非线性扩散方程解的复杂渐近行为

献给齐民友教授 90 华诞

王良伟¹, 尹景学^{2*}

1. 重庆三峡学院数学与统计学院, 非线性科学与系统结构重点实验室, 万州 404100;

2. 华南师范大学数学科学学院, 广州 510631

E-mail: wanglw08@163.com, yjx@scnu.edu.cn

收稿日期: 2018-02-20; 接受日期: 2018-04-23; 网络出版日期: 2018-11-05; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11771156)、重庆市基础研究与前沿探索计划 (批准号: cstc2016jcyjA0596)、重庆市科研创新团队 (批准号: CXTDX201601035)、重庆市高校重点实验室 (批准号: [2017]3) 和重庆三峡学院科研计划 (批准号: 17ZP13) 资助项目

摘要 本文是一篇综述, 简要介绍非线性扩散方程解渐近行为的研究结果与研究方法. 以非线性扩散方程的 Cauchy 问题为主线, 本文主要阐述研究其解复杂渐近行为的方法与结论.

关键词 非线性扩散方程 渐近行为 复杂性 Newton 渗流方程 Cauchy 问题

MSC (2010) 主题分类 35B40, 35K65

1 引言

自 1904 年 Boussinesq^[1] 等在研究地下水渗透现象时给出 Newton 渗流方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u^m = 0$$

的例子之后, 非线性扩散方程在生物化学、生物种群动力学、渗流理论、相变理论和图像处理等众多领域中的重要应用先后被发现, 参见文献 [2–6]. 作为一类重要的发展方程, 相比经典的线性方程—热方程, 非线性扩散方程更加接近物理实际, 因而受到了数学家和物理学家的重视 (参见文献 [7–12]). 自 20 世纪初以来, 特别是 20 世纪 50 年代之后, 对非线性扩散方程解的存在性、正则性和渐近性等基本理论的研究取得了长足的进步与发展, 促进并完善了偏微分方程理论的研究与发展, 参见文献 [13–20].

作为定性理论的一部分, 非线性扩散方程解渐近行为的研究自 20 世纪 70 年代开始就逐渐引起了数学家的浓厚兴趣^[21–25]. 1973 年, Kamenomostskaya^[21] 考虑了 Newton 渗流方程在一维空间中解的渐近行为, 高维情形则由 Friedman 和 Kamin^[26] 在 1980 年首先得到. 1988 年, Kamin 和 Vázquez^[27] 提出了处理发展方程解渐近行为的经典方法—“四步法”, 将 Friedman 和 Kamin 等的结论进行了改进与推广, 也可参见 Vázquez 在 2003 年发表的关于 Newton 渗流方程解渐近行为的综述性文献 [28]. 对

英文引用格式: Wang L W, Yin J X. The complicated asymptotic behavior for the nonlinear diffusion equations (in Chinese). Sci Sin Math, 2019, 49: 219–234, doi: 10.1360/N012018-00035

Newton 渗流方程更进一步渐近行为的研究, 以及包括非 Newton 渗流方程和非 Newton 多方渗流方程在内的其他类型的非线性扩散方程的相关工作, 可参见文献 [29–35] 等.

动力系统的相关概念与理论, 最初起源于常微分方程相关问题的研究 [36], 现也逐步被用来研究偏微分方程解的性质与特性 [37–39]. 2002 年, Vázquez 和 Zuazua 在纪念 Lions 的一篇学术论文 [39] 中利用 ω 极限集等概念去研究热方程、Newton 渗流方程等发展方程解在 $L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ 中的渐近行为, 首次发现了发展方程的解在函数空间 $L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ 中具有复杂渐近行为. 之后, Cazenave、Dickstein 和 Weissler 等在一系列论文 [40–45] 中对线性热方程 Cauchy 问题的解在某些有界函数空间中的复杂渐近行为进行了详细的研究与讨论. 同时, 文献 [46] 也研究了 Navier-Stokes 方程 Cauchy 问题解的复杂渐近行为. 2011 年, Fang 等 [47] 对 Schrödinger 方程解的复杂渐近行为进行了研究. Vázquez 和 Winkler [48] 考虑了快扩散方程解的复杂渐近行为. 我们则讨论了非线性扩散方程 Cauchy 问题的解在某些有界函数空间及无界函数空间中的复杂渐近行为, 参见文献 [49–53]. 对由方程的结构导致解出现复杂渐近行为的研究, 可参见文献 [54]. 2003 年, Cazenave 等 [41] 在研究热方程 Cauchy 问题时发现其解的渐近复杂性与混沌动力系统有密切的联系. 事实上, 他们在研究热方程 Cauchy 问题尺度解 $t^{\frac{\sigma}{2}}u(t^{\frac{1}{2}}x, t)$ ($0 < \sigma < N$) 的复杂渐近行为时发现其热半群在 $C_0(\mathbb{R}^N)$ 的某个紧子集上生成一个混沌动力系统 [41]. 2017 年, Wang 等 [55] 考虑了非 Newton 渗流方程 Cauchy 问题解的复杂渐近行为与其生成的混沌动力系统的关系. 对 Navier-Stokes 方程和 Euler 方程等其他发展方程中混沌现象的研究, 参见文献 [56–59].

发展方程解的复杂渐近行为是否发生主要取决于方程的结构、解的初始值、在什么空间中考虑解的渐近行为等诸多因素. 本文主要以非线性扩散方程为例, 简要介绍解的简单渐近行为与解的复杂渐近行为的区别与联系, 以及现阶段研究非线性扩散方程解的复杂渐近行为的方法与理论. 限于篇幅, 本文不详细介绍包括混沌现象在内的非线性扩散方程的其他复杂动力学行为.

2 解的简单渐近行为

本节将对热方程、Newton 渗流方程和非 Newton 渗流方程这三类典型发展方程 Cauchy 问题解的简单渐近行为作一个回顾, 以了解发展方程解渐近行为的研究过程与发展历史. 发展方程解的渐近行为就是研究当时间趋于无穷时, 方程解所呈现出来的性质; 而解的简单渐近行为就是当时间趋于无穷时, 方程解在某个函数空间中收敛到某个固定函数.

对下面的热方程的 Cauchy 问题来说:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times (0, +\infty), \quad (2.1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (2.2)$$

当初值 $u_0 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ 时, 其解可以表示为

$$u(x, t) = u_0 * G(x, t), \quad (2.3)$$

其中 $G(x, t)$ 是 Gauss 核函数

$$G(x, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right),$$

即初值取为 Dirac 函数 $\delta(x)$ 时, 热方程 Cauchy 问题的解, 参见文献 [41, 60]. 由表达式 (2.3) 可知, 当 $1 \leq p \leq \infty$ 时, 只要初值 $u_0 \in L^p(\mathbb{R}^N)$, 其解具有如下估计式:

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq C(4\pi t)^{-\frac{N}{2p}} \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}, \quad t > 0.$$

从而, 当 $1 \leq p < \infty$ 时, 有如下渐近行为:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} = 0.$$

但此极限式对解渐近行为的信息量反映不多, 常用的解决方法是对其解进行适当的尺度变换, 然后进行研究, 就可以得到更多关于解渐近行为的信息 (参见文献 [41, 60–62]). 事实上, 当 $u_0 \in L^p(\mathbb{R}^N)$ ($1 < p < \infty$) 时, 利用 $L^p(\mathbb{R}^N) \cap L^1(\mathbb{R}^N)$ 在 $L^p(\mathbb{R}^N)$ 中稠密可知,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{N}{2p}} \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} = 0,$$

参见文献 [41]. 但当 $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^N)$ 时, 考虑尺度变换后的解 $t^{\frac{N}{2}} u(t^{\frac{1}{2}} x, t)$ 可得到其解 $u(x, t)$ 满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{N}{2}} \|u(\cdot, t) - MG(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} = 0, \quad (2.4)$$

其中 M 为初始质量, 即 $M = \int_{\mathbb{R}^N} u_0(x) dx$. 这表明以 $u_0(x)$ 为初值的解, 与质量 M 集中于一点的解具有相似的渐近行为 (参见文献 [41, 62]).

类似地, 对 Newton 渗流方程的 Cauchy 问题

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u^m = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times (0, \infty), \quad (2.5)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (2.6)$$

其中 $m > 1$, 当非负初值 $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^N)$ 时, 有衰减估计式 [28, 63]

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq C t^{-\frac{N}{N(m-1)+2}} \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)},$$

从而, $\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} = 0$. 由于 Newton 渗流方程具有非线性和退化性等, 人们得到其类似于热方程经典结果 (2.4) 的结论则要滞后得多. 1973 年, Kamenomostskaya [21] 首先考虑了一维情形 Newton 渗流方程解的渐近行为, 高维情形一直到 1980 年, Friedman 和 Kamin [26] 才部分地解决了这个问题. 他们发现当非负初值 $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^N)$ 时,

$$t^{\frac{N}{N(m-1)+2}} |u(t^{\frac{1}{N(m-1)+2}} \cdot, t) - U_M(t^{\frac{1}{N(m-1)+2}} \cdot, t)| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0, \quad \text{在 } L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N) \text{ 中}, \quad (2.7)$$

其中 $U_M(x, t)$ 是与初始质量 $M = \int_{\mathbb{R}^N} u_0(x) dx$ 质量相等的 Barenblatt-Pattle 解, 即初值取为 $M\delta(x)$ 时 Newton 渗流方程 Cauchy 问题 (2.5) 和 (2.6) 的解. 1988 年, Kamin 和 Vázquez [27] 创造性地采用“四步法” (这个方法后来也成为研究发展方程解渐近行为的一个经典方法) 才彻底解决这个问题, 也可参见文献 [28]. 他们发现极限 (2.7) 在本性有界函数空间 $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ 中也是成立的, 也就是说, 如果非负初值 $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^N)$, 那么,

$$t^{\frac{N}{N(m-1)+2}} |u(t^{\frac{1}{N(m-1)+2}} \cdot, t) - U_M(t^{\frac{1}{N(m-1)+2}} \cdot, t)| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0, \quad \text{在 } L^\infty(\mathbb{R}^N) \text{ 中}.$$

更进一步, 假设 $-\frac{2}{m-1} < \sigma \leq N$, 如果非负初值 $u_0 \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ 并满足

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^\sigma u_0(\lambda x) = A_\sigma(x), \quad \text{在 } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N) \text{ 中}, \quad (2.8)$$

其中

$$A_\sigma(x) = \begin{cases} A(N - \sigma)|x|^{-\sigma}, & -\frac{2}{m-1} < \sigma < N, \\ \delta(x), & \sigma = N. \end{cases}$$

Alikakos 和 Rostamian 在 1984 年文献 [64] 中得到了一个关于问题 (2.5) 和 (2.6) 解渐近行为更加一般的结论. 也就是,

$$t^{\frac{\sigma}{\sigma(m-1)+2}} |u(t^{\frac{1}{\sigma(m-1)+2}}, t) - W(t^{\frac{1}{\sigma(m-1)+2}}, t)| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0, \quad \text{在 } L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}^N) \text{ 中}, \quad (2.9)$$

其中 $W(x, t)$ 是如下问题:

$$\frac{\partial W}{\partial t} - \Delta W^m = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times (0, \infty), \quad (2.10)$$

$$W(x, 0) = A_\sigma(x), \quad x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\} \quad (2.11)$$

的解. 注意到当 $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^N)$ 时, (2.8) 就成为

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^N u_0(\lambda x) = \int_{\mathbb{R}^N} u_0(y) dy \delta(x) = M \delta(x), \quad \text{在 } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N) \text{ 中},$$

这时, 问题 (2.10) 和 (2.11) 的解就是 Barenblatt-Pattle 解 U_M , 所以, Alikakos 和 Rostamian [64] 的结论是 Friedman 等结论的一个自然推广. 在 2013 年, 文献 [51] 发现了, 当 $0 \leq \sigma < N$ 时, Alikakos 等在 1984 年所得到的结论 (2.9) 在空间 $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ 中也成立.

注意到极限式 (2.9) 在 $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ 中成立, 当然也会在 $L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}^N)$ 中成立, 这促使我们去考虑, 当条件 (2.8) 成立时, 极限式 (2.9) 在哪些空间中成立, 在哪些空间中不成立. 在 2017 年文献 [65] 中, 我们发现当 $0 \leq \sigma < N$ 时, 如果 Newton 渗流方程 Cauchy 问题的初值满足条件 (2.8), 则极限式 (2.9) 在空间 $W_\eta(\mathbb{R}^N)$ ($0 \leq \eta < \sigma$) 中成立, 但极限式 (2.9) 在空间 $W_\eta(\mathbb{R}^N)$ ($\sigma < \eta < N$) 中不成立, 其中函数空间

$$W_\eta(\mathbb{R}^N) \equiv \{\varphi \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^N); |\cdot|^\eta \varphi \in L^\infty(\mathbb{R}^N)\},$$

当 $\varphi \in W_\eta(\mathbb{R}^N)$ 时, 其范数由 $\|\varphi\|_{W_\eta(\mathbb{R}^N)} = \| |\cdot|^\eta \varphi \|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$ 给出. 从而, $\eta = \sigma$ 是其解渐近行为在所考虑函数空间中的一个临界指标. 但极限式 (2.9) 在函数空间 $W_\sigma(\mathbb{R}^N)$ 中是否成立还有待解决.

对含吸收项 Newton 渗流方程的 Cauchy 问题

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u^m + u^p = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times (0, \infty), \quad (2.12)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (2.13)$$

其中 $m > 1$, $p > \frac{N+2}{N}$, 由于吸收项的影响, 其解渐近行为将会随着 p 的变化而呈现出不一样的情形. 事实上, 当 $\alpha > 0$, $A > 0$, 若初值满足衰减性条件

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x|^\alpha u_0(x) = A \quad (2.14)$$

时, 早在 1986 年, Kamin 和 Peletier [66] 发现了, 当 $p > m$, $0 < \alpha < \frac{2}{p-m}$ 时, 含吸收项 Newton 渗流方程 Cauchy 问题 (2.12) 和 (2.13) 的解 $u(x, t)$ 满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{|x| < at^{\frac{p-m}{2(p-1)}}} t^{\frac{1}{p-1}} u(x, t) = C^*,$$

其中 $a > 0$ 为常数, $C^* = (\frac{1}{p-1})^{\frac{1}{p-1}}$; 当 $p > m$, $\frac{2}{p-m} < \alpha < N$ 时, 其解 $u(x, t)$ 满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{|x| < at^{\frac{1}{\alpha(m-1)+2}}} t^{\frac{\alpha}{\alpha(m-1)+2}} |u(x, t) - W(x, t)| = 0,$$

其中 $a > 0$ 为常数, $W(x, t)$ 为 Newton 渗流方程 $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u^m = 0$ 当初值 $u_0 = A|x|^{-\alpha}$ 时的解; 当 $\alpha > N$, $p > m + \frac{2}{N}$ 时, 其解 $u(x, t)$ 满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{|x| < at^{\frac{1}{N(m-1)+2}}} t^{\frac{N}{N(m-1)+2}} |u(x, t) - E_{c_0}(x, t)| = 0,$$

其中 $a > 0$ 为常数, $E_{c_0}(x, t)$ 为 Newton 渗流方程质量为 c_0 时的 Barenblatt-Pattle 解, 且

$$c_0 = \|u_0\|_{L^1} + \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} u^p(x, t) dx dt.$$

对临界情形 $\alpha = \frac{2}{p-m}$, 直到 1998 年才由 Kwak^[67] 解决. 他发现当 $m < p < m + \frac{2}{N}$, $\alpha = \frac{2}{p-m}$ 时, 其解 $u(x, t)$ 满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{|x| < at^{\frac{p-m}{2(p-1)}}} t^{\frac{1}{p-1}} |u(x, t) - W(x, t)| = 0,$$

其中 $a > 0$ 为常数. 当 $m = 1$ 时, 问题 (2.12) 和 (2.13) 就成为含吸收项热方程的 Cauchy 问题, 与上述 Newton 渗流方程相类似的结论分别在文献 [68] 和 [69] 中得到. 当 $0 < m < 1$, 即快扩散方程的情形, 1991 年, Peletier 和 Zhao^[70] 获得了与慢扩散 Newton 渗流方程 ($m > 1$) 解相类似的结论.

对含吸收项非 Newton 渗流方程的 Cauchy 问题

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) + u^q = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times (0, \infty), \quad (2.15)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (2.16)$$

其中 $q > 0$, $p > \frac{2N}{N+1}$, Zhao^[71] 发现了, 若初值 $u_0(x)$ 满足条件 (2.14) 且存在常数 $B > 0$ 使得

$$|x|^\alpha u_0(x) \leq B, \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

则当 $q > p - 1 + \frac{p}{N}$, $\frac{p}{q-p+1} < \alpha < N$ 时, 问题 (2.15) 和 (2.16) 的解 $u(x, t)$ 满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{|x| < at^{\frac{1}{\alpha(p-2)+p}}} t^{\frac{\alpha}{\alpha(p-2)+p}} |u(x, t) - W(x, t)| = 0,$$

其中 $a > 0$ 为常数, $W(x, t)$ 为非 Newton 渗流方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = 0 \quad (2.17)$$

当初值 $u_0 = A|x|^{-\alpha}$ 时的解; 当 $q > p - 1 + \frac{p}{N}$, $\alpha > N$ 且 $u_0(x) \in L^1(\mathbb{R}^N)$ 时, 问题 (2.15) 和 (2.16) 的解 $u(x, t)$ 满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{|x| < at^{\frac{1}{N(p-2)+p}}} t^{\frac{N}{N(p-2)+p}} |u(x, t) - E_{c_1}(x, t)| = 0,$$

其中 $E_{c_1}(x, t)$ 为非 Newton 渗流方程 (2.17) 当初值 $u_0 = c_1 \delta(x)$ 时的解,

$$c_1 = \|u_0\|_{L^1} + \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} u^q(x, t) dx dt;$$

当 $q > \max(p-1, 1)$, $0 < \alpha < \frac{p}{q-p+1}$ 时, 问题 (2.15) 和 (2.16) 的解 $u(x, t)$ 满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{|x| < at^{\frac{q-p+1}{p(q-1)}}} t^{\frac{1}{q-1}} u(x, t) = C^*,$$

其中 $a > 0$ 为常数, $C^* = (\frac{1}{q-1})^{\frac{1}{q-1}}$. 2003 年, Chen 等^[72] 更进一步研究了含吸收项快扩散非 Newton 渗流方程 Cauchy 问题解的渐近行为.

3 Newton 渗流方程解的复杂渐近行为

本节首先考虑慢扩散 Newton 渗流方程 Cauchy 问题 (2.5) 和 (2.6) 的解在 L^∞ 空间中的复杂渐近行为, 然后研究其解在加权 L^∞ 空间中的复杂渐近行为, 最后对快扩散 Newton 渗流方程解的复杂渐近行为进行讨论.

3.1 慢扩散 Newton 渗流方程解在 L^∞ 空间中的复杂渐近行为

对发展方程解的复杂渐近行为还没有明确的定义与表述, 现在经常采用的方式是由 Vázquez 和 Zuazua 在 2002 年提出来的, 即发展方程某个尺度解的 ω 极限集包含多个元素 (不少于 2 个), 我们在本文中采用这种通用的定义方式. 从这个角度去考虑, 解具有简单渐近行为, 则其 ω 极限集就只包含一个元素.

我们在本小节中主要讨论慢扩散 Newton 渗流方程 Cauchy 问题 (2.5) 和 (2.6) 解复杂渐近行为的研究方法与结论, 我们首先从 2002 年 Vázquez 和 Zuazua^[39] 的开创性研究开始. 为此, 我们引入如下几个定义, 参见文献 [39, 73, 74].

定义 3.1 (G - ω 极限集^[39]) 对任意的函数 $f \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, 称函数簇 $G_\lambda(f)(x) = f(\lambda x)$ 当 $\lambda \rightarrow \infty$ 在 $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ 的弱 * 拓扑下的聚点所组成集合为函数 f 的 G - ω 极限集, 记为 $G_\infty(f)$. 如果 f 的 G - ω 极限集只包含一个元素, 则称其具有简单 G - ω 极限集.

定义 3.2^[73, 74] 对任意的 $r > 0$ 和任意的函数 $\varphi \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$, 令

$$\|\varphi\|_r = \sup_{R \geq r} R^{-\frac{N(m-1)+2}{m-1}} \int_{|x| \leq R} |\varphi(x)| dx \quad \text{和} \quad \ell(\varphi) = \lim_{r \rightarrow \infty} \|\varphi\|_r.$$

函数空间 X_0 定义如下:

$$X_0 \equiv \{\varphi \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N); \|\varphi\|_1 < \infty \text{ 以及 } \ell(\varphi) = 0\}.$$

容易验证函数空间 X_0 是一个 Banach 空间. 当初值 $u_0 \in X_0$ 时, 慢扩散 Newton 渗流方程 Cauchy 问题 (2.5) 和 (2.6) 的解满足如下性质:

定理 3.1^[63, 75] 慢扩散 Newton 渗流方程 Cauchy 问题 (2.5) 和 (2.6) 在函数空间 X_0 上生成一个连续的有界半群 $S(t)$, 定义如下:

$$S(t) : u_0 \rightarrow u(x, t). \quad (3.1)$$

也就是说, 慢扩散 Newton 渗流方程 Cauchy 问题的解 $u(x, t) = S(t)u_0 \in C([0, \infty); X_0)$.

定义 3.3 (R - ω 极限集^[39]) 对任意的函数 $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, 定义

$$R_\infty(u_0) \equiv \{g \in L^\infty(\mathbb{R}^N) : \exists t_n \rightarrow \infty \text{ 满足 } u(t_n^{\frac{1}{2}} \cdot, t_n) = S(t_n)u_0(t_n^{\frac{1}{2}} \cdot) \rightarrow g, \text{ 在 } L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N) \text{ 中}\},$$

称 $R_\infty(u_0)$ 为 u_0 的 R - ω 极限集, 其中 $S(t)$ 由 (3.1) 给出. 如果 u_0 的 R - ω 极限集至少包含两个元素, 则称慢扩散 Newton 渗流方程 Cauchy 问题的解具有复杂渐近行为.

注意到, 函数空间 $L^\infty(\mathbb{R}^N) \subset X_0$, 从而, 上述定义是合适的. Vázquez 和 Zuazua 利用上述定义及慢扩散 Newton 渗流方程解的性质发现, 如果非负初值 $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, 则 u_0 的 R - ω 极限集与 u_0 的 G - ω 极限集之间存在如下等价关系:

$$R_\infty(u_0) = S(1)G_\infty(u_0).$$

由于存在函数 $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ 满足其 G - ω 极限集 $G_\infty(u_0)$ 包含无穷多个元素, 从而慢扩散 Newton 渗流方程 Cauchy 问题 (2.5) 和 (2.6) 的尺度解 $u(t^{\frac{1}{2}}x, t)$ 在这种情形下存在复杂的渐近行为, 参见文献 [39]. 相应地, 如果某个初值函数 $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ 的 G - ω 极限集 $G_\infty(u_0)$ 只包含一个元素, 则尺度解 $u(t^{\frac{1}{2}}x, t)$ 在这种情形下只可能存在简单的渐近行为.

对慢扩散 Newton 渗流方程 Cauchy 问题 (2.5) 和 (2.6) 的尺度解 $t^{\frac{\mu}{2}}u(t^\beta \cdot, t)$ ($\mu, \beta > 0$) 在空间 $C_0(\mathbb{R}^N)$ 中的 ω 极限集, 2011 年, Yin 等^[50] 发现了, 当 $(\mu, \beta) \in \text{I}$ ($0 < \mu < \frac{2N}{N(m-1)+2}$ 和 $\beta > \beta(\mu) = \frac{2-\mu(m-1)}{4}$) (见图 1), 则存在一个函数 $u_0 \in C_0^+(\mathbb{R}^N) \equiv \{\varphi \in C_0(\mathbb{R}^N); \varphi \geq 0\}$ 满足其 ω 极限集包含无穷多个元素, 进而其解存在复杂的渐近行为; Wang 等^[51] 证明了 μ 和 β 在线段 $\beta(\mu) = \frac{2-\mu(m-1)}{4}$ ($0 < \mu < \frac{2N}{N(m-1)+2}$) 上时 (见图 1), 也存在一个函数 $u_0 \in C_0^+(\mathbb{R}^N)$ 满足尺度解 $t^{\frac{\mu}{2}}u(t^\beta \cdot, t)$ ($\mu, \beta > 0$) 的 ω 极限集包含无穷多个元素. 但在文献 [52], 当 $(\mu, \beta) \in \text{II}$ ($\mu \geq \frac{2N}{N(m-1)+2}, \beta > 0$) (见图 1), 我们发现一个不同的现象, 对任意函数 $u_0 \in C_0^+(\mathbb{R}^N)$, 其对应尺度解 $t^{\frac{\mu}{2}}u(t^\beta \cdot, t)$ ($\mu, \beta > 0$) 在空间 $C_0(\mathbb{R}^N)$ 中的 ω 极限集最多包含一个元素, 也就是说, 这种情形下解的复杂渐近行为不会发生. 当 $(\mu, \beta) \in \text{III}$ ($0 < \mu < \frac{2N}{N(m-1)+2}, 0 < \beta < \frac{2-\mu(m-1)}{4}$) (见图 1) 时, 尺度解 $t^{\frac{\mu}{2}}u(t^\beta \cdot, t)$ 在 $C_0(\mathbb{R}^N)$ 中是否存在复杂渐近行为的问题迄今还没解决.

图 1 μ - β 坐标图

3.2 慢扩散 Newton 渗流方程在加权 L^∞ 函数空间中的复杂渐近行为

在上一小节, 我们对慢扩散 Newton 渗流方程 Cauchy 问题解在有界函数空间 $C_0(\mathbb{R}^N)$ 和 $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ 中的复杂渐近行为研究情形进行了回顾. 事实上, 慢扩散 Newton 渗流方程 Cauchy 问题的解是否具有复杂渐近行为的关键在于其尺度解的 ω 极限集在某个函数空间的结构. 在本小节中, 我们将对慢扩散 Newton 渗流方程 Cauchy 问题的尺度解在不同的函数空间中的 ω 极限集的结构以及在不同函数空间中其解的复杂渐近行为的研究现状及方法进行一个简单的阐述.

定义 3.4 对 $0 < \sigma < N$, 加权 L^∞ 函数空间 $W_\sigma(\mathbb{R}^N)$ 定义如下:

$$W_\sigma(\mathbb{R}^N) \equiv \{\varphi \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N); |\cdot|^\sigma \varphi(\cdot) \in L^\infty(\mathbb{R}^N)\}.$$

对任意的 $\varphi \in W_\sigma(\mathbb{R}^N)$, 其范数由 $\|\varphi\|_{W_\sigma(\mathbb{R}^N)} = \| |\cdot|^\sigma \varphi(\cdot) \|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$ 给出.

对任意的 $u_0 \in W_\sigma(\mathbb{R}^N)$, ω 极限集 $\Omega^\sigma(u_0)$ 定义如下:

$$\Omega^\sigma(u_0) \equiv \{\varphi \in W_\sigma(\mathbb{R}^N); \exists \lambda_n \rightarrow \infty \text{ 满足在 } W_\sigma(\mathbb{R}^N) \text{ 中, 有 } D_{\lambda_n}^\sigma u_0 \rightharpoonup \varphi\},$$

其中尺度变换算子

$$D_\lambda^\sigma \varphi(x) \equiv \lambda^{\frac{2\sigma}{\sigma(m-1)+2}} \varphi(\lambda^{\frac{2}{\sigma(m-1)+2}} x).$$

当初值 $u_0 \in W_\sigma(\mathbb{R}^N)$ 时, 慢扩散 Newton 渗流方程 Cauchy 问题 (2.5) 和 (2.6) 尺度解的 ω - 极限集 $\omega^\sigma(u_0)$ 定义如下:

$$\omega^\sigma(u_0) \equiv \{f \in C_0(\mathbb{R}^N); \exists t_n \rightarrow \infty \text{ 满足在 } C_0(\mathbb{R}^N) \text{ 中, 有 } \Gamma_{\sqrt{t_n}}^\sigma[S(1)u_0] \rightarrow f\},$$

其中 $\Gamma_\lambda^\sigma[S(s)\phi(x)] = \lambda^{\frac{2\sigma}{\sigma(m-1)+2}} [S(\lambda^2 s)\phi](\lambda^{\frac{2}{\sigma(m-1)+2}} x)$, 半群算子 $S(t)$ 由 (3.1) 给出.

文献 [51] 首先建立了当初值 $u_0 \in W_\sigma(\mathbb{R}^N)$ 时, 慢扩散 Newton 渗流方程 Cauchy 问题 (2.5) 和 (2.6) 解的时空衰减估计和解的传播速度估计, 然后再利用尺度变换算子与半群算子的交换关系, 得到了初值与解之间存在如下关系.

定理 3.2 ^[51] 设 $0 < \sigma < N$, 如果初值 $u_0 \in W_\sigma^+(\mathbb{R}^N) \equiv \{\varphi \in W_\sigma(\mathbb{R}^N); \varphi \geq 0\}$, 则有

$$\omega^\sigma(u_0) = S(1)\Omega^\sigma(u_0),$$

其中 $S(1)\Omega^\sigma(u_0) \equiv \{S(1)\varphi; \varphi \in \Omega^\sigma(u_0)\}$.

我们还证明了对任意的 $M > 0$, 存在一个函数 $\varphi \in W_\sigma^+(\mathbb{R}^N) \cap \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ 满足

$$\Omega^\sigma(\varphi) = B_M^+ \equiv \{\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N); \phi \geq 0 \text{ 以及 } \|\phi\|_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)} \leq M\}.$$

从而取初值 $u_0 = \varphi$, 慢扩散 Newton 渗流方程 Cauchy 问题 (2.5) 和 (2.6) 的解在函数空间 $W_\sigma(\mathbb{R}^N)$ 中会呈现出复杂的渐近行为, 参见文献 [51].

注意到上述研究都是在 $C_0(\mathbb{R}^N)$ 或 $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ 等有界函数空间来考虑解的复杂渐近行为, 在其他函数空间中是否也存在解的复杂渐近行为这种现象呢? 事实上, 当 $0 < \sigma < \frac{2}{m-1}$ 时, 在无界函数空间 $Y_\sigma(\mathbb{R}^N) \equiv \{\varphi \in C(\mathbb{R}^N) : \lim_{|x| \rightarrow \infty} (1 + |x|^2)^{-\frac{\sigma}{2}} \varphi(x) = 0\}$ 中来考虑慢扩散 Newton 渗流方程 Cauchy 问题, 其解也有可能出现复杂渐近行为. 为此, 我们利用 Moser 迭代方法建立了加权 L^1 - L^∞ 估计, 同时对慢扩散 Newton 渗流方程 Cauchy 问题的解在空间 $Y_\sigma(\mathbb{R}^N)$ 中的增长速度进行了估计, 最后得到如下结论, 参见文献 [76].

定理 3.3 ^[76] 令 $0 \leq \sigma < \frac{2}{m-1}$, 假设 $\mu, \beta > 0$ 并且满足

$$\beta > \max \left(\frac{1}{2} - \frac{\mu(m-1)}{4}, \frac{1}{2 - \sigma(m-1)} \right),$$

$$0 < \mu + \frac{4\beta\sigma}{N(m-1)+2} < \frac{2N}{N(m-1)+2},$$

则存在一个函数 $u_0 \in Y_\sigma^+(\mathbb{R}^N)$ 满足 $\omega_\sigma^{\mu,\beta}(u_0) = Y_\sigma^+(\mathbb{R}^N)$, 其中

$$\omega_\sigma^{\mu,\beta}(u_0) \equiv \{f \in Y_\sigma(\mathbb{R}^N); \exists t_n \rightarrow \infty \text{ 满足在 } Y_\sigma(\mathbb{R}^N) \text{ 中, 有 } t_n^{\frac{\mu}{2}}(S(t_n)u_0)(t_n^\beta \cdot) \xrightarrow{t_n \rightarrow \infty} f\},$$

$$Y_\sigma^+(\mathbb{R}^N) \equiv \{\varphi \in Y_\sigma(\mathbb{R}^N); \varphi \geq 0 \text{ 以及 } \varphi(0) = 0\}.$$

从以上定理可以看出, 慢扩散 Newton 渗流方程 Cauchy 问题的解在无界函数空间 $Y_\sigma(\mathbb{R}^N)$ 中也有可能产生复杂的渐近行为.

3.3 快扩散 Newton 渗流方程解的复杂渐近行为

对快扩散 Newton 渗流方程的 Dirichlet 问题

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla(u^{m-1}\nabla u) = 0, \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \quad (3.2)$$

$$u(x, t) = a, \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0, \quad (3.3)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (3.4)$$

其中 $0 < m < 1$, $a > 0$, Ω 是空间 $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 3$) 中的一个光滑有界区域. 2011 年, Vázquez 和 Winkler^[48] 发现了问题 (3.2)–(3.4) 的古典奇性解也有可能出现复杂渐近行为. 为此, 他们首先证明了当初值 $u_0(x)$ 满足

$$\underline{a}|x|^{-\gamma_1} \leq u_0(x) \leq \bar{a}|x|^{-\gamma_2}, \quad x \in \Omega \setminus \{0\},$$

其中 $0 < \underline{a} \leq \bar{a}$ 且 $\frac{1-m}{2} < \gamma_1 \leq \gamma_2 < \infty$ 的条件时, 问题 (3.2)–(3.4) 古典奇性解的唯一性, 然后他们得到如下结论.

定理 3.4 ^[48] 设 $0 \in \Omega$, $0 < m < m_c = \frac{N-2}{N}$ 以及 $a > 0$, 则存在 $u_0 \in C^\infty(\Omega \setminus \{0\})$ 满足 $u_0|_{\partial\Omega} = a$ 以及 $u_0(x) \geq a$, $x \in \Omega$, 使得问题 (3.2)–(3.4) 存在唯一的古典奇性解 $u(x, t)$ 且具有如下性质: 存在时间序列 $t_k \rightarrow \infty$ ($k \rightarrow \infty$) 满足, 当 $k \rightarrow \infty$ 时,

$$u(\cdot, t_{2k}) \text{ 在有界区域 } \Omega \setminus \{0\} \text{ 中局部一致收敛到 } \infty,$$

$$u(\cdot, t_{2k-1}) \text{ 在有界区域 } \Omega \setminus \{0\} \text{ 中局部一致收敛到常数 } a.$$

4 非 Newton 渗流方程解的复杂渐近行为

本节主要考虑非 Newton 渗流方程 Cauchy 问题

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times (0, \infty), \quad (4.1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N \quad (4.2)$$

解的复杂渐近行为. 为此, 我们先给出几个定义.

定义 4.1 ^[77] 设 $\lambda, \mu, \beta > 0, u_0 \in X_0$. 时空尺度变换算子 $\Gamma_\lambda^{\mu, \beta}$ 定义如下:

$$\Gamma_\lambda^{\mu, \beta}[u_0] \equiv D_\lambda^{\mu, \beta}[S(\lambda^2 t)u_0],$$

其中 $S(t)$ 是由问题 (4.1) 和 (4.2) 生成的半群算子, 空间尺度变换算子 $D_\lambda^{\mu, \beta}w(x) \equiv \lambda^\mu w(\lambda^{2\beta}x)$.

定义 4.2 ^[77] 称函数集

$$\begin{aligned} \gamma^{\mu, \beta}(u_0) \equiv \{h \in C((0, \infty); C_0(\mathbb{R}^N)); \exists \lambda_n \rightarrow \infty \text{ 满足对任意的 } 0 < \tau < T < \infty, \\ \text{在 } C([\tau, T]; C_0(\mathbb{R}^N)) \text{ 中, 有 } \Gamma_{\lambda_n}^{\mu, \beta}[u_0] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} h\} \end{aligned}$$

为 Γ -极限集.

本节主要目的是分析 Γ -极限集在函数空间 $C((0, \infty); C_0(\mathbb{R}^N))$ 带有一致收敛拓扑 $[\tau, T] \times \mathbb{R}^N$ ($\forall 0 < \tau < T < \infty$) 时的结构. 为此, 令

$$\mu_0 = \frac{2N}{N(p-2)+p}, \quad \beta_0 = \beta_0(\mu) = \frac{2-\mu(p-2)}{2p} \quad \left(0 < \mu < \frac{2}{p-2}\right).$$

将 μ - β 坐标平面的第一象限根据 μ 和 β 对 Γ -极限集的不同影响分为两个区域:

$$\begin{aligned} \text{I} &\equiv \{(\mu, \beta); 0 < \mu < \mu_0, \beta \geq \beta_0(\mu)\}, \\ \text{II} &\equiv \{(\mu, \beta); \mu \geq \mu_0, \beta > 0\} \cup \{(\mu, \beta); 0 < \mu < \mu_0, 0 < \beta < \beta_0(\mu)\}. \end{aligned}$$

事实上, 当 $(\mu, \beta) \in \text{I}$, 问题 (4.1) 和 (4.2) 尺度解 $\lambda^\mu u(\lambda^{2\beta}x, \lambda^2 t)$ 的复杂渐近行为有可能发生, 即 Γ -极限集 $\gamma^{\mu, \beta}(u_0)$ 有可能包含无穷多个点 ^[77]. 但当 $(\mu, \beta) \in \text{II}$, 问题 (4.1) 和 (4.2) 的尺度解 $\lambda^\mu u(\lambda^{2\beta}x, \lambda^2 t)$ 不存在上述的复杂渐近行为, 也就是说, Γ -极限集 $\gamma^{\mu, \beta}(u_0)$ 是单点集或空集 ^[77]. 因而, 对 Γ -极限集 $\gamma^{\mu, \beta}(u_0)$ 来说, μ_0 是其临界指标, 并且对 $\mu \in (0, \mu_0)$, $\beta_0(\mu)$ 是其临界指标, 参见 μ - β 坐标图 (见图 2).

图 2 非 Newton 渗流方程的 μ - β 坐标图

具体地, 当 $(\mu, \beta) \in \{(\mu, \beta) \mid 0 < \mu < \mu_0, 0 < \beta < \beta_0(\mu)\}$, 我们发现对任意的非负函数 $u_0 \in C_0^+(\mathbb{R}^N)$, 非零 Γ - 极限集 $\gamma^{\mu, \beta}(u_0)$ 是空集, 即当 $0 < \mu < \mu_0, 0 < \beta < \beta_0(\mu)$ 时, 对任意收敛到 $+\infty$ 的数列 $\{\lambda_n\}$, 尺度解 $u(\lambda_n^{2\beta}x, \lambda_n^2t)$ 均不可能以 $\lambda_n^{-\mu}$ 的速率收敛到一个非零连续函数. 当 $(\mu, \beta) \in \{(\mu, \beta) \mid 0 < \mu < \mu_0, \beta \geq \beta_0(\mu)\}$, Γ - 极限集 $\gamma^{\mu, \beta}(u_0)$ 和 Ω - 极限集 $\omega^{\mu, \beta}(u_0)$ 有可能包含无穷多个点. 准确地说, 设 F 为区间 $(0, \frac{2pN}{(N(p-2)+p)(2-\mu(p-2))})$ 的任意一个可数子集, 对所有满足 $\frac{\mu}{2\beta} \in F$ 且 $0 < \mu < \mu_0, \beta > \beta_0(\mu)$ 的 μ 和 β , 存在一个函数 $\phi \in C_0(\mathbb{R}^N)$ 使得当 $u(x, t)$ 为问题 (4.1) 和 (4.2) 初值 $u_0 = \phi$ 时的解时, Γ - 极限集 $\gamma^{\mu, \beta}(u_0)$ 包含集合

$$\{\varphi(t) \equiv \varphi; \varphi \in C_0(\mathbb{R}^N), \varphi(0) = 0 \text{ 及 } \varphi \geq 0\};$$

同时, 对所有满足 $\frac{\mu}{2\beta} \in F$ 且 $0 < \mu < \mu_0, \beta = \beta_0(\mu)$ 的 μ 和 β , 也存在一个函数 $\phi \in C_0(\mathbb{R}^N)$ 使得当 $u(x, t)$ 为初值 $u_0 = \phi$ 时问题 (4.1) 和 (4.2) 的解时, Γ - 极限集 $\gamma^{\mu, \beta}(u_0)$ 包含集合

$$S(t)[C_0^+(\mathbb{R}^N)] = \{S(t)\varphi; \varphi \in C_0(\mathbb{R}^N), \varphi \geq 0\},$$

其中 $S(t)\varphi$ 是初值为 φ 时问题 (4.1) 和 (4.2) 的解. 当 $(\mu, \beta) \in \{(\mu, \beta) \mid \mu \geq \mu_0, \beta > 0\} \setminus \{\mu_0, \beta_0\}$ 时, 对任意的 $u_0 \in C_0^+(\mathbb{R}^N)$, 非零 Γ - 极限集 $\gamma^{\mu, \beta}(u_0)$ 和非零 ω 极限集 $\omega^{\mu, \beta}(u_0)$ 是空集. 同时, 当 $\mu = \mu_0 = \frac{2N}{N(p-2)+p}, \beta = \beta_0 = \frac{1}{N(p-2)+p}$ 时, Γ - 极限集 $\gamma^{\mu, \beta}(u_0)$ 和 Ω - 极限集 $\omega^{\mu, \beta}(u_0)$ 最多包含一个点 (有可能为非零点) [77].

5 一般情形渗流方程解的复杂渐近行为

对一般情形渗流方程的 Cauchy 问题

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta \Phi(u) = 0, \quad (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^N, \quad (5.1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (5.2)$$

其中函数 Φ 满足如下条件:

- (1) HB (basic set of hypotheses) 条件: Φ 是严格单调递增连续函数, 当 $u > 0$ 时, Φ 光滑且 $\Phi(0) = 0$;
 - (2) HPSM (finite second moment of hypotheses) 条件: 对给定具有单位质量及有限二阶矩的初值 $u_0 \in L_+^1(\mathbb{R}^N) \equiv \{u \in L^1(\mathbb{R}^N) \mid u \geq 0\}$, 问题 (5.1) 和 (5.2) 的解 $u(x, t)$, 对任意的 $t > 0$, 均具有有限的二阶矩;
 - (3) HL¹-L[∞] 条件: 问题 (5.1) 和 (5.2) 的解 $u(x, t)$, 对任意的 $t > 0$, 其质量与初值 u_0 质量相同, 即质量守恒, 并且 $u(x, t)$ 满足 L^1 -L[∞] 估计;
 - (4) HDC (non-decreasing of hypotheses) 条件: 当 $u \in (0, \infty)$ 时, $\Phi(u)u^{-\frac{N-1}{N}}$ 是不减函数.
- Carrillo 和 Vázquez [54] 考虑了当初值 $u_0 \in L_+^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ 时, 由于 Φ 的特殊结构使得问题 (5.1) 和 (5.2) 的解具有复杂的渐近行为. 为介绍此结论, 我们将热核及 Newton 渗流方程 ($m > 1$) 的基本解 (Barenblatt 解) 分别记为

$$B_1(x, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}},$$

$$B_m(x, t) = t^{-\frac{1}{m-1}} \left(C_m t^{\frac{2}{N(m-1)+2}} - \frac{m-1}{2m(N(m-1)+2)} |x|^2 \right)^{-\frac{1}{m-1}},$$

其中 $C_m > 0$ 取为使 Barenblatt 解质量为 1 的常数.

定理 5.1 ^[54] 对 $m > 1$, 存在一个满足 HB 条件、HPSM 条件、 HL^1-L^∞ 条件和 HDC 条件的非线性函数 Φ , 使得 Cauchy 问题 (5.1) 和 (5.2) 的解 $u(x, t)$ 满足: 存在数列 $t'_n \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$) 和 $t''_n \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$) 使得

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \|u(x, t'_n) - B_1(x, t'_n)\|_{L^1} &= 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \|u(x, t''_n) - B_m(x, t''_n)\|_{L^1} &= 0.\end{aligned}$$

更进一步有下面的定理:

定理 5.2 ^[54] 设 $E = \{B_{m_i} \mid m_i \geq 1, i = 1, \dots, \ell\}$, 存在一个满足 HB 条件、HPSM 条件、 HL^1-L^∞ 条件和 HDC 条件的非线性函数 Φ , 使得 Cauchy 问题 (5.1) 和 (5.2) 的解 $u(x, t)$ 满足: 对任意的 $B_{m_i} \in E$, 均存在数列 $t_n^i \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$) 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u(x, t_n^i) - B_{m_i}(x, t_n^i)\|_{L^1} = 0.$$

通过以上两个定理可知, 一般情形渗流方程当 Φ 取为特殊函数时, 其 Cauchy 问题的解也有可能呈现出复杂的渐近行为. 同时, 他们还得到了在文献 [54] 所考虑问题的条件下, 解的简单渐近行为就意味着 $\Phi(u) = u^m$.

6 含吸收项非线性扩散方程解的复杂渐近行为

对含吸收项 Newton 渗流方程 Cauchy 问题

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u^m + u^p &= 0, \quad (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^N, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N,\end{aligned}$$

其中 $m > 1, p > m + \frac{2}{N}, N \geq 1$, 在 2010 年, 文献 [49] 证明了其解在有界函数空间 $C_0(\mathbb{R}^N)$ 中具有复杂渐近行为. 对含吸收项非 Newton 渗流方程的 Cauchy 问题

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) + \lambda u^q = 0, \quad (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^N, \quad (6.1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (6.2)$$

其中 $p > 2, q > p - 1 + \frac{p}{N}, N \geq 1, \lambda > 0$, 在 2017 年, 文献 [78] 考虑了当非负初值 u_0 属于不同的函数空间 $W_\sigma(\mathbb{R}^N)$ (σ 不同) 时对其解的复杂渐近行为的影响. 我们发现, 如果 $0 < \sigma < \frac{p}{q-p+1}$, 当初值 $u_0 \in W_\sigma^+(\mathbb{R}^N) \equiv \{\varphi \in W_\sigma(\mathbb{R}^N); \varphi \geq 0\}$ 时, 非 Newton 渗流方程 Cauchy 问题 (6.1) 和 (6.2) 的解在 $C_0(\mathbb{R}^N)$ 中不可能产生复杂的渐近行为. 如果 $\frac{p}{q-p+1} \leq \sigma < N$, 当初值 $u_0 \in W_\sigma^+(\mathbb{R}^N) \equiv \{\varphi \in W_\sigma(\mathbb{R}^N); \varphi \geq 0\}$ 时, 非 Newton 渗流方程 Cauchy 问题 (6.1) 和 (6.2) 的解在 $C_0(\mathbb{R}^N)$ 中有可能产生复杂的渐近行为. 事实上, 如果 $M > 0$, 当 $\sigma = \frac{p}{q-p+1}$ 时, 则存在一个初值函数

$$u_0 \in B_M^{\sigma,+} \equiv \{f \in W_\sigma^+(\mathbb{R}^N); \|f\|_{W_\sigma(\mathbb{R}^N)} \leq M\}$$

满足对 $\phi \in B_M^{\sigma,+}$, 都存在一个数列 $\{t_n\}$ 满足

$$\lim_{t_n \rightarrow \infty} t_n^{\frac{\sigma}{\sigma(p-2)+p}} u(t_n^{\frac{\sigma}{\sigma(p-2)+p}} x, t_n) = v(x, 1), \quad \text{在 } L^\infty(\mathbb{R}^N) \text{ 中},$$

其中 $v(x, t)$ 是当初值 $v(x, 0) = \phi$ 时, 含吸收项非 Newton 渗流方程 Cauchy 问题 (6.1) 和 (6.2) 的解; 或当 $\frac{p}{q-p+1} < \sigma < N$ 时, 存在一个初值函数 $u_0 \in B_M^{\sigma,+}$ 满足对 $\phi \in B_M^{\sigma,+}$, 都有一个数列 $\{t_n\}$ 满足

$$\lim_{t_n \rightarrow \infty} t_n^{\frac{\sigma}{\sigma(p-2)+p}} u(t_n^{\frac{1}{\sigma(p-2)+p}} x, t_n) = w(x, 1), \quad \text{在 } L^\infty(\mathbb{R}^N) \text{ 中,}$$

其中 $w(x, t)$ 是当初值 $w(x, 0) = \phi(x)$ 时, 不含吸收项非 Newton 渗流方程 Cauchy 问题 (4.1) 和 (4.2) 的解. 从而, $\sigma = \frac{p}{q-p+1}$ 是非 Newton 渗流方程 Cauchy 问题 (6.1) 和 (6.2) 解复杂渐近行为的一个临界指标.

参考文献

- 1 Boussinesq J. Recherches théoriques sur l'écoulement des nappes d'eau infiltrées dans le sol et sur le débit des sources. J Math Pures Appl (9), 1904, 10: 5–78
- 2 Leibenzon L S. The Motion of a Gas in a Porous Medium. Complete Works, vol. 2. Moscow: Acad Sciences USSR, 1953
- 3 Muskat M. The flow of homogeneous fluids through porous media. Soil Science, 1938, 46: 169
- 4 Zel'dovich Y B, Raizer Y P. Physics of Shock Waves and High-Temperature Hydrodynamic Phenomena. New York: Academic Press, 2002
- 5 Zel'dovich Y B, Technica S. Gas dynamics (Book Reviews: Physics of Shock Waves and High-Temperature Hydrodynamic Phenomena, vol. 1). Science, 1967, 156: 1353–1356
- 6 Muskat M, Meres M W. The flow of heterogeneous fluids through porous media. Physics, 1936, 7: 346–363
- 7 Sacks P E. Continuity of solutions of a singular parabolic equation. Nonlinear Anal, 1983, 7: 387–409
- 8 Caffarelli L A, Vázquez J L, Wolanski N I. Lipschitz continuity of solutions and interfaces of the N -dimensional porous medium equation. Indiana Univ Math J, 1985, 36: 373–401
- 9 Aronson D G. The porous medium equation. In: Nonlinear Diffusion Problems. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1224. New York: Springer, 1986, 1–46
- 10 Kalashnikov A S. Some problems of the qualitative theory of nonlinear degenerate second-order parabolic equations. Russian Math Surveys, 1987, 42: 135–176
- 11 Pierre M. Uniqueness of the solutions of $u_t - \delta\phi(u) = 0$ with initial datum a measure. Nonlinear Anal, 1982, 6: 175–187
- 12 Samarskii A A, Galaktionov V A, Kurdyumov S P, et al. Blow-up in quasilinear parabolic equations. SIAM Rev, 1996, 38: 692–694
- 13 Caffarelli L A, Vázquez J L. Viscosity solutions for the porous medium equation. In: Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. 65. Providence: Amer Math Soc, 1999, 13–26
- 14 Carrillo J A, Jüngel A, Markowich P A, et al. Entropy dissipation methods for degenerate parabolic problems and generalized Sobolev inequalities. Monatsh Math, 2001, 133: 1–82
- 15 Otto F. The geometry of dissipative evolution equations: The porous medium equation. Comm Partial Differential Equations, 2001, 26: 101–174
- 16 Chasseigne E, Vázquez J L. Theory of extended solutions for fast-diffusion equations in optimal classes of data: Radiation from singularities. Arch Ration Mech Anal, 2002, 164: 133–187
- 17 Del Pino M, Dolbeault J. Best constants for Gagliardo-Nirenberg inequalities and applications to nonlinear diffusions. J Math Pures Appl (9), 2002, 81: 847–875
- 18 Lee K A, Vázquez J L. Geometrical properties of solutions of the porous medium equation for large times. Indiana Univ Math J, 2003, 52: 991–1016
- 19 Dibenedetto E. Degenerate Parabolic Equations. New York: Springer, 2010
- 20 Oleinik O A, Kalashnikov A S, Czhou J L. The Cauchy problem and boundary problems for equations of the type of unsteady filtration. Izv Akad Nauk SSSR Ser Mat, 1958, 22: 667–704
- 21 Kamenomostskaya S. The asymptotic behaviour of the solution of the filtration equation. Israel J Math, 1973, 14: 76–87
- 22 van Duijn C J, de Graaf J M. Large time behaviour of solutions of the porous medium equation with convection. J Differential Equations, 1990, 84: 183–203

- 23 Kamin S, Vázquez J L. Asymptotic behaviour of solutions of the porous medium equation with changing sign. *SIAM J Math Anal*, 1991, 22: 34–45
- 24 Aronson D G, Peletier L A. Large time behaviour of solutions of the porous medium equation in bounded domains. *J Differential Equations*, 1992, 39: 378–412
- 25 Bonforte M, Grillo G. Asymptotics of the porous media equation via Sobolev inequalities. *J Funct Anal*, 2005, 225: 33–62
- 26 Friedman A, Kamin S. The asymptotic behavior of gas in an n -dimensional porous medium. *Trans Amer Math Soc*, 1980, 262: 551–563
- 27 Kamin S, Vázquez J L. Fundamental solutions and asymptotic behaviour for the p -Laplacian equation. *Rev Mat Iberoam*, 1988, 4: 339–354
- 28 Vázquez J L. Asymptotic behaviour for the porous medium equation posed in the whole space. *J Evol Equ*, 2003, 3: 67–118
- 29 Budd C J, Collins G J, Galaktionov V A. An asymptotic and numerical description of self-similar blow-up in quasilinear parabolic equations. *J Comput Appl Math*, 1998, 97: 51–80
- 30 Quirós F, Vázquez J L. Asymptotic behaviour of the porous media equation in an exterior domain. *Ann Sc Norm Super Pisa Cl Sci* (5), 1999, 9: 183–227
- 31 Galaktionov V A, Peletier L A, Vázquez J L. Asymptotics of the fast-diffusion equation with critical exponent. *SIAM J Math Anal*, 2000, 31: 1157–1174
- 32 Carrillo J A, Toscani G. Asymptotic L^1 -decay of solutions of the porous medium equation to self-similarity. *Indiana Univ Math J*, 2000, 49: 113–142
- 33 Del Pino M, Dolbeault J. Nonlinear diffusions and optimal constants in Sobolev type inequalities: Asymptotic behaviour of equations involving the p -Laplacian. *Comptes Rendus Math*, 2002, 334: 365–370
- 34 Carrillo J A, Vázquez J L. Fine asymptotics for fast diffusion equations. *Comm Partial Differential Equations*, 2003, 28: 1023–1056
- 35 Brändle C, Quirós F, Vázquez J L. Asymptotic behaviour of the porous media equation in domains with holes. *Interfaces Free Bound*, 2007, 9: 211–232
- 36 La Salle J P. The Stability of Dynamical Systems. *CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics*. Philadelphia: SIAM, 1976
- 37 Barenblatt G I. Self-similarity: Dimensional analysis, and intermediate asymptotics. *J Appl Math Mech*, 1980, 44: 267–272
- 38 Lions P L. Asymptotic behavior of some nonlinear heat equations. *Phys D*, 1982, 5: 293–306
- 39 Vázquez J L, Zuazua E. Complexity of large time behaviour of evolution equations with bounded data. *Chin Ann Math Ser B*, 2002, 23: 293–310
- 40 Cazenave T, Dickstein F, Weissler F B. Universal solutions of a nonlinear heat equation on $\mathbb{R}^N$. *Ann Sc Norm Super Pisa Cl Sci* (5), 2003, 1: 77–118
- 41 Cazenave T, Dickstein F, Weissler F B. Universal solutions of the heat equation on $\mathbb{R}^N$. *Discrete Contin Dyn Syst*, 2003, 9: 1105–1132
- 42 Cazenave T, Dickstein F, Weissler F B. A solution of the constant coefficient heat equation on $\mathbb{R}$ with exceptional asymptotic behavior: An explicit construction. *J Math Pures Appl* (9), 2006, 85: 119–150
- 43 Cazenave T, Dickstein F, Weissler F B. Nonparabolic asymptotic limits of solutions of the heat equation on $\mathbb{R}^N$. *J Dynam Differential Equations*, 2007, 19: 789–818
- 44 Cazenave T, Dickstein F, Weissler F B. Multi-scale multi-profile global solutions of parabolic equations in $\mathbb{R}^N$. *Discrete Contin Dyn Syst Ser S*, 2013, 5: 449–472
- 45 Mouajria H, Tayachi S, Weissler F B. The heat semigroup on sectorial domains, highly singular initial values and applications. *J Evol Equ*, 2016, 16: 341–364
- 46 Cazenave T, Dickstein F, Weissler F B. Chaotic behavior of solutions of the Navier-Stokes system in $\mathbb{R}^N$. *Adv Differential Equations*, 2006, 10: 361–398
- 47 Fang D Y, Xie J, Cazenave T. Multiscale asymptotic behavior of the Schrödinger equation. *Funkcial Ekvac*, 2011, 54: 69–94
- 48 Vázquez J L, Winkler M. Highly time-oscillating solutions for very fast diffusion equations. *J Evol Equ*, 2011, 11:

- 725–742
- 49 Yin J X, Wang L W, Huang R. Complexity of asymptotic behavior of solutions for the porous medium equation with absorption. *Acta Math Sci Ser B Engl Ed*, 2010, 30: 1865–1880
 - 50 Yin J X, Wang L W, Huang R. Complexity of asymptotic behavior of the porous medium equation in $\mathbb{R}^N$. *J Evol Equ*, 2011, 11: 429–455
 - 51 Wang L W, Yin J X, Jin C H. ω -Limit sets for porous medium equation with initial data in some weighted spaces. *Discrete Contin Dyn Syst Ser B*, 2013, 1: 223–236
 - 52 Wang L W, Yin J X. Critical exponent for the asymptotic behavior of rescaled solutions to the porous medium equation. *Electron J Differential Equations*, 2017, 10: 1–10
 - 53 Wang L W. Relation between solutions and initial values for evolution p -Laplacian equation. *Appl Math Lett*, 2017, 69: 55–60
 - 54 Carrillo J A, Vázquez J L. Asymptotic complexity in filtration equations. *J Evol Equ*, 2007, 7: 471–495
 - 55 Wang L W, Yin J X, Cao J D. Remark on the Cauchy problem for the evolution p -Laplacian equation. *J Inequal Appl*, 2017, 175: 1–16
 - 56 Battelli F, Fečkan M. Chaos in the beam equation. *J Differential Equations*, 2005, 209: 172–227
 - 57 Lan Y, Li Y C. On the dynamics of Navier-Stokes and Euler equations. *J Stat Phys*, 2008, 132: 35–76
 - 58 Li Y, McLaughlin D W. Homoclinic orbits and chaos in discretized perturbed NLS systems: Part I. Homoclinic orbits. *J Nonlinear Sci*, 1997, 7: 211–269
 - 59 Li Y. Persistent homoclinic orbits for nonlinear Schrödinger equation under singular perturbation. *Dyn Partial Differ Equ*, 2004, 1: 87–123
 - 60 Herraiz L. Asymptotic behaviour of solutions of some semilinear parabolic problems. *Ann Inst H Poincaré Anal Non Linéaire*, 1999, 16: 49–105
 - 61 Widder D V. *The Heat Equation*. Cambridge: Academic Press, 1976
 - 62 Ladyženskaja O A, Solonnikov V A, Uralčeva N N. *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type*. Providence: Amer Math Soc, 1968
 - 63 Vázquez J L. *The Porous Medium Equation: Mathematical Theory*. New York: Clarendon Press; Oxford: Oxford University Press, 2007
 - 64 Alikakos N D, Rostamian R. On the uniformization of the solutions of the porous medium equation in $\mathbb{R}^N$. *Israel J Math*, 1984, 47: 270–290
 - 65 Wang L W, Yin J X. Proper spaces for the asymptotic convergence of solutions of porous medium equation. *Nonlinear Anal Real World Appl*, 2017, 38: 261–270
 - 66 Kamin S, Peletier L A. Large time behaviour of solutions of the porous media equation with absorption. *Israel J Math*, 1986, 55: 129–146
 - 67 Kwak M. A porous media equation with absorption, I: Long time behaviour. *J Math Anal Appl*, 1998, 223: 96–110
 - 68 Gmira A, Veron L. Large time behaviour of the solutions of a semilinear parabolic equation in $\mathbb{R}^N$. *J Differential Equations*, 1984, 53: 258–276
 - 69 Kamin S, Peletier L A. Large time behaviour of solutions of the heat equation with absorption. *Ann Sc Norm Super Pisa Cl Sci (4)*, 1985, 12: 393–408
 - 70 Peletier L A, Zhao J N. Large time behaviour of solutions of the porous media equation with absorption: The fast diffusion case. *Nonlinear Anal*, 1991, 17: 991–1009
 - 71 Zhao J N. The asymptotic behavior of solutions of a quasilinear degenerate parabolic equation. *J Differential Equations*, 1993, 102: 33–52
 - 72 Chen X F, Qi Y W, Wang M X. Long time behavior of solutions to P -Laplacian equation with absorption. *SIAM J Math Anal*, 2003, 35: 123–134
 - 73 Wu Z Q, Yin J X, Li H L, et al. *Nonlinear Diffusion Equations*. Singapore: World Scientific Publishing, 2001
 - 74 Bénilan P, Crandall M G, Pierre M. Solutions of the porous medium equation in $\mathbb{R}^N$ under optimal conditions on initial values. *Indiana Univ Math J*, 1984, 33: 51–87
 - 75 Vázquez J L. *Smoothing and Decay Estimates for Nonlinear Diffusion Equations: Equations of Porous Medium Type*. Oxford: Oxford University Press, 2006
 - 76 Wang L W, Yin J X, Zhou Y. Complicated asymptotic behavior of solutions for porous medium equation in unbounded

- space. J Differential Equations, 2018, 264: 6302–6324
- 77 Wang L W, Yin J X. Classifications of asymptotic behavior of solutions for evolutionary p -Laplacian equation. Preprint, 2017
- 78 Wang L W, Yin J X, Wu Y Q. Complicated asymptotic behavior exponents for solutions of the evolution p -Laplacian equation with absorption. Bound Value Probl, 2017, 2017: 73

The complicated asymptotic behavior for the nonlinear diffusion equations

Liangwei Wang & Jingxue Yin

Abstract In this paper, we introduce some aspects of research for the asymptotic behavior of solutions of the nonlinear diffusion equations. Our main efforts are to present some results and theories for the complicated asymptotic behavior of solutions to the Cauchy problem of the nonlinear diffusion equations.

Keywords nonlinear diffusion equations, asymptotic behavior, complexity, porous medium equation, Cauchy problem

MSC(2010) 35B40, 35K65

doi: 10.1360/N012018-00035