幂次为 2 和 3 的素变数方程的小素数解

李伟平^{1*}, 戈文旭², 王天泽²

1. 河南财经政法大学数学与信息科学学院, 郑州 450046;

2. 华北水利水电大学数学与信息科学学院, 郑州 450046

E-mail: wplyh@163.com, gewenxu@ncwu.edu.cn, wtz@ncwu.edu.cn

收稿日期: 2018-08-15; 接受日期: 2018-11-15; 网络出版日期: 2019-03-07; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11371122 和 11471112)、河南省高等学校重点科研项目 (批准号: 19A110001) 和河南财经政法大学 2016 年青年拔尖人才资助项目

摘要 本文研究素变数方程 $a_1p_1^2 + a_2p_2^2 + a_3p_3^2 + a_4p_4^3 + a_5p_5^3 + a_6p_6^3 = b$ 的可解性, 其中 $a_1, a_2, \dots, a_6$ 是非零整数, b 是整数. 本文利用圆法证明了, 当 $a_1, a_2, \dots, a_6$ 和 b 满足给定条件时, (i) 如果 $a_1, a_2, \dots, a_6$ 都是正数, 那么当 $b \gg \max\{|a_j|\}^{33+\varepsilon}$ 时方程有素数解; (ii) 如果 $a_1, a_2, \dots, a_6$ 不都是正数, 那么方程的素数解满足 $\max\{p_1^2, p_2^2, p_3^2, p_4^3, p_5^3, p_6^3\} \ll |b| + \max\{|a_j|\}^{32+\varepsilon}$.

关键词 小素数解 Waring-Goldbach 问题 圆法

MSC (2010) 主题分类 11P32, 11P05, 11P55

1 引言

Vinogradov^[1] 和 Hua^[2] 首先证明了如下结果: 对任意自然数 k , 存在 $s = s(k)$, 对满足某同余条件的充分大整数 n , 方程

$$p_1^k + p_2^k + \cdots + p_s^k = n$$

可解. 这就是著名的 Waring-Goldbach 问题. 一般地, 方程

$$a_1p_1^k + a_2p_2^k + \cdots + a_sp_s^k = b \quad (1.1)$$

是否有形如 $\max\{p_1, p_2, \dots, p_s\} \leq F(a_1, a_2, \dots, a_s, b)$ 的小素数解?

1967 年, Baker^[3] 首先提出并证明了当 $k = 1, s = 3$ 时方程 (1.1) 的可解性. 之后, Liu 和 Tsang^[4]、Choi^[5]、Liu 和 Wang^[6] 和 Li^[7] 相继改进了 Baker^[3] 的结果. 方程 (1.1) 当 $k = 2, s = 5$ 时的研究结果首先由 Liu 和 Tsang^[8] 于 1991 年给出; Choi 和 Liu^[9,10]、Choi 和 Kumchev^[11] 和 Harman 和 Kumchev^[12] 相继给出了改进结果. Leung^[13]、Liu^[14]、Zhao^[15] 则分别研究了当 $k = 3, s = 9$ 时方程 (1.1) 的小素数解.

英文引用格式: Li W P, Ge W X, Wang T Z. Small prime solutions of equations with powers 2 and 3 (in Chinese). Sci Sin Math, 2019, 49: 1183–1200, doi: 10.1360/N012018-00201

不同于等幂次素变数方程, 本文考虑混合幂次素变数方程. 具体地, 对任意整数 b , 我们研究整系数素变数方程

$$a_1 p_1^2 + a_2 p_2^2 + a_3 p_3^2 + a_4 p_4^3 + a_5 p_5^3 + a_6 p_6^3 = b \quad (1.2)$$

的小素数解.

假设对所有 $q \geq 1$, 有

$$\mathcal{N}(q) := \text{card}\{(n_1, \dots, n_6) : 1 \leq n_j \leq q, (n_j, q) = 1, a_1 n_1^2 + \dots + a_3 n_3^2 + a_4 n_4^3 + \dots + a_6 n_6^3 \equiv b \pmod{q}\},$$

$$\mathcal{N}(q) \geq 1. \quad (1.3)$$

并假设

$$(a_i, a_j) = 1, \quad 1 \leq i < j \leq 6. \quad (1.4)$$

记 $A = \max\{2, |a_1|, |a_2|, \dots, |a_6|\}$. 本文的主要结论如下:

定理 1.1 在条件 (1.3) 和 (1.4) 下,

(i) 如果 $a_1, a_2, \dots, a_6$ 都是正数, 那么当 $b \gg A^{33+\varepsilon}$ 时, 方程 (1.2) 有素数解, 其中 $\gg$ 中隐含常数仅依赖 ε ;

(ii) 如果 $a_1, a_2, \dots, a_6$ 不都是正数, 那么方程 (1.2) 的素数解满足

$$\max\{p_1^2, p_2^2, p_3^2, p_4^3, p_5^3, p_6^3\} \ll |b| + A^{32+\varepsilon},$$

其中 $\ll$ 中隐含常数仅依赖 ε .

本文要求整系数 a_j 满足 (1.4), 避免可能存在的 Siegel 零点对研究的影响, 简化了相关复杂计算.

按通常记法, $\varphi(n)$ 、 $\mu(n)$ 和 $\Lambda(n)$ 分别表示 Euler 函数、Möbius 函数和 von Mangoldt 函数. $d(n)$ 是除数函数, $\omega(n)$ 表示 n 不同素因子的个数. $\chi \pmod{q}$ 和 $\chi_0 \pmod{q}$ 分别表示模 q 的 Dirichlet 特征和主特征. $L(s, \chi)$ 是 Dirichlet 函数. $r \sim R$ 表示 $R < r \leq 2R$. B 、 C 、 c 和 c_j 表示绝对正常数, 且每次出现不一定相同, ε 是很小的正数.

2 圆法

令 $I(b)$ 表示方程 (1.2) 加权解的个数, 即

$$I(b) = \sum_{\substack{a_1 p_1^2 + a_2 p_2^2 + a_3 p_3^2 + a_4 p_4^3 + a_5 p_5^3 + a_6 p_6^3 = b \\ M < |a_i| p_i^2 \leq N, i=1,2,3, M < |a_j| p_j^3 \leq N, j=4,5,6}} (\log p_1)(\log p_2) \cdots (\log p_6),$$

其中 N 是很大的参数, $M = N/400$. 我们利用圆法来计算 $I(b)$. 令

$$\mathfrak{M}(Q) = \bigcup_{1 \leq q \leq Q} \bigcup_{\substack{1 \leq h \leq q \\ (h, q) = 1}} \mathfrak{M}(Q; h, q),$$

其中 $\mathfrak{M}(Q; h, q)$ 表示区间 $[\frac{h}{q} - \frac{QL^{400}}{qN}, \frac{h}{q} + \frac{QL^{400}}{qN}]$. 参数

$$Q_1 = \left(\frac{N}{A}\right)^{2/15-\varepsilon}, \quad Q_2 = \left(\frac{N}{A}\right)^{9/26}, \quad \tau = \frac{N}{Q_1 L^{400}}, \quad L = \log N. \quad (2.1)$$

再令

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(Q_1), \quad \mathfrak{m} = \mathfrak{M}(Q_2) \setminus \mathfrak{M}(Q_1), \quad \mathfrak{t} = [0, 1) \setminus \mathfrak{M}(Q_2). \quad (2.2)$$

定义

$$S_i(\alpha) = \sum_{M < |a_i|p^2 \leq N} (\log p) e(a_i p^2 \alpha), \quad i = 1, 2, 3,$$

$$S_j(\alpha) = \sum_{M < |a_j|p^3 \leq N} (\log p) e(a_j p^3 \alpha), \quad j = 4, 5, 6.$$

我们有

$$I(b) = \int_0^1 \prod_{l=1}^6 S_l(\alpha) e(-b\alpha) d\alpha = \int_{\mathfrak{M}} + \int_{\mathfrak{m}} + \int_{\mathfrak{t}}. \quad (2.3)$$

对任意正整数 h 和模 q 的特征 χ , 定义

$$G_\chi(h) = \sum_{k=1}^q \chi(k) e\left(\frac{hk^2}{q}\right), \quad G_q(h) = G_{\chi_0}(h) = \sum_{\substack{k=1 \\ (k,q)=1}}^q e\left(\frac{hk^2}{q}\right),$$

$$C_\chi(h) = \sum_{k=1}^q \chi(k) e\left(\frac{hk^3}{q}\right), \quad C_q(h) = C_{\chi_0}(h) = \sum_{\substack{k=1 \\ (k,q)=1}}^q e\left(\frac{hk^3}{q}\right).$$

若 $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_6$ 是模 q 的特征, 记

$$Z(b, q; \chi_1, \chi_2, \dots, \chi_6) = \sum_{\substack{h=1 \\ (h,q)=1}}^q e\left(-\frac{hb}{q}\right) \prod_{i=1}^3 G_{\chi_i}(a_i h) \prod_{j=4}^6 C_{\chi_j}(a_j h), \quad (2.4)$$

$$Y(b, q; \chi_1, \chi_2, \dots, \chi_6) = \sum_{h=1}^q e\left(-\frac{hb}{q}\right) \prod_{i=1}^3 G_{\chi_i}(a_i h) \prod_{j=4}^6 C_{\chi_j}(a_j h), \quad (2.5)$$

$$Z(b, q) = Z(b, q; \chi_0, \chi_0, \dots, \chi_0), \quad Y(b, q) = Y(b, q; \chi_0, \chi_0, \dots, \chi_0),$$

$$A(b, q) = \varphi(q)^{-6} Z(b, q), \quad \mathfrak{S}(b, x) = \sum_{q \leq x} A(b, q).$$

易知 $Y(b, q; \chi_1, \chi_2, \dots, \chi_6) = q \sum_{(q)} \chi_1(k_1) \chi_2(k_2) \cdots \chi_6(k_6)$, 其中 $\sum_{(q)}$ 表示对满足 $1 \leq k_j \leq q$, $(k_j, q) = 1$, $j = 1, 2, \dots, 6$, $a_1 k_1^2 + a_2 k_2^2 + a_3 k_3^2 + a_4 k_4^3 + a_5 k_5^3 + a_6 k_6^3 \equiv b \pmod{q}$ 的 $k_1, k_2, \dots, k_6$ 求和.

当 $\chi_1 = \chi_2 = \cdots = \chi_6 = \chi_0 \pmod{q}$ 时, $Y(b, q) = q\mathcal{N}(q)$, 即

$$\mathcal{N}(q) = q^{-1} Y(b, q) = q^{-1} \sum_{h=1}^q e\left(-\frac{hb}{q}\right) \prod_{i=1}^3 G_{\chi_i}(a_i h) \prod_{j=4}^6 C_{\chi_j}(a_j h). \quad (2.6)$$

容易验证 $A(b, q)$ 、 $Y(b, q)$ 和 $\mathcal{N}(q)$ 都是 q 的积性函数. 对任意素数 p , 令 $s(p) = 1 + A(b, p)$, 则

$$s(p) = \varphi(p)^{-6} \mathcal{N}(p)p. \quad (2.7)$$

由 Dirichlet 有理逼近定理, 对任意实数 $\alpha \in [1/\tau, 1 + 1/\tau]$, 存在整数 h 和 q , 使得

$$\alpha = \frac{h}{q} + \lambda, \quad |\lambda| \leq \frac{1}{q\tau}, \quad (2.8)$$

其中整数 h 和 q 满足 $1 \leq h \leq q \leq \tau$ 和 $(h, q) = 1$. 注意到当 $q \leq Q_1$, $M < |a_i|p^2 \leq N$, $M < |a_j|p^3 \leq N$ 时, 由 (2.1) 知, $(p, q) = 1$. 再由 (2.8) 知,

$$S_i\left(\frac{h}{q} + \lambda\right) = \frac{1}{\varphi(q)} G_q(a_i h) V_i(\lambda) + \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \bmod q} G_{\bar{\chi}}(a_i h) W_i(\chi, \lambda) =: T_i + U_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

其中

$$\begin{aligned} \delta_\chi &:= \begin{cases} 1, & \chi = \chi_0, \\ 0, & \chi \neq \chi_0, \end{cases} \quad V_i(\lambda) = \sum_{M < |a_i| m^2 \leq N} e(a_i m^2 \lambda), \\ W_i(\chi, \lambda) &= \sum_{M < |a_i| p^2 \leq N} (\log p) \chi(p) e(a_i p^2 \lambda) - \delta_\chi \sum_{M < |a_i| m^2 \leq N} e(a_i m^2 \lambda), \\ S_j\left(\frac{h}{q} + \lambda\right) &= \frac{1}{\varphi(q)} C_q(a_j h) V_j(\lambda) + \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \bmod q} C_{\bar{\chi}}(a_j h) W_j(\chi, \lambda) =: T_j + U_j, \quad j = 4, 5, 6, \end{aligned} \quad (2.9)$$

这里

$$\begin{aligned} V_j(\lambda) &= \sum_{M < |a_j| m^3 \leq N} e(a_j m^3 \lambda), \\ W_j(\chi, \lambda) &= \sum_{M < |a_j| p^3 \leq N} (\log p) \chi(p) e(a_j p^3 \lambda) - \delta_\chi \sum_{M < |a_j| m^3 \leq N} e(a_j m^3 \lambda). \end{aligned} \quad (2.10)$$

3 主区间上主要项的计算

对 $I(b)$ 的主要贡献来自主区间, 其上的积分是较困难的. 由 (2.2) 和 (2.3) 知,

$$\int_{\mathfrak{M}} = \sum_{q \leq Q_1} \sum_{\substack{h=1 \\ (h, q)=1}}^q e\left(-\frac{bh}{q}\right) \int_{\mathfrak{M}(Q_1; h, q)} \prod_{l=1}^6 S_l\left(\frac{h}{q} + \lambda\right) e(-b\lambda) d\lambda = I_0 + I_1 + I_2 + \cdots + I_6, \quad (3.1)$$

其中

$$I_n = \sum_{q \leq Q_1} \sum_{\substack{h=1 \\ (h, q)=1}}^q e\left(-\frac{bh}{q}\right) \int_{-\frac{1}{q\tau}}^{\frac{1}{q\tau}} \sum_{\substack{I \subseteq \{1, 2, \dots, 6\} \\ |I|=n}} \left(\prod_{i \in I} U_i \right) \left(\prod_{j \in \{1, 2, \dots, 6\}/I} T_j \right) e(-b\lambda) d\lambda. \quad (3.2)$$

T_j 贡献主要项, U_j 贡献次要项. 令 $N_l = N/|a_l|$, $M_l = M/|a_l|$, $l = 1, 2, \dots, 6$. 容易计算

$$V_i(\lambda) \ll |a_i|^{-\frac{1}{2}} \min(N^{\frac{1}{2}}, M^{-\frac{1}{2}} |\lambda|^{-1}) + 1 + |\lambda| N, \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.3)$$

$$V_j(\lambda) \ll |a_j|^{-\frac{1}{3}} \min(N^{\frac{1}{3}}, M^{-\frac{2}{3}} |\lambda|^{-1}) + 1 + |\lambda| N, \quad j = 4, 5, 6. \quad (3.4)$$

引理 3.1 在条件 (1.3) 下, 如果 (i) $a_1, a_2, \dots, a_6$ 不都是正数, 且 $N \geq c_1 |b|$, 其中 c_1 为某常数, 或者 (ii) $a_1, a_2, \dots, a_6$ 都是正数, $b = N$, 那么,

$$J(b) = \sum_{\substack{a_1 m_1 + a_2 m_2 + \cdots + a_6 m_6 = b \\ M < |a_l| m_l \leq N, l=1, 2, \dots, 6}} (m_1 m_2 m_3)^{-\frac{1}{2}} (m_4 m_5 m_6)^{-\frac{2}{3}} \asymp |a_1 a_2 a_3|^{-\frac{1}{2}} |a_4 a_5 a_6|^{-\frac{1}{3}} N^{\frac{3}{2}}. \quad (3.5)$$

证明 按文献 [13] 中的方法证明即可. □

引理 3.2 (参见文献 [8, 引理 3.1]) 令 χ 是模 p^α ($\alpha \geq 0$) 的非主特征, $i = 1, 2, 3$.

(1) 如果 χ 是原特征, $\alpha \geq 1, p \mid a_i h$, 那么 $G_\chi(a_i h) = 0$.

(2) 如果 χ_0 是模 p^t 的特征, $p \nmid a_i h, t \geq \theta + \max(\theta, \alpha), \theta = 1 + [2/p]$, 那么 $G_{\chi\chi_0}(a_i h) = 0$.

(3) $|G_\chi(a_i h)| \leq 2(2, p)(a_i h, p^\alpha)^{1/2} p^{\alpha/2}$.

引理 3.3 (参见文献 [13, 引理 2.2.2]) 令 χ 是模 p^α ($\alpha \geq 0$) 的非主特征, $j = 4, 5, 6$.

(i) 如果 χ 是原特征, $\alpha \geq 1, p \mid a_j h$, 那么 $C_\chi(a_j h) = 0$.

(ii) 如果 χ_0 是模 p^t 的特征, $p \nmid a_j h, t \geq \theta + \max(\theta, \alpha)$, 其中 $p \neq 3$ 时, $\theta = 1$; $p = 3$ 时, $\theta = 2$, 那么 $C_{\chi\chi_0}(a_j h) = 0$.

(iii) $|C_\chi(a_j h)| \leq 3(3, p)(a_j h, p^\alpha)^{1/2} p^{\alpha/2}$.

引理 3.4 对于 $l = 1, 2, \dots, 6$, 令 χ_l 是模 p^{α_j} 的原特征, $\alpha = \max\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6\}$, 对任意 $t \geq \alpha$, 再令 $Z_1(b, p^t) = Z(b, p^t; \chi_1\chi_0, \chi_2\chi_0, \dots, \chi_6\chi_0)$, $Y_1(b, p^t) = Y(b, p^t; \chi_1\chi_0, \chi_2\chi_0, \dots, \chi_6\chi_0)$, 其中 χ_0 是模 p^t 的主特征, 那么,

(i) $Z_1(b, p^\alpha) = Y_1(b, p^\alpha)$;

(ii) 若 $t \geq \theta + \max(\theta, \alpha)$, 其中 $p \neq 3$ 时, $\theta = 1$; $p = 3$ 时, $\theta = 2$, 则 $Z_1(b, p^t) = 0$;

(iii) 对任意的 $\eta \geq \alpha$, 有 $\sum_{v=\alpha}^\eta \varphi(p^v)^{-6} Z_1(b, p^v) = \varphi(p^\eta)^{-6} Y_1(b, p^\eta)$.

证明 (i) 由 (2.4) 和 (2.5) 知, 要证明 $Z_1(b, p^\alpha) = Y_1(b, p^\alpha)$, 只需证明: 对每一个 $p \mid h$, 有

$$\prod_{i=1}^3 G_{\chi_i}(a_i h) \prod_{j=4}^6 C_{\chi_j}(a_j h) = 0.$$

若 $\alpha = \alpha_1 \geq 1$, 由于 $\chi_1 \pmod{p^\alpha}$ 是原特征, 由引理 3.2(i) 知, $G_{\chi_1\chi_0}(a_1 h) = 0$. 若 $\alpha = \alpha_4 \geq 1$, 由引理 3.3(i) 知, $C_{\chi_1\chi_0}(a_1 h) = 0$.

(ii) 在 (2.4) 中, 令 $q = p^t$, 由于 $(a_i, a_j) = 1, (b, a_1, a_2, \dots, a_6) = 1$, 由引理 3.2(ii) 和 3.3(ii) 知结论成立.

(iii) 由于

$$\begin{aligned} Z_1(b, p^v) &= \sum_{h=1}^{p^v} e\left(-\frac{hb}{p^v}\right) \prod_{i=1}^3 G_{\chi_i\chi_0}(a_i h) \prod_{j=4}^6 C_{\chi_j\chi_0}(a_j h) \\ &\quad - \sum_{\substack{h=1 \\ (h, p^v) \neq 1}}^{p^v} e\left(-\frac{hb}{p^v}\right) \prod_{i=1}^3 G_{\chi_i\chi_0}(a_i h) \prod_{j=4}^6 C_{\chi_j\chi_0}(a_j h), \end{aligned}$$

第一个和式为 $Y_1(b, p^v)$, 令 $h = ph'$, 则当 $v \geq \max\{\alpha + 1, 2\}$ 时, 第二个和式等于 $p^6 Y_1(b, p^{v-1})$, 因而,

$$\varphi(p^v)^{-6} Z_1(b, p^v) = \varphi(p^v)^{-6} Y_1(b, p^v) - \varphi(p^{v-1})^{-6} Y_1(b, p^{v-1}), \quad v \geq \alpha + 1. \quad (3.6)$$

当 $v = 1, \alpha = 0$ 时, 直接计算知上式仍成立. 接下来, (3.6) 两边对 $v = \alpha + 1, \dots, \eta$ 求和得

$$\sum_{v=\alpha+1}^\eta \varphi(p^v)^{-6} Z_1(b, p^v) = \varphi(p^\eta)^{-6} Y_1(b, p^\eta) - \varphi(p^\alpha)^{-6} Y_1(b, p^\alpha),$$

移项即得 (iii) 的结论. $\square$

引理 3.5 (i) 当 $p \neq 3, t \geq 2$ 时, $A(b, p^t) = 0$; 当 $t \geq 4$ 时, $A(b, 3^t) = 0$.

(ii) 当 $p \neq 3, \eta \geq 1$ 时, $p^\eta \varphi(p^\eta)^{-6} \mathcal{N}(p^\eta) = p \varphi(p)^{-6} \mathcal{N}(p)$.

(iii) 当 $\eta \geq 3$ 时, $3^\eta \varphi(3^\eta)^{-6} \mathcal{N}(3^\eta) = 3^3 \varphi(3^3)^{-6} \mathcal{N}(3^3)$.

证明 (i) 取 $\chi_1 = \chi_2 = \cdots = \chi_6 = \chi_0$, 并令引理 3.4 中 $\alpha = 0, t \geq 2\theta$, 则 $A(b, p^v) = \varphi(p^v)^{-6} Z_1(b, p^v), \mathcal{N}(p^v) = p^{-v} Y_1(b, p^v)$, 可证 (i) 的结果.

(ii) 当 $p \neq 3$ 时, $\theta = 1$, 取 $\alpha = 0$, 由引理 3.4(ii) 知 $t \geq 2\theta = 2, Z_1(b, p^t) = 0$. 再由引理 3.4(iii) 得

$$\varphi(p^0)^{-6} Z_1(b, p^0) + \varphi(p)^{-6} Z_1(b, p) = \varphi(p^\eta)^{-6} Y_1(b, p^\eta) = \varphi(p^\eta)^{-6} p^\eta \mathcal{N}(p^\eta). \quad (3.7)$$

利用 (3.6), 取 $\alpha = 0, v = 1$, 则

$$\varphi(p)^{-6} Z_1(b, p) = \varphi(p)^{-6} Y_1(b, p) - \varphi(p^0)^{-6} Y_1(b, p^0), \quad (3.8)$$

从而, 由 (3.7) 和 (3.8) 得 $\varphi(p)^{-6} Y_1(b, p) = \varphi(p)^{-6} p \mathcal{N}(p) = \varphi(p^\eta)^{-6} p^\eta \mathcal{N}(p^\eta)$.

(iii) 当 $p = 3$ 时, 取 $\alpha = 0, \theta = 2, t \geq 2\theta = 4, A(b, 3^t) = 0$, 由引理 3.4(iii) 知,

$$\begin{aligned} & \varphi(3^0)^{-6} Z_1(b, 3^0) + \varphi(3)^{-6} Z_1(b, 3) + \varphi(3^2)^{-6} Z_1(b, 3^2) + \varphi(3^3)^{-6} Z_1(b, 3^3) \\ &= \varphi(3^\eta)^{-6} Y_1(b, 3^\eta) \\ &= \varphi(3^\eta)^{-6} 3^\eta \mathcal{N}(3^\eta), \end{aligned}$$

进而,

$$\begin{aligned} & \varphi(3^0)^{-6} Z_1(b, 3^0) + \varphi(3)^{-6} Y_1(b, 3) - \varphi(3^0)^{-6} Y_1(b, 3^0) + \varphi(3^2)^{-6} Y_1(b, 3^2) \\ & - \varphi(3)^{-6} Y_1(b, 3) + \varphi(3^3)^{-6} Y_1(b, 3^3) - \varphi(3^2)^{-6} Y_1(b, 3^2) \\ &= \varphi(3^\eta)^{-6} 3^\eta \mathcal{N}(3^\eta), \end{aligned}$$

结论 (iii) 得证. □

引理 3.6 令 χ_l 是模 r_l 的原特征, $l = 1, 2, \dots, 6, \chi_0$ 是模 q 的主特征, $r_0 = [r_1, r_2, \dots, r_6]$, 则

$$\sum_{\substack{q \leq x \\ r_0 | q}} \frac{1}{\varphi^6(q)} |Z(b, q; \chi_1 \chi_0, \chi_2 \chi_0, \dots, \chi_6 \chi_0)| \ll r_0^{-\frac{3}{2} + \varepsilon}.$$

证明 由 (2.4) 知, $(h, q) = 1$. 注意到 $(a_i, a_j) = 1$, 不失一般性, 当 $p^\alpha \nmid a_1 a_2 \cdots a_6$ 时, 由引理 3.2(iii) 和 3.3(iii), 可得

$$|Z(b, p^\alpha; \chi_1, \chi_2, \dots, \chi_6)| \leq \varphi(p^\alpha) \prod_{i=1}^3 (2(2, p)(a_i h, p^\alpha)^{\frac{1}{2}} p^{\frac{\alpha}{2}}) \prod_{j=4}^6 (3(3, p)(a_j h, p^\alpha)^{\frac{1}{2}} p^{\frac{\alpha}{2}}) \leq 3^{12} \varphi(p^\alpha) p^{3\alpha}.$$

当 $p^\alpha \mid a_1, p^\alpha \nmid a_2 \cdots a_6$, 或者 $p^\alpha \mid a_4, p^\alpha \nmid a_1 a_2 a_3 a_5 a_6$ 时, 由引理 3.2(iii) 和 3.3(iii), 可得

$$\begin{aligned} & |Z(b, p^\alpha; \chi_1, \chi_2, \dots, \chi_6)| \leq 3^{12} \varphi(p^\alpha) p^{\frac{7\alpha}{2}}, \\ & |Z(b, q; \chi_1, \chi_2, \dots, \chi_6)| = \prod_{p|q} |Z(b, p^\alpha; \chi_1, \chi_2, \dots, \chi_6)| \ll \varphi(q) q^{\frac{7}{2}} \prod_{p|q} 3^{12} \ll \varphi(q) q^{\frac{7}{2}} d^{12}(q), \end{aligned}$$

$$\sum_{\substack{q \leq x \\ r_0 | q}} \frac{1}{\varphi^6(q)} |Z(b, q; \chi_1 \chi_0, \chi_2 \chi_0, \dots, \chi_6 \chi_0)| \ll \sum_{\substack{q \leq x \\ r_0 | q}} q^{-\frac{3}{2}} d^{17}(q).$$

令 $q = r_0 k$, 注意到 $d(q) \ll q^\varepsilon$, 则

$$\sum_{\substack{q \leq x \\ r_0 | q}} q^{-\frac{3}{2}} d^{17}(q) \ll \sum_{1 \leq k \leq x r_0^{-1}} (r_0 k)^{-\frac{3}{2}} d^{17}(r_0 k) \ll \frac{d^{17}(r_0)}{r_0^{3/2}} \sum_{1 \leq k \leq x r_0^{-1}} \frac{d^{17}(k)}{k^{3/2}} \ll r_0^{-\frac{3}{2} + \varepsilon}.$$

证毕. □

引理 3.7 (i) 对 $x > 0$, 存在正常数 c_2 , $\sum_{q>x} |A(b, q)| \ll x^{-1} A^\varepsilon \log^{c_2}(x+2)$, 且奇异级数 $\mathfrak{S}(b) := \mathfrak{S}(b, \infty)$ 绝对收敛;

(ii) 存在正常数 c_3 , 使得 $\mathfrak{S}(b) \gg (\log \log A)^{-c_3}$.

证明 由完整三角和估计 (参见文献 [16, 第二十六章, (3.18)]) 知, 当 $p \mid a_1 a_2 \cdots a_6$ 时, 由 (1.4) 知, p 只能整除 $a_1, a_2, \dots, a_6$ 中的某一个, 从而存在常数 $c > 0$, 使得 $|A(b, p)| \leq cp^{-\frac{3}{2}}$. 当 $p \nmid a_1 a_2 \cdots a_6$ 时, $|A(b, p)| \leq c_2 p^{-2}$, 其中 c_2 为某一正常数.

令 $\sigma = (\log(x+2))^{-1}$, 注意到 $x^\sigma \ll 1$, 由 $A(b, q)$ 的可积性, 得

$$\sum_{q>x} |A(b, q)| \leq \sum_{q=1}^{\infty} \left(\frac{q}{x}\right)^{1-\sigma} |A(b, q)| = x^{-1+\sigma} \sum_{q=1}^{\infty} q^{1-\sigma} |A(b, q)| \ll x^{-1} \prod_p (1 + p^{1-\sigma} |A(b, p)|), \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} & \prod_{p \mid a_1 a_2 \cdots a_6} (1 + p^{1-\sigma} |A(b, p)|) \\ & \leq \prod_{p \mid a_1 a_2 \cdots a_6} (1 + cp^{-\frac{1}{2}-\sigma}) \ll \prod_{p \mid a_1 a_2 \cdots a_6} (1 + cp^{-\sigma}) \ll d(a_1 a_2 \cdots a_6)^{\log_2^{1+c}} \ll A^\varepsilon, \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} & \prod_{p \nmid a_1 a_2 \cdots a_6} (1 + p^{1-\sigma} |A(b, p)|) \\ & \leq \prod_{p \nmid a_1 a_2 \cdots a_6} (1 + c_2 p^{-1-\sigma}) \ll \prod_p (1 - p^{-1-\sigma})^{-c_2} \ll \zeta(1+\sigma)^{c_2} \ll \sigma^{-c_2} \ll \log^{c_2}(x+2). \end{aligned} \quad (3.11)$$

综合 (3.9)–(3.11), 可得 (i) 的结论.

由 (2.7), 若 $\mathcal{N}(p) > 0$, 则存在常数 $c'_3 > 0$, 使得

$$\mathcal{N}(p) = p^5 + O(p^4), \quad |A(b, p)| = |s(p) - 1| = \left| \frac{p^6 + O(p^5)}{\varphi^6(p)} - 1 \right| \leq c'_3 p^{-1}.$$

又因为 $\prod_{p \mid x} (1 + \frac{1}{p}) \ll \log \log x$, 则对于大常数 $c'_3 > c_2$, 有

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}(b) &= \prod_p (1 + A(b, p)) \gg \prod_{\substack{p \mid a_1 a_2 \cdots a_6 \\ p > c'_3}} \left(1 - \frac{c'_3}{p}\right) \prod_{\substack{p \nmid a_1 a_2 \cdots a_6 \\ p > c'_3}} \left(1 - \frac{c_2}{p^2}\right) \\ &\gg \prod_{\substack{p \mid a_1 a_2 \cdots a_6 \\ p > c'_3}} \left(1 - \frac{c'_3}{p}\right) \gg \prod_{p \mid a_1 a_2 \cdots a_6} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{-(1+c'_3)} \gg (\log \log A)^{-c_3}, \end{aligned}$$

其中 $c_3 = 1 + c'_3$, 引理证毕. □

由引理 3.7 知, $\mathfrak{S}(b, Q_1) + \sum_{q>Q_1} A(b, q) \gg (\log \log A)^{-c_3}$, 则

$$\mathfrak{S}(b, Q_1) \gg (\log \log A)^{-c_3}. \quad (3.12)$$

由 (3.2) 知,

$$\begin{aligned} I_0 &= \sum_{q \leq Q_1} \sum_{\substack{h=1 \\ (h, q)=1}}^q e\left(-\frac{bh}{q}\right) \int_{-\frac{1}{q\tau}}^{\frac{1}{q\tau}} \prod_{j=1}^6 T_j e(-b\lambda) d\lambda \\ &= \frac{1}{6^3} \sum_{q \leq Q_1} \frac{Z(b, q)}{\varphi^6(q)} \int_{-\frac{1}{q\tau}}^{\frac{1}{q\tau}} \prod_{i=1}^3 \left(\sum_{M_i < m \leq N_i} \frac{e(a_i m \lambda)}{m^{1/2}} \right) \prod_{j=4}^6 \left(\sum_{M_j < m \leq N_j} \frac{e(a_j m \lambda)}{m^{2/3}} \right) e(-b\lambda) d\lambda \end{aligned}$$

$$+ O\left(\sum_{q \leq Q_1} \frac{|Z(b, q)|}{\varphi^6(q)} \int_{-\frac{1}{q\tau}}^{\frac{1}{q\tau}} \prod_{i=1}^3 \left| \sum_{M_i < m \leq N_i} \frac{e(a_i m \lambda)}{m^{1/2}} \right| \sum_{\substack{w \in \{4, 5, 6\} \\ |w|=2}} \prod_{j \in w} \left| \sum_{M_j < m \leq N_j} \frac{e(a_j m \lambda)}{m^{2/3}} \right| (1 + |\lambda| N) d\lambda \right).$$

由引理 3.5、(3.3) 和 (3.4) 可知,

$$\begin{aligned} I_0 \text{ 中的余项} &\ll \sum_{q \leq Q_1} \frac{|Z(b, q)|}{\varphi^6(q)} \left(\int_0^{1/N} N_1^{\frac{1}{2}} N_2^{\frac{1}{2}} N_3^{\frac{1}{2}} (N_4^{\frac{1}{3}} N_5^{\frac{1}{3}} + N_4^{\frac{1}{3}} N_6^{\frac{1}{3}} + N_5^{\frac{1}{3}} N_6^{\frac{1}{3}}) (1 + \lambda N) d\lambda \right. \\ &\quad \left. + \int_{1/N}^{1/\tau} |a_1 a_2 a_3|^{-\frac{1}{2}} M^{-\frac{3}{2}} \lambda^{-3} (|a_4 a_5|^{-\frac{1}{3}} + |a_4 a_6|^{-\frac{1}{3}} + |a_5 a_6|^{-\frac{1}{3}}) M^{-\frac{4}{3}} \lambda^{-2} (1 + \lambda N) d\lambda \right) \\ &\ll |a_1 a_2 a_3|^{-\frac{1}{2}} |a_4 a_5 a_6|^{-\frac{1}{3}} N^{\frac{3}{2}} L^{-1}. \end{aligned}$$

把 I_0 中主项的积分区间 $[-1/(q\tau), 1/(q\tau)]$ 扩大到 $[-1/2, 1/2]$, 由此产生的余项上界为

$$\begin{aligned} &\int_{N^{-1}L^{400}}^{1/2} \prod_{i=1}^3 \min(N_i^{\frac{1}{2}}, M_i^{-\frac{1}{2}} |a_i \lambda|^{-1}) \prod_{j=4}^6 \min(N_j^{\frac{1}{3}}, M_j^{-\frac{2}{3}} |a_j \lambda|^{-1}) d\lambda \\ &\ll |a_1 a_2 a_3|^{-\frac{1}{2}} |a_4 a_5 a_6|^{-\frac{1}{3}} N^{\frac{3}{2}} L^{-1}, \end{aligned}$$

于是,

$$I_0 = \frac{1}{216} \mathfrak{S}(b, Q_1) J(b) + O(|a_1 a_2 a_3|^{-\frac{1}{2}} |a_4 a_5 a_6|^{-\frac{1}{3}} N^{\frac{3}{2}} L^{-1}). \quad (3.13)$$

4 主区间上次要项的上界估计

对主区间上的次要项进行上界估计, 需要下面几个引理. 首先, 对任意 $g \geq 1, l = 1, \dots, 6$, 定义

$$J_l(g) = \sum_{r \leq Q_1} [g, r]^{-\frac{3}{2} + \varepsilon} \sum_{\chi \bmod r}^* \max_{|\lambda| \leq 1/(r\tau)} |W_l(\chi, \lambda)|, \quad (4.1)$$

$$K_l(g) = \sum_{r \leq Q_1} [g, r]^{-\frac{3}{2} + \varepsilon} \sum_{\chi \bmod r}^* \left(\int_{-\frac{1}{r\tau}}^{\frac{1}{r\tau}} |W_l(\chi, \lambda)|^2 d\lambda \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (4.2)$$

其中 $\sum_{\chi \bmod r}^*$ 遍历模 r 的原特征, $[g, r]$ 是 g 和 r 的最小公倍数.

引理 4.1 令 Q_1 和 τ 满足 (2.1), $g \ll N^\theta$, θ 和 C 是正常数, 则

$$J_i(g) \ll g^{-\frac{3}{2} + 2\varepsilon} N_i^{\frac{1}{2}} L^C, \quad i = 1, 2, 3, \quad (4.3)$$

$$J_j(g) \ll g^{-\frac{3}{2} + 2\varepsilon} N_j^{\frac{1}{3}} L^C, \quad j = 4, 5, 6. \quad (4.4)$$

证明 (4.3) 和 (4.4) 的证明类似, 我们仅证明 (4.3). 由二分法知, $J_i(g) \ll L \max_{R \leq Q_1} J_i(g, R)$, 其中

$$J_i(g, R) = \sum_{r \sim R} [g, r]^{-\frac{3}{2} + \varepsilon} \sum_{\chi \bmod r}^* \max_{|\lambda| \leq 1/(r\tau)} |W_i(\chi, \lambda)|.$$

由此, 要证明 (4.3), 只需证明

$$J_i(g, R) \ll g^{-\frac{3}{2} + 2\varepsilon} N_i^{\frac{1}{2}} L^C. \quad (4.5)$$

令

$$\hat{W}_i(\chi, \lambda) = \sum_{M < |a_i| m^2 \leq N} \Lambda(m) \chi(m) e(a_i m^2 \lambda) - \delta_\chi \sum_{M < |a_i| m^2 \leq N} e(a_i m^2 \lambda), \quad (4.6)$$

由 (2.9) 知,

$$\begin{aligned} \hat{W}_i(\chi, \lambda) - W_i(\chi, \lambda) &= \sum_{m \geq 2} \sum_{M < |a_i| p^{2m} \leq N} (\log p) \chi(p^m) e(a_i p^{2m} \lambda) \ll N_i^{\frac{1}{4}}, \\ \sum_{r \sim R} [g, r]^{-\frac{3}{2} + \varepsilon} \sum_{\chi \bmod r}^* \max_{|\lambda| \leq 1/(r\tau)} N_i^{\frac{1}{4}} &\ll R^{\frac{1}{2} + \varepsilon} N_i^{\frac{1}{4}} \ll g^{-\frac{3}{2} + 2\varepsilon} N_i^{\frac{1}{2}} L^C. \end{aligned} \quad (4.7)$$

因而, 要使 (4.5) 成立, 只需证明

$$\sum_{r \sim R} [g, r]^{-\frac{3}{2} + \varepsilon} \sum_{\chi \bmod r}^* \max_{|\lambda| \leq 1/(r\tau)} |\hat{W}_i(\chi, \lambda)| \ll g^{-\frac{3}{2} + 2\varepsilon} N_i^{\frac{1}{2}} L^C. \quad (4.8)$$

当 $R < 1$ 时,

$$(4.8) \text{ 左端} \ll g^{-\frac{3}{2} + 2\varepsilon} \sum_{M < |a_i| m^2 \leq N} \log m \ll g^{-\frac{3}{2} + 2\varepsilon} N_i^{\frac{1}{2}} L^C,$$

这是可接受的. 接下来证明当 $R \geq 1$ 时, (4.8) 成立.

令 $M_i^{1/2} < u \leq N_i^{1/2}$, $D_1, \dots, D_{10}$ 是正数, $2^{-10} M_i^{1/2} \leq D_1 \cdots D_{10} < u$, $2D_6, \dots, 2D_{10} \leq u^{1/5}$,

$$\begin{aligned} a_v(m) &= \begin{cases} \log m, & v = 1, \\ 1, & v = 2, 3, 4, 5, \\ \mu(m), & v = 6, 7, 8, 9, 10, \end{cases} \\ f_v(s) = f_v(s, \chi) &= \sum_{m \sim D_v} \frac{a_v(m) \chi(m)}{m^s}, \quad F(s) = F(s, \chi) = f_1(s) \cdots f_{10}(s). \end{aligned}$$

由文献 [17, 引理 2.1] 知, 对于 $1 \leq R \leq N_i$, $T > 0$, 有

$$\sum_{\substack{r \sim R \\ d|r}} \sum_{\chi \bmod r}^* \int_T^{2T} \left| F\left(\frac{1}{2} + it, \chi\right) \right| dt \ll \left(\frac{R^2}{d} T + \frac{R}{d^{\frac{1}{2}}} T^{\frac{1}{2}} N_j^{\frac{3}{20}} + N_j^{\frac{1}{4}} \right) L^C. \quad (4.9)$$

取 $T_0 = 8\pi N/(R\tau)$, 由 Heath-Brown 恒等式 (参见文献 [18, 引理 1])、围道积分、van der Corput 方法 [19] 可知, 对于 $R \leq Q_1$, 以及 $0 < T_1 \leq T_0$, 要证明 (4.8), 只需证明

$$\sum_{r \sim R} [g, r]^{-\frac{3}{2} + \varepsilon} \sum_{\chi \bmod r}^* \int_{T_1}^{2T_1} \left| F\left(\frac{1}{2} + it, \chi\right) \right| dt \ll g^{-\frac{3}{2} + 2\varepsilon} N_i^{\frac{1}{4}} (T_1 + 1)^{\frac{1}{2}} L^C. \quad (4.10)$$

对于 $R \leq Q_1$, 以及 $T_0 < T_2 \leq T$, 要证明 (4.8), 只需证明

$$\sum_{r \sim R} [g, r]^{-\frac{3}{2} + \varepsilon} \sum_{\chi \bmod r}^* \int_{T_2}^{2T_2} \left| F\left(\frac{1}{2} + it, \chi\right) \right| dt \ll g^{-\frac{3}{2} + 2\varepsilon} N_i^{\frac{1}{4}} T_2 L^C. \quad (4.11)$$

为了证明 (4.10), 注意到 $g, r = gr$, 并由 (4.9) 知,

$$\begin{aligned}
 (4.10) \text{ 左端} &\ll g^{-\frac{3}{2}+\varepsilon} \sum_{\substack{d|g \\ d \leq R}} \left(\frac{R}{d}\right)^{-\frac{3}{2}+\varepsilon} \sum_{r \sim R} \sum_{\substack{\chi \bmod r \\ d|r}}^* \int_{T_1}^{2T_1} \left| F\left(\frac{1}{2} + it, \chi\right) \right| dt \\
 &\ll g^{-\frac{3}{2}+\varepsilon} \sum_{\substack{d|g \\ d \leq R}} \left(\frac{R}{d}\right)^{-\frac{3}{2}+\varepsilon} \left(\frac{R^2}{d} T_1 + \frac{R}{d^{\frac{1}{2}}} T_1^{\frac{1}{2}} N_i^{\frac{3}{20}} + N_i^{\frac{1}{4}} \right) L^C \\
 &\ll g^{-\frac{3}{2}+\varepsilon} \tau(g) (R^{1+\varepsilon} T_1 + R^{\frac{1}{2}} T_1^{\frac{1}{2}} N_i^{\frac{3}{20}} + N_j^{\frac{1}{4}}) L^C \\
 &\ll g^{-\frac{3}{2}+2\varepsilon} N_i^{\frac{1}{4}} (T_1 + 1)^{\frac{1}{2}} L^C.
 \end{aligned}$$

同理,

$$(4.11) \text{ 左端} \ll g^{-\frac{3}{2}+\varepsilon} \tau(g) (R^{1+\varepsilon} T_2 + R^{\frac{1}{2}} T_2^{\frac{1}{2}} N_i^{\frac{3}{20}} + N_i^{\frac{1}{4}}) L^C \ll g^{-\frac{3}{2}+2\varepsilon} N_i^{\frac{1}{4}} T_2 L^C.$$

(4.3) 证毕. □

引理 4.2 令 Q_1 和 τ 满足 (2.1), 对 $g = 1$ 和任意正数 B , 有

$$J_i(1) \ll N_i^{\frac{1}{2}} L^{-B}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (4.12)$$

$$J_j(1) \ll N_j^{\frac{1}{3}} L^{-B}, \quad j = 4, 5, 6. \quad (4.13)$$

证明 (4.12) 和 (4.13) 的证明类似, 不妨证明 (4.13). 注意到

$$J_j(1) = \sum_{r \leq Q_1} r^{-\frac{3}{2}+\varepsilon} \sum_{\chi \bmod r}^* \max_{|\lambda| \leq 1/(r\tau)} |W_j(\chi, \lambda)|,$$

结合文献 [9, 引理 4.2] 知, 对任意 $R \geq 1$ 和 $T_3 > 0$, 有

$$\sum_{r \sim R} \sum_{\chi \bmod r}^* \int_{T_3}^{2T_3} \left| F\left(\frac{1}{2} + it, \chi\right) \right| dt \ll (R^2 T_3 + R T_3^{\frac{1}{2}} N_j^{\frac{1}{10}} + N_j^{\frac{1}{6}}) L^C. \quad (4.14)$$

令

$$\hat{W}_j(\chi, \lambda) = \sum_{M < |a_j| m^3 \leq N} \Lambda(m) \chi(m) e(a_j m^3 \lambda) - \delta_\chi \sum_{M < |a_j| m^3 \leq N} e(a_j m^3 \lambda), \quad (4.15)$$

由 (2.10) 知,

$$\begin{aligned}
 \hat{W}_j(\chi, \lambda) - W_j(\chi, \lambda) &\ll N_j^{\frac{1}{6}}, \\
 \sum_{r \sim R} r^{-\frac{3}{2}+\varepsilon} \sum_{\chi \bmod r}^* \max_{|\lambda| \leq 1/(r\tau)} N_j^{\frac{1}{6}} &\ll R^{\frac{1}{2}+\varepsilon} N_j^{\frac{1}{6}} \ll N_j^{\frac{1}{3}} L^{-B}.
 \end{aligned} \quad (4.16)$$

因此, 要证明 (4.13), 我们只需证明

$$\sum_{r \sim R} \sum_{\chi \bmod r}^* \max_{|\lambda| \leq 1/(r\tau)} |\hat{W}_j(\chi, \lambda)| \ll R^{\frac{3}{2}-\varepsilon} N_j^{\frac{1}{3}} L^{-B}. \quad (4.17)$$

当 $L^C < R \leq Q_1$ 时, 只需证明: 当 $0 < T_1 \leq T_0$ 时,

$$\sum_{r \sim R} \sum_{\chi \bmod r}^* \int_{T_1}^{2T_1} \left| F\left(\frac{1}{2} + it, \chi\right) \right| dt \ll R^{\frac{3}{2}-\varepsilon} N_j^{\frac{1}{6}} (T_1 + 1)^{\frac{1}{2}} L^{-B}; \quad (4.18)$$

当 $T_0 < T_2 \leq T$ 时,

$$\sum_{r \sim R} \sum_{\chi \bmod r}^* \int_{T_2}^{2T_2} \left| F\left(\frac{1}{2} + it, \chi\right) \right| dt \ll R^{\frac{3}{2}-\varepsilon} N_j^{\frac{1}{6}} T_2 L^{-B}. \quad (4.19)$$

在 (4.14) 中, 令 $T_3 = T_1$, 对足够大的 C , 当 $L^C < R \leq Q_1$ 时,

$$(4.18) \text{ 左端 } \ll (R^2 T_1 + R T_1^{\frac{1}{2}} N_j^{\frac{1}{10}} + N_j^{\frac{1}{6}}) L^C \ll R^{\frac{3}{2}-\varepsilon} N_j^{\frac{1}{6}} (T_1 + 1)^{\frac{1}{2}} L^{-B}.$$

在 (4.14) 中, 令 $T_3 = T_2$, 对足够大的 C , 当 $L^C < R \leq Q_1$ 时,

$$(4.19) \text{ 左端 } \ll (R^2 T_2 + R T_2^{\frac{1}{2}} N_j^{\frac{1}{10}} + N_j^{\frac{1}{6}}) L^C \ll R^{\frac{3}{2}-\varepsilon} N_j^{\frac{1}{6}} T_2 L^{-B}.$$

接下来, 我们证明当 $R \leq L^C$ 时, (4.17) 也成立. 利用文献 [20] 中显式

$$\sum_{m \leq u} \Lambda(m) \chi(m) = \delta_\chi u - \sum_{|\gamma| \leq T} \frac{u^\rho}{\rho} + O((uT^{-1} + 1) \log^2(quT)), \quad (4.20)$$

其中 $\rho = \beta + i\gamma$ 是函数 $L(s, \chi)$ 的非显然零点, 参数 $2 \leq T \leq u$, (4.20) 中取 $T = N_j^{2/15}$, 代入到 (4.15) 中, 并由于 $M_j^{1/3} < u \leq N_j^{1/3}$, $M_j = N_j/400$, 可得

$$\begin{aligned} \hat{W}_j(\chi, \lambda) &= \int_{M_j^{1/3}}^{N_j^{1/3}} e(a_j u^3 \lambda) d\left(\sum_{M_j^{1/3} < m \leq u} (\Lambda(m) \chi(m) - \delta_\chi) \right) \\ &= - \int_{M_j^{1/3}}^{N_j^{1/3}} e(a_j u^3 \lambda) \sum_{|\gamma| \leq T} u^{\rho-1} du + O(N_j^{1/3} T^{-1} (1 + |\lambda| N) L^2) \\ &\ll N_j^{1/3} \sum_{|\gamma| \leq N_j^{2/15}} N_j^{(\beta-1)/3} + N_j^{1/5} Q_1 L^{402}. \end{aligned}$$

令 $\eta(T) = c(\log T)^{-4/5}$, 函数 $\prod_{\chi \bmod q} L(s, \chi)$ 在区域 $\sigma \geq 1 - \eta(T)$ ($|t| \leq T$) 中除可能的 Siegel 例外零点外没有其他零点 (参见文献 [19]). 由于 $r \leq L^C$, 故由 Siegel 定理 (参见文献 [20, 第 21 章]) 知 Siegel 零点在这种情形下不存在. 利用文献 [21] 零点密度估计 $N^*(\alpha, q, T) \ll (qT)^{12(1-\alpha)/5} \log^c(qT)$, 其中 $N^*(\alpha, q, T)$ 表示 $\prod_{\chi \bmod q} L(s, \chi)$ 在区域 $\text{Re } s \geq \alpha$ 且 $|\text{Im } s| \leq T$ 中零点个数, 可得

$$\begin{aligned} \sum_{|\gamma| \leq N_j^{2/15}} N_j^{\frac{\beta-1}{3}} &\ll \int_0^{1-\eta(N_j^{2/15})} N_j^{\frac{\alpha-1}{3}} d\left(\sum_{\substack{|\gamma| \leq N_j^{2/15} \\ \beta \geq \alpha}} 1 \right) \ll L^c \int_0^{1-\eta(N_j^{2/15})} (N_j^{\frac{2}{15}})^{\frac{12(1-\alpha)}{5}} N_j^{\frac{\alpha-1}{3}} d\alpha \\ &\ll L^c N_j^{-\frac{1}{75} \eta(N_j^{2/15})} \ll \exp(-c_4 L^{1/5}), \end{aligned}$$

因此,

$$\sum_{r \sim R} \sum_{\chi \bmod r}^* \max_{|\lambda| \leq 1/(r\tau)} |\hat{W}_j(\chi, \lambda)| \ll R^2 N_j^{\frac{1}{3}} \exp(-c_4 L^{\frac{1}{5}}) + R^2 N_j^{\frac{1}{5}} Q_1 L^{402} \ll R^{\frac{3}{2}-\varepsilon} N_j^{\frac{1}{3}} L^{-B},$$

其中 $R \leq L^C$, $B > 0$ 是任意常数. 这就证明了 $R \leq L^C$ 时 (4.17) 成立. $\square$

引理 4.3 令 Q_1 和 τ 满足 (2.1), $g \ll N^\theta$, θ 和 C 是正常数, 则

$$K_i(g) \ll g^{-\frac{3}{2}+2\varepsilon} |a_i|^{-\frac{1}{2}} L^C, \quad i = 1, 2, 3, \quad (4.21)$$

$$K_j(g) \ll g^{-\frac{3}{2}+2\varepsilon} |a_j|^{-\frac{1}{3}} N^{-\frac{1}{6}} L^C, \quad j = 4, 5, 6. \quad (4.22)$$

证明 我们以 (4.21) 的证明为例. 由 (4.2)、二分法和 (4.7), 有

$$\begin{aligned} K_i(g) &\ll L \max_{R \leq Q_1} \sum_{r \sim R} [g, r]^{-\frac{3}{2}+\varepsilon} \sum_{\chi \bmod r}^* \left(\int_{-\frac{1}{r\tau}}^{\frac{1}{r\tau}} |W_i(\chi, \lambda)|^2 d\lambda \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\ll L \max_{R \leq Q_1} \sum_{r \sim R} [g, r]^{-\frac{3}{2}+\varepsilon} \sum_{\chi \bmod r}^* \left(\int_{-\frac{1}{r\tau}}^{\frac{1}{r\tau}} |\hat{W}_i(\chi, \lambda)|^2 d\lambda \right)^{\frac{1}{2}} + |a_i|^{-\frac{19}{60}} N^{-\frac{11}{60}} L^C, \end{aligned}$$

因而, 要证明 (4.21) 成立, 只需证明

$$\sum_{r \sim R} [g, r]^{-\frac{3}{2}+\varepsilon} \sum_{\chi \bmod r}^* \left(\int_{-\frac{1}{r\tau}}^{\frac{1}{r\tau}} |\hat{W}_i(\chi, \lambda)|^2 d\lambda \right)^{\frac{1}{2}} \ll g^{-\frac{3}{2}+2\varepsilon} |a_i|^{-\frac{1}{2}} L^C. \quad (4.23)$$

由 Gallagher 引理 (参见文献 [22, 引理 1]), 可得

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{1}{r\tau}}^{\frac{1}{r\tau}} |\hat{W}_i(\chi, \lambda)|^2 d\lambda &\ll \left(\frac{1}{R\tau} \right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \sum_{\substack{v < |a_i| m^2 \leq v+r\tau \\ M < |a_i| m^2 \leq N}} (\Lambda(m)\chi(m) - \delta_\chi) \right|^2 dv \\ &\ll \left(\frac{1}{R\tau} \right)^2 \int_{M-r\tau}^N \left| \sum_{\substack{v < |a_i| m^2 \leq v+r\tau \\ M < |a_i| m^2 \leq N}} (\Lambda(m)\chi(m) - \delta_\chi) \right|^2 dv. \end{aligned} \quad (4.24)$$

令 $X_i = \max(v, M)/|a_i|$, $Y_i = \min(v+r\tau, N)/|a_i|$, 则 (4.24) 中和式可记为

$$\sum_{X_i < m^2 \leq Y_i} (\Lambda(m)\chi(m) - \delta_\chi). \quad (4.25)$$

对于 $0 < \beta < 1$, $M - r\tau \leq v \leq N$, $r\tau \leq 2R\tau \leq 2Q_1\tau \ll ML^{-400}$, 有

$$Y_i^\beta - X_i^\beta \ll \frac{(v+r\tau)^\beta - v^\beta}{|a_i|^\beta} \ll \frac{r\tau}{|a_i|^\beta M^{1-\beta}}.$$

当 $\chi = \chi_0 \pmod{1}$ 时, $r = 1$, $(4.25) \ll Y_i^{\frac{1}{2}} - X_i^{\frac{1}{2}} \ll |a_i|^{-\frac{1}{2}} M^{-\frac{1}{2}} \tau$, 代入 (4.24), 这对于 (4.23) 是可接受的.

当 χ 不是主特征时, (4.25) 中 $\delta_\chi = 0$. 由 Heath-Brown 恒等式和 Perron 公式知 (4.25) 是 $O(L^{10})$ 项线性组合, 每项形如

$$\sigma(u, \mathbf{D}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T F\left(\frac{1}{2} + it, \chi\right) \frac{Y_i^{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+it)} - X_i^{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+it)}}{\frac{1}{2} + it} dt + O(N_i^{1/2} L^2 T^{-1}),$$

其中 $\mathbf{D} = (D_1, \dots, D_{10})$, $2 \leq T \leq N_i^{1/2}$. 可以验证

$$\frac{Y_i^{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+it)} - X_i^{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+it)}}{\frac{1}{2} + it} = \frac{1}{2} \int_{X_i}^{Y_i} u^{-\frac{3}{4} + \frac{1}{2}it} du = \frac{1}{2} \int_{X_i}^{Y_i} u^{-\frac{3}{4}} e\left(\frac{t}{4\pi} \log u\right) du \ll \int_{X_j}^{Y_j} u^{-\frac{3}{4}} du \ll \frac{R\tau}{|a_j|^{1/4} N^{3/4}}.$$

另一方面,

$$\frac{Y_i^{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+it)} - X_i^{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+it)}}{\frac{1}{2}+it} \ll \frac{Y_i^{1/4}}{|t|} \ll \frac{N_i^{1/4}}{|t|},$$

从而,

$$\frac{Y_i^{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+it)} - X_i^{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+it)}}{\frac{1}{2}+it} \ll \min\left(\frac{R\tau}{|a_i|^{1/4}N^{3/4}}, \frac{N_i^{1/4}}{|t|}\right).$$

取 $T = N_i^{1/2}$, $T_0 = N/(R\tau)$, 得

$$\sigma(u, \mathbf{D}) \ll \frac{R\tau}{|a_i|^{1/4}N^{3/4}} \int_{|t| \leq T_0} \left| F\left(\frac{1}{2}+it, \chi\right) \right| dt + \frac{N^{1/4}}{|a_i|^{1/4}} \int_{T_0 < |t| \leq T} \left| F\left(\frac{1}{2}+it, \chi\right) \right| \frac{1}{|t|} dt + L^{12},$$

从而, (4.24) 可改为

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{1}{r\tau}}^{\frac{1}{r\tau}} |\hat{W}_i(\chi, \lambda)|^2 d\lambda &\ll \frac{L^{20}}{(R\tau)^2} \int_{M-r\tau}^N |\sigma(u, \mathbf{D})|^2 dv \ll \frac{L^{20}}{(R\tau)^2} N |\sigma(u, \mathbf{D})|^2 \\ &\ll \frac{L^{20}}{|a_i|^{\frac{1}{2}} N^{\frac{1}{2}}} \max_{\mathbf{D}} \left(\int_{|t| \leq T_0} \left| F\left(\frac{1}{2}+it, \chi\right) \right| dt \right)^2 \\ &\quad + \frac{N^{\frac{3}{2}} L^{20}}{|a_i|^{\frac{1}{2}} (R\tau)^2} \max_{\mathbf{D}} \left(\int_{T_0 < |t| \leq T} \left| F\left(\frac{1}{2}+it, \chi\right) \right| \frac{1}{|t|} dt \right)^2 + \frac{NL^{164}}{(R\tau)^2}, \end{aligned}$$

进而,

$$\begin{aligned} (4.23) \text{ 的左边} &\ll \frac{L^{10}}{|a_i|^{1/4}N^{1/4}} \max_{\mathbf{D}} \sum_{r \sim R} \sum_{\chi \bmod r}^* \int_{|t| \leq T_0} \left| F\left(\frac{1}{2}+it, \chi\right) \right| dt \\ &\quad + \frac{N^{3/4} L^{10}}{|a_i|^{1/4} R\tau} \max_{\mathbf{D}} \sum_{r \sim R} \sum_{\chi \bmod r}^* \int_{T_0 < |t| \leq T} \left| F\left(\frac{1}{2}+it, \chi\right) \right| \frac{1}{|t|} dt + RN^{1/2} \tau^{-1} L^{82}. \end{aligned}$$

因此, 为了证明 (4.23), 我们只需证明: 当 $R \leq Q_1$ 且 $0 < T_1 \leq T_0$ 时,

$$\sum_{r \sim R} [g, r]^{-\frac{3}{2}+\varepsilon} \sum_{\chi \bmod r}^* \int_{T_1}^{2T_1} \left| F\left(\frac{1}{2}+it, \chi\right) \right| dt \ll g^{-\frac{3}{2}+2\varepsilon} N_i^{\frac{1}{4}} (T_1+1)^{\frac{1}{2}} L^C. \quad (4.26)$$

当 $R \leq Q_1$ 且 $T_0 < T_2 \leq T$ 时,

$$\sum_{r \sim R} [g, r]^{-\frac{3}{2}+\varepsilon} \sum_{\chi \bmod r}^* \int_{T_2}^{2T_2} \left| F\left(\frac{1}{2}+it, \chi\right) \right| dt \ll g^{-\frac{3}{2}+2\varepsilon} N_i^{\frac{1}{4}} T_2 L^C. \quad (4.27)$$

由 (4.9)–(4.11) 知 (4.26) 和 (4.27) 成立, 引理证毕. $\square$

接下来依次给出 I_6 、 I_1 、 I_2 、 I_3 、 I_4 和 I_5 的上界估计. 由 (3.2) 知,

$$\begin{aligned} |I_6| &= \left| \sum_{q \leq Q_1} \sum_{\substack{h=1 \\ (h,q)=1}}^q e\left(-\frac{bh}{q}\right) \int_{-\frac{1}{q\tau}}^{\frac{1}{q\tau}} \prod_{l=1}^6 U_l e(-b\lambda) d\lambda \right| \\ &= \left| \sum_{q \leq Q_1} \sum_{\chi_1 \bmod q} \cdots \sum_{\chi_6 \bmod q} \frac{Z(b, q; \bar{\chi}_1, \dots, \bar{\chi}_6)}{\varphi^6(q)} \int_{-\frac{1}{q\tau}}^{\frac{1}{q\tau}} \prod_{l=1}^6 W_l(\chi_l, \lambda) e(-b\lambda) d\lambda \right| \end{aligned}$$

$$\leq \sum_{r_1 \leq Q_1} \cdots \sum_{r_6 \leq Q_1} \sum_{\chi_1 \bmod r_1}^* \cdots \sum_{\chi_6 \bmod r_6}^* \sum_{\substack{q \leq Q_1 \\ r_0 | q}} \frac{|Z(b, q; \bar{\chi}_1, \dots, \bar{\chi}_6)|}{\varphi^6(q)} \\ \times \left| \int_{-\frac{1}{q\tau}}^{\frac{1}{q\tau}} \prod_{l=1}^6 W_l(\chi_l \chi_0, \lambda) e(-b\lambda) d\lambda \right|.$$

又 $q \leq Q_1$, $M < |a_i|p^2 \leq N$, $M < |a_j|p^3 \leq N$, 则 $(q, p) = 1$, $W_l(\chi_l \chi_0, \lambda) = W_l(\chi_l, \lambda)$, 从而,

$$\begin{aligned} |I_6| &\leq \sum_{r_1 \leq Q_1} \cdots \sum_{r_6 \leq Q_1} \sum_{\chi_1 \bmod r_1}^* \cdots \sum_{\chi_6 \bmod r_6}^* \int_{-\frac{1}{r_0\tau}}^{\frac{1}{r_0\tau}} \prod_{l=1}^6 |W_l(\chi_l, \lambda)| d\lambda \sum_{\substack{q \leq Q_1 \\ r_0 | q}} \frac{|Z(b, q; \chi_1 \chi_0, \dots, \chi_6 \chi_0)|}{\varphi^6(q)} \\ &\ll \sum_{r_1 \leq Q_1} \cdots \sum_{r_6 \leq Q_1} r_0^{-\frac{3}{2}+\varepsilon} \sum_{\chi_1 \bmod r_1}^* \cdots \sum_{\chi_6 \bmod r_6}^* \int_{-\frac{1}{r_0\tau}}^{\frac{1}{r_0\tau}} \prod_{l=1}^6 |W_l(\chi_l, \lambda)| d\lambda \\ &\ll \sum_{r_1 \leq Q_1} \sum_{\chi_1 \bmod r_1}^* \max_{|\lambda| \leq \frac{1}{r_1\tau}} |W_1(\chi_1, \lambda)| \cdots \sum_{r_4 \leq Q_1} \sum_{\chi_4 \bmod r_4}^* \max_{|\lambda| \leq \frac{1}{r_4\tau}} |W_4(\chi_4, \lambda)| \sum_{r_5 \leq Q_1} \sum_{\chi_5 \bmod r_5}^* \\ &\quad \times \left(\int_{-\frac{1}{r_5\tau}}^{\frac{1}{r_5\tau}} |W_5(\chi_5, \lambda)|^2 d\lambda \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{r_6 \leq Q_1} r_0^{-\frac{3}{2}+\varepsilon} \sum_{\chi_6 \bmod r_6}^* \left(\int_{-\frac{1}{r_6\tau}}^{\frac{1}{r_6\tau}} |W_6(\chi_6, \lambda)|^2 d\lambda \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

由 (4.2), 并连续利用引理 4.3 可知, (4.28) 对 r_6 求和为

$$K_6([r_1, r_2, \dots, r_5]) \ll [r_1, r_2, \dots, r_5]^{-\frac{3}{2}+2\varepsilon} |a_6|^{-\frac{1}{3}} N^{-\frac{1}{6}} L^C;$$

对 r_5 求和为

$$\begin{aligned} K_6([r_1, r_2, r_3, r_4]) &\ll |a_6|^{-\frac{1}{3}} N^{-\frac{1}{6}} L^C \sum_{r_5 \leq Q_1} [r_1, r_2, \dots, r_5]^{-\frac{3}{2}+2\varepsilon} \sum_{\chi_5 \bmod r_5}^* \left(\int_{-\frac{1}{r_5\tau}}^{\frac{1}{r_5\tau}} |W_5(\chi_5, \lambda)|^2 d\lambda \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\ll |a_6|^{-\frac{1}{3}} N^{-\frac{1}{6}} L^C K_5([r_1, r_2, r_3, r_4]) \ll [r_1, r_2, r_3, r_4]^{-\frac{3}{2}+4\varepsilon} |a_5 a_6|^{-\frac{1}{3}} N^{-\frac{1}{3}} L^C; \end{aligned}$$

对 r_4 求和为

$$\begin{aligned} K_6([r_1, r_2, r_3]) &\ll |a_5 a_6|^{-\frac{1}{3}} N^{-\frac{1}{3}} L^C \sum_{r_4 \leq Q_1} [r_1, r_2, r_3, r_4]^{-\frac{3}{2}+4\varepsilon} \sum_{\chi_4 \bmod r_4}^* \max_{|\lambda| \leq \frac{1}{r_4\tau}} |W_4(\chi_4, \lambda)| \\ &\ll |a_4 a_5 a_6|^{-\frac{1}{3}} L^C [r_1, r_2, r_3]^{-\frac{3}{2}+8\varepsilon}; \end{aligned}$$

对 r_3 求和为

$$K_6([r_1, r_2]) \ll |a_4 a_5 a_6|^{-\frac{1}{3}} L^C [r_1, r_2]^{-2+16\varepsilon} N_3^{\frac{1}{3}};$$

对 r_2 求和为

$$K_6(r_1) \ll |a_4 a_5 a_6|^{-\frac{1}{3}} L^C r_1^{-\frac{3}{2}+32\varepsilon} N_3^{\frac{1}{2}} N_2^{\frac{1}{2}}.$$

最后代入 (4.28), 对 r_1 求和, 并由引理 4.2, 得

$$|I_6| \ll |a_1 a_2 a_3|^{-\frac{1}{2}} |a_4 a_5 a_6|^{-\frac{1}{3}} N^{\frac{3}{2}} L^{-B}.$$

接下来, 我们可以验证

$$H_i^2 := \int_{-1/\tau}^{1/\tau} |V_i(\lambda)|^2 d\lambda \ll |a_1|^{-1}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (4.29)$$

$$H_j^2 := \int_{-1/\tau}^{1/\tau} |V_j(\lambda)|^2 d\lambda \ll |a_j|^{-\frac{2}{3}} N^{-\frac{1}{3}}, \quad j = 4, 5, 6. \quad (4.30)$$

由引理 4.1–4.3、(4.29) 和 (4.30) 得

$$\begin{aligned} I_1 &= \sum_{q \leq Q_1} \sum_{\substack{h=1 \\ (h,q)=1}}^q e\left(-\frac{bh}{q}\right) \int_{-\frac{1}{q\tau}}^{\frac{1}{q\tau}} (U_1 T_2 T_3 T_4 T_5 T_6 + \cdots + T_1 T_2 T_3 T_4 T_5 U_6) e(-b\lambda) d\lambda \\ &\ll J_1(1) H_2 H_3 (N_4 N_5 N_6)^{\frac{1}{3}} + \cdots + N_1^{\frac{1}{2}} H_2 H_3 (N_4 N_5)^{\frac{1}{3}} J_6(1) \\ &\ll |a_1 a_2 a_3|^{-\frac{1}{2}} |a_4 a_5 a_6|^{-\frac{1}{3}} N^{\frac{3}{2}} L^{-B}, \\ |I_2| &= \left| \sum_{q \leq Q_1} \sum_{\substack{h=1 \\ (h,q)=1}}^q e\left(-\frac{bh}{q}\right) \int_{-\frac{1}{q\tau}}^{\frac{1}{q\tau}} (U_1 U_2 T_3 T_4 T_5 T_6 + \cdots + T_1 T_2 T_3 T_4 U_5 U_6) e(-b\lambda) d\lambda \right| \\ &\ll J_1(1) J_2(1) H_3 H_4 (N_5 N_6)^{\frac{1}{3}} + \cdots + (N_1 N_2)^{\frac{1}{2}} H_3 H_4 J_5(1) J_6(1) \\ &\ll |a_1 a_2 a_3|^{-\frac{1}{2}} |a_4 a_5 a_6|^{-\frac{1}{3}} N^{\frac{3}{2}} L^{-B}, \\ |I_3| &= \left| \sum_{q \leq Q_1} \sum_{\substack{h=1 \\ (h,q)=1}}^q e\left(-\frac{bh}{q}\right) \int_{-\frac{1}{q\tau}}^{\frac{1}{q\tau}} (U_1 U_2 U_3 T_4 T_5 T_6 + \cdots + T_1 T_2 T_3 U_4 U_5 U_6) e(-b\lambda) d\lambda \right| \\ &\ll J_1(1) J_2(1) J_3(1) H_4 H_5 N_6^{\frac{1}{3}} + \cdots + H_1 H_2 N_3^{\frac{1}{3}} J_4(1) J_5(1) J_6(1) \\ &\ll |a_1 a_2 a_3|^{-\frac{1}{2}} |a_4 a_5 a_6|^{-\frac{1}{3}} N^{\frac{3}{2}} L^{-B}, \\ |I_4| &= \left| \sum_{q \leq Q_1} \sum_{\substack{h=1 \\ (h,q)=1}}^q e\left(-\frac{bh}{q}\right) \int_{-\frac{1}{q\tau}}^{\frac{1}{q\tau}} (U_1 U_2 U_3 U_4 T_5 T_6 + \cdots + T_1 T_2 U_3 U_4 U_5 U_6) e(-b\lambda) d\lambda \right| \\ &\ll J_1(1) J_2(1) J_3(1) J_4(1) H_5 H_6 + \cdots + H_1 H_2 J_3(1) J_4(1) J_5(1) J_6(1) \\ &\ll |a_1 a_2 a_3|^{-\frac{1}{2}} |a_4 a_5 a_6|^{-\frac{1}{3}} N^{\frac{3}{2}} L^{-B}. \end{aligned}$$

最后, 我们给出 I_5 的上界估计:

$$\begin{aligned} |I_5| &= \left| \sum_{q \leq Q_1} \sum_{\substack{h=1 \\ (h,q)=1}}^q e\left(-\frac{bh}{q}\right) \int_{-\frac{1}{q\tau}}^{\frac{1}{q\tau}} (U_1 U_2 U_3 U_4 U_5 T_6 + \cdots + T_1 U_2 U_3 U_4 U_5 U_6) e(-b\lambda) d\lambda \right| \\ &\ll J_1(1) J_2(1) J_3(1) J_4(1) K_5 H_6 + \cdots + H_1 K_2 J_3(1) J_4(1) J_5(1) J_6(1) \\ &\ll |a_1 a_2 a_3|^{-\frac{1}{2}} |a_4 a_5 a_6|^{-\frac{1}{3}} N^{\frac{3}{2}} L^{-B}. \end{aligned}$$

5 余区间上的积分

引理 5.1 (参见文献 [23, 定理 2]) 若 α 是实数, 整数 h 和 q 满足 $(h, q) = 1, q \geq 1, |\alpha - h/q| < q^{-2}$, 那么,

$$\left| \sum_{n \leq N^{\frac{1}{2}}} \Lambda(n) e(n^2 \alpha) \right| \ll N^{\frac{1}{2} + \varepsilon} (q^{-1} + N^{-\frac{1}{4}} + q N^{-1})^{\frac{1}{4}}.$$

引理 5.2 我们有

$$\begin{aligned} \int_0^1 |S_i(\alpha)|^4 d\alpha &\ll N_i^{1+\varepsilon}, \quad i = 1, 2, 3, \\ \int_0^1 |S_j(\alpha)|^8 d\alpha &\ll N_j^{\frac{5}{3}+\varepsilon}, \quad j = 4, 5, 6. \end{aligned}$$

证明 由华不等式可证. □

引理 5.3 我们有

$$\left| \int_{\mathfrak{t}} \right| \ll |a_1 a_2 a_3|^{-\frac{1}{4}} |a_4 a_5 a_6|^{-\frac{5}{24}} N^{\frac{3}{2}+\varepsilon} Q_2^{-\frac{1}{8}} + |a_1|^{-\frac{11}{32}} |a_2 a_3|^{-\frac{1}{4}} |a_4 a_5 a_6|^{-\frac{5}{24}} N^{\frac{47}{32}+\varepsilon}.$$

证明 当 $\alpha \in \mathfrak{t}$ 时, 由 Dirichlet 有理逼近定理可知, 存在整数 h 和 q , 使得

$$1 \leq q \leq N(Q_2 L^{400})^{-1}, \quad (h, q) = 1, \quad \left| a_1 \alpha - \frac{h}{q} \right| < \frac{1}{q N(Q_2 L^{400})^{-1}}. \quad (5.1)$$

(5.1) 最后一个不等式两边同时除以 $|a_1|$ 可得

$$\left| \alpha - \frac{h'}{q'} \right| < \frac{1}{q' N(Q_2 L^{400})^{-1}}, \quad (5.2)$$

其中 q' 是 $q a_1$ 的正因子, 且 $(h', q') = 1$, 则 $q' > Q_2$. 事实上, 若 $q' \leq Q_2$, 则由 (5.2) 和 $\alpha \in [Q_2 L^{400} N^{-1}, 1 + Q_2 L^{400} N^{-1}]$, 有 $1 \leq h' \leq q'$, 从而 $\alpha \in \mathfrak{t}$, 这与 $\alpha \in \mathfrak{t}$ 矛盾. 因而,

$$Q_2 |a_1|^{-1} < q \leq N(Q_2 L^{400})^{-1}. \quad (5.3)$$

由引理 5.1、(5.1)、(5.3) 和引理 5.2 得

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathfrak{t}} \right| &\ll \max_{\alpha \in \mathfrak{t}} |S_1(\alpha)|^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 |S_1(\alpha)|^4 d\alpha \right)^{\frac{1}{8}} \prod_{i=2}^3 \left(\int_0^1 |S_i(\alpha)|^4 d\alpha \right)^{\frac{1}{4}} \prod_{j=4}^6 \left(\int_0^1 |S_j(\alpha)|^8 d\alpha \right)^{\frac{1}{8}} \\ &\ll (|a_1|^{\frac{1}{4}} N_1^{\frac{1}{2}+\varepsilon} Q_2^{-\frac{1}{4}} + N_1^{\frac{7}{16}+\varepsilon})^{\frac{1}{2}} (N_1^{1+\varepsilon})^{\frac{1}{8}} (N_2^{1+\varepsilon} N_3^{1+\varepsilon})^{\frac{1}{4}} (N_4^{\frac{5}{3}+\varepsilon} N_5^{\frac{5}{3}+\varepsilon} N_6^{\frac{5}{3}+\varepsilon})^{\frac{1}{8}} \\ &\ll |a_1 a_2 a_3|^{-\frac{1}{4}} |a_4 a_5 a_6|^{-\frac{5}{24}} N^{\frac{3}{2}+\varepsilon} Q_2^{-\frac{1}{8}} + |a_1|^{-\frac{11}{32}} |a_2 a_3|^{-\frac{1}{4}} |a_4 a_5 a_6|^{-\frac{5}{24}} N^{\frac{47}{32}+\varepsilon}. \end{aligned}$$

证毕. □

引理 5.4 我们有

$$\left| \int_{\mathfrak{m}} \right| \ll (A^{-\frac{9}{104}} |a_1|^{-\frac{1}{4}} N^{\frac{11}{52}} + |a_1|^{-\frac{13}{40}} N^{\frac{1}{5}} + A^{\frac{1}{30}} |a_1|^{-\frac{3}{8}} N^{\frac{13}{60}}) |a_2 a_3|^{-\frac{1}{4}} |a_4 a_5 a_6|^{-\frac{5}{24}} N^{\frac{5}{4}+\varepsilon}.$$

证明 当 $\alpha \in \mathfrak{m}$ 时, 由 (2.2) 知, 存在整数 h 和 q , $(h, q) = 1$, 使得

$$Q_1 < q \leq Q_2, \quad |q\alpha - h| < \frac{Q_2 L^{400}}{N}, \quad (5.4)$$

或者

$$1 \leq q \leq Q_1, \quad \frac{Q_1 L^{400}}{N} < |q\alpha - h| < \frac{Q_2 L^{400}}{N}. \quad (5.5)$$

由 Dirichlet 有理逼近定理可知, 存在整数 h' 和 q' , 使得

$$1 \leq q' \leq \left(\frac{N}{|a_1|}\right)^{1/2}, \quad (h', q') = 1, \quad |q'a_1\alpha - h'| < \left(\frac{N}{|a_1|}\right)^{-1/2}. \quad (5.6)$$

由 (5.4)–(5.6) 可知, 当 $N \gg A^{1+\varepsilon}$ 时, $|q'a_1h - qh'| \leq q'|a_1||q\alpha - h| + q|q'a_1\alpha - h'| < 1$. 因而,

$$\frac{h'}{q'} = \frac{a_1h}{q}, \quad q' = \frac{q}{(q, |a_1|)}.$$

又由 (1.4) 知, 在 a_1 、 a_2 和 a_3 中一定存在 a_i 使得 $(q, a_i) = 1$, 因此, 不妨假定 $(q, a_1) = 1$.

由素变数三角和估计^[24], 若 α 是实数, 整数 h 和 q 满足 $1 \leq h \leq q$, $(h, q) = 1$, 则

$$\sum_{M < p^2 \leq N} e(p^2\alpha) \ll \left(N^{\frac{1}{4}} \sqrt{q(1 + |q\alpha - h|N)} + N^{\frac{2}{5}} + \frac{N^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{q(1 + |q\alpha - h|N)}} \right) N^\varepsilon. \quad (5.7)$$

令 $g(\alpha) := q' + |q'a_1\alpha - h'| \frac{N}{|a_1|} = \frac{1}{(q, |a_1|)}(q + N|q\alpha - h|) = q + N|q\alpha - h|$. 当 $\alpha \in \mathfrak{m}$ 时, 由 (5.4) 和 (5.5) 可知, $Q_1 L^{400} \ll g(\alpha) \ll Q_2^{400}$, 进而, 由 (5.7) 和引理 5.2 得

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathfrak{m}} \right| &\ll \max_{\alpha \in \mathfrak{m}} |S_1(\alpha)|^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 |S_1(\alpha)|^4 d\alpha \right)^{\frac{1}{8}} \prod_{i=2}^3 \left(\int_0^1 |S_i(\alpha)|^4 d\alpha \right)^{\frac{1}{4}} \prod_{j=4}^6 \left(\int_0^1 |S_j(\alpha)|^8 d\alpha \right)^{\frac{1}{8}} \\ &\ll ((N_1^{\frac{1}{4}} Q_2^{\frac{1}{2}} + N_1^{\frac{2}{5}} + N_1^{\frac{1}{2}} Q_1^{-\frac{1}{2}}) N^\varepsilon)^{\frac{1}{2}} (N_1^{1+\varepsilon})^{\frac{1}{8}} (N_2^{1+\varepsilon} N_3^{1+\varepsilon})^{\frac{1}{4}} (N_4^{\frac{5}{3}+\varepsilon} N_5^{\frac{5}{3}+\varepsilon} N_6^{\frac{5}{3}+\varepsilon})^{\frac{1}{8}} \\ &\ll (A^{-\frac{9}{104}} |a_1|^{-\frac{1}{4}} N^{\frac{11}{52}} + |a_1|^{-\frac{13}{40}} N^{\frac{1}{5}} + A^{\frac{1}{30}} |a_1|^{-\frac{3}{8}} N^{\frac{13}{60}}) |a_2 a_3|^{-\frac{1}{4}} |a_4 a_5 a_6|^{-\frac{5}{24}} N^{\frac{5}{4}+\varepsilon}. \end{aligned}$$

证毕. □

6 定理 1.1 的证明

由 (2.3)、(3.1)、(3.13) 和 $I_1, I_2, \dots, I_6$ 的上界估计, 以及引理 5.3 和 5.4, 要使

$$I(b) \gg |a_1 a_2 a_3|^{-\frac{1}{2}} |a_4 a_5 a_6|^{-\frac{1}{3}} N^{\frac{3}{2}} (\log \log A)^{-c_3},$$

如果 $b = N$, $a_1, a_2, \dots, a_6$ 都是正数, 那么需要

$$N \gg A^{33+\varepsilon}.$$

如果 $a_1, a_2, \dots, a_6$ 不都是正数, $N \geq c_1 |b|$, 由

$$\begin{aligned} a_6 p_6^3 &\leq b - a_1 p_1^2 - a_2 p_2^2 - a_3 p_3^2 - a_4 p_4^3 - a_5 p_5^3 \leq |b| + 5N, \\ a_1 p_1^2 &\leq b - a_2 p_2^2 - a_3 p_3^2 - a_4 p_4^3 - a_5 p_5^3 - a_6 p_6^3 \leq |b| + 5N, \end{aligned}$$

不失一般性, 可得 $\max\{p_1^2, p_2^2, p_3^2, p_4^3, p_5^3, p_6^3\} \ll |b| + A^{32+\varepsilon}$, 定理 1.1 得证.

致谢 作者对审稿人的仔细审阅和提出的宝贵修改意见深表感谢.

参考文献

- 1 Vinogradov I M. Representation of an odd number as a sum of three primes. Dokl Akad Nauk SSSR, 1937, 15: 291–294

- 2 Hua L K. Some results in additive number theory. *Q J Math*, 1938, 9: 68–80
- 3 Baker A. On some diophantine inequalities involving primes. *J Reine Angew Math*, 1967, 1967: 166–181
- 4 Liu M C, Tsang K M. Small prime solutions of linear equations. In: *Théorie des Nombres*. Berlin: de Gruyter, 1989, 595–624
- 5 Choi K K S. A numerical Baker’s constant—some explicit estimates for small prime solutions of linear equations. *Bull Hong Kong Math Soc*, 1997, 1: 1–19
- 6 Liu M C, Wang T Z. A numerical bound for small prime solutions of some ternary linear equations. *Acta Arith*, 1998, 86: 343–383
- 7 Li H Z. Small prime solutions of linear ternary equations. *Acta Arith*, 2001, 98: 293–309
- 8 Liu M C, Tsang K M. Small prime solutions of some additive equations. *Monatsh Math*, 1991, 111: 147–169
- 9 Choi K K S, Liu J Y. Small prime solutions of quadratic equations. *Canad J Math*, 2002, 54: 71–91
- 10 Choi K K S, Liu J Y. Small prime solutions of quadratic equations II. *Proc Amer Math Soc*, 2005, 133: 945–951
- 11 Choi K K S, Kumchev A V. Quadratic equations with five prime unknowns. *J Number Theory*, 2004, 107: 357–367
- 12 Harman G, Kumchev A V. On sums of squares of primes. *Math Proc Cambridge Philos Soc*, 2006, 140: 1–13
- 13 Leung D. Small prime solutions to cubic Diophantine equations. *ArXiv:0610739*, 2006
- 14 Liu Z X. Small prime solutions to cubic Diophantine equations. *Canad Math Bull*, 2013, 56: 785–794
- 15 Zhao L L. Small prime solutions to cubic equations. *Sci China Math*, 2016, 59: 1909–1918
- 16 潘承洞, 潘承彪. 解析数论基础. 北京: 科学出版社, 1991
- 17 Liu J Y. On Lagrange’s theorem with prime variables. *Q J Math*, 2003, 54: 453–462
- 18 Heath-Brown D R. Prime numbers in short intervals and a generalized Vaughan identity. *Canad J Math*, 1982, 34: 1365–1377
- 19 Liu J Y, Liu M C. The exceptional set in the four prime squares problem. *Illinois J Math*, 2000, 44: 272–293
- 20 Davenport H. *Multiplicative Number Theory*, 2nd ed. Graduate Texts in Mathematics, vol. 74. New York: Springer-Verlag, 1980
- 21 Prachar K. *Primzahlverteilung*. Berlin: Springer, 1957
- 22 Gallagher P X. A large sieve density estimate near $\sigma = 1$. *Invent Math*, 1970, 11: 329–339
- 23 Ghosh A. The distribution of αp^2 modulo 1. *Proc Lond Math Soc (3)*, 1981, 42: 252–269
- 24 Ren X M. On exponential sums over primes and application in Waring-Goldbach problem. *Sci China Ser A*, 2005, 48: 785–797

Small prime solutions of equations with powers 2 and 3

Weiping Li, Wenxu Ge & Tianze Wang

Abstract This paper concerns the solvability of the prime variables equations $a_1p_1^2 + a_2p_2^2 + a_3p_3^2 + a_4p_4^3 + a_5p_5^3 + a_6p_6^3 = b$, where $a_1, a_2, \dots, a_6$ are non-zero integers and b is any integer. Suppose that $a_1, a_2, \dots, a_6$ satisfy some related conditions. Using the circle method we prove that (i) if all $a_1, a_2, \dots, a_6$ are positive, and $b \gg \max\{|a_j|\}^{33+\varepsilon}$, then the equation is soluble in primes p_j , $j = 1, \dots, 6$, and (ii) if $a_1, a_2, \dots, a_6$ are not all of the same sign, then the equation has prime solutions satisfying $\max\{p_1^2, p_2^2, p_3^2, p_4^3, p_5^3, p_6^3\} \ll |b| + \max\{|a_j|\}^{32+\varepsilon}$.

Keywords small prime, Waring-Goldbach problem, circle method

MSC(2010) 11P32, 11P05, 11P55

doi: 10.1360/N012018-00201