Prandtl 方程的整体适定性和有限时间爆破

献给王斯雷教授 85 华诞

任偲骐, 章志飞*

北京大学数学科学学院, 北京 100871

E-mail: sirrenmath@pku.edu.cn, zfzhang@math.pku.edu.cn

收稿日期: 2017-08-02; 接受日期: 2018-02-24; 网络出版日期: 2018-09-30; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11425103) 资助项目

摘要 本文在解析框架下研究了两类 Prandtl 型方程的长时间适定性和爆破. 对于经典 Prandtl 方程, 本文证明了 Paicu 和 Zhang (2011) 得到的解的存在时间长度是最优的. 对于从磁流体边界层模型导出的阻尼 Prandtl 方程, 本文证明了解析初值的整体适定性和对一类大解析初值的有限时间爆破.

关键词 Prandtl 方程 适定性 爆破

MSC (2010) 主题分类 35Q30, 76D05

1 引言

本文研究 Prandtl 方程

$$\begin{cases} \partial_t u + u \partial_x u + v \partial_y u - \partial_y^2 u + \partial_x P = 0, & (t, x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \\ \partial_x u + \partial_y v = 0, & (t, x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \\ u(t, x, 0) = v(t, x, 0) = 0, & \lim_{y \rightarrow +\infty} u(t, x, y) = U(t, x), \end{cases} \quad (1.1)$$

其中 (u, v) 代表流体的速度, (U, P) 满足下面的 Bernoulli 律:

$$\partial_t U + U \partial_x U + \partial_x P = 0.$$

该方程由 Prandtl 在 1904 年引入, 用于描述 Navier-Stokes 方程当黏性系数非常小的时候解在边界附近 (边界层) 的性态.

Prandtl 方程是边界层理论中的一个基本方程. 许多数学家都对该方程做过深入的研究, 并取得了一些重要的进展. 对单调的初值, Oleinik 和 Samokhin^[1] 证明了光滑解的局部存在性和唯一性. 在

英文引用格式: Ren S Q, Zhang Z F. Global well-posedness and finite time blowup of the Prandtl equation (in Chinese). Sci Sin Math, 2018, 48: 1415–1426, doi: 10.1360/N012017-00180

$\partial_x P \leq 0$ (顺压) 的情形, Xin 和 Zhang^[2] 进一步证明了弱解的整体存在性. 从某种意义上说明在这种情形不会产生边界层分离. 最近, Alexandre 等^[3] 及 Masmoudi 和 Wong^[4] 用能量方法给出了单调初值 Prandtl 方程局部适定性的新证明.

对于非单调初值, Sammartino 和 Caflisch^[5] 证明了解析初值情形的局部适定性. 后来, Lombardo 等^[6] 将初值两个方向解析条件放宽到切向 (即 x 方向) 解析条件. 事实上, 对非单调的初值, Gérard-Varet 和 Dormy^[7] 证明了 Prandtl 方程在 Sobolev 空间是不适定的, 也可参见文献 [8, 9]. 在 Gérard-Varet 和 Dormy 的工作中, 他们构造了一类有 $e^{t|\xi|^{\frac{1}{2}}}$ 增长的解. 自然的问题是 Prandtl 方程在 Gevrey 类 2 中是否适定. 一个函数 $f(x)$ 称为在 Gevrey 类 S 中, 若它的 Fourier 变换满足

$$|\hat{f}(\xi)| \leq Ce^{-|\xi|^{\frac{1}{S}}}.$$

当 $S = 1$ 时即为解析类. Gérard-Varet 和 Masmoudi^[10] 证明了对一类具有非退化临界点的初值 Prandtl 方程在 Gevrey 类 $\frac{7}{4}$ 中的适定性. 最近, Chen 等^[11] 以及 Li 和 Yang^[12] 分别独立地证明了 Prandtl 方程在 Gevrey 类 2 中的局部适定性.

到目前为止, Prandtl 方程局部适定性的理论相对是比较完备的. 自然的问题是:

(i) 对于 $\partial_x P > 0$ 和初值单调的情形, 光滑解是否会产生有限时间爆破?

(ii) 对于解析初值, 解析解是否会产生有限时间爆破?

第一个问题到目前为止仍是公开的. 对于第二个问题, E 和 Enquist^[13] 证明了对一类非单调解析初值的有限时间爆破.

为方便起见, 不考虑外流的影响, 即取 $(U, P) = 0$. 最近, Paicu 和 Zhang^[14] 证明了 Prandtl 方程小解析初值的长时间适定性: 若初值 u_0 满足

$$\|e^{\frac{1+v^2}{8}} e^{|D|} u_0\|_{B^{\frac{1}{2},0}} \leq \varepsilon,$$

则解的存在时间至少是 $\varepsilon^{-\frac{4}{3}}$, 其中 $B^{\frac{1}{2},0}$ 为各项异性的 Besov 空间. 文献 [14] 提出疑问, 解的存在时间长度是不是最优的? Ignatova 和 Vicol^[15] 似乎得到了更大尺度的存在时间: $\exp \frac{\varepsilon^{-1}}{\ln \varepsilon^{-1}}$, 但是, 他们考虑的解析初值的解析带宽与 ε 有关, 而文献 [16] 中初值的解析带宽是固定的, 从而并没有回答文献 [14] 中提出的问题. 本文第一个结果将证明该文献得到的存在时间尺度是最优的. 这就说明即便是小解析初值也不能阻止 Prandtl 方程在有限时间爆破.

考虑带阻尼的 Prandtl 方程

$$\begin{cases} \partial_t u + u \partial_x u + v \partial_y u - \partial_y^2 u + ku = 0, \\ \partial_x u + \partial_y v = 0, \\ u(t, x, 0) = v(t, x, 0) = 0, \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} u(t, x, y) = 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

该方程可以从磁流体 (magnetohydrodynamics, MHD) 的边界层中导出 (见附录 A), 其中 ku 称为磁阻尼项. 我们的问题是, 阻尼项能否阻止解在有限时间爆破? 本文的第二个结果将证明: 对于小解析初值, 阻尼 Prandtl 方程是整体适定; 而对于大解析初值, 解仍会产生有限时间爆破.

2 主要结果

首先引入一些记号. 因为我们将在解析类求解 Prandtl 方程, 即要证明解 Fourier 变换后有指数衰

减. 为此引进记号

$$u_{\Phi^\delta}(t, x, y) := \mathcal{F}_{\xi \rightarrow x}(e^{\Phi^\delta(t, \xi)} \hat{u}(t, \xi, y)).$$

相位函数 Φ^δ 用来描述解的解析宽度随时间的变化, 定义为

$$\Phi^\delta(t, \xi) := (1 - \lambda \theta^\delta(t))(1 + |\xi|^2)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.1)$$

其中 $\lambda > 0$ 为待定常数, 而 $\theta^\delta(t)$ 由下面的常微分方程确定:

$$\dot{\theta}^\delta(t) = \delta^{-\frac{1}{2}} \langle \delta^2 t \rangle^{\frac{1}{4}} \|e^{\Psi^\delta} \partial_y u_{\Phi^\delta}(t)\|_{H^{1,0}}, \quad \theta^\delta|_{t=0} = 0, \quad (2.2)$$

其中 $\delta > 0$ 为常数, $H^{k,\ell}$ 为各项异性 Sobolev 空间, 其范数定义为

$$\|u\|_{H^{k,\ell}} = \sum_{n=0}^{\ell} \|\partial_y^n u\|_{L_y^2(\mathbb{R}^+; H_x^k)}.$$

权函数 $\Psi^\delta(t, y)$ 用来描述解关于 y 方向的衰减随时间的变化, 定义为

$$\Psi^\delta(t, y) := \frac{1 + (\delta y)^2}{8 \langle \delta^2 t \rangle}.$$

易证它满足

$$\partial_t \Psi^\delta(t, y) + 2(\partial_y \Psi^\delta(t, y))^2 \leq 0. \quad (2.3)$$

特别地, 当 $\delta = 1$ 时, 所有以上的记号, 我们都省略上标 δ .

本文第一个结果是最优的长时间适定性定理.

定理 1 考虑无阻尼 Prandtl 方程 (1.2), 即 $k = 0$. 令 $\delta = c_0 \varepsilon^{\frac{2}{3}}$, $\varepsilon > 0$ 充分小, c_0 是与 ε 无关的小常数. 假设初值 u_0 满足

$$\|e^{\frac{1+(\delta y)^2}{8}} e^{\langle D \rangle} u_0\|_{H^{1,0}} \leq \varepsilon, \quad (2.4)$$

则方程 (1.2) 在 $[0, T_\varepsilon]$ ($T_\varepsilon \sim \varepsilon^{-\frac{4}{3}}$) 的时间内存在唯一解 u 满足

$$e^{\Psi^\delta} u_{\Phi^\delta}(t, \cdot) \in L^\infty(0, T_\varepsilon; H^{1,0}) \cap L^2(0, T_\varepsilon; H^{1,1}).$$

进一步, 存在初值满足 (2.4), 但解会在有限时间发生爆破且爆破时间 $T^* \sim \varepsilon^{-\frac{4}{3}}$.

本文第二个结果是带阻尼 Prandtl 方程 (1.2) (不妨取 $k = 1$) 小解析初值的整体适定性和大解析初值的有限时间爆破.

定理 2 存在 $\varepsilon > 0$, 若 u_0 满足

$$\|e^{\frac{1+y^2}{8}} e^{\langle D \rangle} u_0\|_{H^{1,0}} \leq \varepsilon, \quad (2.5)$$

则方程 (1.2) 存在唯一整体解 u 满足

$$\|e^{\Psi} u_{\Phi}(t)\|_{H^{1,0}}^2 \leq e^{-t} \|e^{\frac{1+y^2}{8}} e^{\langle D \rangle} u_0\|_{H^{1,0}}^2.$$

进一步, 存在不满足条件 (2.5) 的解析初值使得方程 (1.2) 的解在有限时间爆破.

3 长时间适定性和整体适定性

本节分别证明定理 1 和 2 中解的长时间适定性和整体适定性. 证明方法与文献 [16] 中的证明基本类似, 差别是这里只用 Sobolev 空间, 避免文献 [16] 中在 Besov 空间的复杂计算, 也可参见文献 [14]. 最本质的差别是, 相位函数和权函数中引入新的参数 δ , 这对说明我们得到的存在时间长度的最优性是非常关键的.

解的存在性和唯一性与文献 [16] 完全类似, 因为阻尼项只是一个低阶线性项, 不带来任何技术困难. 因此, 下面仅给出解一致的先验估计. 在下面的运算中, 总假设 $\Phi^\delta(t, \xi) \geq 0$.

首先推导 u_{Φ^δ} 的方程. 由 (1.2) 和 (2.1) 可得

$$\begin{cases} \partial_t u_{\Phi^\delta} + \lambda \dot{\theta}^\delta(t) \langle D \rangle u_{\Phi^\delta} + (u \partial_x u)_{\Phi^\delta} + (v \partial_y u)_{\Phi^\delta} - \partial_y^2 u_{\Phi^\delta} + k u_{\Phi^\delta} = 0, \\ v_{\Phi^\delta}(t, x, y) = - \int_0^y \partial_x u_{\Phi^\delta}(t, x, z) dz. \end{cases}$$

方程两边与 $e^{2\Psi^\delta} u_{\Phi^\delta}$ 做 $H^{1,0}$ 内积得到

$$\begin{aligned} & (e^{\Psi^\delta} \partial_t u_{\Phi^\delta}, e^{\Psi^\delta} u_{\Phi^\delta})_{H^{1,0}} + \lambda \dot{\theta}^\delta(t) (e^{\Psi^\delta} \langle D \rangle u_{\Phi^\delta}, e^{\Psi^\delta} u_{\Phi^\delta})_{H^{1,0}} \\ & - (e^{\Psi^\delta} \partial_y^2 u_{\Phi^\delta}, e^{\Psi^\delta} u_{\Phi^\delta})_{H^{1,0}} + k (e^{\Psi^\delta} u_{\Phi^\delta}, e^{\Psi^\delta} u_{\Phi^\delta})_{H^{1,0}} \\ & = - (e^{\Psi^\delta} (u \partial_x u)_{\Phi^\delta}, e^{\Psi^\delta} u_{\Phi^\delta})_{H^{1,0}} - (e^{\Psi^\delta} (v \partial_y u)_{\Phi^\delta}, e^{\Psi^\delta} u_{\Phi^\delta})_{H^{1,0}}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

下面估计 (3.1) 的每一项. 对于左边的项, 有

$$\begin{aligned} (e^{\Psi^\delta} \partial_t u_{\Phi^\delta}, e^{\Psi^\delta} u_{\Phi^\delta})_{H^{1,0}} &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|e^{\Psi^\delta} u_{\Phi^\delta}\|_{H^{1,0}}^2 - \int_0^\infty \partial_t \Psi^\delta \|e^{\Psi^\delta} u_{\Phi^\delta}\|_{H_x^1}^2 dy, \\ \lambda \dot{\theta}^\delta(t) (e^{\Psi^\delta} \langle D \rangle u_{\Phi^\delta}, e^{\Psi^\delta} u_{\Phi^\delta})_{H^{1,0}} &\gtrsim \lambda \dot{\theta}^\delta(t) \|e^{\Psi^\delta} u_{\Phi^\delta}\|_{H_x^{\frac{3}{2},0}}^2, \\ - (e^{\Psi^\delta} \partial_y^2 u_{\Phi^\delta}, e^{\Psi^\delta} u_{\Phi^\delta})_{H^{1,0}} &\geq \frac{1}{2} \|e^{\Psi^\delta} \partial_y u_{\Phi^\delta}\|_{H^{1,0}}^2 - \int_0^\infty 2(\partial_y \Psi^\delta)^2 \|e^{\Psi^\delta} u_{\Phi^\delta}\|_{H_x^1}^2 dy, \\ k (e^{\Psi^\delta} u_{\Phi^\delta}, e^{\Psi^\delta} u_{\Phi^\delta})_{H^{1,0}} &= k \|e^{\Psi^\delta} u_{\Phi^\delta}\|_{H^{1,0}}^2. \end{aligned}$$

对于右边的项, 我们要用到以下乘积估计 (参见文献 [14]):

$$\|(fg)_{\Phi^\delta}\|_{H_x^s} \lesssim \|f_{\Phi^\delta}\|_{H_x^1} \|g_{\Phi^\delta}\|_{H_x^s}, \quad 0 \leq s \leq 1. \quad (3.2)$$

利用 (3.2) 得到

$$\begin{aligned} |(e^{\Psi^\delta} (u \partial_x u)_{\Phi^\delta}, e^{\Psi^\delta} u_{\Phi^\delta})_{H^{1,0}}| &\lesssim |(e^{\Psi^\delta} \langle D \rangle^{\frac{1}{2}} (u \partial_x u)_{\Phi^\delta}, e^{\Psi^\delta} \langle D \rangle^{\frac{3}{2}} u_{\Phi^\delta})_{L_{x,y}^2}| \\ &\lesssim \int_0^\infty e^{2\Psi^\delta} \|(u \partial_x u)_{\Phi^\delta}\|_{H_x^{\frac{1}{2}}} \|u_{\Phi^\delta}\|_{H_x^{\frac{3}{2}}} dy \\ &\lesssim \int_0^\infty e^{2\Psi^\delta} \|u_{\Phi^\delta}\|_{H_x^1} \|\partial_x u_{\Phi^\delta}\|_{H_x^{\frac{1}{2}}} \|u_{\Phi^\delta}\|_{H_x^{\frac{3}{2}}} dy \\ &\lesssim \|u_{\Phi^\delta}\|_{L_y^\infty(H_x^1)} \|e^{\Psi^\delta} u_{\Phi^\delta}\|_{H_x^{\frac{3}{2},0}}^2. \end{aligned}$$

由于 $u_{\Phi^\delta}(t, x, y) = \int_0^y (\partial_z u_{\Phi^\delta})(t, x, z) dz$, 因此,

$$\|u_{\Phi^\delta}\|_{L_y^\infty(H_x^1)} \lesssim \left\| \int_0^y e^{-\Psi^\delta} \|e^{\Psi^\delta} \partial_z u_{\Phi^\delta}\|_{H_x^1} dz \right\|_{L_y^\infty}$$

$$\lesssim \|e^{-\Psi^\delta}\|_{L_y^2} \|e^{\Psi^\delta} \partial_y u_{\Phi^\delta}\|_{H^{1,0}}.$$

直接计算可得

$$\|e^{-\Psi^\delta}\|_{L_y^2} \lesssim \delta^{-\frac{1}{2}} \langle \delta^2 t \rangle^{\frac{1}{4}}.$$

综上估计, 我们得到

$$\begin{aligned} |(e^{\Psi^\delta} (u \partial_x u)_{\Phi^\delta}, e^{\Psi^\delta} u_{\Phi^\delta})_{H^{1,0}}| &\lesssim \delta^{-\frac{1}{2}} \langle \delta^2 t \rangle^{\frac{1}{4}} \|e^{\Psi^\delta} \partial_y u_{\Phi^\delta}\|_{H^{1,0}} \|e^{\Psi^\delta} u_{\Phi^\delta}\|_{H^{\frac{3}{2},0}}^2 \\ &\lesssim \dot{\theta}^\delta(t) \|e^{\Psi^\delta} u_{\Phi^\delta}\|_{H^{\frac{3}{2},0}}^2. \end{aligned}$$

类似地,

$$\begin{aligned} |(e^{\Psi^\delta} (v \partial_y u)_{\Phi^\delta}, e^{\Psi^\delta} u_{\Phi^\delta})_{H^{1,0}}| &\lesssim |(e^{\Psi^\delta} \langle D \rangle^{\frac{1}{2}} (v \partial_y u)_{\Phi^\delta}, e^{\Psi^\delta} \langle D \rangle^{\frac{3}{2}} u_{\Phi^\delta})_{L_{x,y}^2}| \\ &\lesssim \int_0^\infty e^{2\Psi^\delta} \|(v \partial_y u)_{\Phi^\delta}\|_{H^{\frac{1}{2}}} \|u_{\Phi^\delta}\|_{H^{\frac{3}{2}}} dy \\ &\lesssim \int_0^\infty e^{2\Psi^\delta} \|v_{\Phi^\delta}\|_{H^{\frac{1}{2}}} \|\partial_y u_{\Phi^\delta}\|_{H^1} \|u_{\Phi^\delta}\|_{H^{\frac{3}{2}}} dy \\ &\lesssim \|v_{\Phi^\delta}\|_{L_y^\infty(H_x^{\frac{1}{2}})} \|e^{\Psi^\delta} \partial_y u_{\Phi^\delta}\|_{H^{1,0}} \|e^{\Psi^\delta} u_{\Phi^\delta}\|_{H^{\frac{3}{2},0}}. \end{aligned}$$

由于 $v_{\Phi^\delta}(t, x, y) = -\int_0^y (\partial_x u_{\Phi^\delta})(t, x, z) dz$, 因此,

$$\begin{aligned} \|v_{\Phi^\delta}\|_{L_y^\infty(H_x^{\frac{1}{2}})} &= \left\| \int_0^y \partial_x u_{\Phi^\delta} \right\|_{L_y^\infty(H_x^{\frac{1}{2}})} \\ &\lesssim \left\| \int_0^y e^{-\Psi^\delta} e^{\Psi^\delta} \|u_{\Phi^\delta}\|_{H_x^{\frac{3}{2}}} dy \right\|_{L_y^\infty} \\ &\lesssim \|e^{-\Psi^\delta}\|_{L_y^2} \|e^{\Psi^\delta} u_{\Phi^\delta}\|_{H^{\frac{3}{2},0}}. \end{aligned}$$

综上得到

$$\begin{aligned} |(e^{\Psi^\delta} (v \partial_y u)_{\Phi^\delta}, e^{\Psi^\delta} u_{\Phi^\delta})_{H^{1,0}}| &\lesssim \delta^{-\frac{1}{2}} \langle \delta^2 t \rangle^{\frac{1}{4}} \|e^{\Psi^\delta} \partial_y u_{\Phi^\delta}\|_{H^{1,0}} \|e^{\Psi^\delta} u_{\Phi^\delta}\|_{H^{\frac{3}{2},0}}^2 \\ &\lesssim \dot{\theta}^\delta(t) \|e^{\Psi^\delta} u_{\Phi^\delta}\|_{H^{\frac{3}{2},0}}^2. \end{aligned}$$

综合上面左右两边的估计, 利用权函数的性质 (2.3), 并且取 λ 足够大, 最后得到

$$\frac{d}{dt} \|e^{\Psi^\delta} u_{\Phi^\delta}\|_{H^{1,0}}^2 + 2k \|e^{\Psi^\delta} u_{\Phi^\delta}\|_{H^{1,0}}^2 + \|e^{\Psi^\delta} \partial_y u_{\Phi^\delta}\|_{H^{1,0}}^2 + 2\lambda \dot{\theta}^\delta(t) \|e^{\Psi^\delta} u_{\Phi^\delta}\|_{H^{\frac{3}{2},0}}^2 \leq 0. \quad (3.3)$$

上面的一致估计是建立在假设相位函数 $\Phi^\delta(t, \xi) := (1 - \lambda \theta^\delta(t)) \langle \xi \rangle$ 非负的前提下, 为此, 我们要求

$$\theta^\delta(t) \leq \frac{1}{2\lambda}. \quad (3.4)$$

下面分两种情形讨论:

情形 1 $k = 0$ 的情形.

对不等式 (3.3) 两边关于时间积分, 利用小初值条件 (2.4), 得到

$$\|e^{\Psi^\delta} u_{\Phi^\delta}(t)\|_{H^{1,0}}^2 + \int_0^t \|e^{\Psi^\delta} \partial_y u_{\Phi^\delta}\|_{H^{1,0}}^2(s) ds \leq \|e^{\frac{1+(\delta y)^2}{8}} e^{\langle D \rangle} u_0\|_{H^{1,0}}^2 \leq \varepsilon. \quad (3.5)$$

另一方面, 对 $\theta^\delta(t)$ 有如下估计:

$$\begin{aligned}\theta^\delta(t) &= \int_0^t \delta^{-\frac{1}{2}} \langle \delta^2 s \rangle^{\frac{1}{4}} \|e^{\Psi^\delta} \partial_y u_{\Phi^\delta}\|_{H^{1,0}}(s) ds \\ &\leq \left(\int_0^t \delta^{-1} \langle \delta^2 s \rangle^{\frac{1}{2}} ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \|e^{\Psi^\delta} \partial_y u_{\Phi^\delta}\|_{H^{1,0}}^2(s) ds \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sqrt{\frac{2}{3}} (\delta^{-2} + t)^{\frac{3}{4}} \varepsilon.\end{aligned}$$

由此可知, 保证 (3.4) 的一个充分条件是

$$0 \leq t \leq \left(\frac{3}{8}\right)^{\frac{2}{3}} \lambda^{-\frac{4}{3}} \varepsilon^{-\frac{4}{3}} - \delta^{-2}.$$

注意到 $\lambda > 0$ 已固定, 我们只需取 $\delta = \frac{2^{\frac{1}{2}} 3^{\frac{1}{3}}}{4} \lambda^{\frac{2}{3}} \varepsilon^{\frac{2}{3}} = c_0 \varepsilon^{\frac{2}{3}}$, 即可得到在时间段 $0 \leq t \leq \frac{3^{\frac{2}{3}}}{8} \lambda^{-\frac{4}{3}} \varepsilon^{-\frac{4}{3}} = c_1 \varepsilon^{-\frac{4}{3}} := T_\varepsilon$ 内, (1.2) 存在解且满足一致估计 (3.5).

情形 2 $k = 1$ 的情形.

不妨取 $\delta = 1$. 再次对 (3.3) 两边关于时间积分, 利用小初值条件 (2.4), 得到

$$\|e^\Psi u_\Phi(t)\|_{H^{1,0}}^2 + \int_0^t e^{(s-t)} \|e^\Psi \partial_y u_\Phi(s)\|_{H^{1,0}}^2 ds \leq e^{-t} \|e^{\frac{1+y^2}{8}} e^{\langle D \rangle} u_0\|_{H^{1,0}}^2 \leq \varepsilon e^{-t}.$$

另一方面, 对 θ 有如下估计:

$$\begin{aligned}\theta(t) &\leq \int_0^t \langle s \rangle^{\frac{1}{4}} \|e^\Psi \partial_y u_\Phi(s)\|_{H^{1,0}} ds \\ &\leq \left(\int_0^t \langle s \rangle^{\frac{1}{4}} e^{-s} ds \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_0^t e^s \|e^\Psi u_\Phi(s)\|_{H^{1,0}}^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C\varepsilon.\end{aligned}$$

因此, 只要取 ε 足够小使得 $C\varepsilon \leq \frac{1}{2\lambda}$, 就可保证对任意 $t \in \mathbb{R}^+$, $\theta(t) \leq \frac{1}{2\lambda}$ 都成立. 故 (1.2) 的解是整体适定的.

4 无阻尼 Prandtl 方程的小解析初值爆破

本节的目标是证明在定理 1 中得到的解的存在时间长度是最优的. 为此, 只需找一类解析初值满足定理 1 中的条件 (2.4), 但解会产生有限时间爆破. 证明主要利用文献 [13] 中的想法.

引进 $a(t, y) = -\partial_x u(t, 0, y)$, 它满足方程

$$\begin{cases} \partial_t a = \partial_y^2 a + a^2 - \partial_y^{-1} a \partial_y a, \\ a(t, 0) = 0, \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} a(t, y) = 0, \end{cases}$$

其中 $\partial_y^{-1} a(t, y) := \int_0^y a(t, z) dz$.

引进下面的泛函:

$$F(t) := \|a(t, \cdot)\|_{L_y^2}^2,$$

$$E(t) := \int_0^{+\infty} \left[\frac{1}{2} (\partial_y a)^2 - \frac{1}{4} a^3 \right] (t, y) dy,$$

$$G(t) := \frac{-E}{F^\beta}, \quad \beta \in \left(1, \frac{4}{3}\right).$$

可以验证它们满足如下关系 (参见文献 [13]):

$$\frac{dF(t)}{dt} = -4E + 2\|a(t, \cdot)\|_{L_y^3}^2,$$

$$\frac{dE(t)}{dt} = - \int_0^{+\infty} \left(\partial_y^2 a + \frac{3}{4} a^2 \right)^2 dy - \int_0^{+\infty} \frac{7}{16} a^4 dy \leq 0.$$

因此, 若选择初值 $0 \leq a_0 := a(0, \cdot) \in C_c^{+\infty}(\mathbb{R}^+)$, 使得 $E(a_0) < 0$, 则在解的存在时间内就一直有 $E(a)(t) < 0$. 取 $\beta \in (1, \frac{5}{4})$, 可以得到

$$\begin{aligned} \frac{dG(t)}{dt} &= \left(-F \frac{dE}{dt} + \beta E \frac{dF}{dt} \right) F^{-\beta-1} \\ &\geq -EF^{-\beta-1} \left(\left(\frac{3}{2} - \beta \right) \frac{dF}{dt} - \frac{1}{2} \|a(t, \cdot)\|_{L_y^3}^3 \right) \\ &\geq -EF^{-\beta-1} \left(\frac{5}{2} - 2\beta \right) \|a(t, \cdot)\|_{L_y^3}^3 \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

由此可以得到 $F(t)$ 在有限时间爆破, 这是因为

$$\frac{dF}{dt} \geq -4E \geq 4G(a_0)F^\beta, \quad \beta \in \left(1, \frac{5}{4}\right).$$

进一步可得

$$F(t) \geq \left(\frac{F_0^\beta}{F_0 - 4(\beta - 1)E_0 t} \right)^{\frac{1}{\beta-1}}.$$

由此得到解的爆破时间

$$T^* = \frac{F_0}{6(\beta - 1)E_0}. \quad (4.1)$$

现在取初值形如 $u_0(x, y) = a(y) \sin x$, 其中 $a(y) = \varepsilon^{\frac{4}{3}} \chi(\varepsilon^{\frac{2}{3}} y)$ ($\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^+)$) 且满足

$$\int_0^\infty (\chi(y)^3 - 2\chi(y)^2) dy > 0.$$

对于这样的初值, 利用 (4.1) 直接计算得到 $T^* \sim \varepsilon^{-\frac{4}{3}}$. 另一方面, 可以验证

$$\|e^{\frac{1+(\delta y)^2}{8}} e^{\langle D \rangle} u_0\|_{H^{1,0}} \lesssim \varepsilon.$$

定理 1 的适定性部分告诉我们, 从这个初值出发, 解的存在时间长度至少为 $\sim \varepsilon^{-\frac{4}{3}}$. 因此, 存在时间的长度 $\varepsilon^{-\frac{4}{3}}$ 是最优的.

5 阻尼 Prandtl 方程的大解析初值爆破

本节将证明阻尼 Prandtl 方程存在解析初值的解有限时间爆破. 证明过程利用文献 [17] 的想法. 我们给一类 x 方向解析的初值 $u_0(x, y) = A\varphi(y) \sin x$, 其中 $e^{\frac{y^2}{8}}\varphi(y) \in L^2(\mathbb{R}^+) \cap L^\infty(\mathbb{R}^+)$, $A > 0$. 再次引进 $a(t, y) = -\partial_x u(t, 0, y)$, 满足方程

$$\begin{cases} \partial_t a = \partial_y^2 a + a^2 - \partial_y^{-1} a \partial_y a, \\ a(t, 0) = 0, \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} a(t, y) = 0. \end{cases}$$

由于阻尼 Prandtl 方程是局部适定的, 因此, 此方程具有局部适定性且 $a(t, y)$ 非负光滑.

定义 $a(t, y)$ 的加权平均

$$\mathcal{M}(t) := \int_0^\infty a(t, y)w(y)dy, \quad (5.1)$$

其中 $w(\cdot)$ 是一个将要构造的一元权函数, 满足

$$0 \leq w \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^+) \cap L^1(\mathbb{R}^+), \quad w_{y=0} = w_{y \rightarrow +\infty} = w'_{y \rightarrow +\infty} = 0. \quad (5.2)$$

对 $\mathcal{M}(t)$ 求导, 结合性质 (5.2), 分部积分两次后可得

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{M}}{dt} &= \int_0^\infty (\partial_y^2 a + a^2 - (\partial_y^{-1} a) \partial_y a - a) w dy \\ &= \int_0^\infty a w'' dy + 2 \int_0^\infty a^2 w dy - \frac{1}{2} \int_0^\infty (\partial_y^{-1} a)^2 w'' dy - \int_0^\infty a w dy \\ &\stackrel{\text{def}}{=} I_1 + 2I_2 - \frac{1}{2}I_3 - I_4. \end{aligned} \quad (5.3)$$

下面的目标是, 如何给出 w 的其余性质以保证

$$\frac{d\mathcal{M}}{dt} \geq C_w^{-1} \mathcal{M}^2 - C_w \mathcal{M}, \quad (5.4)$$

进而 $\mathcal{M}(t)$ 在有限时间爆破.

这个加权平均首先在文献 [17] 中引入, 用于证明某类特殊外流的经典 Prandtl 方程的奇性, 文中给出的 w 条件, 对于我们足够了. 原因是, 在文献 [17] 中, 同样的量 $a(t, y) = \partial_x u(t, 0, y)$ (但是 a 满足的方程不一样)、同样的泛函 $\mathcal{M}(t)$ 和同样的爆破机制. 而我们的 (5.3) 中, 前三项与 $\mathcal{M}(t)$ 的导数前三项相同, 而第四项就是简单的 $-\mathcal{M}$, 他们的第四项处理起来则更困难, 所以, 他们对 w 提的条件比我们更多, 以保证不等式 (5.4) 成立.

现在构造 w 满足如下条件:

$$w(y) = \begin{cases} \kappa y & (\kappa > 0), \quad [0, \sigma], \\ f(y), & [\sigma, Q + \sigma], \\ g(y), & [Q + \sigma, +\infty), \end{cases} \quad (5.5)$$

其中 $f \geq 0$ 定义在区间 $[\sigma, Q + \sigma]$, $g \geq 0$ 定义在区间 $[P + \sigma, \infty)$ ($\sigma < P < Q + \sigma$), 满足下面的性质:

$$f'' \leq 0, \quad g'(y) < 0, \quad (5.6)$$

$$g'' > 0, \quad f'' \geq -c_f f, \quad \text{对某个常数 } c_f > 0, \quad (5.7)$$

$$\frac{g'(y)^2}{g(y)g''(y)} \leq \beta < 1, \quad \text{当 } y \geq Q + \sigma, \quad (5.8)$$

$$\eta(y) \frac{g'(y)^2}{f(y)g''(y)} \leq \beta < 1, \quad \text{当 } P + \sigma < y < Q + \sigma, \quad (5.9)$$

$$2\eta'(y)|g'(y)| \leq \eta(y)g''(y) - f''(y), \quad y \in (P + \sigma, Q + \sigma), \quad (5.10)$$

其中 η 是如下光滑截断函数:

$$\eta(y) = \begin{cases} 0, & [-\infty, P + \sigma], \\ \text{光滑}, & [P + \sigma, Q + \sigma], \\ 1, & [Q + \sigma, +\infty). \end{cases}$$

同文献 [17, 第 2.5 小节] 类似, 我们可以证明:

(i) 条件 (5.7) 保证

$$I_1 \geq -c_f \mathcal{M}.$$

(ii) 由 Hölder 不等式, 有

$$\left(\int_0^{+\infty} a(t, y)w(y)dy \right)^2 \leq \int_0^{+\infty} a^2 w dy \int_0^{+\infty} w dy.$$

因此,

$$I_2 \geq \|w\|_{L^1}^{-1} \mathcal{M}^2.$$

(iii) 条件 (5.6) 和 (5.8)–(5.10) 可保证

$$I_3 \leq 4\beta I_2.$$

因此,

$$2I_2 - \frac{1}{2}I_3 \geq 2(1 - \beta)I_2 \geq 2(1 - \beta)(\|w\|_{L^1})^{-1} \mathcal{M}^2.$$

关于满足性质 (5.2) 和 (5.6)–(5.10) 的 w 的构造, 细节可以参见文献 [17, 第 4 节]. 本文把参数取为 $P = \frac{9}{10}$, $Q = 1$, $\beta = \frac{5}{6}$, $\kappa = f'(\sigma)$, $\sigma = \frac{f(\sigma)}{f'(\sigma)} - \varepsilon$ (对于一个固定的 $0 < \varepsilon \ll 1$).

最后, 就得到了不等式

$$\frac{d\mathcal{M}(t)}{dt} \geq C_w^{-1} \mathcal{M}^2 - C_w \mathcal{M},$$

其中 $C_w = \max\{3\|w\|_{L^1}, c_f\}$. 如果初值 $\mathcal{M}(0) \geq 2C_w^2$, 我们就总有

$$\frac{d\mathcal{M}(t)}{dt} \geq (2C_w)^{-1} \mathcal{M}^2.$$

从而,

$$\mathcal{M}(t) \geq \frac{1}{\mathcal{M}(0)^{-1} - (2C_w)^{-1}t}.$$

因此, 解在时间 $t_* = \frac{2c_w}{\mathcal{M}(0)} \leq C_w^{-1}$ 爆破.

由于

$$\mathcal{M}(0) = A \int_0^\infty \varphi(y)w(y)dy,$$

因此, 只要取 A 足够大,

$$A \geq 2C_w^2 \left(\int_0^\infty \varphi(y)w(y)dy \right)^{-1},$$

阻尼 Prandtl 方程 (1.2) 就会在有限时间爆破.

参考文献

- 1 Oleinik O A, Samokhin V N. Mathematical Models in Boundary Layer Theory. Applied Mathematics and Mathematical Computation, vol. 15. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 1999
- 2 Xin Z, Zhang L. On the global existence of solutions to the Prandtl's system. Adv Math, 2004, 181: 88–133
- 3 Alexandre R, Wang Y G, Xu C J, et al. Well-posedness of the Prandtl equation in Sobolev spaces. J Amer Math Soc, 2015, 28: 745–784
- 4 Masmoudi N, Wong T K. Local-in-time existence and uniqueness of solutions to the Prandtl equations by energy methods. Comm Pure Appl Math, 2015, 68: 1683–1741
- 5 Sammartino M, Caffisch R E. Zero viscosity limit for analytic solutions, of the Navier-Stokes equation on a half-space, I: Existence for Euler and Prandtl equations. Comm Math Phys, 1998, 192: 433–461
- 6 Lombardo M C, Cannone M, Sammartino M. Well-Posedness of the boundary layer equations. SIAM J Math Anal, 2003, 35: 987–1004
- 7 Gérard-Varet D, Dormy E. On the ill-posedness of the Prandtl equation. J Amer Math Soc, 2010, 23: 591–609
- 8 Gérard-Varet D, Nguyen T. Remarks on the ill-posedness of the Prandtl equation. Asymptot Anal, 2012, 77: 71–88
- 9 Guo Y, Nguyen T. A note on Prandtl boundary layers. Comm Pure Appl Math, 2011, 64: 1416–1438
- 10 Gérard-Varet D, Masmoudi N. Well-posedness for the Prandtl system without analyticity or monotonicity. Ann Sci École Norm Sup (4), 2015, 48: 1273–1325
- 11 Chen D, Wang Y, Zhang Z. Well-posedness of the linearized Prandtl equation around a non-monotonic shear flow. ArXiv:1609.08785, 2016
- 12 Li W, Yang T. Well-posedness in Gevrey space for the Prandtl equations with non-degenerate critical points. ArXiv:1609.08430, 2017
- 13 E W, Engquist B. Blowup of solutions of the unsteady Prandtl's equation. Comm Pure Appl Math, 1997, 50: 1287–1293
- 14 Paicu M, Zhang Z. Global regularity for the Navier-Stokes equations with some classes of large initial data. Anal PDE, 2011, 4: 95–113
- 15 Ignatova M, Vicol V. Almost global existence for the Prandtl boundary layer equations. Arch Ration Mech Anal, 2016, 220: 809–848
- 16 Zhang P, Zhang Z. Long time well-posedness of Prandtl system with small and analytic initial data. J Funct Anal, 2016, 270: 2591–2615
- 17 Kukavica I, Vicol V, Wang F. The van Dommelen and Shen singularity in the Prandtl equations. Adv Math, 2017, 307: 288–311
- 18 Gérard-Varet D, Prestipino M. Formal derivation and stability analysis of boundary layer models in MHD. ArXiv:1612.02641, 2016

附录 A

带阻尼 Prandtl 方程可以从磁流体 (MHD) 的边界层中导出, 详细的推导参见文献 [18], 这里给出一个推导的概要. 考虑在上半平面的 MHD 方程:

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p - \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u} = S \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{b}, \\ \partial_t \mathbf{b} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{b} - \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{u} - \frac{1}{Rm} \Delta \mathbf{b} = 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{b} = 0, \\ \mathbf{u}|_{y=0} = \mathbf{b}|_{y=0} = 0, \\ (u, b) \rightarrow (u^\infty, b^\infty), \quad \text{当 } y \rightarrow +\infty, \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

其中 $\mathbf{u} = (u, v)$ 、 $\mathbf{b} = (b, c)$ 和 p 分别代表磁流体的速度、磁场强度和压强. 它们在无穷远处为常数 u^∞ 和 b^∞ . 参数 $Re = \frac{L_0 U_0}{\eta}$ 和 $Rm = L_0 U_0 \rho \sigma \mu$ 分别代表流体和磁的 Reynolds 数. 除此之外, 我们还要引进一个参数称作 Hartmann 数: $Ha = B_0 L_0 (\frac{\sigma}{\eta})^{\frac{1}{2}}$, 其中 U_0 、 B_0 和 L_0 是速度、磁场强度和长度的标准尺度. ρ 、 μ 、 σ 和 η 分别是密度、电介质常数和磁介质常数, 由该磁流体本身的性质决定. 最后是磁耦合常数 $S = \frac{Ha^2}{Re Rm}$.

考虑磁流体边界层展开的 “Prandtl-Hartmann 混合方法”:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &\approx (\tilde{u}(t, x, \eta^{-1}y), \eta \tilde{v}(t, x, \eta^{-1}y)), \\ \mathbf{b} &\approx \mathbf{e}_x + \delta(\tilde{b}(t, x, \eta^{-1}y), \eta \tilde{c}(t, x, \eta^{-1}y)), \\ p &\approx \tilde{p}(t, x, \eta^{-1}y), \end{aligned}$$

其中 $\eta \ll 1$ 代表边界层的厚度. 把上面的形式展开代入 (A.1), 得到 $\tilde{\mathbf{u}} = (\tilde{u}, \tilde{v})$ 、 $\tilde{\mathbf{b}} = (\tilde{b}, \tilde{c})$ 和 $\tilde{p}$ 的方程, 其中垂直变量经过伸缩变换 $\tilde{y} = \eta^{-1}y$ (为了书写方便, 我们统一省略上波浪线):

$$\begin{cases} \partial_t u + \mathbf{u} \cdot \nabla u + \partial_x p - \frac{1}{Re}(\partial_x^2 + \eta^{-2})u = \frac{S}{\eta} \partial_y b + S \mathbf{b} \cdot \nabla b, \\ \partial_t v + \mathbf{u} \cdot \nabla v + \eta^{-2} \partial_y p - \frac{1}{Re}(\partial_x^2 + \eta^{-2})v = \frac{S}{\eta} \partial_y c + S \mathbf{b} \cdot \nabla c, \\ \partial_t b - \eta^{-1} \partial_y u - \partial_y(bv - cu) - \frac{1}{Rm}(\partial_x^2 + \eta^{-2} \partial_y^2)b = 0, \\ \partial_t c - \eta^{-1} \partial_y v - \partial_x(bv - cu) - \frac{1}{Rm}(\partial_x^2 + \eta^{-2} \partial_y^2)c = 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{b} = 0. \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

若边界层尺度 $\eta \ll 1$, 取主项, 从 (A.2) 的第一个方程得到

$$\partial_t u + \mathbf{u} \cdot \nabla u + \partial_x p - \frac{1}{Re} \eta^{-2} \partial_y^2 u = \frac{S \delta}{\eta} \partial_y b, \quad (\text{A.3})$$

从第二和三个方程得到

$$\partial_y p = 0, \quad -\eta^{-1} \partial_y u - \frac{1}{Rm} \eta^{-2} \partial_y^2 b = 0. \quad (\text{A.4})$$

令 $u^\infty = b^\infty = 0$, 对上面第二式从 $y = +\infty$ 积分可得

$$(\delta \eta)^{-1} u + \frac{1}{Rm} \eta^{-2} \partial_y b = 0.$$

比较 (A.3) 与 (A.4), 匹配参数, 我们要求

$$\frac{1}{Re} \eta^{-2} \sim \frac{S}{\eta} \sim 1, \quad \frac{1}{Rm} \eta^{-2} \sim \eta^{-1}. \quad (\text{A.5})$$

只需取 $\eta = Ha^{-1} \sim Re^{-\frac{1}{2}} \sim \frac{1}{Rm}$ 就可保证 (A.5).

综上, 我们得到

$$\begin{cases} \partial_t u + \mathbf{u} \cdot \nabla u - \frac{Ha^2}{Re} \partial_y^2 u + \frac{Ha^2}{Re} u + \partial_x p = 0, \\ \partial_y p = 0, \\ \partial_x u + \partial_y v = 0, \\ u(t, x, 0) = v(t, x, 0) = 0, \quad u \rightarrow 0, \quad \text{当 } y \rightarrow +\infty. \end{cases}$$

取 $p \equiv C$, 方程在适当的时空伸缩之后, 我们就可以得到 (1.2).

Global well-posedness and finite time blowup of the Prandtl equation

Siqi Ren & Zhifei Zhang

Abstract In this paper, we study two types of Prandtl equations in the analytical setting. For the classical Prandtl equation, we prove the sharpness for the lifespan of the solution obtained by Paicu and Zhang (2011). For the Prandtl equation with damping derived from MHD boundary layer, we prove the global well-posedness for small analytic data and finite time blowup for large analytic data.

Keywords Prandtl equation, well-posedness, blowup

MSC(2010) 35Q30, 76D05

doi: 10.1360/N012017-00180