多线性 Marcinkiewicz 积分在 Campanato 空间上的存在性与有界性

献给王斯雷教授 85 华诞

丁勇^{1*}, 蓝森华², 薛庆营¹, 藪田公三³

1. 北京师范大学数学科学学院, 数学与复杂系统教育部重点实验室, 北京 100875;

2. 嘉兴学院数理与信息工程学院, 嘉兴 314001;

3. Research Center for Mathematical Sciences, Kwansei Gakuin University, Sanda 669-1337, Japan

E-mail: dingy@bnu.edu.cn, senhualan@163.com, qyxue@bnu.edu.cn, yyyabuta@m4.kcn.ne.jp

收稿日期: 2018-04-17; 接受日期: 2018-06-22; 网络出版日期: 2018-10-10; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11471033, 11571160, 11371295, 11471041, 11671039, 11871101 和 11761131002) 和日本学术振兴会基金 (批准号: 15K04942) 资助项目

摘要 设 $n \geq 2$, $m \geq 1$, $\vec{y} = (y_1, \dots, y_m)$. $\mu(\vec{f})$ 是如下定义的多线性 Marcinkiewicz 积分:

$$\mu(\vec{f})(x) = \left(\int_0^\infty \left| \frac{1}{t^m} \int_{(B(0,t))^m} \frac{\Omega(\vec{y})}{|\vec{y}|^{m(n-1)}} \prod_{i=1}^m f_i(x - y_i) d\vec{y} \right|^2 \frac{dt}{t} \right)^{1/2},$$

其中 $d\vec{y} = dy_1 \cdots dy_m$. 本文考虑了 $\mu(\vec{f})$ 在 Campanato 空间上的存在性与有界性, 证明了若 m - 线性 Marcinkiewicz 积分 $\mu(\vec{f})$ 在一点处有限, 则它几乎处处有限, 而且, 如下范数不等式成立:

$$\|\mu(\vec{f})\|_{\mathcal{E}^{\alpha,p}} \leq C \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{\mathcal{E}^{\alpha_j,p_j}},$$

其中 $\mathcal{E}^{\alpha,p}$ 是经典的 Campanato 空间, $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_m}$, $\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_m$.

关键词 多线性 Marcinkiewicz 积分 Campanato 空间 BMO (bounded mean oscillation) 空间

MSC (2010) 主题分类 42B25, 47G10

1 引言

设 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ($1 \leq p \leq \infty$), 则 f 的 g - 函数定义为 $g(f)(x) = (\int_0^\infty |\nabla u(x,t)|^2 t dt)^{1/2}$, 其中 $t > 0$, $u(x,t) = (f * P_t)(x)$ 是 f 的 Poisson 积分且 $\nabla u(x,t) = (\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n})$.

英文引用格式: Ding Y, Lan S H, Xue Q Y, et al. The existence and boundedness of multilinear Marcinkiewicz integrals on Campanato spaces (in Chinese). Sci Sin Math, 2018, 48: 1267–1288, doi: 10.1360/N012018-00108

g -函数首先由 Stein^[1] 在 1958 年引进, 它是最基本的 Littlewood-Paley 算子, 是构成 Littlewood-Paley 理论重要的组成部分, 在算子理论和函数空间刻画方面发挥了十分重要的作用 (参见文献 [2]). Stein^[1] 首先证明了 g -函数是 L^p ($1 < p < \infty$) 上的有界算子.

1984 年, 王斯雷^[3] 研究了 g -函数在端点空间 $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 的性质. 他通过一个反例, 说明了 g -函数不是 $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 到 $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 的有界算子, 并进一步得到下面的重要结果:

定理 A^[3] 设 $f \in \text{BMO}(\mathbb{R}^n)$, 且 $g(f)$ 在一个正测度集上有限, 那么 $g(f)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上几乎处处有限, 且存在仅与 n 有关的常数 $C > 0$, 使得 $\|g(f)\|_{\text{BMO}} \leq C\|f\|_{\text{BMO}}$.

随后, Kurtz^[4] 将定理 A 推广至面积积分 $S(f)$ 和 g_λ^* 函数. 在文献 [1] 中, Stein 还定义了高维 Marcinkiewicz 积分, 这是 g -函数的一般化:

$$\mu_\Omega(f)(x) = \left(\int_0^\infty \left| \int_{|y| \leq t} \frac{\Omega(y)}{|y|^{n-1}} f(x-y) dy \right|^2 \frac{dt}{t^3} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (1.1)$$

并证明了, 当 Ω 为零次齐次的 Lipschitz 函数且在单位球面 S^{n-1} 上积分为零时, μ_Ω 是弱 $(1, 1)$ 型与强 (p, p) ($1 < p \leq 2$) 型算子. 通过加强核函数 Ω 的光滑性条件为 $\Omega \in C^1(S^{n-1})$, Benedek 等^[5] 证明了 μ_Ω 是强 (p, p) ($1 < p < \infty$) 型算子. Hörmander^[6] 研究了一类参数型的 Marcinkiewicz 积分. 此后的研究表明, 去掉核函数 Ω 的光滑性, 仍然可以保证 Marcinkiewicz 积分 μ_Ω 的 L^p ($1 < p < \infty$) 有界性 (有关 Marcinkiewicz 积分研究进展可参见文献 [7-17] 以及综述文献 [18]).

1987 年, 韩永生^[19] 给出了下述结果:

定理 B^[19] 设 $\Omega \in \text{Lip}_\alpha(S^{n-1})$ ($0 < \alpha \leq 1$) 并且它在单位球面 S^{n-1} 上的积分为 0. 如果 $f \in \text{BMO}(\mathbb{R}^n)$, 且 $\mu_\Omega(f)(x)$ 在一个正测度集上有限, 那么 $\mu_\Omega(f)(x)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上几乎处处有限, 并且存在仅与 n 有关的正常数 C , 使得 $\|\mu_\Omega(f)\|_{\text{BMO}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|f\|_{\text{BMO}(\mathbb{R}^n)}$.

1990 年, 王斯雷和陈杰诚^[20] 改进了定理 A 和 B 的结果. 先给出几个定义: 设 $\psi \in C^1(\mathbb{R}^n)$, 且满足 (i) $\hat{\psi}(0) = 0$; (ii) 存在 $\delta > 0$, 使得 $|\psi(x)| + (1 + |x|)|\nabla\psi(x)| \leq C(1 + |x|)^{-n-\delta}$, 那么函数 f 的广义径向、非切向和切向 Littlewood-Paley 算子分别定义如下:

$$g_\psi(f)(x) = \left(\int_0^\infty |\psi_t * f(x)|^2 \frac{dt}{t} \right)^{1/2}, \quad S_\psi(f)(x) = \left(\int_{|y-x| < t} |\psi_t * f(y)|^2 \frac{dtdy}{t^{1+n}} \right)^{1/2},$$

$$g_{\lambda, \psi}^*(f)(x) = \left(\iint_{\mathbb{R}_+^{n+1}} |\psi_t * f(y)|^2 \left(\frac{t}{t + |x-y|} \right)^{\lambda n} \frac{dtdy}{t^{1+n}} \right)^{1/2}, \quad \lambda > 1.$$

定理 C^[20] 若 $f \in \text{BMO}(\mathbb{R}^n)$.

(i) 如果 $g_\psi(f)$ 、 $S_\psi(f)$ 和 $g_{\lambda, \psi}^*(f)$ ($\lambda > 3$) 在某点 x_0 处有限, 那么 $T(f)$ (T 为平方算子 g_ψ 、 S_ψ 和 $g_{\lambda, \psi}^*$ 之一) 在 $\mathbb{R}^n$ 上几乎处处有限, 并且存在仅与 n 有关的正常数 C , 使得 $\|T(f)\|_{\text{BMO}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|f\|_{\text{BMO}(\mathbb{R}^n)}$.

(ii) 设 $\Omega \in \text{Lip}_\alpha(S^{n-1})$ ($0 < \alpha \leq 1$) 且在 S^{n-1} 上积分为 0. 如果 $\mu_\Omega(f)$ 在某点 x_0 处有限, 那么 $\mu_\Omega(f)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 几乎处处有限, 并且存在仅与 n 有关的正常数 C , 使得 $\|\mu_\Omega(f)\|_{\text{BMO}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|f\|_{\text{BMO}(\mathbb{R}^n)}$.

2000 年, Ding 等^[21] 将定理 B 中核函数 Ω 的条件改进为更弱的 L^q -Dini 型条件 ($1 < q \leq \infty$), 同时也给出了 $\mu_\Omega(f)$ 在 Campanato 空间上的有界性.

定义 1.1 (Campanato 空间) 假设 $1 \leq p < \infty$ 且 $-n/p \leq \alpha < 1$. 一个局部可积函数 f , 如果满足: 存在常数 $C > 0$, 使得对任意球 $B \subset \mathbb{R}^n$, 有

$$\|f\|_{\mathcal{E}^{\alpha, p}} := \sup_B \frac{1}{|B|^{\alpha/n}} \left(\frac{1}{|B|} \int_B |f(x) - f_B|^p dx \right)^{1/p} < \infty, \quad (1.2)$$

则称 f 属于 Campanato 空间 $\mathcal{E}^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)$, 其中上确界遍取 $\mathbb{R}^n$ 中所有球 B , f_B 代表 f 在 B 上的平均, 即 $f_B = \frac{1}{|B|} \int_B f(x) dx$.

注 1.1 Campanato 空间 $\mathcal{E}^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)$ 与某些经典的函数空间密切相关. 事实上, 当 $\alpha \in (0, 1)$ 且 $p \in [1, \infty)$ 时, $\mathcal{E}^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n) = \text{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)$; 当 $\alpha = 0$ 时, $\mathcal{E}^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)$ 与 $\text{BMO}(\mathbb{R}^n)$ 恰好一致; 当 $\alpha \in (-n/p, 0)$ 时, $\mathcal{E}^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)$ 与 Morrey 空间 $L^{p,\alpha p+n}(\mathbb{R}^n)$ 相同.

2003 年, Yabuta^[22] 对 g_λ^* 函数和 Marcinkiewicz 积分 μ_Ω , 将定理 C 的结果拓展到 Campanato 型空间. 2004 年, Sun^[23] 对于 g 函数和 Lusin 面积积分得到了文献 [22] 中的类似结果. 2006 年, Ding 等^[24] 给出了带有 L^q -Dini 型核的参数型 Littlewood-Paley 算子 (包括 g -函数、面积积分 S 、Littlewood-Paley g_λ^* 函数和 Marcinkiewicz 积分 μ_Ω) 在 Campanato 空间 $\mathcal{E}^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)$ 上的有界性, 这是定理 C 的一般化.

另一方面, 起源于 20 世纪 70 年代 Coifman 和 Meyer^[25,26] 工作的多线性算子的研究, 一直得到广泛关注, 并获得很多重要结果, 如 Christ 和 Journé^[27]、Kenig 和 Stein^[28]、Grafakos 和 Torres^[29,30] 及 Lerner 等^[31] 的工作等, 其中有关 Littlewood-Paley 平方函数的多线性化最早可追溯到 Coifman 和 Meyer^[32] 及 Yabuta^[33] 的工作, 以及后来 Sato 和 Yabuta^[34] 的改进结果. 最近, 多线性 Littlewood-Paley 算子的加权结果及带 Lipschitz 核的多线性 Marcinkiewicz 积分的加权结果由 Chen 等^[35] 给出.

为了陈述一些已有结论, 我们先介绍一些基本定义.

定义 1.2 (多线性 Marcinkiewicz 积分^[35]) 设定义在 $(\mathbb{R}^n)^m$ 上的函数 Ω 具有以下性质:

(i) Ω 是零次齐次的, 即对任意的 $\lambda > 0$ 和 $\vec{y} = (y_1, \dots, y_m) \in (\mathbb{R}^n)^m$, 有

$$\Omega(\lambda \vec{y}) = \Omega(\vec{y}); \quad (1.3)$$

(ii) Ω 在 $(\mathbb{S}^{n-1})^m$ 上是 Lipschitz 连续的, 即存在常数 $C > 0$, 使得对任意 $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m)$, $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_m) \in (\mathbb{R}^n)^m$, 下式对某些 α ($0 < \alpha < 1$) 成立:

$$|\Omega(\xi) - \Omega(\eta)| \leq C |\xi' - \eta'|^\alpha, \quad (1.4)$$

其中 $(y_1, \dots, y_m)' = \frac{(y_1, \dots, y_m)}{|y_1| + \dots + |y_m|}$, 并且此处 $(y_1, \dots, y_m)'$ 不是 $(\mathbb{S}^{n-1})^m$ 中元素;

(iii) Ω 在单位球面上的积分为 0, 即

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \Omega(y_1, \dots, y_m) dy_j = 0, \quad j = 1, \dots, m. \quad (1.5)$$

对任意 $\vec{f} = (f_1, \dots, f_m) \in (S(\mathbb{R}^n))^m$ 且任意 $t > 0$, 引入记号 F_t :

$$F_t(\vec{f})(x) = \frac{\chi_{(B(0,t))^m} \Omega(\vec{\cdot})}{t^m |\vec{\cdot}|^{m(n-1)}} * (f_1 \otimes \dots \otimes f_m)(x) = \frac{1}{t^m} \int_{(B(0,t))^m} \frac{\Omega(\vec{y})}{|\vec{y}|^{m(n-1)}} \prod_{i=1}^m f_i(x - y_i) d\vec{y}, \quad (1.6)$$

其中 $|\vec{y}| = |y_1| + \dots + |y_m|$, $B(x, t) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| \leq t\}$. 定义多线性 Marcinkiewicz 积分 μ 如下:

$$\mu(\vec{f})(x) = \left(\int_0^\infty |F_t(\vec{f})(x)|^2 \frac{dt}{t} \right)^{1/2}. \quad (1.7)$$

注意到, 若 $m = 1$, 则 $\mu(\vec{f})$ 即为 Stein 定义并研究的 $\mu_\Omega(f)$ (见 (1.1)). 当 $m \geq 2$ 时, 有如下结论:

定理 D^[35] 若 μ 是从 $L^{q_1} \times \dots \times L^{q_m}$ 到 L^q 上的有界算子, 其中 $1 < q_1, \dots, q_m < \infty$, $1/q = 1/q_1 + \dots + 1/q_m$, 则对任意 $1 < p_1, \dots, p_m < \infty$, $1/p = 1/p_1 + \dots + 1/p_m$, 存在常数 $C > 0$, 使得

$$\|\mu(\vec{f})\|_{L^p} \leq C \prod_{i=1}^m \|f_i\|_{L^{p_i}}.$$

本文的主要目的是给出多线性 Marcinkiewicz 积分在 BMO 和 Campanato 型空间上的存在性和有界性, 即建立多线性版本的上述结果. 我们的主要结论如下:

定理 1.1 设 Ω 满足 (1.3)–(1.5). 设 μ 是 $L^{q_1} \times \cdots \times L^{q_m}$ 到 L^q 上的有界算子, 其中 $1 < q_1, \dots, q_m < \infty$, $1/q = 1/q_1 + \cdots + 1/q_m$. 对任意 $f_i \in \text{BMO}(\mathbb{R}^n)$, 若 $\mu(\vec{f})(x)$ 在一点 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ 处有限, 则在 $\mathbb{R}^n$ 上, a.e. $\mu(\vec{f})(x) < \infty$, 且存在与 $\vec{f}$ 无关的正常数 C 使得

$$\|\mu(\vec{f})\|_{\text{BMO}} \leq C \prod_{i=1}^m \|f_i\|_{\text{BMO}}.$$

定理 1.2 设 Ω 满足 (1.3)–(1.5), 且其 Lip 指标替换为 β ($0 < \beta < 1$). 设 μ 是 $L^{q_1} \times \cdots \times L^{q_m}$ 到 L^q 上的有界算子, 其中 $1 < q_1, \dots, q_m < \infty$, $1/q = 1/q_1 + \cdots + 1/q_m$. 设 $-\infty < \alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_m < 0$, 其中 $\alpha_1, \dots, \alpha_m < 0$, $n < p < \infty$ 或 $-m < \alpha < 0$, $1 < p < \infty$, 那么, 对任意 $f_j \in \mathcal{E}^{\alpha_j, p_j}(\mathbb{R}^n)$, 以及 $1 < p_1, \dots, p_m < \infty$, $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_m}$, $\mu(\vec{f})$ 要么处处无限, 要么几乎处处有限. 且在第二种情形下有

$$\|\mu(\vec{f})\|_{\mathcal{E}^{\alpha, p}} \leq C \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{\mathcal{E}^{\alpha_j, p_j}}.$$

定理 1.3 设 Ω 满足与定理 1.2 相同的条件. $0 < \alpha < \beta/2$, 对于 $1 \leq j \leq m$, 有 $f_j \in \text{Lip}_{\alpha_j}$, 则 $\mu(\vec{f})$ 要么处处无限, 要么几乎处处有限. 且在第二种情形下, 存在与 $\vec{f}$ 无关的常数 $C > 0$ 使得

$$\|\mu(\vec{f})\|_{\text{Lip}_\alpha} \leq C \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{\text{Lip}_{\alpha_j}}.$$

注 1.2 定理 D 实际上只需要核函数满足单位球体上的消失条件 (参见文献 [35]). 本文结论中核函数满足的条件 (1.5) 要求对每个变量均要满足消失条件, 显然, (1.5) 比文献 [35] 中给出的消失条件要稍强些. 本文之所以用更强的消失条件 (1.5), 是因为在定理 1.1 的证明中 (3.2) 后面必须用到该条件. 当然, 在文献 [35] 的核消失条件下能否得到本文的结论是一个有趣的问题.

本文结构如下: 第 2 节给出几个基本引理; 定理 1.1 的证明将在第 3 节完成; 第 4 节给出定理 1.2 和 1.3 的证明; 最后, 第 5 节给出一些具有分离核以及更一般核的拓展结果.

2 一些基本引理

在证明本文主要结论之前, 先给出几个引理.

引理 2.1 设 $1 \leq p < \infty$, $B = B(x_0, r)$, $x \in B$ 且 $t > 8r > 0$, 那么对于 $0 \leq k \leq k_0$, 其中 $k_0 \in \mathbb{N}$ 满足 $2r \leq 2^{-k_0}t < 4r$, 有

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{|B(x, 2^{-k}t)|} \int_{B(x, 2^{-k}t)} |f(y) - f_B|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \leq c_n \left(\sum_{j=k}^{k_0} 2^{-j\alpha} \right) t^\alpha \|f\|_{\mathcal{E}^{p, \alpha}} \leq \begin{cases} cr^\alpha \|f\|_{\mathcal{E}^{p, \alpha}(\mathbb{R}^n)}, & \alpha < 0, \\ c \log \frac{t}{r} \|f\|_{\mathcal{E}^{p, \alpha}(\mathbb{R}^n)}, & \alpha = 0, \\ ct^\alpha \|f\|_{\mathcal{E}^{p, \alpha}(\mathbb{R}^n)}, & \alpha > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

证明 注意到

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{|B(x, 2^{-k}t)|} \int_{B(x, 2^{-k}t)} |f(y) - f_B| dy \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\frac{1}{|B(x, 2^{-k}t)|} \int_{B(x, 2^{-k}t)} |f(y) - f_{B(x, 2^{-k}t)}| dy \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\quad + \sum_{j=k}^{k_0} |f_{B(x, 2^{-j}t)} - f_{B(x, 2^{-j-1}t)}| + |f_{B(x, 2^{-k_0}t)} - f_B|. \end{aligned}$$

易见第一项被 $(2^{-k}t)^\alpha \|f\|_{\mathcal{E}^{p,\alpha}}$ 控制. 对于 $k \leq j \leq k_0$, 显然,

$$\begin{aligned} |f_{B(x, 2^{-j}t)} - f_{B(x, 2^{-j-1}t)}| &\leq \frac{|B(x, 2^{-j}t)|}{|B(x, 2^{-j-1}t)|} \frac{1}{|B(x, 2^{-j}t)|} \int_{B(x, 2^{-j-1}t)} |f(y) - f_{B(x, 2^{-j}t)}| dy \\ &\leq c_n 2^n \frac{1}{|B(x, 2^{-j}t)|} \int_{B(x, 2^{-j}t)} |f(y) - f_{B(x, 2^{-j}t)}| dy \\ &\leq c_n 2^n (2^{-j}t)^\alpha \|f\|_{\mathcal{E}^{p,\alpha}}. \end{aligned}$$

至于最后一项, 我们有

$$\begin{aligned} |f_{B(x, 2^{-k_0}t)} - f_B| &\leq \frac{1}{|B|} \int_B |f(y) - f_{B(x, 2^{-k_0}t)}| dy \\ &\leq \frac{|B(x, 2^{-k_0}t)|}{|B|} \frac{1}{|B(x, 2^{-k_0}t)|} \int_{B(x, 2^{-k_0}t)} |f(y) - f_{B(x, 2^{-k_0}t)}| dy \\ &\leq c_n 4^n (2^{-k_0}t)^\alpha \|f\|_{\mathcal{E}^{p,\alpha}}. \end{aligned}$$

综上,

$$\frac{1}{|B(x, 2^{-k}t)|} \int_{B(x, 2^{-k}t)} |f(y) - f_B| dy \leq c_n \left(\sum_{j=k}^{k_0} 2^{-j\alpha} \right) \|f\|_{\mathcal{E}^{p,\alpha}}.$$

由于 $2r \leq 2^{-k_0}t < 4r$, 我们便得到了所要的估计. □

引理 2.2 设 $1 \leq p < \infty$, $B = B(x_0, r)$, $k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, 则对于 $x \in B$, 有

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{|B(x, 2^k r)|} \int_{B(x, 2^k r)} |f(y) - f_B| dy \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq c_n \left(\sum_{\ell=0}^k 2^{\alpha \ell} \right) r^\alpha \|f\|_{\mathcal{E}^{p,\alpha}(\mathbb{R}^n)} \leq \begin{cases} c_0 r^\alpha \|f\|_{\mathcal{E}^{p,\alpha}(\mathbb{R}^n)}, & \alpha < 0, \\ c_1 k \|f\|_{\mathcal{E}^{p,\alpha}(\mathbb{R}^n)}, & \alpha = 0, \\ c_2 (2^k r)^\alpha \|f\|_{\mathcal{E}^{p,\alpha}(\mathbb{R}^n)}, & \alpha > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

证明 由于 $|f_{B(x, 2^{\ell+1}r)} - f_{B(x, 2^\ell r)}|$ 可被

$$\frac{|B(x, 2^{\ell+1}r)|^{1+\frac{\alpha}{n}}}{|B(x, 2^\ell r)|^{1+\frac{\alpha}{n}}} \frac{1}{|B(x, 2^{\ell+1}r)|} \int_{B(x, 2^{\ell+1}r)} |f(y) - f_{B(x, 2^{\ell+1}r)}| dy \leq 2^n c_n (2^{\ell+1}r)^\alpha \|f\|_{\mathcal{E}^{\alpha,1}(\mathbb{R}^n)}$$

所控制, 因此,

$$\left(\frac{1}{|B(x, 2^k r)|} \int_{B(x, 2^k r)} |f(y) - f_B| dy \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \left(\frac{1}{|B(x, 2^k r)|} \int_{B(x, 2^k r)} |f(y) - f_{B(x, 2^k r)}| dy \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &\quad + |f_{B(x, 2^k r)} - f_{B(x, 2^{k-1} r)}| + |f_{B(x, 2^{k-1} r)} - f_{B(x, 2^{k-2} r)}| + \cdots + |f_{B(x, 2r)} - f_B| \\
 &\leq |B(x, 2^k r)|^{\frac{\alpha}{n}} \|f\|_{\mathcal{E}^{p, \alpha}(\mathbb{R}^n)} + 2^n c_n (2^k r)^\alpha \|f\|_{\mathcal{E}^{\alpha, 1}(\mathbb{R}^n)} + \cdots + 2^n c_n r^\alpha \|f\|_{\mathcal{E}^{\alpha, 1}(\mathbb{R}^n)} \\
 &\leq c \left(\sum_{\ell=0}^k 2^{\alpha \ell} \right) r^\alpha \|f\|_{\mathcal{E}^{p, \alpha}(\mathbb{R}^n)},
 \end{aligned}$$

此估计即为所求. $\square$

引理 2.3 假设 $B = B(x_0, r)$, $x \in B$, $t > 8r$, $\alpha \in \mathbb{R}$, 则有

$$\int_{8r \leq |x-y| < t} \frac{|f(y) - f_B|}{|x-y|^{n-1}} dy \leq \begin{cases} ctr^\alpha \|f\|_{\mathcal{E}^{\alpha, 1}(\mathbb{R}^n)}, & \alpha < 0, \\ ct \log \frac{t}{r} \|f\|_{\mathcal{E}^{\alpha, 1}(\mathbb{R}^n)}, & \alpha = 0, \\ ct^{1+\alpha} \|f\|_{\mathcal{E}^{\alpha, 1}(\mathbb{R}^n)}, & \alpha > 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

证明 令 $k_0 \in \mathbb{N}$ 且满足 $2r \leq 2^{-k_0} t < 4r$, 那么, 由引理 2.1 推出

$$\begin{aligned}
 \int_{8r \leq |x-y| < t} \frac{|f(y) - f_B|}{|x-y|^{n-1}} dy &= \sum_{k=0}^{k_0-1} \int_{2^{-k-1}t \leq |x-y| < 2^{-k}t} \frac{|f(y) - f_B|}{|x-y|^{n-1}} dy \\
 &\leq \sum_{k=0}^{k_0-1} \frac{1}{(2^{-k-1}t)^{n-1}} \int_{B(x, 2^{-k}t)} |f(y) - f_B| dy \\
 &\leq c \sum_{k=0}^{k_0-1} \frac{(2^{-k}t)^n}{(2^{-k-1}t)^{n-1}} \frac{1}{|B(x, 2^{-k}t)|} \int_{B(x, 2^{-k}t)} |f(y) - f_B| dy \\
 &\leq c \left(\sum_{k=0}^{k_0-1} 2^{-k} \right) t \frac{1}{|B(x, 2^{-k}t)|} \int_{B(x, 2^{-k}t)} |f(y) - f_B| dy.
 \end{aligned}$$

由此即可得到所需的估计. $\square$

引理 2.4 记 $B = B(x_0, r)$, 如果 $x \in B$, $0 < \beta < 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$ 且 $t > 8r$, 那么,

$$\int_{8r \leq |x-y| < t} \frac{r^\beta |f(y) - f_B|}{|x-y|^{n-1+\beta}} dy \leq \begin{cases} cr^{\beta+\alpha} t^{1-\beta} \|f\|_{\mathcal{E}^{\alpha, 1}(\mathbb{R}^n)}, & \alpha < 0, \\ cr^\beta t^{1-\beta} \log \frac{t}{r} \|f\|_{\mathcal{E}^{\alpha, 1}(\mathbb{R}^n)}, & \alpha = 0, \\ cr^\beta t^{1-\beta+\alpha} \|f\|_{\mathcal{E}^{\alpha, 1}(\mathbb{R}^n)}, & \alpha > 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

此外, 如果 $\beta = 1$, 那么,

$$\int_{8r \leq |x-y| < t} \frac{r |f(y) - f_B|}{|x-y|^n} dy \leq \begin{cases} cr^{1+\alpha} \log \frac{t}{r} \|f\|_{\mathcal{E}^{\alpha, 1}(\mathbb{R}^n)}, & \alpha < 0, \\ cr \log^2 \frac{t}{r} \|f\|_{\mathcal{E}^{\alpha, 1}(\mathbb{R}^n)}, & \alpha = 0, \\ crt^\alpha \log \frac{t}{r} \|f\|_{\mathcal{E}^{\alpha, 1}(\mathbb{R}^n)}, & \alpha > 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

证明 令 $k_0 \in \mathbb{N}$ 且满足 $2r \leq 2^{-k_0} t < 4r$. 由引理 2.1 可推出

$$\int_{8r \leq |x-y| < t} \frac{r^\beta |f(y) - f_B|}{|x-y|^{n-1+\beta}} dy = r^\beta \sum_{k=0}^{k_0-1} \int_{2^{-k-1}t \leq |x-y| < 2^{-k}t} \frac{|f(y) - f_B|}{|x-y|^{n-1+\beta}} dy$$

$$\begin{aligned} &\leq cr^\beta \sum_{k=0}^{k_0-1} \frac{(2^{-k}t)^n}{(2^{-k-1}t)^{n-1+\beta}} \frac{1}{|B(x, 2^{-k}t)|} \int_{B(x, 2^{-k}t)} |f(y) - f_B| dy \\ &\leq cr^\beta \left(\sum_{k=0}^{k_0-1} 2^{-k(1-\beta)} \right) t^{1-\beta} \frac{1}{|B(x, 2^{-k}t)|} \int_{B(x, 2^{-k}t)} |f(y) - f_B| dy. \end{aligned}$$

这样可推得所要的估计. $\square$

引理 2.5 设 $m \in \mathbb{N}$, $B = B(x_0, r)$, $x \in B$, $0 < \beta \leq 1$, $\alpha \leq 1$, $\gamma < \beta$, 或当 $0 < \alpha \leq 1$ 时 $\alpha + \gamma < \beta$ 成立. 设 $\alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_m$ 且 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 满足如下三个条件之一: (i) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m < 0$, 若 $\alpha < 0$; (ii) $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$, 若 $\alpha = 0$; (iii) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m > 0$, 若 $\alpha > 0$, 则有如下估计:

$$\int_{(B(x, 8r)^m)^c} \frac{r^\beta \prod_{i=1}^m |f_i(y_i) - (f_i)_B|}{(\sum_{j=1}^m |x - y_j|)^{mn+\beta-\gamma}} d\vec{y} \leq cr^{\alpha+\gamma} \prod_{i=1}^m \|f_i\|_{\mathcal{E}^{\alpha_i, 1}(\mathbb{R}^n)}. \quad (2.4)$$

证明 首先, 注意到

$$\begin{aligned} &\int_{(B(x, 8r)^m)^c} \frac{r^\beta \prod_{i=1}^m |f_i(y_i) - (f_i)_B|}{(\sum_{j=1}^m |x - y_j|)^{mn+\beta-\gamma}} d\vec{y} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{(B(x, 2^{k+4}r)^m \setminus (B(x, 2^{k+3}r)^m)^m} \frac{r^\beta \prod_{i=1}^m |f_i(y_i) - (f_i)_B|}{(\sum_{j=1}^m |x - y_j|)^{mn+\beta-\gamma}} d\vec{y}. \end{aligned}$$

又由引理 2.2 可知,

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{\infty} \int_{(B(x, 2^{k+4}r)^m \setminus (B(x, 2^{k+3}r)^m)^m} \frac{r^\beta \prod_{i=1}^m |f_i(y_i) - (f_i)_B|}{(\sum_{j=1}^m |x - y_j|)^{mn+\beta-\gamma}} d\vec{y} \\ &\leq cr^\beta \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2^{k+3}r)^{mn+\beta-\gamma}} \int_{(B(x, 2^{k+4}r)^m)^m} \prod_{i=1}^m |f_i(y_i) - (f_i)_B| d\vec{y} \\ &\leq cr^\gamma \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k(\beta-\gamma)}} \prod_{i=1}^m \frac{1}{|B(x, 2^{k+4}r)|} \int_{B(x, 2^{k+4}r)} |f_i(y_i) - (f_i)_B| dy_i \\ &\leq \begin{cases} c \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k(\beta-\gamma)}} r^{\alpha+\gamma} \prod_{i=1}^m \|f_i\|_{\mathcal{E}^{\alpha_i, 1}(\mathbb{R}^n)}, & \alpha < 0, \\ c \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+4)^m}{2^{k(\beta-\gamma)}} r^\gamma \prod_{i=1}^m \|f_i\|_{\mathcal{E}^{\alpha_i, 1}(\mathbb{R}^n)}, & \alpha = 0, \\ c \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{k\alpha}}{2^{k(\beta-\gamma)}} r^{\alpha+\gamma} \prod_{i=1}^m \|f_i\|_{\mathcal{E}^{\alpha_i, 1}(\mathbb{R}^n)}, & \alpha > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

由此可完成引理 2.5 的证明. $\square$

3 定理 1.1 的证明

只需证明以下事实: 如果存在 $y_0 \in \mathbb{R}^n$ 满足性质 $\mu(\vec{f})(y_0) < \infty$, 那么对于任意球 $B \subset \mathbb{R}^n$ 满足 $y_0 \in B$, 以及任意 $f_j \in \text{BMO}(\mathbb{R}^n)$, 下面的不等式成立:

$$\frac{1}{|B|} \int_B |\mu(\vec{f})(x) - (\mu(\vec{f}))_B| dx \leq C \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{\text{BMO}}.$$

固定半径为 r 的球 B , 令

$$\mu^r(\vec{f})(x) = \left(\int_0^{8r} \left| \frac{1}{t^m} \int_{(B(0,t))^m} \frac{\Omega(\vec{y})}{|\vec{y}|^{m(n-1)}} \prod_{i=1}^m f_i(x - y_i) d\vec{y} \right|^2 \frac{dt}{t} \right)^{1/2}, \quad (3.1)$$

$$\mu^\infty(\vec{f})(x) = \left(\int_{8r}^\infty \left| \frac{1}{t^m} \int_{(B(0,t))^m} \frac{\Omega(\vec{y})}{|\vec{y}|^{m(n-1)}} \prod_{i=1}^m f_i(x - y_i) d\vec{y} \right|^2 \frac{dt}{t} \right)^{1/2}. \quad (3.2)$$

对任意 $x \in B$, 由 Ω 的消失条件 (1.4) 可知,

$$\begin{aligned} \mu^r(\vec{f})(x) &= \mu^r((f_1 - (f_1)_B)\chi_{10B}, \dots, (f_m - (f_m)_B)\chi_{10B})(x) \\ &\leq \mu((f_1 - (f_1)_B)\chi_{10B}, \dots, (f_m - (f_m)_B)\chi_{10B})(x). \end{aligned}$$

因此, 使用定理 A 中 μ 的有界性, 可得

$$\int_B |\mu^r(\vec{f})(x)|^p dx \leq C \prod_{j=1}^m \left(\int_{10B} |f_j(y_j) - (f_j)_B|^{p_j} dy_j \right)^{\frac{p}{p_j}} \leq C|B| \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{\text{BMO}}^p,$$

其中 $1 < p_j < \infty$, $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_m}$. 由此可以推出

$$\frac{1}{|B|} \int_B |\mu^r(\vec{f})(x)| dx \leq C \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{\text{BMO}}.$$

注意到

$$\frac{1}{|B|} \int_B |\mu(\vec{f})(x) - (\mu(\vec{f}))_B| dx \leq 2 \frac{1}{|B|} \int_B |\mu^r(\vec{f})(x)| dx + 2 \frac{1}{|B|} \int_B \left| \mu^\infty(\vec{f})(x) - \inf_{y \in B} \mu^\infty(\vec{f})(y) \right| dx.$$

故为完成定理 1.1 的证明, 只需证明, 对于任意 $x \in B$, 下面的不等式成立:

$$\left| \mu^\infty(\vec{f})(x) - \inf_{y \in B} \mu^\infty(\vec{f})(y) \right| \leq \sup_{y \in B} |\mu^\infty(\vec{f})(x) - \mu^\infty(\vec{f})(y)| \leq C \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{\text{BMO}}.$$

因而, 对于任意 $x, z \in B$, 只需证明

$$|\mu^\infty(\vec{f})(x) - \mu^\infty(\vec{f})(z)| \leq C \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{\text{BMO}}. \quad (3.3)$$

易见

$$\begin{aligned} |\mu^\infty(\vec{f})(x) - \mu^\infty(\vec{f})(z)| &= \left| \left(\int_{8r}^\infty |F_t(\vec{f})(x)|^2 \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{2}} - \left(\int_{8r}^\infty |F_t(\vec{f})(z)|^2 \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{2}} \right| \\ &\leq \left(\int_{8r}^\infty |F_t(\vec{f})(x) + F_t(\vec{f})(z)| |F_t(\vec{f})(x) - F_t(\vec{f})(z)| \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

现在, 对于任意 $z \in \mathbb{R}^n$ 和 $t_1, \dots, t_m > 0$, 由 Ω 的消失条件可得

$$\left| \int_{\prod_{i=1}^m B(z, t_i)} \frac{\Omega(z - y_1, \dots, z - y_m)}{(\sum_{j=1}^m |z - y_j|)^{m(n-1)}} \prod_{i=1}^m f_i(y_i) d\vec{y} \right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq C \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{1}{\prod_{i=1}^m (2^{k+1}t_i)^{n-1}} \int_{\prod_{i=1}^m B(z, 2^{k+1}t_i) \setminus \prod_{i=1}^m B(z, 2^k t_i)} \prod_{j=1}^m |f_j(y_j) - (f_j)_{B(z, 2^{k+1}t_i)}| d\vec{y} \\
&\leq C \sum_{k=-\infty}^{-1} \prod_{i=1}^m 2^k t_i \prod_{j=1}^m \frac{1}{|B(z, 2^{k+1}t_j)|} \int_{B(z, 2^{k+1}t_j)} |f_j(y_j) - (f_j)_{B(z, 2^{k+1}t_i)}| dy_j \\
&\leq C \prod_{j=1}^m t_j \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{\text{BMO}}.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

对于 $z \in \mathbb{R}^n$ 和 $t > 8r$, $B(z, t)^m$ 被分解为以下部分:

$$\begin{aligned}
B(z, t)^m &= \left\{ \bigcup_{i=1}^m [(B(z, t) \setminus B(z, 8r))^{i-1} \times B(z, 8r) \times (B(z, t) \setminus B(z, 8r))^{m-i}] \right\} \\
&\quad \cup (B(z, t) \setminus B(z, 8r))^m \cup B(z, 8r)^m.
\end{aligned}$$

引入以下记号:

$$\mathbb{B}_i(z, t, r) := (B(z, t) \setminus B(z, 8r))^{i-1} \times B(z, 8r) \times (B(z, t) \setminus B(z, 8r))^{m-i}.$$

我们有

$$\begin{aligned}
t^m F_t(\vec{f})(z) &= \int_{B(z, t)^m} \frac{\Omega(z - y_1, \dots, z - y_m)}{(\sum_{j=1}^m |z - y_j|)^{m(n-1)}} \prod_{i=1}^m f_i(y_i) d\vec{y} \\
&= \int_{(B(z, t) \setminus B(z, 8r))^m} \frac{\Omega(z - y_1, \dots, z - y_m)}{(\sum_{j=1}^m |z - y_j|)^{m(n-1)}} \prod_{i=1}^m f_i(y_i) d\vec{y} \\
&\quad + \sum_{\ell=1}^m \int_{\mathbb{B}_\ell(z, t, r)} \frac{\Omega(z - y_1, \dots, z - y_m)}{(\sum_{j=1}^m |z - y_j|)^{m(n-1)}} \prod_{i=1}^m f_i(y_i) d\vec{y} \\
&\quad - (m-1) \int_{B(z, 8r)^m} \frac{\Omega(z - y_1, \dots, z - y_m)}{(\sum_{j=1}^m |z - y_j|)^{m(n-1)}} \prod_{i=1}^m f_i(y_i) d\vec{y}.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

由与 (3.4) 和 (3.5) 类似的讨论可得

$$t^m |F_t(\vec{f})(z)| \leq C t^m \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{\text{BMO}}, \tag{3.6}$$

$$\left| \int_{\mathbb{B}_\ell(z, t, r)} \frac{\Omega(z - y_1, \dots, z - y_m)}{(\sum_{j=1}^m |z - y_j|)^{m(n-1)}} \prod_{i=1}^m f_i(y_i) d\vec{y} \right| \leq C t^{m-1} r \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{\text{BMO}}, \quad \ell = 1, \dots, m, \tag{3.7}$$

$$\left| \int_{B(z, 8r)^m} \frac{\Omega(z - y_1, \dots, z - y_m)}{(\sum_{j=1}^m |z - y_j|)^{m(n-1)}} \prod_{i=1}^m f_i(y_i) d\vec{y} \right| \leq C r^m \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{\text{BMO}}. \tag{3.8}$$

对任意的 $x \in B$ 和 $t \geq 8r$, 令

$$\begin{aligned}
H_t(\vec{f})(x, z) &:= \left| \int_{(B(z, t) \setminus B(z, 8r))^m} \frac{\Omega(z - y_1, \dots, z - y_m)}{(\sum_{j=1}^m |z - y_j|)^{m(n-1)}} \prod_{i=1}^m f_i(y_i) d\vec{y} \right. \\
&\quad \left. - \int_{(B(x, t) \setminus B(x, 8r))^m} \frac{\Omega(x - y_1, \dots, x - y_m)}{(\sum_{j=1}^m |x - y_j|)^{m(n-1)}} \prod_{i=1}^m f_i(y_i) d\vec{y} \right|.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

因此, 对任意 $x, z \in B$, 通过 (3.5)–(3.9), 以及集合 $(B(z, t) \setminus B(z, 8r))^m$ 与 $B(z, 8r)^m$ 之间的关系, 有

$$\begin{aligned} |\mu^\infty(\vec{f})(x) - \mu^\infty(\vec{f})(z)| &\leq C \left(\int_{8r}^\infty |F_t(\vec{f})(x) - F_t(\vec{f})(z)| \frac{dt}{t} \right)^{1/2} \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{\text{BMO}}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{\text{BMO}} \left(\int_{8r}^\infty (t^{m-1}r + r^m) \frac{dt}{t^{m+1}} \right)^{1/2} \\ &\quad + C \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{\text{BMO}}^{\frac{1}{2}} \left(\int_{8r}^\infty |H_t(\vec{f})(x, z)| \frac{dt}{t^{m+1}} \right)^{1/2} \\ &\leq C \left[\prod_{j=1}^m \|f_j\|_{\text{BMO}} + \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{\text{BMO}}^{\frac{1}{2}} \left(\int_{8r}^\infty |H_t(\vec{f})(x, z)| \frac{dt}{t^{m+1}} \right)^{\frac{1}{2}} \right]. \end{aligned}$$

故对于任意 $x, z \in B$, 不等式 (3.3) 的证明可归结为证明

$$\int_{8r}^\infty |H_t(\vec{f})(x, z)| \frac{dt}{t^{m+1}} \leq C \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{\text{BMO}}. \quad (3.10)$$

为此, 首先引入一些记号. 固定 x 和 z , 对于任意 $t > 0$, 记

$$\begin{aligned} \Xi(x, t) &= \{y \in \mathbb{R}^n : 8r \leq |x - y| < t, 8r \leq |z - y| < t\}, \\ \Xi(z, t) &= \{y \in \mathbb{R}^n : 8r \leq |z - y| < t, 8r \leq |x - y| < t\}, \\ \Gamma(x, t) &= \{y \in \mathbb{R}^n : 8r \leq |x - y| < t, |z - y| \geq t\}, \\ \Gamma(z, t) &= \{y \in \mathbb{R}^n : 8r \leq |z - y| < t, |x - y| \geq t\}, \\ \Lambda(x, t) &= \{y \in \mathbb{R}^n : 8r \leq |x - y| < t, |z - y| < 8r\}, \\ \Lambda(z, t) &= \{y \in \mathbb{R}^n : 8r \leq |z - y| < t, |x - y| < 8r\}, \\ \vec{\Theta}(x, t) &= \Theta_1(x, t) \times \cdots \times \Theta_m(x, t), \quad \Theta_i(x, t) \in \{\Xi(x, t), \Gamma(x, t), \Lambda(x, t)\}, \\ \vec{\Theta}(z, t) &= \Theta_1(z, t) \times \cdots \times \Theta_m(z, t), \quad \Theta_i(z, t) \in \{\Xi(z, t), \Gamma(z, t), \Lambda(z, t)\}. \end{aligned}$$

对任意 y , 记

$$\begin{aligned} \Xi(x, y) &= \{t > 0 : 8r \leq |x - y| < t, 8r \leq |z - y| < t\}, \\ \Xi(z, y) &= \{t > 0 : 8r \leq |z - y| < t, 8r \leq |x - y| < t\}, \\ \Gamma(x, y) &= \{t > 0 : 8r \leq |x - y| < t, |z - y| \geq t\}, \\ \Gamma(z, y) &= \{t > 0 : 8r \leq |z - y| < t, |x - y| \geq t\}, \\ \Lambda(x, y) &= \{t > 0 : 8r \leq |x - y| < t, |z - y| < 8r\}, \\ \Lambda(z, y) &= \{t > 0 : 8r \leq |z - y| < t, |x - y| < 8r\}, \\ \Lambda_i(x, y_i) &\in \{\Gamma(x, y_i), \Xi(x, y_i)\}, \quad i = 1, \dots, m, \\ \Lambda_i(z, y_i) &\in \{\Gamma(z, y_i), \Xi(z, y_i)\}, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

直接观察可知,

$$B(x, t) \setminus B(x, 8r) = \Xi(x, t) \cup \Gamma(x, t) \cup \Lambda(x, t),$$

$$B(z, t) \setminus B(z, 8r) = \Xi(z, t) \cup \Gamma(z, t) \cup \Lambda(z, t),$$

$$\Xi(x, t) = \Xi(z, t) =: \Xi(t), \quad \Xi(x, y) = \Xi(z, y) =: \Xi(y).$$

进一步, 我们有

$$\begin{aligned} H_t(\vec{f})(x, z) &= \left| \int_{(B(x, t) \setminus B(x, 8r))^m} \frac{\Omega(x - y_1, \dots, x - y_m)}{(\sum_{j=1}^m |x - y_j|)^{m(n-1)}} \prod_{i=1}^m f_i(y_i) d\vec{y} \right. \\ &\quad \left. - \int_{(B(z, t) \setminus B(z, 8r))^m} \frac{\Omega(z - y_1, \dots, z - y_m)}{(\sum_{j=1}^m |z - y_j|)^{m(n-1)}} \prod_{i=1}^m f_i(y_i) d\vec{y} \right| \\ &\leq \int_{(\Xi(t))^m} \left| \frac{\Omega(x - y_1, \dots, x - y_m)}{(\sum_{j=1}^m |x - y_j|)^{m(n-1)}} - \frac{\Omega(z - y_1, \dots, z - y_m)}{(\sum_{j=1}^m |z - y_j|)^{m(n-1)}} \right| \prod_{i=1}^m |f_i(y_i) - (f_i)_B| d\vec{y} \\ &\quad + \int_{(\Lambda(x, t))^m} \frac{|\Omega(x - y_1, \dots, x - y_m)|}{(\sum_{j=1}^m |x - y_j|)^{m(n-1)}} \prod_{i=1}^m |f_i(y_i) - (f_i)_B| d\vec{y} \\ &\quad + \int_{(\Lambda(z, t))^m} \frac{|\Omega(z - y_1, \dots, z - y_m)|}{(\sum_{j=1}^m |z - y_j|)^{m(n-1)}} \prod_{i=1}^m |f_i(y_i) - (f_i)_B| d\vec{y} \\ &\quad + \int_{\substack{\Theta(x, t) \\ \Xi \Theta_i(x, t) = \Gamma(x, t)}} \frac{|\Omega(x - y_1, \dots, x - y_m)|}{(\sum_{j=1}^m |x - y_j|)^{m(n-1)}} \prod_{i=1}^m |f_i(y_i) - (f_i)_B| d\vec{y} \\ &\quad + \int_{\substack{\Theta(z, t) \\ \Xi \Theta_i(z, t) = \Gamma(z, t)}} \frac{|\Omega(z - y_1, \dots, z - y_m)|}{(\sum_{j=1}^m |z - y_j|)^{m(n-1)}} \prod_{i=1}^m |f_i(y_i) - (f_i)_B| d\vec{y} \\ &\quad + \sum_{l=1}^{m-1} \int_{(\Xi(x, t))^l} \int_{(\Lambda(x, t))^{m-l}} \frac{|\Omega(x - y_1, \dots, x - y_m)|}{(\sum_{j=1}^m |x - y_j|)^{m(n-1)}} \prod_{i=1}^m |f_i(y_i) - (f_i)_B| d\vec{y} \\ &\quad + \sum_{l=1}^{m-1} \int_{(\Xi(z, t))^l} \int_{(\Lambda(z, t))^{m-l}} \frac{|\Omega(z - y_1, \dots, z - y_m)|}{(\sum_{j=1}^m |z - y_j|)^{m(n-1)}} \prod_{i=1}^m |f_i(y_i) - (f_i)_B| d\vec{y} \\ &=: \sum_{i=1}^5 H_{t,i}(\vec{f})(x, z) + \sum_{l=1}^{m-1} H_{t,6}^l(\vec{f})(x, z) + \sum_{l=1}^{m-1} H_{t,7}^l(\vec{f})(x, z). \end{aligned}$$

下面分别估计 $H_{t,i}(\vec{f})$ ($1 \leq i \leq 6$). 首先, 考虑 $H_{t,2}$ 和 $H_{t,3}$. 对于 $x, z \in B$, 由引理 2.3, 有

$$|H_{t,2}(\vec{f})(x, z)| \leq C \int_{(B(x, 10r) \setminus B(x, 8r))^m} \frac{\prod_{i=1}^m |f_i(y_i) - (f_i)_B|}{(\sum_{j=1}^m |x - y_j|)^{m(n-1)}} d\vec{y} \leq Cr^m \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{\text{BMO}}.$$

由此推出

$$\int_{8r}^{\infty} |H_{t,2}(\vec{f})(x, z)| \frac{dt}{t^{m+1}} \leq C \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{\text{BMO}}. \quad (3.11)$$

同理,

$$\int_{8r}^{\infty} |H_{t,3}(\vec{f})(x, z)| \frac{dt}{t^{m+1}} \leq C \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{\text{BMO}}. \quad (3.12)$$

对于 $H_{t,4}(\vec{f})$, 注意到对任意 $x, z \in B$, t 的长度可被控制为

$$\left| \bigcap_{j=1}^m \Theta_j(x, y_j) \right| \leq |\Theta_i(x, y_i)| = |\Gamma(x, y_i)| \leq \|z - y_i\| - \|x - y_i\| \leq \|z - x\| \leq 2r,$$

且对于任意 $t \in \bigcap_{j=1}^m \Theta_j(x, y_j)$, 有 $t > \frac{1}{m}(\sum_{j=1}^m |x - y_j|)$. 由引理 2.5 有

$$\begin{aligned} \int_{8r}^{\infty} |H_{t,4}(\vec{f})(x, z)| \frac{dt}{t^{m+1}} &\leq C \int_{((B(x, 8r))^c)^m} \frac{\prod_{i=1}^m |f_i(y_i) - (f_i)_B|}{(\sum_{j=1}^m |x - y_j|)^{m(n-1)}} \int_{\bigcap_{j=1}^m \Theta_j(x, y_j)} \frac{dt}{t^{m+1}} d\vec{y} \\ &\leq Cr \int_{((B(x, 8r))^c)^m} \frac{\prod_{i=1}^m |f_i(y_i) - (f_i)_B|}{(\sum_{j=1}^m |x - y_j|)^{mn+1}} d\vec{y} \leq C \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{\text{BMO}}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

同理可得

$$\int_{8r}^{\infty} |H_{t,5}(\vec{f})(x, z)| \frac{dt}{t^{m+1}} \leq C \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{\text{BMO}}. \quad (3.14)$$

对于 $H_{t,6}^l(\vec{f})$, 可设 $y_1, \dots, y_l \in \Xi(t)$ 和 $y_{l+1}, \dots, y_m \in \Lambda(x, t)$. 由引理 2.3, $H_{t,6}^l(\vec{f})(x, z)$ 可被

$$\prod_{j=1}^l \int_{8r \leq |x - y_j| < t} \frac{|f_j(y_j) - (f_j)_B|}{|x - y_j|^{n-1}} dy_j \prod_{j=l+1}^m \int_{8r \leq |x - y_j| \leq 10r} \frac{|f_j(y_j) - (f_j)_B|}{|x - y_j|^{n-1}} dy_j$$

乘上一个常数因子所控制. 易知, 上式可进一步被 $(t \log_2 \frac{t}{r})^l r^{m-l} \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{\text{BMO}}$ 乘上一个常数因子所控制. 这样, 得到如下估计:

$$\int_{8r}^{\infty} |H_{t,6}^l(\vec{f})(x, z)| \frac{dt}{t^{m+1}} \leq C \int_{8r}^{\infty} r^{m-l} \left(t \log_2 \frac{t}{r} \right)^l \frac{dt}{t^{m+1}} \leq C \int_8^{\infty} \frac{(\log_2 s)^l}{s^{m-l+1}} ds \leq C \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{\text{BMO}}. \quad (3.15)$$

相同的估计对 $H_{t,7}^l(\vec{f})$ 也成立. 进一步, 由 Ω 的 Lipschitz 连续条件 (ii) 和引理 2.5 可推出

$$\int_{8r}^{\infty} |H_{t,1}(\vec{f})(x, z)| \frac{dt}{t^{m+1}} \leq C \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{\text{BMO}}. \quad (3.16)$$

由 (3.11)–(3.15) 和不等式 (3.2) 得证. 至此, 我们完成了定理 1.1 的证明.

4 定理 1.2 和 1.3 的证明

首先给出定理 1.2 的证明. 为此, 只需证明对于任意 $f_j \in \mathcal{E}^{\alpha_j, p_j}(\mathbb{R}^n)$ 且 $\|f_j\|_{\mathcal{E}^{\alpha_j, p_j}} = 1$, 如果存在 $y_0 \in \mathbb{R}^n$, 使得 $\mu(\vec{f})(y_0) < \infty$, 那么, 对于任意包含 y_0 的球 $B \subset \mathbb{R}^n$, 有

$$\left(\frac{1}{|B|} \int_B \left| \mu(\vec{f})(x) - \inf_{y \in B} \mu(\vec{f})(y) \right|^p dx \right)^{1/p} \leq C |B|^{\alpha/n}.$$

设 r 是 B 的半径, $\mu^r(\vec{f})$ 和 $\mu^\infty(\vec{f})$ 分别由 (3.1) 和 (3.2) 所定义, 则

$$\left| \mu(\vec{f})(x) - \inf_{y \in B} \mu(\vec{f})(y) \right| \leq \mu(\vec{f})(x) - \inf_{y \in B} \mu^\infty(\vec{f})(y) \leq |\mu^r(\vec{f})(x)| + \sup_{y \in B} |\mu^\infty(\vec{f})(x) - \mu^\infty(\vec{f})(y)|.$$

由 Ω 的消失条件 (1.5), 可得

$$\left(\frac{1}{|B|} \int_B \left| \mu(\vec{f})(x) - \inf_{y \in B} \mu(\vec{f})(y) \right|^p dx \right)^{1/p}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left(\frac{1}{|B|} \int_B |\mu^r(\vec{f})(x)|^p dx \right)^{1/p} + \left(\frac{1}{|B|} \int_B \sup_{y \in B} |\mu^\infty(\vec{f})(x) - \mu^\infty(\vec{f})(y)|^p dx \right)^{1/p} \\
&\leq \left(\frac{1}{|B|} \int_B |\mu^r((f_1 - (f_1)_{10B})\chi_{10B}, \dots, (f_m - (f_m)_{10B})\chi_{10B})(x)|^p dx \right)^{1/p} \\
&\quad + \left(\frac{1}{|B|} \int_B \sup_{y \in B} |\mu^\infty(\vec{f})(x) - \mu^\infty(\vec{f})(y)|^p dx \right)^{1/p} \\
&=: I + II.
\end{aligned}$$

由定理 A 可推出

$$I \leq C \frac{1}{|B|^{1/p}} \left(\prod_{j=1}^m \int_{10B} |f_j(y_j) - (f_j)_{10B}|^{p_j} \right)^{1/p_j} \leq C |B|^{\alpha/n}.$$

因此, 为完成定理 1.2 的证明, 仅需说明, 对任意 $x, z \in B$, 有

$$|\mu^\infty(\vec{f})(x) - \mu^\infty(\vec{f})(z)| \leq Cr^\alpha. \quad (4.1)$$

首先给出几个将用到的基本估计. 如果有 $-m < \alpha < \infty$, $p \in (1, \infty)$, 那么由一个标准的计算可知,

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{\prod_{i=1}^m B(z, t_i)} \frac{\Omega(z - y_1, \dots, z - y_m)}{(\sum_{j=1}^m |z - y_j|)^{m(n-1)}} \prod_{i=1}^m f_i(y_i) d\vec{y} \right| \\
&\leq C \sum_{k=-\infty}^0 \frac{1}{\prod_{i=1}^m (2^k t_i)^{n-1}} \int_{\prod_{i=1}^m B(z, 2^k t_i) \setminus \prod_{i=1}^m B(z, 2^{k-1} t_i)} \prod_{j=1}^m |f_j(y_j) - (f_j)_{B(z, 2^k t_j)}| d\vec{y} \\
&\leq C \sum_{k=-\infty}^0 \prod_{i=1}^m (2^k t_i) \left(\frac{1}{\prod_{i=1}^m |B(z, 2^k t_i)|} \int_{\prod_{i=1}^m B(z, 2^k t_i)} \prod_{j=1}^m |f_j(y_j) - (f_j)_{B(z, 2^k t_j)}|^p d\vec{y} \right)^{1/p} \\
&\leq C \prod_{j=1}^m t_j \sum_{k=-\infty}^0 2^{km} \prod_{j=1}^m \left(\frac{1}{|B(z, 2^k t_j)|^m} \int_{(B(z, 2^k t_j))^m} |f_j(y_j) - (f_j)_{B(z, 2^k t_j)}|^{p_j} d\vec{y} \right)^{1/p_j} \\
&\leq C \prod_{j=1}^m t_j \sum_{k=-\infty}^0 2^{km} \prod_{j=1}^m \left(\frac{1}{|B(z, 2^k t_j)|} \int_{(B(z, 2^k t_j))} |f_j(y_j) - (f_j)_{B(z, 2^k t_j)}|^{p_j} dy_j \right)^{1/p_j} \\
&\leq C \prod_{j=1}^m t_j^{1+\alpha_j}. \quad (4.2)
\end{aligned}$$

以上估计也将被用于 $0 < \alpha \leq 1$ 条件下定理 1.3 的证明. 如果 $p \in (n, \infty)$, $\alpha \in (-\infty, 0)$, 应用 Hölder 不等式可得

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{\prod_{i=1}^m B(z, t_i)} \frac{\Omega(z - y_1, \dots, z - y_m)}{(\sum_{j=1}^m |z - y_j|)^{m(n-1)}} \prod_{i=1}^m f_i(y_i) d\vec{y} \right| \\
&\leq C \left(\int_{\prod_{i=1}^m B(z, t_i)} \prod_{j=1}^m |f_j(y_j) - (f_j)_{B(z, t_j)}|^p d\vec{y} \right)^{1/p} \\
&\quad \times \left(\int_{\prod_{i=1}^m B(z, t_i)} \frac{d\vec{y}}{(\sum_{j=1}^m |z - y_j|)^{m(n-1)p'}} \right)^{1/p'} \\
&\leq C \prod_{j=1}^m t_j^{\frac{n}{p'} - n + 1} \prod_{j=1}^m \left(\int_{\prod_{i=1}^m B(z, t_i)} |f_j(y_j) - (f_j)_{B(z, t_j)}|^{p_j} d\vec{y} \right)^{1/p_j}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq C \prod_{j=1}^m t_j^{\frac{n}{p_j'} - n + 1} \prod_{j=1}^m \left(\prod_{i \neq j} t_i^{n/p_j} t_j^{\alpha_j + n/p_j} \right) = C \prod_{j=1}^m t_j^{\frac{n}{p_j'} - n + 1} \prod_{j=1}^m t_j^{n/p_j} t_j^{\alpha_j + n/p_j} \\
 &= C \prod_{j=1}^m t_j^{1 + \alpha_j}.
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

因此, 对于任意 $x, z \in B$, 根据 (4.2) 和 (4.3), 可得

$$t^m |F_t(\vec{f})(z)| \leq C t^{m+\alpha} \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{\mathcal{E}^{\alpha_j, p_j}}, \tag{4.4}$$

$$\left| \int_{\mathbb{B}_\ell(z, t, r)} \frac{\Omega(z - y_1, \dots, z - y_m)}{(\sum_{j=1}^m |z - y_j|)^{m(n-1)}} \prod_{i=1}^m f_i(y_i) d\vec{y} \right| \leq C t^{m-1+\alpha-\alpha_\ell} r^{1+\alpha_\ell} \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{\mathcal{E}^{\alpha_j, p_j}}, \quad \ell = 1, \dots, m, \tag{4.5}$$

$$\left| \int_{B(z, 8r)^m} \frac{\Omega(z - y_1, \dots, z - y_m)}{(\sum_{j=1}^m |z - y_j|)^{m(n-1)}} \prod_{i=1}^m f_i(y_i) d\vec{y} \right| \leq C r^{m+\alpha} \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{\mathcal{E}^{\alpha_j, p_j}}. \tag{4.6}$$

这样, 对于任意 $x, z \in B$, 由 (3.5)、(4.4)–(4.6) 和 (3.9), 有

$$\begin{aligned}
 |\mu^\infty(\vec{f})(x) - \mu^\infty(\vec{f})(z)| &\leq C \left(\int_{8r}^\infty |F_t(\vec{f})(x) - F_t(\vec{f})(z)| \frac{dt}{t^{1-\alpha}} \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq C \left(\int_{8r}^\infty \sum_{j=1}^m t^{m-1+\alpha-\alpha_j} r^{1+\alpha_j} + r^{m+\alpha} \frac{dt}{t^{m+1-\alpha}} \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\quad + \left(\int_{8r}^\infty |H_t(\vec{f})(x, z)| \frac{dt}{t^{m+1-\alpha}} \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq C r^\alpha + \left(\int_{8r}^\infty |H_t(\vec{f})(x, z)| \frac{dt}{t^{m+1-\alpha}} \right)^{\frac{1}{2}},
 \end{aligned}$$

其中 $H_t(\vec{f})(x, z)$ 由 (3.9) 所定义. 另外,

$$H_t(\vec{f})(x, z) \leq \sum_{i=1}^5 H_{t,i}(\vec{f})(x, z) + \sum_{l=1}^{m-1} H_{t,6}^l(\vec{f})(x, z) + \sum_{l=1}^{m-1} H_{t,7}^l(\vec{f})(x, z).$$

对于任意 $x, z \in B$, 由 Hölder 不等式和 Ω 的 Lipschitz 条件 (1.4) 以及引理 2.5 可推出

$$\begin{aligned}
 &\int_{8r}^\infty |H_{t,1}(\vec{f})(x, z)| \frac{dt}{t^{m+1-\alpha}} \\
 &\leq C \int_{((B(x, 8r))^c)^m} \frac{|x - z|^\beta}{(\sum_{j=1}^m |x - y_j|)^{m(n-1)+\beta}} \prod_{i=1}^m |f_i(y_i) - (f_i)_B| \int_{\frac{1}{m}(\sum_{j=1}^m |x - y_j|)}^\infty \frac{dt}{t^{m+1-\alpha}} d\vec{y} \\
 &\leq C \int_{((B(x, 8r))^c)^m} \frac{r^\beta |f_i(y_i) - (f_i)_B|}{(\sum_{j=1}^m |x - y_j|)^{mn+\beta-\alpha}} d\vec{y} \leq C r^{2\alpha}.
 \end{aligned}$$

另一方面, 由引理 2.3 可得

$$|H_{t,2}(\vec{f})(x, z)| \leq C \prod_{i=1}^m \int_{8r \leq |x - y_i| \leq 10r} \frac{|f_i(y_i) - (f_i)_B|}{|x - y_i|^{n-1}} dy_i \leq C r^{m+\alpha}.$$

因此, 我们证明了

$$\int_{8r}^\infty |H_{t,2}(\vec{f})(x, z)| \frac{dt}{t^{m+1-\alpha}} \leq C \int_{8r}^\infty \frac{dt}{t^{m+1-\alpha}} r^{m+\alpha} \leq C r^{2\alpha}.$$

同理可得

$$\int_{8r}^{\infty} |H_{t,3}(\vec{f})(x, z)| \frac{dt}{t^{m+1-\alpha}} \leq Cr^{2\alpha}.$$

类似于 (3.13) 的讨论, 并使用引理 2.5, 可得

$$\int_{8r}^{\infty} |H_{t,4}(\vec{f})(x, z)| \frac{dt}{t^{m+1-\alpha}} \leq Cr \int_{((B(x, 8r))^c)^m} \frac{\prod_{i=1}^m |f_i(y_i) - (f_i)_B|}{(\sum_{j=1}^m |x - y_j|)^{mn+1-\alpha}} d\vec{y} \leq Cr^{2\alpha}.$$

相同的估计对于 $H_{t,5}(\vec{f})(x, z)$ 依然成立. 至于 $H_{t,6}^l(\vec{f})(x, z)$ 和 $H_{t,7}^l(\vec{f})(x, z)$, 应用引理 2.3, 同理可得

$$\int_{8r}^{\infty} |H_{t,6}^l(\vec{f})(x, z)| \frac{dt}{t^{m+1-\alpha}} + \int_{8r}^{\infty} |H_{t,7}^l(\vec{f})(x, z)| \frac{dt}{t^{m+1-\alpha}} \leq Cr^{m-l+\alpha} \int_{8r}^{\infty} t^l \frac{dt}{t^{m+1-\alpha}} \leq Cr^{2\alpha}.$$

综合 $H_{t,i}(\vec{f})(x, z)$ ($1 \leq i \leq 5$)、 $H_{t,6}^l(\vec{f})$ 和 $H_{t,7}^l(\vec{f})$ 的估计, 可知 (4.1) 对任意 $x, z \in B$ 成立, 这样完成了定理 1.2 的证明.

最后, 使用 (4.2) 和定理 1.3, 并按照证明定理 1.2 的类似步骤便可完成定理 1.3 的证明.

5 带分离核的算子

本节讨论多线性带分离核的 Marcinkiewicz 积分的有界性. 首先给出该算子的定义.

定义 5.1 (多线性带分离核的 Marcinkiewicz 积分) 设 $\Omega = \prod_{j=1}^m \Omega_j$ 是定义在 $(\mathbb{R}^n)^m$ 上的函数, 具有以下性质:

(i) 对于 $j = 1, \dots, m$, Ω_j 在 $\mathbb{R}^n$ 上是零次齐次的, 即对于任意 $\lambda > 0, y \in \mathbb{R}^n$, 有

$$\Omega_j(\lambda y) = \Omega_j(y); \quad (5.1)$$

(ii) Ω_j 在 S^{n-1} 上是 Lipschitz 连续的, 即存在 $0 < \alpha < 1, C > 0$ 使得对任意 $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$, 有

$$|\Omega_j(\xi) - \Omega_j(\eta)| \leq C|\xi' - \eta'|^\alpha, \quad j = 1, \dots, m, \quad (5.2)$$

其中 $y' = \frac{y}{|y|}$;

(iii) Ω_j 在每个单位球面上积分为 0,

$$\int_{S^{n-1}} \Omega_j(y) dy = 0, \quad j = 1, \dots, m. \quad (5.3)$$

对任意 $\vec{f} = (f_1, \dots, f_m) \in S \times \dots \times S$ 和 $t > 0$, 定义 $\tilde{F}_t$ 如下:

$$\begin{aligned} \tilde{F}_t(\vec{f})(x) &= \frac{\chi_{(B(0,t))} \Omega(\cdot)}{t^m \prod_{j=1}^m |\cdot_j|^{n-1}} * (f_1 \otimes \dots \otimes f_m)(x) \\ &= \frac{1}{t^m} \int_{(B(0,t))^m} \prod_{j=1}^m \frac{\Omega_j(y_j)}{|y_j|^{n-1}} \prod_{j=1}^m f_j(x - y_j) d\vec{y} \\ &= \frac{1}{t^m} \prod_{j=1}^m \int_{B(0,t)} \frac{\Omega_j(y_j)}{|y_j|^{n-1}} f_j(x - y_j) dy_j, \end{aligned} \quad (5.4)$$

那么带分离核的多线性 Marcinkiewicz 积分定义为

$$\tilde{\mu}(\vec{f})(x) = \left(\int_0^\infty |F_t(\vec{f})(x)|^2 \frac{dt}{t} \right)^{1/2}. \quad (5.5)$$

易知

$$\tilde{\mu}(\vec{f})(x) \leq C \left(\int_0^\infty \left| \frac{1}{t} \int_{B(0,t)} \frac{\Omega_1(y)}{|y|^{n-1}} f_1(x-y_1) dy_1 \right|^2 \frac{dt}{t} \right)^{1/2} \prod_{j=2}^m M f_j(x).$$

因此, 对于 $1 < p_1, p_2, \dots, p_m < \infty$, $1/p = 1/p_1 + 1/p_2 + \dots + 1/p_m$, $L^{p_1} \times L^{p_2} \times \dots \times L^{p_m} \rightarrow L^p$ 有界性易得. 进一步, 对于 $\tilde{\mu}$, 我们下面的定理:

定理 5.1 定理 1.1 和 1.2 的结论对算子 $\tilde{\mu}$ 依然成立. 定理 1.3 的结论在附加条件 $0 < \alpha_j < 1/m$ ($j = 1, \dots, m$) 之后, 对于算子 $\tilde{\mu}$ 也成立.

5.1 定理 5.1 的证明

只需证明, 对任意 $f_j \in \mathcal{E}^{\alpha_j, p_j}(\mathbb{R}^n)$, 若存在 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ 使得 $\tilde{\mu}(\vec{f})(x_0) < \infty$, 则对任意球 $x_0 \in B$, 有

$$|\tilde{\mu}^\infty(\vec{f})(x_0) - \tilde{\mu}^\infty(\vec{f})(x)| \leq C r^\alpha \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{\mathcal{E}^{\alpha_j, p_j}(\mathbb{R}^n)}. \quad (5.6)$$

事实上, 如果上面的不等式 (5.6) 成立, 那么,

$$\tilde{\mu}^\infty(\vec{f})(x) \leq \tilde{\mu}^\infty(\vec{f})(x_0) + C r^\alpha \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{\mathcal{E}^{\alpha_j, p_j}(\mathbb{R}^n)} < +\infty.$$

因此, $\tilde{\mu}$ 的 $L^{p_1} \times L^{p_2} \times \dots \times L^{p_m} \rightarrow L^p$ 有界性将由下式给出:

$$\left(\frac{1}{|B|} \int_B |\tilde{\mu}^r(\vec{f})(x)|^p dx \right)^{1/p} \leq |B|^\alpha \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{\mathcal{E}^{\alpha_j, p_j}(\mathbb{R}^n)} < +\infty.$$

这意味着 $\tilde{\mu}^r(\vec{f})(x) < +\infty$ 在 B 上几乎处处成立. 因而, $\tilde{\mu}(\vec{f})(x) < +\infty$ 在 B 上几乎处处成立.

因为 $B \ni x_0$ 是任意的, 所以, 对于几乎处处 $x \in \mathbb{R}^n$, 有 $\tilde{\mu}(\vec{f})(x) < +\infty$. 为了证明不等式 (5.6) 成立, 我们将沿用定理 1.1–1.3 的证明步骤. 在此之前, 观察

$$\left| \int_{B(0,t)} \frac{\Omega_j(y_j)}{|y_j|^{n-1}} f_j(x-y_j) dy_j \right| \leq C t^{1+\alpha_j} \|f_j\|_{\mathcal{E}^{\alpha_j, 1}},$$

很容易发现与 (4.4)–(4.6) 相同的估计是依然成立的. 因此, 要证明不等式 (5.6), 只需要证明

$$\int_{8r}^\infty |H_t(\vec{f})(x, z)| \frac{dt}{t^{m+1-\alpha}} \leq C r^{2\alpha},$$

其中 $H_t(\vec{f})(x, z)$ 与上文假设相同, 其定义为

$$H_t(\vec{f})(x, z) := \left| \int_{(B(z,t) \setminus B(z,8r))^m} \prod_{j=1}^m \frac{\Omega_j(z-y_1)}{|z-y_j|^{n-1}} f_j(y_j) d\vec{y} - \int_{(B(x,t) \setminus B(x,8r))^m} \prod_{j=1}^m \frac{\Omega_j(x-y_1)}{|x-y_j|^{n-1}} f_j(y_j) d\vec{y} \right|.$$

我们能够进一步通过下式控制它:

$$H_t(\vec{f})(x, z) \leq \sum_{i=1}^5 H_{t,i}(\vec{f})(x, z) + \sum_{l=1}^{m-1} H_{t,6}^l(\vec{f})(x, z) + \sum_{l=1}^{m-1} H_{t,7}^l(\vec{f})(x, z).$$

其中 $H_{t,i}$ 定义与之前相同, 只是现在换成了分离变量核. 我们需要考虑上面不等式的右边的每个部分.

(1) $H_{t,1}(\vec{f})(x, z)$ 可以被下式控制:

$$\begin{aligned} & C \int_{\Xi(x,t)^m} \sum_{i=1}^m \frac{r^\beta}{|x-y_i|^{n-1+\beta}} \prod_{\ell \neq i} \frac{1}{|x-y_\ell|^{n-1}} \prod_{j=1}^m |f_j(y) - (f_j)_B| d\vec{y} \\ & \leq C \sum_{j=1}^m \int_{8r \leq |x-y_j| < t} \frac{r^\beta |f_j(y) - (f_j)_B|}{|x-y_j|^{n-1+\beta}} dy_j \prod_{\ell \neq j} \int_{8r \leq |x-y_\ell| < t} \frac{|f_\ell(y) - (f_\ell)_B|}{|x-y_\ell|^{n-1}} dy_\ell. \end{aligned}$$

(i) 在 $\alpha < 0$ 条件下, 引理 2.4 和 2.3 可推出下式:

$$|H_{t,1}(\vec{f})(x, z)| \leq C \sum_{j=1}^m r^{\beta+\alpha_j} t^{1-\beta} \prod_{\ell \neq j} (tr^{\alpha_\ell}) \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{\mathcal{E}^{\alpha_j,1}} = Cr^{\alpha+\beta} t^{m-\beta} \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{\mathcal{E}^{\alpha_j,1}},$$

因此可以得到

$$\int_{8r}^\infty |H_{t,1}(\vec{f})(x, z)| \frac{dt}{t^{m+1-\alpha}} \leq Cr^{\beta+\alpha} \int_{8r}^\infty \frac{dt}{t^{1+\beta-\alpha}} \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{\mathcal{E}^{\alpha_j,1}} \leq Cr^{2\alpha} \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{\mathcal{E}^{\alpha_j,1}}.$$

(ii) 在 $\alpha = 0$ 条件下, 使用引理 2.4 和 2.3, 对于某些 $0 < \gamma < \beta$, 有

$$|H_{t,1}(\vec{f})(x, z)| \leq Cr^\beta t^{1-\beta} \left(\log \frac{t}{r} \right) \left(t \log \frac{t}{r} \right)^{m-1} \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{\text{BMO}} = Cr^{\beta-\gamma} t^{m+\gamma-\beta} \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{\text{BMO}}.$$

从而,

$$\int_{8r}^\infty |H_{t,1}(\vec{f})(x, z)| \frac{dt}{t^{m+1-\alpha}} \leq Cr^{\beta-\gamma} \int_{8r}^\infty \frac{dt}{t^{1+\beta-\gamma}} \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{\text{BMO}} \leq C \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{\text{BMO}}.$$

(iii) 在 $0 < \alpha < \beta/2$ 条件下使用引理 2.4 和 2.3, 有

$$|H_{t,1}(\vec{f})(x, z)| \leq Cr^\beta t^{1-\beta+\alpha_j} \prod_{\ell \neq j} t^{1+\alpha_j} \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{\mathcal{E}^{\alpha_j,1}} = Cr^\beta t^{m+\alpha-\beta} \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{\mathcal{E}^{\alpha_j,1}}.$$

因此可推出

$$\int_{8r}^\infty |H_{t,1}(\vec{f})(x, z)| \frac{dt}{t^{m+1-\alpha}} \leq Cr^\beta \int_{8r}^\infty \frac{dt}{t^{1+\beta-2\alpha}} \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{\mathcal{E}^{\alpha_j,1}} \leq Cr^{2\alpha} \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{\mathcal{E}^{\alpha_j,1}}.$$

(2) 在 $x, z \in B$ 条件下, 来估计 $H_{t,2}(\vec{f})$, 可得

$$\begin{aligned} |H_{t,2}(\vec{f})(x, z)| & \leq C \int_{(B(x,10r) \setminus B(x,8r))^m} \frac{\prod_{i=1}^m |f_i(y_i) - (f_i)_B|}{\prod_{i=1}^m |z - y_i|^{n-1}} d\vec{y} \\ & \leq C \prod_{i=1}^m \frac{1}{r^{n-1}} \int_{B(x,10r)} |f_i(y_i) - (f_i)_B| dy_i \leq Cr^{m+\alpha} \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{\mathcal{E}^{\alpha_j,1}}, \end{aligned}$$

可推出

$$\int_{8r}^\infty |H_{t,2}(\vec{f})(x, z)| \frac{dt}{t^{m+1-\alpha}} \leq Cr^{2\alpha} \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{\mathcal{E}^{\alpha_j,1}}, \quad \alpha < m.$$

同理可得

$$\int_{8r}^{\infty} |H_{t,3}(\vec{f})(x, z)| \frac{dt}{t^{m+1-\alpha}} \leq Cr^{2\alpha} \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{\mathcal{E}^{\alpha_j, 1}}.$$

(3) 对于 $H_{t,4}(\vec{f})$, 注意到

$$\left| \bigcap_{j=1}^m \Theta_j(x, y_j) \right| \leq |\Theta_i(x, y_i)| = |\Gamma(x, y_i)| \leq \|z - y_i\| - \|x - y_i\| \leq \|z - x\| \leq 2r,$$

且对于任意 $t \in \bigcap_{j=1}^m \Theta_j(x, y_j)$, 有 $t > \frac{1}{m}(\sum_{j=1}^m |x - y_j|)$, 则可得

$$\begin{aligned} \int_{8r}^{\infty} |H_{t,4}(\vec{f})(x, z)| \frac{dt}{t^{m+1-\alpha}} &\leq C \int_{((B(x, 8r))^c)^m} \frac{\prod_{i=1}^m |f_i(y_i) - (f_i)_B|}{\prod_{i=1}^m |x - y_i|^{n-1}} \int_{\bigcap_{j=1}^m \Theta_j(x, y_j)} \frac{dt}{t^{m+1-\alpha}} d\vec{y} \\ &\leq C \int_{((B(x, 8r))^c)^m} \prod_{i=1}^m \frac{|f_i(y_i) - (f_i)_B|}{|x - y_i|^{n-1}} \frac{r}{(\sum_{j=1}^m |x - y_j|)^{m+1-\alpha}} d\vec{y} \\ &\leq C \prod_{i=1}^m \int_{(B(x, 8r))^c} \frac{r^{1/m} |f_i(y_i) - (f_i)_B|}{|x - y_i|^{n+1/m-\alpha_i}} dy_i. \end{aligned} \quad (5.7)$$

相同的估计对于 $H_{t,5}(\vec{f})(x, z)$ 依然成立. 因此, 如果 $\alpha_j < 1/m, j = 1, \dots, m$, 使用引理 2.5, 可得

$$\begin{aligned} &\int_{8r}^{\infty} |H_{t,4}(\vec{f})(x, z)| \frac{dt}{t^{m+1-\alpha}} + \int_{8r}^{\infty} |H_{t,5}(\vec{f})(x, z)| \frac{dt}{t^{m+1-\alpha}} \\ &\leq C \prod_{j=1}^m \int_{(B(x, 8r))^c} \frac{r^{1/m} |f_j(y_j) - (f_j)_B|}{|x - y_j|^{n+1/m-\alpha_j}} dy_j + C \prod_{j=1}^m \int_{(B(z, 8r))^c} \frac{r^{1/m} |f_j(y_j) - (f_j)_B|}{|z - y_j|^{n+1/m-\alpha_j}} dy_j \\ &\leq Cr^{2\alpha} \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{\mathcal{E}^{\alpha_j, 1}}. \end{aligned}$$

(4) 对于 $H_{t,6}(\vec{f})$, 有

$$|H_{t,6}^\ell(\vec{f})(x, z)| \leq \prod_{j=1}^{\ell} \int_{8r \leq |x - y_j| < t} \frac{|f_j(y_j) - (f_j)_B|}{|x - y_j|^{n-1}} dy_j \prod_{j=\ell+1}^m \int_{8r \leq |x - y_j| < 10r} \frac{|f_j(y_j) - (f_j)_B|}{|x - y_j|^{n-1}} dy_j.$$

(i) 在 $\alpha < 0$ 条件下, 通过引理 2.3, 有

$$|H_{t,6}^\ell(\vec{f})(x, z)| \leq c \prod_{j=1}^{\ell} (tr^{\alpha_j}) \prod_{j=1}^{\ell} \|f_j\|_{\mathcal{E}^{\alpha_j, 1}} \prod_{j=\ell+1}^m r^{1+\alpha_j} \prod_{j=\ell+1}^m \|f_j\|_{\mathcal{E}^{\alpha_j, 1}} = ct^{\ell} r^{m-\ell+\alpha} \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{\mathcal{E}^{\alpha_j, 1}}.$$

因此可推出

$$\int_{8r}^{\infty} |H_{t,6}^\ell(\vec{f})(x, z)| \frac{dt}{t^{m+1-\alpha}} \leq Cr^{m-\ell+\alpha} \int_{8r}^{\infty} \frac{dt}{t^{m-\ell+1-\alpha}} \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{\mathcal{E}^{\alpha_j, 1}} = Cr^{2\alpha} \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{\mathcal{E}^{\alpha_j, 1}}.$$

对于 $H_{t,7}^\ell(\vec{f})$ 相同的估计依然成立.

(ii) 在 $\alpha = 0$ 条件下, 对于充分小的 $\gamma > 0$, 引理 2.3 给出

$$|H_{t,6}^\ell(\vec{f})(x, z)| \leq c \left(t \log \frac{t}{r} \right)^{\ell} \prod_{j=1}^{\ell} \|f_j\|_{\text{BMO}} r^{m-\ell} \prod_{j=\ell+1}^m \|f_j\|_{\text{BMO}} \leq ct^{(1+\gamma)\ell} r^{m-(1+\gamma)\ell} \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{\text{BMO}},$$

因此,

$$\int_{8r}^{\infty} |H_{t,6}^{\ell}(\vec{f})(x,z)| \frac{dt}{t^{m+1}} \leq C r^{m-(1+\gamma)\ell} \int_{8r}^{\infty} \frac{dt}{t^{m-(1+\gamma)\ell+1}} \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{\text{BMO}} = C \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{\text{BMO}}.$$

(iii) 在 $\alpha > 0$ 条件下, 我们通过使用引理 2.3 有下式:

$$\begin{aligned} |H_{t,6}^{\ell}(\vec{f})(x,z)| &\leq c \prod_{j=1}^{\ell} t^{1+\alpha_j} \|f_j\|_{\mathcal{E}^{\alpha_j,1}} \prod_{j=\ell+1}^m r^{1+\alpha_j} \|f_j\|_{\mathcal{E}^{\alpha_j,1}} \\ &= c t^{\ell+\sum_{j=1}^{\ell} \alpha_j} r^{m-\ell+\sum_{j=\ell+1}^m \alpha_j} \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{\mathcal{E}^{\alpha_j,1}}. \end{aligned}$$

因此, 如果 $\alpha - \alpha_j < 1$, $j = 1, \dots, m$, 尤其是 $\alpha_j < 1/m$, $j = 1, \dots, m$, 则有

$$\begin{aligned} \int_{8r}^{\infty} |H_{t,6}^{\ell}(\vec{f})(x,z)| \frac{dt}{t^{m+1-\alpha}} &\leq C r^{m-\ell+\sum_{j=\ell+1}^m \alpha_j} \int_{8r}^{\infty} \frac{dt}{t^{m-(\ell+\sum_{j=1}^{\ell} \alpha_j)+1-\alpha}} \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{\mathcal{E}^{\alpha_j,1}} \\ &= C r^{2m\alpha} \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{\mathcal{E}^{\alpha_j,1}}. \end{aligned}$$

对于 $H_{t,7}^{\ell}(\vec{f})$ 相同的估计依然成立. 这样我们就完成了定理 5.1 的证明.

5.2 更一般情形的核

定义 5.2 (多线性一般核的 Marcinkiewicz 积分) 假设 Ω 是定义在 $(\mathbb{R}^n)^m$ 上的函数, 满足定义 5.1 中条件 (i)、(ii) 和 (iii). 对任意 $\vec{f} = (f_1, \dots, f_m) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \times \dots \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 和 $t > 0$, 令

$$\dot{F}_t(\vec{f})(x) = \frac{1}{t^m} \int_{(B(0,t))^m} \frac{\Omega(\vec{y})}{\prod_{i=1}^m |y_i|^{n-1}} \prod_{i=1}^m f_i(x - y_i) d\vec{y}, \quad (5.8)$$

其中 $|\vec{y}| = |y_1| + \dots + |y_m|$, $B(x, t) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| \leq t\}$. 多线性 Marcinkiewicz 积分 $\dot{\mu}$ 定义为

$$\dot{\mu}(\vec{f})(x) = \left(\int_0^{\infty} |\dot{F}_t(\vec{f})(x)|^2 \frac{dt}{t} \right)^{1/2}. \quad (5.9)$$

我们有如下猜想:

猜想 5.1 如果 Ω 满足 (5.1)–(5.3), 且对于某些 $1 < q_1, q_2, \dots, q_m < \infty$, $\dot{\mu}$ 是从 $L^{q_1}(\mathbb{R}^n) \times L^{q_2}(\mathbb{R}^n) \times \dots \times L^{q_m}(\mathbb{R}^n)$ 到 $L^q(\mathbb{R}^n)$ ($1/q = 1/q_1 + 1/q_2 + \dots + 1/q_m$) 有界的, 则对于任意 $1 < p_1, p_2, \dots, p_m < \infty$, $1/p = 1/p_1 + 1/p_2 + \dots + 1/p_m$, $\dot{\mu}$ 是从 $L^{p_1}(\mathbb{R}^n) \times L^{p_2}(\mathbb{R}^n) \times \dots \times L^{p_m}(\mathbb{R}^n)$ 到 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 有界的.

对于一些特殊情形, 我们可以给出上述猜想的肯定回答, 下面两个例子可说明这一点.

例 5.1 $\Omega(x) = \prod_{j=1}^m \Omega_j(x_j)$, 其中 Ω_j ($1 \leq j \leq m$) 均是 $\mathbb{R}^n$ 上 0 次齐次, 在 S^{n-1} 上为 Lipschitz 连续且 $\int_{S^{n-1}} \Omega_j(y_j) dy_j = 0$.

例 5.2 $\Omega(x) = \sin(\prod_{j=1}^m \Omega_j(x_j))$, 其中 Ω_j ($1 \leq j \leq m$) 均是奇的, 在 $\mathbb{R}^n$ 上 0 次齐次且在 S^{n-1} 上是 Lipschitz 连续的.

命题 5.1 设 $1 < p_1, p_2, \dots, p_m < \infty$, $1/p = 1/p_1 + 1/p_2 + \dots + 1/p_m$, 则相应于例 5.1 或 5.2 中核函数 Ω 的 Marcinkiewicz 积分 $\dot{\mu}$ 是从 $L^{p_1}(\mathbb{R}^n) \times L^{p_2}(\mathbb{R}^n) \times \dots \times L^{p_m}(\mathbb{R}^n)$ 到 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 有界的.

证明 我们仅给出例 5.2 核函数情形的证明. 对于 $|z| < \infty$, 有 $\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$. 从而,

$$\sin \left(\prod_{j=1}^m \Omega_j(x_j) \right) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\prod_{j=1}^m \Omega_j(x_j))^{2k+1}}{(2k+1)!}. \quad (5.10)$$

由于在每个紧集 K 上 $\sin z$ 收敛, Ω_j 在 S^{n-1} 上是 Lipschitz 连续的. 故对于每个确定的 $0 \leq t < \infty$, 上式在 $B(0, t) \times B(0, t) \times \cdots \times B(0, t)$ 上收敛. 因此, 对任意 $f_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ($j = 1, \dots, m$), 有

$$\begin{aligned} & \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \int_{(B(0,t))^m} \frac{(\prod_{j=1}^m \Omega_j(y_j))^{2k+1}}{\prod_{j=1}^m |y_j|^{n-1}} \prod_{j=1}^m f_j(x - y_j) d\vec{y} \\ &= \int_{(B(0,t))^m} \frac{\Omega(y_1, y_2, \dots, y_m)}{\prod_{j=1}^m |y_j|^{n-1}} \prod_{j=1}^m f_j(x - y_j) d\vec{y}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

再由 Fatou 引理, 可得到

$$\begin{aligned} \dot{\mu}(\vec{f})(x) &= \left(\int_0^\infty \left| \frac{1}{t^m} \int_{(B(0,t))^m} \frac{\Omega(y_1, y_2, \dots, y_m)}{\prod_{j=1}^m |y_j|^{n-1}} \prod_{j=1}^m f_j(x - y_j) d\vec{y} \right|^2 \frac{dt}{t} \right)^{1/2} \\ &= \left(\int_0^\infty \lim_{N \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{t^m} \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \int_{(B(0,t))^m} \frac{(\prod_{j=1}^m \Omega_j(y_j))^{2k+1}}{\prod_{j=1}^m |y_j|^{n-1}} \prod_{j=1}^m f_j(x - y_j) d\vec{y} \right|^2 \frac{dt}{t} \right)^{1/2} \\ &\leq \liminf_{N \rightarrow \infty} \left(\int_0^\infty \left| \frac{1}{t^m} \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \int_{(B(0,t))^m} \frac{(\prod_{j=1}^m \Omega_j(y_j))^{2k+1}}{\prod_{j=1}^m |y_j|^{n-1}} \prod_{j=1}^m f_j(x - y_j) d\vec{y} \right|^2 \frac{dt}{t} \right)^{1/2} \\ &\leq \liminf_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \left(\int_0^\infty \left| \frac{1}{t^m} \int_{(B(0,t))^m} \frac{(\prod_{j=1}^m \Omega_j(y_j))^{2k+1}}{\prod_{j=1}^m |y_j|^{n-1}} \prod_{j=1}^m f_j(x - y_j) d\vec{y} \right|^2 \frac{dt}{t} \right)^{1/2} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \left(\int_0^\infty \left| \prod_{j=1}^m \frac{1}{t} \int_{B(0,t)} \frac{(\Omega_j(y_j))^{2k+1}}{|y_j|^{n-1}} f_j(x - y_j) dy_j \right|^2 \frac{dt}{t} \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

注意到

$$\left| \frac{1}{t} \int_{B(0,t)} \frac{(\Omega_j(y_j))^{2k+1}}{|y_j|^{n-1}} f_j(x - y_j) dy_j \right| \leq C \|\Omega\|_\infty^{2k+1} M f_j(x),$$

则可知

$$\begin{aligned} & \left(\int_0^\infty \left| \prod_{j=1}^m \frac{1}{t} \int_{B(0,t)} \frac{(\Omega_j(y_j))^{2k+1}}{|y_j|^{n-1}} f_j(x - y_j) dy_j \right|^2 \frac{dt}{t} \right)^{1/2} \\ & \leq C \|\Omega\|_\infty^{2k+1} \prod_{j=2}^m M f_j(x) \left(\int_0^\infty \left| \frac{1}{t} \int_{B(0,t)} \frac{(\Omega_1(y_1))^{2k+1}}{|y_1|^{n-1}} f_1(x - y_1) dy_1 \right|^2 \frac{dt}{t} \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

另一方面, 易知

$$\|(\Omega_1(y_1))^{2k+1}\|_{\text{Lip}_\alpha(S^{n-1})} \leq C k \|\Omega_1\|_\infty^{2k+1} \|\Omega_1\|_{\text{Lip}_\alpha(S^{n-1})},$$

这意味着对任意 $1 < q < \infty$, 存在 $A > 0$ 和 $C_q > 0$ 使得

$$\left\| \left(\int_0^\infty \left| \frac{1}{t} \int_{B(0,t)} \frac{(\Omega_1(y_1))^{2k+1}}{|y_1|^{n-1}} f_1(x - y_1) dy_1 \right|^2 \frac{dt}{t} \right)^{1/2} \right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C_q k A^k \|f_1\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}. \quad (5.14)$$

设 $1 < p_1, p_2, \dots, p_m < \infty$, $1/p = 1/p_1 + 1/p_2 + \dots + 1/p_m$, 由 (5.12)–(5.14)、Hardy-Littlewood 极大函数的 L^p 有界性、Minkowski 不等式和 Young 不等式, 可得

$$\|\dot{\mu}(\vec{f})\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} k A^k \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{L^{p_j}(\mathbb{R}^n)}. \quad (5.15)$$

这样就证明了命题 5.1. □

致谢 作者衷心感谢审稿专家的修改建议.

参考文献

- 1 Stein E. On the functions of Littlewood-Paley, Lusin, and Marcinkiewicz. Trans Amer Math Soc, 1958, 88: 430–466
- 2 Stein E. Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions. Princeton Mathematical Series, No. 30. Princeton: Princeton University Press, 1970
- 3 王斯雷. 关于 g -函数的一些性质. 中国科学 A 辑, 1984, 14: 890–899
- 4 Kurtz D. Littlewood-Paley operators on BMO. Proc Amer Math Soc, 1987, 99: 657–666
- 5 Benedek A, Calderón A, Panzone R. Convolution operators on Banach value functions. Proc Nat Acad Sci, 1962, 48: 256–365
- 6 Hörmander L. Estimates for translation invariant operators in L^p spaces. Acta Math, 1960, 104: 93–140
- 7 Walsh T. On the function of Marcinkiewicz. Studia Math, 1972, 44: 203–217
- 8 Ding Y, Fan D, Pan Y. Weighted boundedness for a class of rough Marcinkiewicz integrals. Indiana Univ Math J, 1999, 48: 1037–1055
- 9 Ding Y, Fan D, Pan Y. L^p -Boundedness of Marcinkiewicz integrals with Hardy space function kernels. Acta Math Sin Engl Ser, 2000, 16: 593–600
- 10 Ding Y, Fan D, Pan Y. On the L^p boundedness of Marcinkiewicz integrals. Michigan Math J, 2002, 50: 17–26
- 11 Chen J, Fan D, Ying Y. Singular integral operators on function spaces. J Math Anal Appl, 2002, 276: 691–708
- 12 Al-Qassem H, Al-Salman A, Cheng L C, et al. L^p Bounds for the function of Marcinkiewicz. Math Res Lett, 2002, 9: 697–700
- 13 Ding Y, Lin C, Shao S. On Marcinkiewicz integral with variable kernels. Indiana Univ Math J, 2004, 53: 805–822
- 14 Zhang C, Chen J. Boundedness of g -functions on Triebel-Lizorkin spaces. Taiwanese J Math, 2009, 13: 973–981
- 15 Xue Q, Yabuta K, Yan J. Fractional type Marcinkiewicz integral operators on function spaces. Forum Math, 2015, 27: 3079–3109
- 16 Ding Y, Lu S, Xue Q. Marcinkiewicz integral on Hardy spaces. Integral Equations Operator Theory, 2002, 42: 174–182
- 17 Si Z, Wang L, Jiang Y. Fractional type Marcinkiewicz integral on Hardy spaces. J Math Res Exposition, 2011, 31: 233–241
- 18 Lu S. Marcinkiewicz integrals with rough kernels. Front Math China, 2008, 3: 1–14
- 19 韩永生. S -函数和 Marcinkiewicz 积分的一些性质. 北京大学学报 (自然科学版), 1987, 5: 21–34
- 20 王斯雷, 陈杰诚. 平方函数算子的几个注记. 数学年刊 (A 辑), 1990, 11: 630–638
- 21 Ding Y, Lu S, Xue Q. On Marcinkiewicz integral with homogeneous kernels. J Math Anal Appl, 2000, 245: 471–488
- 22 Yabuta K. Existence and boundedness of g_λ^* -function and Marcinkiewicz functions on Campanato spaces. Sci Math Jpn, 2003, 9: 59–78
- 23 Sun Y. On the existence and boundedness of square function operators on Campanato spaces. Nagoya Math J, 2004, 173: 139–151
- 24 Ding Y, Xue Q, Yabuta K. Existence and boundedness of parametrized Marcinkiewicz integral with rough kernel on Campanato spaces. Nagoya Math J, 2006, 181: 103–148
- 25 Coifman R, Meyer Y. On commutators of singular integrals and bilinear singular integrals. Trans Amer Math Soc, 1975, 212: 315–331
- 26 Coifman R, Meyer Y. Commutateurs d'intégrales singulières et opérateurs multilinéaires. Ann Inst Fourier (Grenoble), 1978, 28: 177–202
- 27 Christ M, Journé J. Polynomial growth estimates for multilinear singular integral operators. Acta Math, 1987, 159: 51–80
- 28 Kenig C, Stein E. Multilinear estimates and fractional integration. Math Res Lett, 1999, 6: 1–15
- 29 Grafakos L, Torres R. Multilinear Calderón-Zygmund theory. Adv Math, 2002, 165: 124–164

- 30 Grafakos L, Torres R. Maximal operator and weighted norm inequalities for multilinear singular integrals. *Indiana Univ Math J*, 2002, 51: 1261–1276
- 31 Lerner A K, Ombrosi S, Pérez C, et al. New maximal functions and multiple weights for the multilinear Calderón-Zygmund theory. *Adv Math*, 2009, 220: 1222–1264
- 32 Coifman R, Meyer Y. Au-delà des opérateurs pseudo-différentiels. *Asterisque*, 1978, 57: 1–185
- 33 Yabuta K. A multilinearization of Littlewood-Paley's g -function and Carleson measures. *Tohoku Math J (2)*, 1982, 34: 251–275
- 34 Sato S, Yabuta K. Multilinearized Littlewood-Paley operators. *Sci Math Jpn*, 2002, 55: 447–453
- 35 Chen X, Xue Q, Yabuta K. On multilinear Littlewood-Paley operators. *Nonlinear Anal*, 2015, 115: 25–40

The existence and boundedness of multilinear Marcinkiewicz integrals on Campanato spaces

Yong Ding, Senhua Lan, Qingying Xue & Kôzô Yabuta

Abstract Let $n \geq 2$ and $m \geq 1$. Let $\mu(\vec{f})$ be the m -linear Marcinkiewicz integral defined by

$$\mu(\vec{f})(x) = \left(\int_0^\infty \left| \frac{1}{t^m} \int_{(B(0,t))^m} \frac{\Omega(\vec{y})}{|\vec{y}|^{m(n-1)}} \prod_{i=1}^m f_i(x - y_i) d\vec{y} \right|^2 \frac{dt}{t} \right)^{1/2}.$$

In this paper, the existence and boundedness of $\mu(\vec{f})$ on Campanato spaces are investigated. We show that if the m -linear Marcinkiewicz integral $\mu(\vec{f})$ is finite for one point, then it is finite almost everywhere. Moreover, the following norm inequality holds,

$$\|\mu(\vec{f})\|_{\mathcal{E}^{\alpha,p}} \leq C \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{\mathcal{E}^{\alpha_j,p_j}}, \quad \text{for } \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_m} \quad \text{and} \quad \alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_m,$$

where $\mathcal{E}^{\alpha,p}$ is the classical Campanato space.

Keywords multilinear Marcinkiewicz integral, Campanato space, BMO spaces

MSC(2010) 42B25, 47G10

doi: 10.1360/N012018-00108