循序扩大代数流下内幕交易者的对数期望效用最大化

李标¹, 邓军^{2*}

1. 中南财经政法大学金融学院, 武汉 430073;

2. 对外经济贸易大学金融学院, 北京 100029

E-mail: jackleeb@163.com, jundeng@uibe.edu.cn

收稿日期: 2018-08-11; 接受日期: 2019-04-11; 网络出版日期: 2019-11-07; * 通信作者

中南财经政法大学中央高校基本科研业务费专项资金 (批准号: 2722019JCT013) 和国家自然科学基金 (批准号: 11501105) 资助项目

摘要 本文研究循序扩大代数流下内幕交易者的对数期望效用最大化问题, 其中内幕交易者拥有的额外信息由随机时间 τ 表示. 本文利用市场的可料特征和随机时间完全刻画内幕交易者的最优策略, 并且得到市场局部鞅密度的显式形式. 本文的主要定理推广 Goll 和 Kallsen (2000, 2003) 关于内幕交易的研究结果.

关键词 对数效用最大化 扩大代数流 内幕交易

MSC (2010) 主题分类 60G07, 60G40, 60G44, 60G57

1 引言

Merton^[1] 的最优投资组合问题是数理金融研究的经典问题之一. 文献中提出了一些非常有效的方法去研究这类问题, 如动态规划方法和鞅的对偶方法 (参见文献 [1–6] 等).

本文假设金融市场的价格动态过程是由一个半鞅描述, 进而研究在有限到期时间 T 内, 内幕交易者的对数效用最大化问题. 除了公共信息流 $\mathbb{F}$ 外, 内幕交易者还拥有由随机时间 τ 带来的额外信息. 内幕信息 τ 可以表示股票价格达到某一价格水平的时间、企业收购时间和机构破产时间等. 内幕交易者最优问题可以通过如下数学形式来刻画:

$$\text{内幕交易者效用最大化问题: } \max_{\phi \in \text{Adm}(\mathbb{F}, \tau)} E[\log(1 + \phi \cdot S_{\tau \wedge T})]. \quad (1.1)$$

由于内幕交易者能够同时利用公开信息 $\mathbb{F}$ 和拥有的额外信息 τ 来构造交易策略, 因此可能获得套利机会. 一般来说, 最大化问题 (1.1) 可能是不适定的且无解的. 已有研究证明了局部效用最大化问题

英文引用格式: Li B, Deng J. Logarithmic utility maximization for insiders in progressively enlarged filtrations (in Chinese). Sci Sin Math, 2020, 50: 1597–1608, doi: 10.1360/SCM-2018-0558

的最优策略存在的充分必要条件是金融市场满足 NUPBR (no-unbounded-profit-with-bounded-risk) 条件, 更多细节可参见文献 [7, 8].

为了解决内幕交易者最优化问题, 需要刻画 (1.1) 中内幕交易者的交易策略 $\text{Adm}(\mathbb{F}, \tau)$. 文献中有两种主流的方法: 初始扩大代数流和循序扩大代数流. 在初始扩大代数流框架下, 内幕交易者的交易策略是关于 $(\mathcal{F}_t \vee \sigma(\tau))_{0 \leq t \leq T}$ 适应的过程. Amendinger 等 [9] 使用鞅方法解决了在初始扩大代数流框架下内幕交易者的对数效用最大化问题.

本文研究在循序扩大代数流下内幕交易者的效用最大化问题. Kyle [10] 的内幕交易均衡模型以及 Collin-Dufresne 和 Fos [11] 的研究表明, 内幕交易者更倾向于逐步释放信息到市场, 信息对市场的影响也是逐渐发生作用的. 因此, 本文通过关于 $\mathcal{G}_t := \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s \vee \sigma(\mathbb{1}_{\{\tau \leq u\}}, u \leq s)$ 适应的过程来刻画内幕交易者的策略. 并且, 我们证明了最优策略完全由市场 S 的可料特征和随机时间 τ 刻画. 进一步, 我们得到了 S^τ 的局部鞅密度的显式形式, 因此可以用来作为定价密度函数.

本文余下内容的结构如下: 第 2 节给出对数效用最大化和循序扩大代数流的预备知识和本文的主要定理. 第 3 节证明主要定理 2.2. 最后一节为本文的结论.

2 预备知识与主要结果

给定一个带流域的概率空间 $(\Omega, \mathbb{F}, (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}, \mathbb{P})$. 在有限时间范围 T 内, 我们通过一个 d -维半鞅 $(S_t)_{0 \leq t \leq T}$ 来刻画金融市场价格动态过程. 其中 $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ 是所有参与者均能从市场上获取的公开信息流. 考虑一个内幕交易者, 除了公共信息 $\mathbb{F}$, 还拥有由一个随机时间 τ 产生的额外信息. 内幕交易者能够利用从 τ 中获取的信息优势在市场中寻求可能的套利机会.

2.1 循序扩大代数流

如何刻画公开信息 $\mathbb{F}$ 和额外信息 τ 是研究内幕交易者套利机会和最优投资组合的关键. 文献中有两种主流的方法: 初始扩大代数流和循序扩大代数流. Amendinger 等 [9] 解决了初始扩大代数流下的对数效用最大化问题. 在此, 我们将研究循序扩大代数流框架下的最优化问题. 对有限的随机时间 τ , 用 H 表示右连续过程 $H_t = \mathbb{1}_{\{\tau \leq t\}}$. 令 $\mathbb{G} = (\mathcal{G}_t)_{t \geq 0}$ 表示包含 $\mathbb{F}$ 并且使得 τ 为停时的最小右连续代数流, 其中 $\mathcal{G}_t := \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s \vee \sigma(H_u, u \leq s)$. 内幕交易者的策略是 $\mathbb{G}$ -可测的, 由此也包含了所有的 $\mathbb{F}$ -可测策略.

为进一步描述内幕交易者 $\mathbb{G}$ -可测策略, 我们引入

$$Z_t := \mathbb{P}(\tau > t \mid \mathcal{F}_t), \quad m_t = Z_t + A_t^{o, \mathbb{F}}, \quad (2.1)$$

则 Z 为 $\mathbb{F}$ -上鞅, m 为 $\mathbb{F}$ -鞅, 其中 $A^{o, \mathbb{F}}$ 是 $\mathbb{1}_{[\tau, \infty[}$ 的 $\mathbb{F}$ -对偶可测投影. 文献 [12, 引理 0] 证明了 Z_t 和 Z_{t-} 在 $[0, \tau]$ 上是严格正的.

为了区分不同代数流, 我们用 $\langle \cdot, \cdot \rangle^{\mathcal{F}}$ 和 $\langle \cdot, \cdot \rangle^{\mathcal{G}}$ 分别表示在代数流 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{G}$ 下计算的可料尖括号过程. 对一个随机过程 X , X^τ 表示停止在时间 τ 的过程, 即 $X_t^\tau = X_{t \wedge \tau}$. 令 $\mathcal{E}(X)$ 表示 Doléans-Dade 随机指数, 它是随机微分方程 $dY_t = Y_{t-} dX_t$ 在初始值为 $Y_0 = 1$ 时的解. $\mathcal{M}(\mathbb{H})$ 表示 $\mathbb{H}$ -鞅构成的集合. 若 $\mathcal{C}(\mathbb{H})$ 是 $\mathbb{H}$ -适应过程集合, 我们用 $\mathcal{C}_{\text{loc}}(\mathbb{H})$ 表示满足如下条件随机过程 X 的集合: 存在一个递增至 $+\infty$ 的 $\mathbb{H}$ -停时序列 $(T_n)_{n \geq 1}$, 使得停止过程 X^{T_n} 属于 $\mathcal{C}(\mathbb{H})$. 对于任意 $\mathbb{H}$ -可料过程 H , 用 $H \cdot S$ 表示 H 关于 S 的半鞅随机积分.

对任意 $\mathbb{F}$ -局部鞅 M , 并不一定是 $\mathbb{G}$ 下的局部鞅. Jeulin 和 Yor^[13] 及 Jeulin^[14] 和 Barlow^[15] 建立了如下一般性的结论.

引理 2.1 令 M 是一个 $\mathbb{F}$ -局部鞅. 对任意随机时间 τ , 过程 $\widehat{M}$ 为 $\mathbb{G}$ -局部鞅,

$$\widehat{M}_t := M_t^\tau - \int_0^{t \wedge \tau} \frac{d\langle M, m \rangle_s^\mathbb{F}}{Z_{s-}}. \quad (2.2)$$

我们以一个重要的命题结束本小节, 证明由 Aksamit 等^[16,17] 给出. 关于扩大代数流的文献, 可参见文献 [13,14].

命题 2.1 对任意 $\mathbb{G}$ -停时 $\sigma^\mathbb{G}$, 存在一个 $\mathbb{F}$ -停时 $\sigma^\mathbb{F}$ 满足

$$\sigma^\mathbb{G} \wedge \tau = \sigma^\mathbb{F} \wedge \tau. \quad (2.3)$$

2.2 可料特征

由 Jacod^[18] 及 Jacod 和 Shiryaev^[19] 引入的可料特征, 刻画了半鞅的局部性质, 也成为了随机分析重要的工具之一. 本文将借助可料特征来刻画最优策略. 首先, 回顾一下半鞅 S 可料特征的定义. 随机测度 μ 为

$$\mu(dt, dx) := \sum \mathbb{1}_{\{\Delta S_u \neq 0\}} \delta(u, \Delta S_u)(dt, dx).$$

在下文中, 我们用 $\mathcal{J} := \{\Delta S \neq 0\}$ 表示 S 的跳集合, S^c 表示 S 的连续局部鞅部分, 可得出如下标准分解:

$$S = S_0 + S^c + h * (\mu - \nu) + (x - h) * \mu + B, \quad (2.4)$$

其中 B 是一个有限变差的随机测度 ν 是随机测度 μ 的对偶可料投影, $h(x) := x \mathbb{1}_{\{|x| \leq 1\}}$ 是标准截断函数, C 是元素为 $C^{ij} := \langle S^{c,i}, S^{c,j} \rangle^\mathbb{F}$ 的矩阵. 称 (B, C, ν) 为 S 的可料特征. 此外, 我们能找到另一个版本的可料特征 (b, c, A, F) 满足

$$\begin{aligned} B &= b \cdot A, \quad C = c \cdot A, \quad \nu(\omega, dt, dx) = dA_t(\omega) F_{\omega, t}(dx), \\ \int (|x|^2 \wedge 1) F(dx) &\leq 1, \quad \Delta B_t = \int h(x) \nu(\{t\} \times dx), \quad c \Delta A = 0, \\ a_t &:= \nu(\{t\} \times \mathbb{R}^d) \leq 1, \quad a = {}^p(\mathbb{1}_{\mathcal{J}}). \end{aligned} \quad (2.5)$$

令

$$G_{\text{loc}}(\mu) = \{f \in \widetilde{\mathcal{P}}, f \text{ 关于 } \mu - \nu \text{ 可积}\}.$$

更多关于半鞅的可料特征的定义、符号和细节, 可参见文献 [19,20].

2.3 对数效用最大化问题

考虑一个满足完备性和右连续性的代数流 $\mathbb{H}$. 对任意 $a > 0$, 称 $\mathbb{R}^d$ 值 $\mathbb{H}$ -可测过程 $(\phi_t)_{0 \leq t \leq T}$ 为 S 的一个 a -可容许策略, 若 ϕ 是 S -可积, 且对任意 $t \in [0, T]$, 有

$$\phi \cdot S_t \geq -a.$$

称 ϕ 是一个 $\mathbb{H}$ -可容许策略, 若存在某个常数 a 使得 $\phi \cdot S$ 是下有界的. 令

$$\text{Adm}(x_0, S, \mathbb{H}) := \{\phi : \phi \text{ 是 } \mathbb{H}\text{-可测的和 } S\text{-可积的, } \phi \cdot S \geq -x_0 \text{ 且 } E[\log^-(x_0 + \phi \cdot S_T)] < +\infty\},$$

财富过程集合为

$$\mathcal{X}(x_0, \mathbb{H}) = \{x_0 + \phi \cdot S_T : \phi \in \text{Adm}(x_0, S, \mathbb{H})\}.$$

定义 2.1 可容许策略 $\pi \in \text{Adm}(x_0, S, \mathbb{H})$ 称为最优策略, 若对任意 $\varphi \in \text{Adm}(x_0, S, \mathbb{H})$, 有

$$\mathbb{E}[\log(x_0 + \varphi \cdot S_T)] \leq \mathbb{E}[\log(x_0 + \pi \cdot S_T)].$$

本文研究内幕交易者的对数效用最大化问题. 内幕交易者拥有公共信息流 $\mathbb{F}$ 和额外信息 τ . 在循序扩大代数流框架下, 内幕交易者的最优化问题可以表述成

$$\text{内幕交易者的最优化问题: } \max_{\phi \in \text{Adm}(1, S^\tau, \mathbb{G})} \mathbb{E}[\log(1 + \phi \cdot S_{\tau \wedge T})]. \quad (2.6)$$

为了使得最优化问题有解, 下面回顾 NUPBR 无套利条件, 更多细节可参见文献 [7, 8].

定义 2.2 考虑一个满足完备性和右连续性的代数流 $\mathbb{H}$, 且 S 是一个 $\mathbb{H}$ -半鞅. 称过程 S 满足 no-unbounded-profit-with-bounded-risk 条件 (简称为 NUPBR($\mathbb{H}$)), 若集合

$$\mathcal{K} := \{\phi \cdot S_T : \phi \text{ 是 } S\text{-可积的, 且 } \phi \cdot S \geq -1\} \quad (2.7)$$

在概率 P 下是有界的.

Takaoka 和 Schweizer^[21] 建立了 NUPBR($\mathbb{H}$) 与 σ -鞅密度的内在联系, 见如下定理所示.

定义 2.3 称 X 是一个 $(\mathbb{H}, \sigma)$ -鞅, 若存在一个 $\mathbb{H}$ -可测的实值过程 ϕ 满足 $0 < \phi \leq 1$, 并且 $\phi \cdot X$ 是 $\mathbb{H}$ -鞅. 如果某一过程 D 是 $\mathbb{H}$ -局部鞅, 并且使得 DS 是一个 σ -鞅, 则称 D 是 S 的 σ -鞅密度.

定理 2.1^[21] 令 $\mathbb{H}$ 为满足完备性和右连续性的代数流, S 是一个 $\mathbb{H}$ -适应半鞅, 则 S 满足 NUPBR($\mathbb{H}$) 当且仅当存在 S 的 σ -鞅密度.

2.4 主要结果

本小节利用 S 的可料特征和 τ 来刻画内幕交易者的最优策略.

假设 2.1 Z 和 m 均是连续的.

令 m 关于 S 的 Kunita-Watanabe 分解为

$$m = \beta \cdot S^c + m^\perp, \quad (2.8)$$

其中 β 是关于 S 连续局部鞅 S^c 可积的 $\mathbb{F}$ -适应过程, 且 $m^\perp$ 与 S^c 正交. 令集合

$$\mathcal{D} := \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^d : 1 + \inf_{x \in \text{supp}(F_t(dx))} \lambda' x \geq 0 \right\}, \quad (2.9)$$

$\text{int}(\mathcal{D})$ 表示 $\mathcal{D}$ 的内部. 这个概念将在下面定理中起到重要作用.

定理 2.2 若假设 2.1 成立, 并且 S 满足 NUPBR($\mathbb{F}$), $\text{int}(\mathcal{D}) \neq \emptyset$, 对任意 $\lambda \in \text{int}(\mathcal{D})$, 有

$$\int \left| \frac{x}{1 + \lambda' x} - h(x) \right| F(dx) < +\infty, \quad \text{在 } [0, \tau \wedge T] - F \otimes A \quad \text{a.s.}, \quad (2.10)$$

则有如下命题成立.

(1) 内幕交易者效用最大化问题 (2.6) 的最优投资策略为

$$\varphi_t := \tilde{\pi}_t \mathcal{E}(\tilde{\pi} \cdot S)_{t-},$$

其中 $\tilde{\pi}$ 为

$$r(\pi) := b - c\pi + \frac{\beta c}{Z_-} + \int \left(\frac{x}{1 + \pi'x} - h(x) \right) F(dx) = 0 \quad (2.11)$$

的根, 且 $\tilde{\pi} \in \text{int}(\mathcal{D})$. 进一步, 最优财富过程为 $V_t := \mathcal{E}(\tilde{\pi} \cdot S^\tau)_t$.

(2) $\mathbb{G}$ -局部鞅 $\mathcal{E}(\tilde{N})$ 是 S^τ 的局部鞅密度, 其中

$$\tilde{N} := -\tilde{\pi} \cdot \widehat{S}^c + \left(\frac{1}{1 + \tilde{\pi}'x} - 1 \right) * (\mu^{\mathbb{G}} - \nu^{\mathbb{G}}), \quad (2.12)$$

$\widehat{S}^c$ 由引理 2.1 中的 (2.2) 给出, $\mu^{\mathbb{G}}$ 和 $\nu^{\mathbb{G}}$ 为 S^τ 在 $\mathbb{G}$ 中的跳测度和对偶可料投影.

(3) S^τ 满足 NUPBR($\mathbb{G}$).

Choulli 等^[22] 研究最小 Hellinger 鞅测度时首次提出了条件 (2.10). 定理 2.2 完全刻画了最优策略和最优财富过程. 进一步, 我们给出了 S^τ 的局部鞅密度的显式形式, 同时还证明了 S^τ 满足 NUPBR($\mathbb{G}$). Aksamit 等^[16, 17] 在没有假设 2.1 条件下, 研究了 S^τ 满足 NUPBR($\mathbb{G}$) 的充分必要条件. 但是, 文献 [16] 中得到的局部鞅密度与 (2.12) 并不等价.

注 2.1 (1) 最优投资组合不依赖于 h 的选择. 利用文献 [19, 命题 2.24], 若 $\tilde{h}$ 是另一个截断函数, B 与 $\tilde{B}$ 的关系为 $B(h) - B(\tilde{h}) = (h - \tilde{h}) * \nu$. 将其代入 (2.11), 我们可以得到

$$\tilde{b} - c\pi + \frac{\beta c}{Z_-} + \int \left(\frac{x}{1 + \pi'x} - \tilde{h}(x) \right) F(dx) = 0.$$

(2) 根据 $\{\Delta A = 0\}$ 是否成立, 方程 (2.11) 可以重新用其他形式表达. 在集合 $\{\Delta A \neq 0\}$ 上, 最优投资组合 $\pi_{\{\Delta A \neq 0\}}$ 是 $\int \left(\frac{x}{1 + \pi'x} \right) F(dx) = 0$ 的根.

注 2.2 (1) 如果将对数财富过程 $\log(1 + \varphi \cdot S^\tau)$ 的漂移率定义为一个投资组合的增长率. 通过 Doléans-Dade 随机指数计算可知, 在 $[0, \tau]$ 上的增长率为

$$g(\varphi) = \varphi'b + \frac{\varphi'\beta c}{Z_-} - \frac{1}{2}\varphi'c\varphi + \int \{\log(1 + \varphi'x) - \varphi h\} F(dx). \quad (2.13)$$

通过对 (2.13) 求导的方法获得 $g(\varphi)$ 的极小值 (形式上的), 可以得到

$$b - c\pi + \frac{\beta c}{Z_-} + \int \left(\frac{x}{1 + \pi x} - h(x) \right) F(dx) = 0.$$

该方程正好是 (2.11). 一般来说, 我们并不知道我们是否能对 (2.13) 进行微分. Goll 和 Kallsen^[23, 24] 在没有内幕信息 τ 的一般半鞅市场下指出了这种关系.

(2) 若 $\tau = +\infty$, 则有 $m = 0$ 和 $\beta = 0$, 定理 2.2 即为文献 [23] 的结果.

(3) 若 τ 是一个拟停时^[25], 则 $Z = m - (\mathbb{1}_{[\tau, +\infty]})^{\circ, \mathbb{F}}$, $m = 1$, 且 $\beta = 0$. 定理 2.2 退化成没有内幕信息 τ 的情形.

(4) 一般来说, 金融市场 S^τ 并不满足文献 [26] 提出的 no-free-lunch-with-vanish-risk 条件. 但我们依然可以在 NUPBR 条件下研究对数效用最大化问题. 事实上, 将 NUPBR 作为前提条件并不是必须的, 它是最优投资组合存在时的直接推论. Karatzas 和 Kardaras^[8] 及 Kardaras^[27] 在没有内幕交易者情形下作了很多深入的研究和讨论.

2.5 例子

本小节考虑一个由 Brown 运动驱动连续金融市场, 定理 2.2 中的条件 (2.11) 会退化成一个非常简单的形式. 令 W 是一个在代数流 $\mathbb{F}^W$ 的一维标准 Brown 运动, 金融资产价格由如下过程描述:

$$dS_t = S_t \mu_t dt + S_t \sigma_t dW_t, \quad \mu_t \geq 0 \quad \text{且} \quad \sigma_t > 0.$$

令

$$N_t := \exp \left(\int_0^t S_u^2 \sigma_u^2 dW_u - \frac{1}{2} \int_0^t S_u^2 \sigma_u^2 du \right), \quad \bar{N}_t := \sup_{0 \leq u \leq t} N_u, \quad \hat{N}_t := \sup_{u \geq t} N_u.$$

显然, N 是一个正的连续 $\mathbb{F}^W$ -鞅, 满足 $N_0 = 1$ 和 $N_t \rightarrow 0$. 由文献 [28, 引理 0.1] 可知, 对任意 $\mathbb{F}^W$ -停时 ξ , $N_\xi / \hat{N}_\xi$ 是一个独立于 $\mathcal{F}_\xi$, 且服从均匀分布的随机变量. 定义有限的随机时间 τ 为

$$\tau := \sup\{t \geq 0 : N_t = \bar{N}_\infty\}.$$

由文献 [28, 例 1.3] 可知, $Z_\tau = 1$, 且 $Z_t = N_t / \bar{N}_t$. Z 的 Doob-Meyer 分解为

$$Z_t = m_t - A_t^{p, \mathbb{F}^W}, \quad \text{其中} \quad m_t = 1 + \int_0^t \frac{N_u}{\bar{N}_u} dS_u^c, \quad A_t^{p, \mathbb{F}^W} = \log(\bar{N}_t).$$

故 m 的 Kunita-Watanabe 分解为 $m_t = 1 + \beta \cdot S_t^c$, 其中 $\beta_t = N_t / \bar{N}_t$. 在这一设定下, $\mathcal{D} = \mathbb{R}^d$, 定理 2.2 的所有假设均成立, 方程 (2.11) 的根为

$$\tilde{\pi}_t = \frac{\mu_t}{S_t \sigma_t^2}.$$

故 $\varphi_t := \tilde{\pi}_t \mathcal{E}(\tilde{\pi} \cdot S)_{t-}$ 是对数效用下 S^τ 的最优投资组合. 虽然 S^τ 的对数效用最大化问题存在上面的显式最优解, 但是如以下引理所示, 市场 S^τ 存在套利机会.

引理 2.2 在市场 S^τ 中, 策略 $\varphi := \mathbb{1}_{[0, \tau]} N / \bar{N}$ 为一个套利机会.

证明 显然, φ 是 $\mathbb{G}$ -可测, 且关于 S^τ 可积. 由 $Z_\tau = 1$ 和 $m_\tau = Z_\tau + A_\tau^{p, \mathbb{F}^W}$ 可知, $m_\tau \geq 1$, P-a.s. 和 $P(m_\tau > 1) > 0$. 故对一切 $t \geq 0$, 均有

$$1 + \frac{N}{\bar{N}} \mathbb{1}_{[0, \tau]} \cdot S_t = 1 + \frac{N}{\bar{N}} \mathbb{1}_{[0, \tau]} \cdot S_t^c + \int_0^{t \wedge \tau} \frac{N_u}{\bar{N}_u} S_u \mu_u du \geq m_{t \wedge \tau}.$$

所以, φ 是 1-可容许策略, 且在市场 S^τ 中能产生套利机会. 实际上, $V_\tau := \frac{N}{\bar{N}} \cdot S_\tau \geq m_\tau - 1 \geq 0$ 且 $P(V_\tau > 0) > 0$. 引理得证. $\square$

注 2.3 在假设 Z 连续且所有 $\mathbb{F}$ -鞅连续下, Fontana 等 [29] 研究了 $\text{NUPBR}(\mathbb{G})$ 和 S^τ 的无套利性质. 在更一般的半鞅情形下, 可参见文献 [16, 17, 30].

3 主要定理 2.2 的证明

本节证明主要定理 2.2. 令

$$L := \mathcal{E}(\hat{m}), \quad \text{其中} \quad \hat{m} := -\frac{1}{Z_-} \mathbb{1}_{[0, \tau]} \cdot m + \frac{1}{Z_-^2} \mathbb{1}_{[0, \tau]} \cdot \langle m, m \rangle^{\mathbb{F}}. \quad (3.1)$$

由引理 2.1 可知, L 是一个正的 $\mathbb{G}$ -局部鞅. 首先, 我们证明对任意 $\mathbb{F}$ -局部鞅 M , L 是 M^τ 的局部鞅密度.

引理 3.1 对任意 $\mathbb{F}$ -局部鞅 M , LM^τ 是一个 $\mathbb{G}$ -局部鞅.

证明 在假设 2.1 条件下, 过程 Z 和 m 均是连续的. 由引理 2.1 可知, $\hat{m}$ 是一个连续的 $\mathbb{G}$ -局部鞅. 故 $\mathcal{E}(\hat{m})$ 是一个正的、有界的 $\mathbb{G}$ -局部鞅, 并且满足

$$-\langle M^\tau, \hat{m} \rangle^{\mathbb{G}} = \frac{1}{Z_-} \mathbb{1}_{[0, \tau]} \cdot \langle M^\tau, m \rangle^{\mathbb{G}} = \frac{1}{Z_-} \mathbb{1}_{[0, \tau]} \cdot \langle M, m \rangle^{\mathbb{F}}.$$

故由引理 2.1 可知, $M^\tau + \langle M^\tau, \hat{m} \rangle^{\mathbb{G}} = M^\tau - Z_-^{-1} \mathbb{1}_{[0, \tau]} \cdot \langle M, m \rangle^{\mathbb{F}}$ 是一个 $\mathbb{G}$ -局部鞅. 由 Itô 公式易知, $\mathcal{E}(\hat{m})M^\tau$ 是一个 $\mathbb{G}$ -局部鞅. 引理得证. $\square$

3.1 辅助结果

首先证明一个简单的命题. 不失一般性, 假设初始投资 $x_0 = 1$.

命题 3.1 假设 S 满足 NUPBR($\mathbb{F}$), 并且具有 σ -鞅密度 D , 则对数效用最大化问题

$$\max_{\phi \in \text{Adm}(1, S^\tau, \mathbb{G})} \mathbb{E}[\log(1 + \phi \cdot S_{\tau \wedge T})] \quad (3.2)$$

有上界 $\mathbb{E}[-\log(D_{T \wedge \tau} L_{\tau \wedge T})]$, 即对任意 $\varphi \in \text{Adm}(1, S^\tau, \mathbb{G})$, 有

$$\mathbb{E}[\log(1 + (\varphi \cdot S)_{T \wedge \tau})] \leq \mathbb{E}[-\log(D_{T \wedge \tau} L_{\tau \wedge T})].$$

证明 令 $\mathbb{F}$ -停时序列 $(T_n)_{n \geq 1}$ 为 D 和 DS 的局部序列, 即 D^{T_n} 和 $(DS)^{T_n}$ 均是 $\mathbb{F}$ -鞅. 故由引理 3.1 知, $LD^{\tau \wedge T_n}$ 和 $LD^{\tau \wedge T_n} S^{\tau \wedge T_n}$ 均是 $\mathbb{G}$ -局部鞅. 由文献 [31, 命题 3.3] 得知, $LD^{\tau \wedge T_n}(1 + \varphi \cdot S^{\tau \wedge T_n})$ 是一个正的 $\mathbb{G}$ -局部鞅, 故其也是一个 $\mathbb{G}$ -上鞅. 利用 Fatou 引理, 可以得到

$$\mathbb{E}[L_{\tau \wedge T} D_{\tau \wedge T}(1 + \varphi \cdot S_{\tau \wedge T})] \leq \lim_n \mathbb{E}[L_{\tau \wedge T_n} D_{\tau \wedge T_n}(1 + \varphi \cdot S_{\tau \wedge T_n})] \leq 1.$$

由对数函数的凹性可知,

$$\log(x) + \log(y) + 1 \leq xy.$$

因此,

$$\mathbb{E}[\log(1 + (\varphi \cdot S)_{T \wedge \tau})] + \mathbb{E}[\log(D_{T \wedge \tau} L_{\tau \wedge T})] \leq \mathbb{E}[L_{\tau \wedge T} D_{\tau \wedge T}(1 + (\varphi \cdot S)_{T \wedge \tau})] - 1 \leq 0.$$

命题得证. $\square$

注 3.1 命题 3.1 意味着投资组合 π 若满足 $1 + \pi \cdot S_{\tau \wedge T} = 1/(D_{\tau \wedge T} L_{\tau \wedge T})$, 则 π 是最优的策略. 这也是后文构造最优投资策略的出发点.

以下引理证明当最优投资组合存在时, 在如下意义下是唯一的.

引理 3.2 令 φ 和 π 是两个最优投资组合, 则 φ 和 π 生成两个等价的财富过程, 即

$$V_t^\varphi := 1 + \varphi \cdot S_t^\tau, \quad V_t^\pi := 1 + \pi \cdot S_t^\tau,$$

则 $V_{\tau \wedge T}^\varphi = V_{\tau \wedge T}^\pi$.

证明 由于对数函数是严格凹的, 若考虑凸投资组合 $\eta := (\varphi + \pi)/2$, 则易知 $V_{\tau \wedge T}^\varphi = V_{\tau \wedge T}^\pi$. 由命题 2.1 知, 存在 $\mathbb{F}$ -停时 $\tau^\mathbb{F}$ 使得 $\tau \wedge T = \tau^\mathbb{F} \wedge T$. 给定一个实数 $\varepsilon > 0$, 定义一个 $\mathbb{F}$ -停时

$$\sigma := \inf\{0 \leq t \leq \tau^\mathbb{F} \wedge T : V_t^\varphi - V_t^\pi \geq \varepsilon\}.$$

考虑投资组合 $\rho := \varphi \mathbb{1}_{[0, \sigma]} + \pi \mathbb{1}_{] \sigma, +\infty[}$. 显然, ρ 是 $\mathbb{F}$ -可测的 (参见文献 [19]), 并且是 1-可容许策略. 实际上, 在随机区间 $]0, \sigma]$ 上, 有

$$\rho \cdot S_t = \varphi \cdot S_t \geq -1,$$

且在随机区间 $] \sigma, +\infty[$ 上, 有

$$\rho \cdot S_t = \varphi \cdot S_\sigma + \pi \cdot S_t - \pi \cdot S_\sigma \geq \varepsilon - 1 > -1.$$

所以,

$$\begin{aligned} V_{\tau \wedge T}^\rho &:= 1 + \rho \cdot S_{\tau \wedge T} = 1 + \varphi \cdot S_{\sigma \wedge \tau \wedge T} + \pi \cdot S_{\tau \wedge T} - \pi \cdot S_{\sigma \wedge \tau \wedge T} \\ &= 1 + \pi \cdot S_{\tau \wedge T} + (\varphi - \pi) \cdot S_{\sigma \wedge \tau \wedge T} \\ &= 1 + \pi \cdot S_{\tau \wedge T} + (\varphi - \pi) \cdot S_\sigma \mathbb{1}_{\{\sigma < \tau \wedge T\}} + (\varphi - \pi) \cdot S_{\tau \wedge T} \mathbb{1}_{\{\sigma \geq \tau \wedge T\}} \\ &\geq 1 + \pi \cdot S_{\tau \wedge T} + \varepsilon \mathbb{1}_{\{\sigma < \tau \wedge T\}}. \end{aligned}$$

由于 π 是最优投资组合, 集合 $\{\sigma < \tau \wedge T\}$ 为空, 故有 $\sigma = +\infty$, P-a.s 和 $V_t^\rho = V_t^\pi$. 引理得证. $\square$

注 3.2 以上论证的经济学解释为, 在时刻 σ , 投资组合 φ 能够获得收益 $\varphi \cdot S_\sigma$, 这部分收益至少比 $\pi \cdot S_\sigma$ 好 ε (但有可能是在测度为 0 的集合上). 另一方面, 由于 φ 和 π 均是最优投资组合, 他们能获得相同的最终财富 $V_{\tau \wedge T}^\varphi = V_{\tau \wedge T}^\pi$. 所以, 在时刻 σ 之后, 由策略 φ 转换至策略 π 是一个更好的选择, 从一个较低的水平出发, π 能够得到相同的最终财富. 策略 ρ 的定义正是基于此.

3.2 S^τ 的可料特征

利用市场 S^τ 的可料特征来描述最优策略, 我们需要考虑以下引理中提到的可积性.

引理 3.3 令 π 是一个 $\mathbb{F}$ -适应过程, 且关于 S 是可积的. 令

$$\Gamma := \{(\omega, t, x) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d : |x| > 1 \text{ 或 } |\pi(\omega, t)x| > 1\},$$

则如下性质成立.

(1) $\mathbb{F}$ -半鞅 S 具有如下分解:

$$S = S_0 + S^c + xI_\Gamma * \mu + xI_{\Gamma^c} * (\mu - \nu) + B - (h - xI_{\Gamma^c}) * \nu, \quad (3.3)$$

且 π 关于 (3.3) 右式中的每一项均是可积的.

(2) S^τ 在 $\mathbb{G}$ 中的跳测度 $\mu^\mathbb{G}$ 和对偶可料投影 $\nu^\mathbb{G}$ 分别为

$$\mu^\mathbb{G}(\omega, t, x) = \mathbb{1}_{\{t \leq \tau(\omega)\}} \mu(\omega, t, x) \quad \text{和} \quad \nu^\mathbb{G}(\omega, t, x) = \mathbb{1}_{\{t \leq \tau(\omega)\}} \nu(\omega, t, x).$$

(3) 过程 S^τ 具有如下分解:

$$S^\tau = S_0 + \widehat{S^c} + xI_\Gamma * \mu^\mathbb{G} + xI_{\Gamma^c} * (\mu^\mathbb{G} - \nu^\mathbb{G}) + B^\tau + \beta Z_-^{-1} \mathbb{1}_{[0, \tau]} \cdot \langle S^c, S^c \rangle^\mathbb{F} - (h - xI_{\Gamma^c}) * \nu^\mathbb{G}, \quad (3.4)$$

且 π 关于 (3.4) 右式中的每一项均是可积的.

证明 (1) 分解 (3.3) 的证明参见文献 [23, 命题 A.2].

(2) 由于 m 是连续的, 且 $h \star (\mu - \nu)$ 为纯断过程, 故有

$$\langle h \star (\mu - \nu), m \rangle^{\mathbb{F}} = 0.$$

由引理 2.1 可得性质 (2).

(3) 由分解 (3.3) 和 (2), 可得

$$\begin{aligned} S^\tau &= S_0 + \mathbb{1}_{[0, \tau]} \cdot S^c + \mathbb{1}_{[0, \tau]} x I_\Gamma * \mu + \mathbb{1}_{[0, \tau]} x I_{\Gamma^c} * (\mu - \nu) + \mathbb{1}_{[0, \tau]} \cdot B - (h - x I_{\Gamma^c}) \mathbb{1}_{[0, \tau]} * \nu \\ &= S_0 + \widehat{S}^c + x I_\Gamma * \mu^{\mathbb{G}} + x I_{\Gamma^c} * (\mu^{\mathbb{G}} - \nu^{\mathbb{G}}) + B^\tau - (h - x I_{\Gamma^c}) * \nu^{\mathbb{G}} + \beta Z_-^{-1} \mathbb{1}_{[0, \tau]} \cdot \langle S^c, S^c \rangle^{\mathbb{F}}. \end{aligned}$$

引理得证. $\square$

3.3 定理 2.2 的证明

定理 2.2 的证明依赖于如下关键结果, 证明参见文献 [22].

引理 3.4 考虑如下泛函:

$$g(\varphi) := -\varphi' b - \varphi' \beta c Z_-^{-1} \mathbb{1}_{[0, \tau]} + \frac{1}{2} \varphi' c \varphi + \int \{\varphi' h - \log(1 + \varphi' x)\} F(dx), \quad \text{如果 } \varphi \in \mathcal{D}, \quad (3.5)$$

否则取值为 $+\infty$. 则 g 在 $\mathcal{D}$ 的内部 $\text{int}(\mathcal{D})$, 并且在 $\tilde{\pi}$ 处取最小值, 且它是如下方程的根:

$$r(\pi) := b - c\pi + \frac{\beta c}{Z_-} \mathbb{1}_{[0, \tau]} + \int \left(\frac{x}{1 + \pi' x} - h(x) \right) F(dx) = 0, \quad \text{在 } [0, T] - F \otimes A \quad \text{a.s.} \quad (3.6)$$

证明 引理证明参见文献 [22, 第 412 和 413 页]. 需注意 g 的定义与文献 [22] 中的定义有细微不同, 多了一个线性项 $\varphi' \beta c Z_-^{-1} \mathbb{1}_{[0, \tau]}$. $\square$

定理 2.2 的证明 在证明中, 我们利用 (2.5) 中的可料特征和引理 3.3 中 S^τ 的分解. 由引理 3.5 可知, (3.6) 的根 $\tilde{\pi}$ 存在, 且属于 $\text{int}(\mathcal{D})$, 并且 $\mathcal{E}(\tilde{\pi} \cdot S^\tau)$ 是正的. 我们分三步来证明定理.

步骤 1 我们证明 $1/\mathcal{E}(\tilde{\pi} \cdot S^\tau)$ 是一个 $\mathbb{G}$ -局部鞅. 由 Itô 公式可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathcal{E}(\tilde{\pi} \cdot S^\tau)} &= \mathcal{E} \left\{ -\tilde{\pi} \cdot S^\tau + \langle (\tilde{\pi} \cdot S^\tau)^c, (\tilde{\pi} \cdot S^\tau)^c \rangle^{\mathbb{G}} + \frac{1}{1 + \tilde{\pi}' x} x' \tilde{\pi} \tilde{\pi}' x * \mu^{\mathbb{G}} \right\} \\ &= \mathcal{E} \left\{ -\tilde{\pi} \cdot S^\tau + \tilde{\pi}' c \tilde{\pi} \cdot A^\tau + \left(\frac{1}{1 + \tilde{\pi}' x} - 1 + \tilde{\pi}' x \right) * \mu^{\mathbb{G}} \right\} \\ &=: \mathcal{E}(\tilde{N}). \end{aligned} \quad (3.7)$$

由引理 3.3 中 S^τ 的分解, 有

$$\begin{aligned} \tilde{N} &:= -\tilde{\pi} \cdot S^\tau + \tilde{\pi}' c \tilde{\pi} \cdot A^\tau + \left(\frac{1}{1 + \tilde{\pi}' x} - 1 + \tilde{\pi}' x \right) * \mu^{\mathbb{G}} \\ &= -\tilde{\pi} \cdot \widehat{S}^c - \tilde{\pi} x I_\Gamma * \mu^{\mathbb{G}} - \tilde{\pi} x I_{\Gamma^c} * (\mu^{\mathbb{G}} - \nu^{\mathbb{G}}) \\ &\quad - \tilde{\pi} \cdot B^\tau + \tilde{\pi} \beta Z_-^{-1} \mathbb{1}_{[0, \tau]} \cdot \langle S^c, S^c \rangle^{\mathbb{F}} - \tilde{\pi} (h - x I_{\Gamma^c}) * \nu^{\mathbb{G}} \\ &\quad + \tilde{\pi}' c \tilde{\pi} \cdot A^\tau + \left(\frac{1}{1 + \tilde{\pi}' x} - 1 + \tilde{\pi}' x \right) * \mu^{\mathbb{G}} \\ &= -\tilde{\pi} \cdot \widehat{S}^c - \tilde{\pi} x I_\Gamma * \mu^{\mathbb{G}} - \tilde{\pi} x I_{\Gamma^c} * (\mu^{\mathbb{G}} - \nu^{\mathbb{G}}) - \tilde{\pi} b \cdot A^\tau - \frac{\tilde{\pi} \beta c}{Z_-} \cdot A^\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \tilde{\pi}(h - xI_{\Gamma^c}) * \nu^{\mathbb{G}} + \tilde{\pi}' c \tilde{\pi} \cdot A^{\tau} + \left(\frac{1}{1 + \tilde{\pi}' x} - 1 + \tilde{\pi}' x \right) * \mu^{\mathbb{G}} \\
 & = -\tilde{\pi} \cdot \widehat{S^c} - \tilde{\pi} x I_{\Gamma} * \mu^{\mathbb{G}} - \tilde{\pi} x I_{\Gamma^c} * (\mu^{\mathbb{G}} - \nu^{\mathbb{G}}) + \tilde{\pi}(h - xI_{\Gamma^c}) * \nu^{\mathbb{G}} \\
 & \quad - \tilde{\pi}' \left(-c \tilde{\pi} + b + \frac{\beta c}{Z_-} \right) \cdot A^{\tau} + \left(\frac{1}{1 + \tilde{\pi}' x} - 1 + \tilde{\pi}' x \right) * \mu^{\mathbb{G}} \\
 & = -\tilde{\pi} \cdot \widehat{S^c} - \tilde{\pi} x I_{\Gamma} * \mu^{\mathbb{G}} - \tilde{\pi} x I_{\Gamma^c} * (\mu^{\mathbb{G}} - \nu^{\mathbb{G}}) + \tilde{\pi}(h - xI_{\Gamma^c}) * \nu^{\mathbb{G}} \\
 & \quad + \left(\frac{\tilde{\pi}' x}{1 + \tilde{\pi} x} - \tilde{\pi}' h(x) \right) * \nu^{\mathbb{G}} + \left(\frac{1}{1 + \tilde{\pi}' x} - 1 + \tilde{\pi}' x \right) * \mu^{\mathbb{G}} \\
 & = -\tilde{\pi} \cdot \widehat{S^c} + \left(\frac{1}{1 + \tilde{\pi}' x} - 1 \right) * (\mu^{\mathbb{G}} - \nu^{\mathbb{G}}). \tag{3.8}
 \end{aligned}$$

在方程 (3.8) 中, 我们代入了等式 (2.11). 由假设 (2.10) 和 $h \in G_{\text{loc}}(\mu)$ 可知, $(\frac{1}{1 + \tilde{\pi}' x} - 1) * (\mu^{\mathbb{G}} - \nu^{\mathbb{G}})$ 为 $\mathbb{G}$ - 纯断局部鞅. 故 $\mathcal{E}(\tilde{N})$ 是一个正的 $\mathbb{G}$ - 局部鞅.

步骤 2 在这一步中, 我们将证明 $\mathcal{E}(\tilde{N})$ 是 S^{τ} 的 $\mathbb{G}$ - 局部鞅密度. 由方程 (2.11) 可得

$$b \cdot A - c \tilde{\pi} \cdot A + \frac{\beta c}{Z_-} \cdot A + \left(\frac{x}{1 + \tilde{\pi} x} - h(x) \right) * \nu = 0, \quad \text{在 } \llbracket 0, \tau \wedge T \rrbracket. \tag{3.9}$$

由于 $c \Delta A \equiv 0$, 因此有

$$\begin{aligned}
 0 & = \Delta B + \int \left(\frac{x}{1 + \tilde{\pi} x} - h(x) \right) F(dx) \Delta A \\
 & = \int h \nu(\{t\} \times dx) + \int \left(\frac{x}{1 + \tilde{\pi} x} - h(x) \right) F(dx) \Delta A \\
 & = \int \left(\frac{x}{1 + \tilde{\pi}' x} \right) \nu(\{t\} \times dx). \tag{3.10}
 \end{aligned}$$

利用 (3.10) 和 (3.9), 在随机区间 $\llbracket 0, \tau \rrbracket$ 上, 得到

$$\begin{aligned}
 [S^{\tau}, \tilde{N}] & = \langle (S^{\tau})^c, \tilde{N}^c \rangle^{\mathbb{G}} + \sum \Delta S \Delta \tilde{N} \\
 & = -\tilde{\pi} c \cdot A + \sum \Delta S \left(\frac{1}{1 + \tilde{\pi} \Delta S} - 1 + \int \frac{\tilde{\pi}' x}{1 + \tilde{\pi}' x} \nu(\{t\} \times dx) \right) \\
 & = -b \cdot A - \frac{\beta c}{Z_-} \cdot A - \left(\frac{x}{1 + \tilde{\pi}' x} - h(x) \right) * \nu^{\mathbb{G}} + \left(\frac{x}{1 + \tilde{\pi}' x} - x \right) * \mu^{\mathbb{G}} \\
 & = -b \cdot A - \frac{\beta c}{Z_-} \cdot A + \left(\frac{x}{1 + \tilde{\pi}' x} - h(x) \right) * (\mu^{\mathbb{G}} - \nu^{\mathbb{G}}) + (h - x) * \mu^{\mathbb{G}}.
 \end{aligned}$$

因此, 由引理 3.3 中的标准分解, 得到

$$S^{\tau} + [S^{\tau}, \tilde{N}] = S_0 + \widehat{S^c} + \frac{x}{1 + \tilde{\pi}' x} * (\mu^{\mathbb{G}} - \nu^{\mathbb{G}}) \in \mathcal{M}_{\text{loc}}(\mathbb{G}).$$

最后, 由 Itô 公式可知, $\mathcal{E}(\tilde{N}) S^{\tau}$ 是一个 $\mathbb{G}$ - 局部鞅. 由定理 2.1 得到 S^{τ} 满足 NUPBR($\mathbb{G}$).

步骤 3 由 Itô 公式简单计算可得

$$1 + \varphi \cdot S^{\tau} = 1 + V_- \cdot (\tilde{\pi} \cdot S^{\tau}) = \mathcal{E}(\tilde{\pi} \cdot S^{\tau}) = V.$$

由命题 3.1 可知, φ 是一个最优投资组合. 定理得证. $\square$

4 结论

在循序扩大代数流的框架下, 我们采用鞅方法研究了内幕交易者对数效用最大化问题. 最优策略完全由 S^τ 的可料特征和随机时间 τ 来刻画. 我们的结论推广了 Goll 和 Kallsen^[23,24] 关于内幕交易的工作. 我们构造出 S^τ 的局部鞅密度, 进而间接地证明了 S^τ 满足 NUPBR($\mathbb{G}$).

致谢 感谢主编和两位审稿人建设性的意见, 使得文章内容和形式得到很大的改善. 同时也感谢 Tahir Choulli 对论文提出的建议.

参考文献

- 1 Merton R. Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model. *J Econom Theory*, 1971, 3: 373–413
- 2 Cvitanic J, Schachermayer W, Wang H. Utility maximization in incomplete markets with random endowment. *Finance Stoch*, 2001, 5: 259–272
- 3 Karatzas I, Lehoczky J P, Shreve S E, et al. Martingale and duality methods for utility maximization in an incomplete market. *SIAM J Control Optim*, 1991, 29: 702–730
- 4 Hu Y, Imkeller P, Müller M. Utility maximization in incomplete markets. *Ann Appl Probab*, 2005, 15: 1691–1712
- 5 Yan H W, Liang G C, Yang Z. Indifference pricing and hedging in a multiple-priors model with trading constraints. *Sci China Math*, 2015, 58: 689–714
- 6 Ankirchner S, Dereich S, Imkeller P. The Shannon information of filtrations and the additional logarithmic utility of insiders. *Ann Probab*, 2006, 34: 743–778
- 7 Choulli T, Deng J, Ma J. How non-arbitrage, viability and numéraire portfolio are related. *Finance Stoch*, 2015, 19: 719–741
- 8 Karatzas I, Kardaras C. The numéraire portfolio in semimartingale financial models. *Finance Stoch*, 2007, 11: 447–493
- 9 Amendinger J, Imkeller P, Schweizer M. Additional logarithmic utility of an insider. *Stochastic Process Appl*, 1998, 75: 263–286
- 10 Kyle A S. Continuous auctions and insider trading. *Econometrica*, 1985, 53: 1315–1335
- 11 Collin-Dufresne P, Fos V. Insider trading, stochastic liquidity, and equilibrium prices. *Econometrica*, 2016, 84: 1441–1475
- 12 Yor M. Grossissement de filtrations et absolue continuité de noyaux. In: *Grossissements de Filtrations: Exemples et Applications*. Berlin-Heidelberg: Springer, 1985, 6–14
- 13 Jeulin T, Yor M. Grossissements de Filtrations: Exemples et Applications: Séminaire de Calcul Stochastique 1982/83, Université Paris VI. *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 1118. New York: Springer, 2006
- 14 Jeulin T. Semi-martingales et Grossissement d'une Filtration. *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 833. Berlin-Heidelberg-New York: Springer, 1980
- 15 Barlow M T. Study of a filtration expanded to include an honest time. *Z Wahrscheinlichkeitstheorie Verw Gebiete*, 1978, 44: 307–323
- 16 Aksamit A, Choulli T, Deng J, et al. No-arbitrage up to random horizon for quasi-left-continuous models. *Finance Stoch*, 2017, 21: 1103–1139
- 17 Aksamit A, Choulli T, Deng J, et al. No-arbitrage under a class of honest times. *Finance Stoch*, 2018, 22: 127–159
- 18 Jacod J. *Calcul Stochastique et Problème de Martingales*. *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 714. Berlin-Heidelberg: Springer, 1979
- 19 Jacod J, Shiryaev A. *Limit Theorems for Stochastic Process*, 2nd ed. New York: Springer, 2003
- 20 He S W, Wang J G, Yan J A. *Semimartingale Theory and Stochastic Calculus*. Beijing: Science Press; Boca Raton: CRC Press, 1992
- 21 Takaoka K, Schweizer M. A note on the condition of no unbounded profit with bounded risk. *Finance Stoch*, 2014, 18: 393–405
- 22 Choulli T, Stricker C, Li J. Minimal Hellinger martingale measures of order q . *Finance Stoch*, 2007, 11: 399–427
- 23 Goll T, Kallsen J. Optimal portfolios for logarithmic utility. *Stochastic Process Appl*, 2000, 89: 31–48
- 24 Goll T, Kallsen J. A complete explicit solution to the log-optimal portfolio problem. *Ann Appl Probab*, 2003, 13: 774–799
- 25 Nikeghbali A, Yor M. A definition and some characteristic properties of pseudo-stopping times. *Ann Probab*, 2005, 33: 1804–1824
- 26 Delbaen F, Schachermayer W. A general version of the fundamental theorem of asset pricing. *Math Ann*, 1994, 300:

- 463–520
- 27 Kardaras C. On the closure in the Emery topology of semimartingale wealth-process sets. *Ann Appl Probab*, 2013, 23: 1355–1376
- 28 Mansuy R, Yor M. Random Times and Enlargements of Filtrations in a Brownian Setting. *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 1873. Berlin: Springer, 2006
- 29 Fontana C, Jeanblanc M, Song S. On arbitrages arising with honest times. *Finance Stoch*, 2014, 18: 515–543
- 30 Choulli T, Deng J. Structure condition under initial enlargement of filtration. *Sci China Math*, 2017, 60: 301–316
- 31 Ansel J P, Stricker C. Couverture des actifs contingents et prix maximum. In: *Annales de l’Institut Henri Poincaré Probabilités et Statistiques*, vol. 30. Amsterdam: Gauthier-Villars, 1994, 303–315

Logarithmic utility maximization for insiders in progressively enlarged filtrations

Biao Li & Jun Deng

Abstract In this paper, the logarithmic utility maximization problem for an insider in progressive enlargement of filtrations is investigated where the insider possesses some additional information represented by a random time τ . The optimal strategy is completely characterized by the predictable characteristics of the market and the structure of the random time and the local martingale density is explicitly constructed. The main theorem extends Goll and Kallsen (2000, 2003) to insider trading framework.

Keywords log-utility maximization, enlargement of filtration, insider trading

MSC(2010) 60G07, 60G40, 60G44, 60G57

doi: 10.1360/SCM-2018-0558