[T_k, T_{k+1}]$ 内游动的轨道片段进行分析时, $|U_n|$ 作为游动从第 n 列到第 $n-1$ 列的步数可被看作分枝过程第 $k-n+1$ 代的后代数.

(iii) 注意到对 $n \leq 0$, 只有从 n 跳到 $n-1$ 的跳才会产生后代, 而发生在同一列内部不同位置之间的跳并不产生后代.

定理 2.7 的证明 先证 (i). U_n 和 Z_n 可用以表示时间 T_1 之前游动的所有步数. 由于游动右暂留, 故若游动从第 n ($n \leq 0$) 列向左跳了一步, 则它最终必定会从第 $n-1$ 列返回到第 n 列. 故可利用 U_n 和 Z_n 表达首次击中时 T_1 .

下面简述 (ii) 的主要证明思想. 我们仅分析游动从第 0 列到第 1 列的第一个游程的轨道性质, 也就是说, 首先考虑游动 X_t 在 $t \in [0, T_1]$ 的轨道. (2.20) 中所表述的游动的轨道是这样的: 在给定 $U_{n+1} = e_i$ 的条件下, 游动从第 n 列出发, 在第 n 列共跳了 $|Z_n| = K$ 步 (每步跳动的概率均为 R_n), 从第 n 列到第 $n-1$ 列跳动了 $|U_n| = m$ 步 (但是从轨道的角度而言, 每一个以概率 Q_n “向下跳” 的步子一定连接着一个以概率 ζ_{n-1} 从第 $n-1$ 列最终返回到第 n 列的轨道), 而最后一步是以概率 P_n 从第 n 列跳到第 $n+1$ 列的, 其中逃逸概率矩阵 $\zeta_n = \eta_n$ 起了很重要的作用. 通过类似的想法, 可得 (2.21).

通过在 (2.20) 中对 K 求和, 在 (2.21) 中对 m 求和, 可分别得到 $|U_n|$ 和 $|Z_n|$ 的边际分布, 从而可得到 (iii). 注意到 $\sum_{m=0}^{+\infty} P_{\omega}^{\mu}(|U_n| = m \mid U_{n+1} = e_i) = 1$, 可反过来检验定理中内在分枝结构的正确性. $\square$

2.5.2 带形上 RW 分枝结构的应用综述

利用内在分枝结构, 可研究带形上 RW 和带形上 RWRE 的性质, 在许多方面有应用. 对于带形上的 RWRE, 随机环境 $\omega = \{\omega_n, n \in \mathbb{Z}\}$ 为一个随机序列. 固定环境 ω , 带形上随机游动也有形如 (2.20) 和 (2.21) 的内在分枝结构.

借助内在分枝结构, 可以精确表达带形上 RWRE 的首次击中时 T_1 , 文献 [5] 计算出首次击中时的均值 $\mathbb{E}T_1$, 给出了游动大数定律速度的显式表达.

“从粒子看环境” (有时也称为辅助 Markov 链) 是研究 RWRE 极限性质的有效方法. 在此研究方法中, 从粒子角度看环境的 Markov 链不变测度的密度函数起着很重要的作用. 文献 [27] 发现了对于带形上随机环境中暂留随机游动, 从粒子角度看环境的 Markov 链不变测度与环境空间概率测度的等价性. 文献 [5] 利用内在分枝结构, 给出了从粒子角度看环境的 Markov 链不变测度的密度函数的显式表达, 进而用“从粒子看环境”的方法直接证明游动的大数定律.

对于非随机环境下, 带形上带反射的随机游动 (位置相依), 通过轨道分解的基本思想, 借助内在分枝结构, 文献 [28] 通过计算游动访问第 0 列的平均次数, 得到了游动常返暂留性判别准则; 并通过计算游动对第 0 列的平均回访时, 得到正常返性的判别准则. 假若游动以某测度从第 0 列出发, 文献 [28] 借助游动的内在分枝结构给出平稳分布的显式表达, 从而进一步得到了随机游动平稳分布的轻尾性质. 事实上, 带形上带反射的随机游动的模型常被用来考虑排队论中的拟生灭过程.

感兴趣的读者可进一步考虑利用内在分枝结构, 研究带形上 RW 及带形上 RWRE 局部时的重整化极限.

致谢 恭贺王梓坤先生 90 华诞, 学生洪文明感谢王先生在博士阶段的精心培养及后来科研生涯中的鼓励和帮助, 并携学生王华明、张琳、张美娟, 对王先生多年来在讨论班上的教导及在工作和生活中的关爱和帮助表示深深的感谢! 祝愿王先生和谭先生幸福安康!

参考文献

- 1 Kesten H, Kozlov M V, Spitzer F. A limit law for random walk in a random environment. *Compos Math*, 1975, 30: 145–168
- 2 Hong W M, Wang H M. Intrinsic branching structure within $(L, 1)$ random walk in random environment and its applications. *Infin Dimens Anal Quantum Probab Relat Top*, 2013, 16: 1350006
- 3 Wang H M, Hong W M. Intrinsic branching structure within random walk on $\mathbb{Z}$. *Theory Probab Appl*, 2014, 58: 640–659
- 4 Hong W M, Zhang L. Branching structure for the transient $(1, R)$ -random walk in random environment and its applications. *Infin Dimens Anal Quantum Probab Relat Top*, 2010, 13: 589–618
- 5 Hong W M, Zhang M J. Branching structure for the transient random walk on a strip in a random environment. *Chinese J Contemp Math*, 2016, 37: 347–362
- 6 Zeitouni O. Random walks in random environment. In: *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 1837. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 2004, 189–312
- 7 Harris T E. First passage and recurrence distributions. *Trans Amer Math Soc*, 1952, 73: 471–486
- 8 Dwass M. Branching processes in simple random walk. *Proc Amer Math Soc*, 1975, 51: 270–274
- 9 Gantert N, Shi Z. Many visits to a single site by a transient random walk in random environment. *Stochastic Process Appl*, 2002, 99: 159–176
- 10 Afanasyev V I. About time of reaching a high level by a random walk in a random environment. *Theory Probab Appl*, 2013, 57: 547–567
- 11 Afanasyev V I. Conditional limit theorem for the maximum of a random walk in random environment. *Theory Probab Appl*, 2014, 58: 525–545
- 12 Hong W M, Yang H, Zhou K. Scaling limit of local time of Sinai's random walk. *Front Math China*, 2015, 10: 1313–1324
- 13 Comets F, Falconnet M, Loukianov O, et al. Maximum likelihood estimator consistency for a ballistic random walk in a parametric random environment. *Stochastic Process Appl*, 2014, 124: 268–288
- 14 Falconnet M, Loukianova D, Matias C. Asymptotic normality and efficiency of the maximum likelihood estimator for the parameter of a ballistic random walk in a random environment. *Math Methods Statist*, 2014, 23: 1–19
- 15 Rogers L C G. Brownian local times and branching processes. In: *Séminaire de Probabilités. Lecture Notes in Mathematics*, vol. 1059. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1984, 42–55
- 16 Wang H M. A note on multitype branching process with bounded immigration in random environment. *Acta Math Sin Engl Ser*, 2013, 29: 1095–1110

- 17 Hong W M, Sun H Y. Renewal theorem for $(L, 1)$ -random walk in random environment. *Acta Math Sci*, 2013, 33: 1736–1748
- 18 Hong W M, Zhou K. Tail asymptotic of the stationary distribution for the state dependent $(1, R)$ -reflecting random walk-near critical. *ArXiv:1302.3069*, 2013
- 19 Hong W M, Zhou K, Qiang Y, et al. Explicit stationary distribution of the $(L, 1)$ -reflecting random walk on the half line. *Acta Math Sin Engl Ser*, 2014, 30: 371–388
- 20 Hong W M, Yang H. Scaling limit of the local time of the $(1, L)$ -random walk. *ArXiv:1402.3949*, 2014
- 21 Brémont J. On some random walks on $\mathbb{Z}$ in random medium. *Ann Probab*, 2002, 30: 1266–1312
- 22 Brémont J. One-dimensional finite range random walk in random medium and invariant measure equation. *Ann Inst H Poincaré Probab Statist*, 2009, 45: 70–103
- 23 Wang H M. Law of large numbers for random walk with unbounded jumps and birth and death process with bounded jumps in random environment. *J Theoret Probab*, 2018, 31: 619–642
- 24 Wang H M, Zhang M J. Maximum likelihood estimator and its consistency for an $(L, 1)$ random walk in a parametric random environment. *ArXiv:1808.10092*, 2018
- 25 Bolthausen E, Goldsheid I. Recurrence and transience of random walks in random environments on a strip. *Comm Math Phys*, 2000, 214: 429–447
- 26 Goldsheid I Y. Linear and sub-linear growth and the CLT for hitting times of a random walk in random environment on a strip. *Probab Theory Related Fields*, 2008, 141: 471–511
- 27 Roitershtein A. Transient random walks on a strip in a random environment. *Ann Probab*, 2008, 36: 2354–2387
- 28 Hong W M, Zhang M J, Qiang Y, et al. Light-tailed behavior of stationary distribution for state-dependent random walks on a strip. *Front Math China*, 2014, 9: 813–834

Branching structure within random walk

Huaming Wang, Lin Zhang, Meijuan Zhang & Wenming Hong

Abstract Random walk is one of the most classical stochastic processes. It has been extensively studied by using analysis methods such as the probability generating function, and there are abundant research results about it. The intrinsic branching structure within the (nearest-neighborhood) random walk, which can be obtained by decomposing the path of the walk, serves as a powerful tool to study the state-dependent random walk. This approach was firstly used by Kesten et al. (1975) to study the nearest-neighborhood random walk in a random environment to get a nice stable limit theorem. So it is attractive to set up the intrinsic branching structures for non-nearest-neighborhood random walks which have been unsolved for a long time. We devote the paper to giving a survey of our results in recent years on the intrinsic branching structures within the random walk with bounded jumps and the random walk on a strip, along with some limit properties of the random walk which we develop by using this approach.

Keywords branching structure, random walk, hitting time

MSC(2010) 60G50, 60J80

doi: 10.1360/N012018-00049