两个保险公司的最优合并时刻问题

李亚男¹, 柏立华^{2*}, 郭军义²

1. 首都经济贸易大学金融学院, 北京 100070;

2. 南开大学数学科学学院, 天津 300071

E-mail: 415758824@qq.com, lhbai@nankai.edu.cn, jyguo@nankai.edu.cn

收稿日期: 2017-04-23; 接受日期: 2018-03-09; 网络出版日期: 2018-11-01; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11171164 和 11471171) 资助项目

摘要 Gerber 和 Shiu (2006) 将两个公司的合并可行性问题与最优分红策略问题联系起来, 给出公司合并会产生效益的条件, 并提出一个更现实的问题: 若选择合并, 最优合并时刻是什么? 本文分两步研究了这个问题. 首先, 利用混合奇异/二维最优停止理论, 证明相应的验证定理, 然后分两种情形讨论了这个问题. 最终得到的最优策略为: 情形 1 下不可能合并, 两个公司分别采取最有利于自己的分红策略; 情形 2 下, 整个区域被分成 3 部分 U_1 、 U_2 和 U_3 , 最优策略取决于两公司的盈余落在哪个区域. 若落在区域 U_1 , 最优策略同情形 1; 若落在区域 U_3 , 两公司马上合并, 合并后的公司采取它的最优分红策略; 若落在区域 U_2 , 两公司不分红并等待, 直到其盈余过程到达 U_1 或 U_3 , 然后, 施行如上所述的合并和分红策略.

关键词 最优合并时刻 最优分红 最优停止理论 HJB (Hamilton-Jacob-Bellman) 方程 隐函数存在定理

MSC (2010) 主题分类 93E20, 91B30

1 引言

自美国司法部颁布了横向公司并购指南以来, 公司合并问题受到了人们越来越多的关注. 然而, 现今只有少量的文献研究这类问题. 文献 [1] 告诉我们, 两公司并购一般不通过现金支付实现而是通过股权交换实现. 文献 [2] 中的内容表明, 同行业双方 (横向) 并购可以增强经济实力, 实现多元化经营, 分散经营风险, 优化资源配置, 降低各种费用, 节约税收等. 上述文献的分析都是定性分析, 只有少数的文献精确依靠数据定量地讨论了这类问题. 文献 [3] 以最大化两个保险公司的期望折现价值之和为目标定量讨论了两个公司是否该合并的问题; 在一种特殊情形下得到了两个公司希望合并的结论, 这个结果能够有效地指导公司的经营管理. 由于文献 [3] 只回答了特殊情形下两个公司是否合并的问题, 因此, 该文献最后提出了一个开放性问题: 在一般情形下如何找到两个公司的最优合并时刻. 这个问题更加有趣并且这个问题几乎没有文献涉及. 我们将在本文中解决这个问题. 首先, 我们给出问题的

英文引用格式: Li Y N, Bai L H, Guo J Y. The optimal time to merge for two insurance companies (in Chinese). Sci Sin Math, 2019, 49: 89–106, doi: 10.1360/N012017-00075

动态规划原理和验证定理. 为了找到最优策略和值函数, 我们将问题分为两种情形并分别考虑. 情形 1 下, 我们将整个空间分为七部分, 通过一般的计算过程可知, 不合并最优; 情形 2 下, 首先构造一个函数, 为了分析函数性质, 我们将整个空间分为三个子空间并通过一些技术处理给出几个引理, 然后, 我们证明所构造的函数就是值函数. 最优策略在计算过程中也可以得到: 两个公司不分红并等待直到它们的盈余过程到达 $\mathcal{U}_1$ 或 $\mathcal{U}_3$. 如果它们的盈余过程在到达 $\mathcal{U}_3$ 之前到达 $\mathcal{U}_1$, 最优策略就是不合并, 两个公司此后将实行对自己最有利的分红策略. 如果它们的盈余过程先到达 $\mathcal{U}_3$, 公司在盈余过程到达 $\mathcal{U}_3$ 时马上合并, 此后, 合并后的公司将采用其最优分红策略. 本文考虑的问题是一个混合奇异/最优停止问题. 由于最优停止问题在经济金融上有大量应用, 越来越多的人关注此类问题. 一些文献已经在解决最优停止问题上做了大量工作, 如文献 [4–6] 等. 然而, 不同于文献 [4–6] 中的问题, 本文讨论的问题是一个二维最优停止问题, 相应的 HJB 方程难以解出. 为了解决此类问题, 前人经常用数值解法或逼近法得到近似解, 如文献 [7, 8]. 几乎没有文献给出精确解. 幸运的是, 通过一些创新方法和技术性处理, 我们证明了几个引理并最终得到精确的值函数和最优策略.

本文结构如下: 第 2 节给出模型和所要解决的问题; 第 3 节给出一些参考函数, 这些函数将在接下来的讨论中起到至关重要的作用; 第 4 节给出问题相应的 HJB 方程; 值函数和最优策略将在第 5 节给出.

2 模型和问题

本节建立公司合并问题的数学模型, 一切在概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上考虑. 假设概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上有一个过滤 $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$. 过滤空间 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$ 上有一个二维 Brown 运动 $W(t) = (W^1(t), W^2(t))$, 协方差矩阵为

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}.$$

考虑标号 1 和 2 的两个保险公司的最优合并时刻问题. 参考文献 [3] 中模型的建立方法, 我们用漂移 Brown 运动模拟公司的风险过程, 它们的盈余过程为

$$\begin{aligned} dR_1(t) &= \mu_1 dt + \sigma_1 dW^1(t), \quad t \geq 0, \\ dR_2(t) &= \mu_2 dt + \sigma_2 dW^2(t), \quad t \geq 0, \end{aligned}$$

其中 $\mu_1 > 0$ 和 $\mu_2 > 0$ 是漂移系数, σ_1 和 σ_2 是波动系数. 公司 i ($i = 1, 2$) 的破产时刻为 $\tau_{i,0}$.

记合并时刻为 T . 合并后, 存在一个合并公司, 记为 m . 参考文献 [1], 我们可知公司合并通过股权转让实现, 所以, 公司在合并过程中能避免大的融资压力和大规模现金流动. 因而, 公司的经营连续性和稳定性不会受到影响. 类似于文献 [3], 假设合并后的公司也服从漂移 Brown 运动, 其漂移系数为 μ_m , 波动系数为 σ_m , 则合并后公司的盈余过程为

$$dR_m(t) = \mu_m dt + \sigma_m dW(t), \quad t \geq T,$$

其中 $W(t)$ 是 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$ 上的 Brown 运动. 由文献 [2] 知, 合并会产生固定费用, 所以, 本文接下来假设合并发生时有一个固定费用 $I \geq 0$. 又因为公司合并一般能增加公司效益, 降低其经营风险, 参考文献 [3] 中的提法, 本文假设合并前后的漂移系数和波动系数满足 $\mu_m \geq \mu_1 + \mu_2$ 和 $\sigma_m^2 \leq \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2$.

考虑策略 $\pi = (T^\pi, L_1^\pi(t), L_2^\pi(t), L_m^\pi(t); t \geq 0)$, 其中 T^π 代表合并时刻, $L_i^\pi(t)$ ($i = 1, 2$) 代表合并前公司 i ($i = 1, 2$) 的分红策略, $L_m^\pi(t)$ 代表合并后公司 m 的分红策略. 记合并前两个公司在策略 $L_i^\pi(t)$ ($i = 1, 2$) 下的盈余过程为 $X_i^\pi(t)$ ($i = 1, 2$), 则

$$dX_1^\pi(t) = \mu_1 dt + \sigma_1 dW^1(t) - dL_1^\pi(t), \quad t \leq T^\pi, \quad (2.1)$$

且

$$dX_2^\pi(t) = \mu_2 dt + \sigma_2 dW^2(t) - dL_2^\pi(t), \quad t \leq T^\pi. \quad (2.2)$$

合并后, 分红策略 $L_m^\pi(t)$ 下公司 m 的盈余过程为

$$dX_m^\pi(t) = \mu_m dt + \sigma_m dW(t) - dL_m^\pi(t), \quad t > T^\pi. \quad (2.3)$$

记 $X^\pi(t)$ 为策略 π 下两个保险公司的盈余和, 则

$$X^\pi(t) = x_1 + x_2 + \int_0^{t \wedge T^\pi} [dX_1^\pi(t) + dX_2^\pi(t)] + \int_{t \wedge T^\pi}^t dX_m^\pi(t) - I_t, \quad t \geq 0, \quad (2.4)$$

其中 x_i ($i = 1, 2$) 是公司 i 的初始资金, $I_t = I1_{\{t \geq T^\pi\}}$. 令 $\tau^\pi = \inf\{t : X^\pi(t) \leq 0\}$.

接下来, 记 τ_i^π ($i = 1, 2, m$) 为公司 i 在策略 $L_i^\pi(t)$ 下的破产时刻. 方便起见, 令 $dX_i^\pi(t) = 0, t \geq \tau_i^\pi$. 若控制策略 $\pi = (T^\pi, L_1^\pi(t), L_2^\pi(t), L_m^\pi(t); t \geq 0)$ 满足

- (1) $L_i^\pi(t)$ ($i = 1, 2, m$) 是非降右连续循序可测过程;
- (2) 对 $t \geq \tau_i^\pi$, 有 $dL_i^\pi(t) = 0, i = 1, 2, m$;
- (3) T^π 是 $\mathcal{F}_t$ 停时, $T^\pi \leq \tau^\pi$;
- (4) 盈余过程 X^π 非负,

则称其为可允许策略. 记所有可允许策略组成的集合为 Π .

两个公司想要寻找一个可允许策略最大化

$$J_\pi(x_1, x_2) = E_{x_1, x_2} \left[\int_0^{T^\pi} e^{-\delta t} (dL_1^\pi(t) + dL_2^\pi(t)) + \int_{T^\pi}^{\tau^\pi} e^{-\delta t} dL_m^\pi(t) \right], \quad (2.5)$$

其中 δ 是折现率. 记值函数为

$$V(x_1, x_2) = \sup_{\pi \in \Pi} J_\pi(x_1, x_2). \quad (2.6)$$

3 预备知识

首先, 单独考虑公司 1. 记特征方程 $\mu_1 x + \frac{\sigma_1^2 x^2}{2} - \delta = 0$ 的两个根为 r_1 和 s_1 , 则

$$r_1 = \frac{-\mu_1 + \sqrt{\mu_1^2 + 2\delta\sigma_1^2}}{\sigma_1^2}, \quad s_1 = \frac{-\mu_1 - \sqrt{\mu_1^2 + 2\delta\sigma_1^2}}{\sigma_1^2}.$$

初始财富为 x 的公司 1 的值函数为 $V_1(x)$, 则

$$V_1(x) = \sup_L E_x \left[\int_0^{\tau_1^L} e^{-\delta s} dL(s) \right],$$

其中 τ_1^L 是公司 1 在分红策略 L 下的破产时刻. 根据文献 [9] 可知, 最优分红策略为

$$L_1^*(t) = \left(\max_{0 \leq s \leq t} (X_1^*(s) - b_1^*) \right)_+, \quad b_1^* = \frac{1}{r_1 - s_1} \ln \frac{s_1^2}{r_1^2},$$

其中 b_1^* 是最优分红界, $X_1^*(t)$ 是公司 1 在策略 $L_1^*(t)$ 下的盈余过程. 进一步地,

$$V_1(x) = \begin{cases} \frac{f_1(x)}{f_1'(b_1^*)}, & 0 \leq x \leq b_1^*, \\ x - b_1^* + V_1(b_1^*), & x > b_1^*, \end{cases}$$

其中 $f_1(x) = e^{r_1 x} - e^{s_1 x}$.

值得注意的是, $[0, \infty)$ 上定义的函数 f_1 是一个非负增函数, 它在 $[0, b_1^*]$ 上凹, 在 (b_1^*, ∞) 上凸, 满足

$$\mathcal{L}_1 f_1(x) - \delta f_1(x) = 0,$$

其中

$$\mathcal{L}_1 f(x) = \mu_1 f'(x) + \frac{\sigma_1^2 f''(x)}{2}.$$

很明显, $V_1(x)$ 在 $[0, b_1^*]$ 上凹, 在 (b_1^*, ∞) 上是线性的. 同理可以定义 $V_i(x)$ 、 $f_i(x)$ 、 b_i^* 和 $L_i^*(t)$ ($i = 2, m$).

接下来, 两个基本不等式被给出, 在接下来的分析中, 它们起到了关键作用. 考虑策略 $\pi^m = (0, 0, 0, L_{m,t}^*)$ 和 $\pi^0 = (\infty, L_1^*(t), L_2^*(t), 0)$, 有

$$V(x_1, x_2) \geq J_{\pi^m}(x_1, x_2) = V_m(x_1 + x_2 - I), \quad (3.1)$$

且

$$V(x_1, x_2) \geq J_{\pi^0}(x_1, x_2) = V_1(x_1) + V_2(x_2). \quad (3.2)$$

4 HJB 方程和验证定理

以下两个定理给出了一个函数大于 V 的充分条件, 在接下来寻找值函数的过程中, 本节的结论将起到重要的作用.

定理 4.1 值函数 V 满足

$$V(x_1, x_2) = \sup_{\pi \in \Pi} E_{x_1, x_2} \left[\int_0^{T^\pi} e^{-\delta t} d(L_1^\pi(t) + L_2^\pi(t)) + e^{-\delta T^\pi} V_m(X_1^\pi(T^\pi) + X_2^\pi(T^\pi) - I) \right]. \quad (4.1)$$

证明 定义

$$W(x_1, x_2) = \sup_{\pi \in \Pi} E_{x_1, x_2} \left[\int_0^{T^\pi} e^{-\delta t} d(L_1^\pi(t) + L_2^\pi(t)) + e^{-\delta T^\pi} V_m(X_1^\pi(T^\pi) + X_2^\pi(T^\pi) - I) \right].$$

对任意 $\pi \in \Pi$, 有

$$J_\pi(x_1, x_2) = E_{x_1, x_2} \left[\int_0^{T^\pi} e^{-\delta t} d(L_1^\pi(t) + L_2^\pi(t)) + \int_{T^\pi}^{\tau^\pi} e^{-\delta t} dL_m^\pi(t) \right]$$

$$\begin{aligned}
&= E_{x_1, x_2} \left[\int_0^{T^\pi} e^{-\delta t} d(L_1^\pi(t) + L_2^\pi(t)) + E \left[\int_{T^\pi}^{\tau^\pi} e^{-\delta t} dL_m^\pi(t) \middle| \mathcal{F}_{T^\pi} \right] \right] \\
&\leq E_{x_1, x_2} \left[\int_0^{T^\pi} e^{-\delta t} d(L_1^\pi(t) + L_2^\pi(t)) + e^{-\delta T^\pi} V_m(X_1^\pi(T^\pi) + X_2^\pi(T^\pi) - I) \right].
\end{aligned}$$

两边取上确界可得

$$\sup_{\pi \in \Pi} J_\pi(x_1, x_2) \leq \sup_{\pi \in \Pi} E_{x_1, x_2} \left[\int_0^{T^\pi} e^{-\delta t} d(L_1^\pi(t) + L_2^\pi(t)) + e^{-\delta T^\pi} V_m(X_1^\pi(T^\pi) + X_2^\pi(T^\pi) - I) \right],$$

也就是说

$$V(x_1, x_2) \leq W(x_1, x_2).$$

另一方面, 对任意 $\pi \in \Pi$, 定义策略 $\bar{\pi} = (T^\pi, L_1^\pi(t), L_2^\pi(t), L_m^*(t); t \geq 0)$, 很容易得到

$$J_{\bar{\pi}}(x_1, x_2) = E_{x_1, x_2} \left[\int_0^{T^\pi} e^{-\delta t} d(L_1^\pi(t) + L_2^\pi(t)) + e^{-\delta T^\pi} V_m(X_1^\pi(T^\pi) + X_2^\pi(T^\pi) - I) \right].$$

令 $\bar{\Pi} = \{\bar{\pi} = (T^\pi, L_1^\pi(t), L_2^\pi(t), L_m^*(t); t \geq 0) : \pi \in \Pi\}$, 则 $W(x_1, x_2) = \sup_{\bar{\pi} \in \bar{\Pi}} J_{\bar{\pi}}(x_1, x_2)$. 因此,

$$V(x_1, x_2) \geq \sup_{\bar{\pi} \in \bar{\Pi}} J_{\bar{\pi}}(x_1, x_2) = W(x_1, x_2),$$

证明完成. □

从现在开始, 记 $[0, \infty) \times [0, \infty)$ 为 $\mathcal{R}_+^2$. 定义

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_2 f(x) &= \mu_2 f'(x) + \frac{\sigma_2^2 f''(x)}{2}, \\
\mathcal{L}_{1,2} g(x_1, x_2) &= \frac{\sigma_1^2 \partial^2 g(x_1, x_2) / \partial x_1 \partial x_1 + \sigma_2^2 \partial^2 g(x_1, x_2) / \partial x_2 \partial x_2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 \partial^2 g(x_1, x_2) / \partial x_1 \partial x_2}{2} \\
&\quad + \mu_1 \frac{\partial g(x_1, x_2)}{\partial x_1} + \mu_2 \frac{\partial g(x_1, x_2)}{\partial x_2}.
\end{aligned}$$

这些运算符将在以后的定理和引理中出现.

定理 4.2 假设存在非负函数 $w(x_1, x_2)$, 在 $\mathcal{R}_+^2$ 上一阶偏导数有界、二阶偏导数连续可微并满足: 对几乎处处 $x_1 > 0$ 和 $x_2 > 0$, 有

- (1) $\mathcal{L}_{1,2} w(x_1, x_2) - \delta w(x_1, x_2) \leq 0$,
- (2) $w(x_1, x_2) \geq V_m(x_1 + x_2 - I)$,
- (3) $w_{x_i}(x_1, x_2) \geq 1, i = 1, 2$;

当 $x_1 > 0$ 和 $x_2 = 0$ 时,

- (1) $\mathcal{L}_1 w(x_1, 0) - \delta w(x_1, 0) \leq 0$,
- (2) $w(x_1, 0) \geq V_m(x_1 - I)$,
- (3) $w_{x_1}(x_1, 0) \geq 1$;

当 $x_2 > 0$ 和 $x_1 = 0$ 时,

- (1) $\mathcal{L}_2 w(0, x_2) - \delta w(0, x_2) \leq 0$,
- (2) $w(0, x_2) \geq V_m(x_2 - I)$,
- (3) $w_{x_2}(0, x_2) \geq 1$,

初始条件为 $w(0, 0) = 0$, 则对任意 $(x_1, x_2) \in \mathcal{R}_+^2$, 有 $w(x_1, x_2) \geq V(x_1, x_2)$.

证明 对任意控制策略 $\pi \in \Pi$, 对 $e^{-\delta(t \wedge \tau^\pi)} w(X_1^\pi(t \wedge \tau^\pi), X_2^\pi(t \wedge \tau^\pi))$ 在 $[0, T^\pi]$ 上应用 Itô 公式并两边取期望可得

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{1,2}g(x_1, x_2) &= \frac{\sigma_1^2 \partial^2 g(x_1, x_2) / \partial x_1 \partial x_1 + \sigma_2^2 \partial^2 g(x_1, x_2) / \partial x_2 \partial x_2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 \partial^2 g(x_1, x_2) / \partial x_1 \partial x_2}{2} \\ &\quad + \mu_1 \frac{\partial g(x_1, x_2)}{\partial x_1} + \mu_2 \frac{\partial g(x_1, x_2)}{\partial x_2}. \end{aligned}$$

因为 $w_{x_i}(x_1, x_2)$ ($i = 1, 2$) 有界, 两边取期望并利用定理 4.2 中的条件可得

$$\begin{aligned} &e^{-\delta T^\pi} w(X_1^\pi(T^\pi), X_2^\pi(T^\pi)) \\ &= w(x_1, x_2) + \mathbb{E}_{x_1, x_2} \left[\int_0^{T^\pi \wedge \tau_1^\pi} \mu_1 e^{-\delta t} w_{x_1}(X_1^\pi(t), X_2^\pi(t)) dW^1(t) \right] \\ &\quad + \mathbb{E}_{x_1, x_2} \left[\int_0^{T^\pi \wedge \tau_2^\pi} \mu_2 e^{-\delta t} w_{x_2}(X_1^\pi(t), X_2^\pi(t)) dW^2(t) \right] \\ &\quad + \mathbb{E}_{x_1, x_2} \left[1_{\{T^\pi \leq \tau_1^\pi \wedge \tau_2^\pi\}} \int_0^{T^\pi} e^{-\delta t} (\mathcal{L}_{1,2}w(X_1^\pi(t), X_2^\pi(t)) - \delta w(X_1^\pi(t), X_2^\pi(t))) dt \right] \\ &\quad + \mathbb{E}_{x_1, x_2} \left[1_{\{\tau_1^\pi < T^\pi \leq \tau_2^\pi\}} \int_0^{\tau_1^\pi} e^{-\delta t} (\mathcal{L}_{1,2}w(X_1^\pi(t), X_2^\pi(t)) - \delta w(X_1^\pi(t), X_2^\pi(t))) dt \right] \\ &\quad + \mathbb{E}_{x_1, x_2} \left[1_{\{\tau_1^\pi < T^\pi \leq \tau_2^\pi\}} \int_{\tau_1^\pi}^{T^\pi} e^{-\delta t} (\mathcal{L}_2w(0, X_2^\pi(t)) - \delta w(0, X_2^\pi(t))) dt \right] \\ &\quad + \mathbb{E}_{x_1, x_2} \left[1_{\{\tau_2^\pi < T^\pi \leq \tau_1^\pi\}} \int_0^{\tau_2^\pi} e^{-\delta t} (\mathcal{L}_{1,2}w(X_1^\pi(t), X_2^\pi(t)) - \delta w(X_1^\pi(t), X_2^\pi(t))) dt \right] \\ &\quad + \mathbb{E}_{x_1, x_2} \left[1_{\{\tau_2^\pi < T^\pi \leq \tau_1^\pi\}} \int_{\tau_2^\pi}^{T^\pi} e^{-\delta t} (\mathcal{L}_1w(X_1^\pi(t), 0) - \delta w(X_1^\pi(t), 0)) dt \right] \\ &\quad + \mathbb{E}_{x_1, x_2} \left[\sum_{0 \leq t \leq T^\pi} e^{-\delta t} (w(X_1^\pi(t), X_2^\pi(t)) - w(X_1^\pi(t-), X_2^\pi(t-))) \right] \\ &\quad - \mathbb{E}_{x_1, x_2} \left[\int_0^{T^\pi} e^{-\delta t} d(L_1^{c,\pi}(t) + L_2^{c,\pi}(t)) \right], \end{aligned}$$

其中 $L_i^{c,\pi}(t)$ ($i = 1, 2$) 是 $L_i^\pi(t)$ ($i = 1, 2$) 的连续部分, 两边取上确界并参考定理 4.1, 结果得证. $\square$

5 值函数和最优策略

接下来将问题分为两部分并分别分析.

5.1 当 $b_m^* - b_i^* + I \geq \frac{\mu_m - \mu_i}{\delta}$ ($i = 1, 2$) 时的情形

以下两个定理将证明当 $b_m^* - b_i^* + I \geq \frac{\mu_m - \mu_i}{\delta}$ ($i = 1, 2$) 时, 不合并最优.

定理 5.1 对任意 $(x_1, x_2) \in \mathcal{R}_+^2$, $V_1(x_1) + V_2(x_2) \geq V_m(x_1 + x_2 - I)$ 当且仅当 $b_m^* - b_i^* + I \geq \frac{\mu_m - \mu_i}{\delta}$ ($i = 1, 2$).

证明 此处, 我们给出当 $I \leq b_1^* \wedge b_2^*$ 时的证明, 当 $I > b_1^* \wedge b_2^*$ 时, 可得到类似结论. 如图 1 所示, 点 $A, B, C, D, E, O_1, O_2, P_1$ 和 P_2 的坐标分别为 $(0, b_m^* + I), (0, b_2^*), (b_1^*, 0), (b_m^* + I, 0), (b_1^*, b_2^*), (b_1^*, b_m^* + I - b_1^*), (b_m^* + I - b_2^*, b_2^*), (I, 0)$ 和 $(0, I)$.

图 1 空间分区域证明图例

必要性 如果 $V_1(x_1) + V_2(x_2) \geq V_m(x_1 + x_2 - I)$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, 则当 $x_1 \geq b_1^*$, $x_2 \geq b_2^*$ 且 $x_1 + x_2 - I \geq b_m^*$ 时,

$$x_1 - b_1^* + \frac{\mu_1}{\delta} + x_2 - b_2^* + \frac{\mu_2}{\delta} \geq x_1 + x_2 - I - b_m^* + \frac{\mu_m}{\delta},$$

也就是说,

$$b_m^* - b_1^* - b_2^* + I \geq \frac{\mu_m - \mu_1 - \mu_2}{\delta}.$$

此外, $\mu_m \geq \mu_1 + \mu_2$. 所以,

$$b_m^* - b_1^* - b_2^* + I \geq 0,$$

也就是说 $b_m^* + I \geq b_1^* + b_2^*$.

考虑点 A, 由 $b_m^* + I \geq b_2^*$, 可得

$$b_m^* + I - b_2^* + \frac{\mu_2}{\delta} = V_2(b_m^* + I) \geq V_m(b_m^*) = \frac{\mu_m}{\delta},$$

也就是说,

$$b_m^* - b_2^* + I \geq \frac{\mu_m - \mu_2}{\delta}.$$

类似地, 考虑点 D, 我们有

$$b_m^* - b_1^* + I \geq \frac{\mu_m - \mu_1}{\delta}.$$

充分性 由于 $V_i'(x) \geq 1$ 且 $V_i(0) = 0$, 可知 $V(b_i^*) = \frac{\mu_i}{\delta} \geq b_i^*$. 联立 $b_m^* - b_i^* + I \geq \frac{\mu_m - \mu_i}{\delta}$, 可得

$$b_m^* - b_1^* - b_2^* + I \geq \frac{\mu_m - \mu_1 - \mu_2}{\delta},$$

这意味着

$$b_m^* + I \geq b_1^* + b_2^*.$$

(i) 当 $x_1 \geq b_1^*$, $x_2 \geq b_2^*$ 且 $x_1 + x_2 \geq b_m^* + I$ 时,

$$V_1(x_1) + V_2(x_2) = x_1 - b_1^* + \frac{\mu_1}{\delta} + x_2 - b_2^* + \frac{\mu_2}{\delta}$$

$$\begin{aligned} &\geq x_1 + x_2 - I - b_m^* + \frac{\mu_m}{\delta} \\ &= V_m(x_1 + x_2 - I). \end{aligned}$$

(ii) 当 $0 \leq x_1 + x_2 \leq I$, $x_1 \geq 0$ 且 $x_2 \geq 0$ 时,

$$V_m(x_1 + x_2 - I) = 0 \leq V_1(x_1) + V_2(x_2).$$

(iii) 当 $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq b_2^*$ 且 $0 \leq x_1 + x_2 \leq b_m^* + I$ 时, 我们需要找到 $V_1(x_1) + V_2(x_2) - V_m(x_1 + x_2 - I)$ 在区域 ABO_2 上的最小值并证明它非负. 由于

$$V_2'(x_2) - V_m'(x_1 + x_2 - I) \leq 0, \quad (x_1, x_2) \in ABO_2$$

且

$$V_2'(x_2) - V_1'(x_1) \leq 0, \quad (x_1, x_2) \in ABO_2,$$

因此,

$$\begin{aligned} &\min_{(x_1, x_2) \in ABO_2} \{V_1(x_1) + V_2(x_2) - V_m(x_1 + x_2 - I)\} \\ &= \min_{0 \leq x_1 \leq b_m^* + I - b_2^*} \left\{ \min_{b_2^* \leq x_2 \leq b_m^* + I - x_1} \{V_1(x_1) + V_2(x_2) - V_m(x_1 + x_2 - I)\} \right\} \\ &= \min_{0 \leq x_1 \leq b_m^* + I - b_2^*} \left\{ V_1(x_1) + V_2(b_m^* + I - x_1) - \frac{\mu_m}{\delta} \right\} \\ &= V_2(b_m^* + I) - \frac{\mu_m}{\delta} \\ &= b_m^* + I - b_2^* + \frac{\mu_2 - \mu_m}{\delta} \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

其中第四个等式由 $b_m^* + I > b_2^*$ 推得.

(iv) 当 $x_1 \geq b_1^*$, $x_2 \geq 0$ 且 $0 \leq x_1 + x_2 \leq b_m^* + I$ 时, 用 (iii) 中类似的方法可得

$$V_1(x_1) + V_2(x_2) \geq V_m(x_1 + x_2 - I).$$

(v) 当 $0 \leq x_1 \leq b_1^*$, $x_2 \geq 0$ 且 $x_1 + x_2 \geq b_m^* + I$ 时, 记直线 AO_1 与 CO_1 之间的区域为 $\mathcal{O}$, 我们需要找到 $V_1(x_1) + V_2(x_2) - V_m(x_1 + x_2 - I)$ 在 $\mathcal{O}$ 上的最小值并证明它非负. 由于

$$V_1'(x_1) - V_m'(x_1 + x_2 - I) \geq 0, \quad (x_1, x_2) \in \mathcal{O}$$

且

$$V_1'(x_1) - V_2'(x_2) \geq 0, \quad (x_1, x_2) \in \mathcal{O},$$

因此,

$$\min_{(x_1, x_2) \in \mathcal{O}} \{V_1(x_1) + V_2(x_2) - V_m(x_1 + x_2 - I)\}$$

$$\begin{aligned}
&= \min_{b_m^*+I-b_1^* \leq x_2 < \infty} \left\{ \min_{(b_m^*+I-x_2)_+ \leq x_1 \leq b_1^*} \{V_1(x_1) + V_2(x_2) - V_m(x_1 + x_2 - I)\} \right\} \\
&= \min \left\{ \min_{b_m^*+I-b_1^* \leq x_2 < b_m^*+I} \left\{ V_1(b_m^* + I - x_2) + V_2(x_2) - \frac{\mu_m}{\delta} \right\}, \min_{x_2 \geq b_m^*+I} \{V_2(x_2) - V_m(x_2 - I)\} \right\} \\
&= V_2(b_m^* + I) - \frac{\mu_m}{\delta} \\
&= b_m^* + I - b_2^* + \frac{\mu_2 - \mu_m}{\delta} \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

(vi) 当 $0 \leq x_2 \leq b_2^*$ 且 $x_1 + x_2 \geq b_m^* + I$ 时, 参考 (v) 中类似的方法可得

$$V_1(x_1) + V_2(x_2) \geq V_m(x_1 + x_2 - I).$$

(vii) 当 $0 \leq x_1 \leq b_1^*$, $0 \leq x_2 \leq b_2^*$, 且 $x_1 + x_2 \geq I$ 时, 定义

$$k(x_1, x_2) = V_1(x_1) + V_2(x_2) - V_m(x_1 + x_2 - I).$$

接下来将在区域 $\mathcal{O}_1 = P_1 P_2 BEC$ 上考虑.

根据上述分析, 对任意 $(x_1, x_2) \in BE$, 有

$$k(x_1, b_2^*) \geq 0, \quad k_{x_2}(x_1, b_2^*) \leq 0, \quad k_{x_2 x_2}(x_1, b_2^*) \geq 0.$$

且对任意 $(x_1, x_2) \in P_2 P_1 C$, 有 $k(x_1, x_2) \geq 0$. 固定 x_1 , $k(x_1, x_2)$ 的形式意味着 $k_{x_2, x_2}(x_1, x_2) = 0$ 至多有一个根. 如果 $k_{x_2, x_2}(x_1, x_2) = 0$ 无根, 则 $k(x_1, x_2)$ 关于 x_2 是凸的, 因此, 当 $(I - x_1)_+ \leq x_2 \leq b_2^*$ 时,

$$k_{x_2}(x_1, x_2) \leq k_{x_2}(x_1, b_2^*) \leq 0,$$

即

$$k(x_1, x_2) \geq k(x_1, b_2^*) \geq 0.$$

如果 $k_{x_2, x_2}(x_1, x_2) = 0$ 有一个根 $r(x_1)$, 则当 $r(x_1) \leq x_2 \leq b_2^*$ 时, $k_{x_2, x_2}(x_1, x_2) \geq 0$. 因此, $k_{x_2}(x_1, x_2) \leq k_{x_2}(x_1, b_2^*) \leq 0$ 且 $k(x_1, x_2) \geq k(x_1, b_2^*) \geq 0$.

当 $0 \leq x_2 < r(x_1)$ 时, $k_{x_2, x_2}(x_1, x_2) < 0$. 这意味着 $k_{x_2}(x_1, x_2)$ 单调降. 因此,

$$k_{x_2}(x_1, x_2) = 0, \quad 0 \leq x_2 < r(x_1) \quad (5.1)$$

最多有一个解. 如果 (5.1) 有一个根, 则 $k_{x_2}(x_1, x_2) < 0$, $0 \leq x_2 < r(x_1)$. 显然,

$$k(x_1, x_2) > k(x_1, r(x_1)) \geq 0, \quad 0 \leq x_2 < r(x_1).$$

记 (5.1) 的唯一根为 $\tilde{r}(x_1)$, 则对 $\tilde{r}(x_1) \leq x_2 < r(x_1)$, 有 $k_{x_2}(x_1, x_2) \leq 0$. 因此,

$$k(x_1, x_2) \geq k(x_1, r(x_1)) \geq 0.$$

对 $(I - x_1)_+ \leq x_2 < \tilde{r}(x_1)$, 有 $k_{x_2}(x_1, x_2) > 0$, 因此,

$$k(x_1, x_2) > k(x_1, (I - x_1)_+) \geq 0.$$

由于 x_1 是任意的, 因此, $k(x_1, x_2) \geq 0, (x_1, x_2) \in \mathcal{O}_1$. □

定理 5.2 如果 $b_m^* - b_i^* + I \geq \frac{\mu_m - \mu_i}{\delta}$, $i = 1, 2$, 则 $V(x_1, x_2) = V_1(x_1) + V_2(x_2)$.

证明 定义 $w(x_1, x_2) = V_1(x_1) + V_2(x_2)$, 则有

$$\begin{aligned} w_{x_1}(x_1, x_2) &= V_1'(x_1) \geq 1, \quad w_{x_2}(x_1, x_2) = V_2'(x_2) \geq 1, \\ \mathcal{L}_1 w(x_1, 0) - \delta w(x_1, 0) &\leq 0, \\ \mathcal{L}_2 w(0, x_2) - \delta w(0, x_2) &\leq 0, \end{aligned}$$

且

$$\mathcal{L}_{1,2} w(x_1, x_2) - \delta w(x_1, x_2) \leq 0.$$

由定理 5.1 知, $V_1(x_1) + V_2(x_2) \geq V_m(x_1 + x_2 - I)$, 因此, $V_1(x_1) + V_2(x_2)$ 满足定理 4.1 中的三个条件, 就是说 $V(x_1, x_2) \leq V_1(x_1) + V_2(x_2)$. 另一方面, $V(x_1, x_2) \geq V_1(x_1) + V_2(x_2)$, 因此, 证明完成. $\square$

5.2 当 $b_m^* - b_1^* + I < \frac{\mu_m - \mu_1}{\delta}$ 或 $b_m^* - b_2^* + I < \frac{\mu_m - \mu_2}{\delta}$ 时的情形

由定理 5.1 知, 如果 $b_m^* - b_1^* + I < \frac{\mu_m - \mu_1}{\delta}$ 或 $b_m^* - b_2^* + I < \frac{\mu_m - \mu_2}{\delta}$, 则 $V_1(x_1) + V_2(x_2)$ 不满足定理 4.2 中的第二个条件, 因此, 我们需要构造另外的满足定理 4.2 的函数. 首先分析一下满足 $V_1(x_1) + V_2(x_2) = V_m(x_1 + x_2 - I)$ 的区域.

引理 5.1 如果 $\frac{\sigma_m^2}{\mu_m} \leq \frac{\sigma_1^2}{\mu_1} \wedge \frac{\sigma_2^2}{\mu_2}$, 则 $\mathcal{L}_1 V_m(x) - \delta V_m(x) \leq 0$, 且 $\mathcal{L}_2 V_m(x) - \delta V_m(x) \leq 0$.

证明 由于 $\frac{\sigma_m^2}{\mu_m} \leq \frac{\sigma_1^2}{\mu_1}$, 通过一些简单的计算可知, $\frac{\sigma_m^2}{\mu_m} \geq \frac{\sigma_m^2 - \sigma_1^2}{\mu_m - \mu_1}$. 由 $V_m(x)$ 的定义可知,

$$\frac{V_m'(x)}{V_m''(x)} = \frac{r_m e^{r_m x} - s_m e^{s_m x}}{r_m^2 e^{r_m x} - s_m^2 e^{s_m x}}.$$

令 $G(x) = \frac{r_m e^{r_m x} - s_m e^{s_m x}}{r_m^2 e^{r_m x} - s_m^2 e^{s_m x}}$. 显然,

$$G'(x) = e^{(r_m + s_m)x} \frac{r_m s_m (s_m - r_m)^2}{(r_m^2 e^{r_m x} - s_m^2 e^{s_m x})^2} < 0.$$

因此, $\frac{V_m'(x)}{V_m''(x)}$ 单调递减. 当 $x \geq 0$ 时,

$$\frac{V_m'(x)}{V_m''(x)} \leq \frac{V_m'(0)}{V_m''(0)} = -\frac{\sigma_m^2}{2\mu_m} \leq -\frac{\sigma_m^2 - \sigma_1^2}{2(\mu_m - \mu_1)}.$$

两边同乘 $V_m''(x)$ 并移项可得 $\mathcal{L}_1 V_m(x) \leq \mathcal{L}_m V_m(x)$, 也就是说,

$$\mathcal{L}_1 V_m(x) - \delta V_m(x) \leq \mathcal{L}_m V_m(x) - \delta V_m(x) \leq 0.$$

类似可证, $\mathcal{L}_2 V_m(x) - \delta V_m(x) \leq 0$, $x \geq 0$. $\square$

注 5.1 由于公司合并可以降低系统风险, 增加收益, 引理 5.1 中的不等式符合实际情形. 接下来的讨论中, 默认这个等式成立.

下面的引理告诉我们, 存在边界 $(x, q(x))$ 将 $\mathcal{R}_+^2$ 分为 $\mathcal{Q}_1$ 和 $\mathcal{Q}_2$ 两部分且满足

$$\begin{aligned} V_1(x_1) + V_2(x_2) &> V_m(x_1 + x_2 - I), \quad (x_1, x_2) \in \mathcal{Q}_2, \\ V_1(x_1) + V_2(x_2) &\leq V_m(x_1 + x_2 - I), \quad (x_1, x_2) \in \mathcal{Q}_1. \end{aligned}$$

引理 5.2 当 $x_1 \geq 0$ 时, 令

$$q(x_1) = \inf\{x_2 : V_m(x_1 + x_2 - I) = V_1(x_1) + V_2(x_2)\}, \quad (5.2)$$

$$\mathcal{Q}_1 = \{(x_1, x_2) : x_1 \geq 0, x_2 \geq q(x_1)\},$$

$$\mathcal{Q}_2 = \{(x_1, x_2) : x_1 \geq 0, 0 \leq x_2 < q(x_1)\}.$$

如果 $b_m^* - b_1^* + I < \frac{\mu_m - \mu_1}{\delta}$ 或 $b_m^* - b_2^* + I < \frac{\mu_m - \mu_2}{\delta}$, 则可得 $q(x)$ 是一个连续递减函数且

$$V_1(x_1) + V_2(x_2) > V_m(x_1 + x_2 - I), \quad (x_1, x_2) \in \mathcal{Q}_2,$$

$$V_1(x_1) + V_2(x_2) \leq V_m(x_1 + x_2 - I), \quad (x_1, x_2) \in \mathcal{Q}_1.$$

证明 由 $V_1(x_1) + V_2(x_2) \geq V_m(x_1 + x_2 - I) = 0$ ($0 \leq x_1 + x_2 \leq I$) 可知, $\mathcal{Q}_2 \neq \emptyset$ 且由 (5.2) 定义的 $q(x)$ 有意义. 此外,

$$b_m^* - b_1^* + I < \frac{\mu_m - \mu_1}{\delta} \quad \text{或} \quad b_m^* - b_2^* + I < \frac{\mu_m - \mu_2}{\delta},$$

且 $V_1(\cdot)$ 、 $V_2(\cdot)$ 和 $V_m(\cdot)$ 都是连续函数, 因此, $\mathcal{Q}_1 \neq \emptyset$. □

根据 $q(x)$ 的定义可知,

$$V_1(x_1) + V_2(x_2) > V_m(x_1 + x_2 - I), \quad (x_1, x_2) \in \mathcal{Q}_2,$$

且

$$V_m(x_1 + x_2 - I) = V_1(x_1) + V_2(x_2), \quad x_2 = q(x_1).$$

隐函数存在定理告诉我们, $q(x)$ 连续可微. 此外它还告诉我们, 固定 x_2 , 存在唯一一个 x_1 满足

$$V_m(x_1 + x_2 - I) = V_1(x_1) + V_2(x_2).$$

因此, $q(x)$ 是一个一一映射. $q(x)$ 的单调性马上可得, 这意味着 $q(x)$ 的反函数 $q^{-1}(x)$ 存在.

根据 $q(x)$ 的定义可知, $V_m(q(0) - I) = V_2(q(0))$ 且 $V_m(q^{-1}(0) - I) = V_1(q^{-1}(0))$. 由这两个式子可推出 $q(0) > 0$ 且 $q^{-1}(0) > 0$. 很明显, $q(x)$ 是减函数.

接下来, 在区域 $\mathcal{Q}_1$ 上, 我们将比较 $V_1(x_1) + V_2(x_2)$ 和 $V_m(x_1 + x_2 - I)$. 由 $\mu_m \geq \mu_1 + \mu_2$ 且 $\sigma_m^2 \leq \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2$ 可知,

$$\mathcal{L}_{1,2}V_m(x_1 + x_2 - I) - \delta V_m(x_1 + x_2 - I) \leq \mathcal{L}_m V_m(x_1 + x_2 - I) - \delta V_m(x_1 + x_2 - I) \leq 0. \quad (5.3)$$

根据引理 5.1, 当 $x \geq 0$ 时,

$$\mathcal{L}_1 V_m(x) - \delta V_m(x) \leq 0, \quad (5.4)$$

且

$$\mathcal{L}_2 V_m(x) - \delta V_m(x) \leq 0. \quad (5.5)$$

对任意初始点 $(x_1, x_2) \in \mathcal{Q}_1$ 和任意策略 $\pi \in \Pi$, 考虑 $e^{-\delta t} V_m(X_1^\pi(t) + X_2^\pi(t) - I)$, 从 0 到 $\tau_q^\pi = \inf\{t \geq 0 : X_2^\pi(t) = q(X_1^\pi(t))\}$ 对 $e^{-\delta t} V_m(X_1^\pi(t) + X_2^\pi(t) - I)$ 应用 Itô 公式并在两边取期望, 有

$$\mathbb{E}_{x_1, x_2}[e^{-\delta \tau_q^\pi} V_m(X_1^\pi(\tau_q^\pi) + X_2^\pi(\tau_q^\pi) - I)]$$

$$\begin{aligned}
 &= E_{x_1, x_2} \left[\int_0^{\tau_q^\pi} 1_{\{\tau_q^\pi < \tau_{1,0} \wedge \tau_{2,0}\}} e^{-\delta t} (\mathcal{L}_{1,2} V_m(X_1^\pi(t) + X_2^\pi(t) - I) - \delta V_m(X_1^\pi(t) + X_2^\pi(t) - I)) dt \right] \\
 &+ E_{x_1, x_2} \left[\int_0^{\tau_{2,0}} 1_{\{\tau_q^\pi \geq \tau_{2,0} = \tau_{1,0} \wedge \tau_{2,0}\}} e^{-\delta t} (\mathcal{L}_{1,2} V_m(X_1^\pi(t) + X_2^\pi(t) - I) - \delta V_m(X_1^\pi(t) + X_2^\pi(t) - I)) dt \right] \\
 &+ E_{x_1, x_2} \left[\int_{\tau_{2,0}}^{\tau_q^\pi} 1_{\{\tau_q^\pi \geq \tau_{2,0} = \tau_{1,0} \wedge \tau_{2,0}\}} e^{-\delta t} (\mathcal{L}_1 V_m(X_1^\pi(t) - I) - \delta V_m(X_1^\pi(t) - I)) dt \right] \\
 &+ E_{x_1, x_2} \left[\int_0^{\tau_{1,0}} 1_{\{\tau_q^\pi \geq \tau_{1,0} = \tau_{1,0} \wedge \tau_{2,0}\}} e^{-\delta t} (\mathcal{L}_{1,2} V_m(X_1^\pi(t) + X_2^\pi(t) - I) - \delta V_m(X_1^\pi(t) + X_2^\pi(t) - I)) dt \right] \\
 &+ E_{x_1, x_2} \left[\int_{\tau_{1,0}}^{\tau_q^\pi} 1_{\{\tau_q^\pi \geq \tau_{1,0} = \tau_{1,0} \wedge \tau_{2,0}\}} e^{-\delta t} (\mathcal{L}_2 V_m(X_2^\pi(t) - I) - \delta V_m(X_2^\pi(t) - I)) dt \right] \\
 &+ E_{x_1, x_2} \left[\int_0^{\tau_q^\pi \wedge \tau_{1,0}} \mu_1 e^{-\delta t} V'_m(X_1^\pi(t) + X_2^\pi(t) - I) dW^1(t) \right] \\
 &+ E_{x_1, x_2} \left[\int_0^{\tau_q^\pi \wedge \tau_{2,0}} \mu_2 e^{-\delta t} V'_m(X_1^\pi(t) + X_2^\pi(t) - I) dW^2(t) \right] \\
 &+ E_{x_1, x_2} \left[\sum_{0 \leq t \leq \tau_q^\pi} e^{-\delta t} (V_m(X_1^\pi(t) + X_2^\pi(t) - I) - V_m(X_1^\pi(t-) + X_2^\pi(t-) - I)) \right] \\
 &+ V_m(x_1 + x_2 - I) - E_{x_1, x_2} \left[\int_0^{\tau_q^\pi} e^{-\delta t} d(L_1^{c,\pi}(t) + L_2^{c,\pi}(t)) \right],
 \end{aligned}$$

其中 $L_i^{c,\pi}(t)$ ($i = 1, 2$) 是 $L_i^\pi(t)$ ($i = 1, 2$) 的连续部分. 利用 (5.3)–(5.5) 可得

$$V_m(x_1 + x_2 - I) \geq E_{x_1, x_2} [e^{-\delta \tau_q^\pi} V_m(X_1^\pi(\tau_q^\pi) + X_2^\pi(\tau_q^\pi) - I)] + E_{x_1, x_2} \left[\int_0^{\tau_q^\pi} e^{-\delta t} d(L_1^\pi(t) + L_2^\pi(t)) \right]. \quad (5.6)$$

由于

$$V_m(X_1^\pi(\tau_q^\pi) + X_2^\pi(\tau_q^\pi) - I) = V_1(X_1^\pi(\tau_q^\pi)) + V_2(X_2^\pi(\tau_q^\pi)), \quad (5.7)$$

在 (5.6) 两端对 $\pi \in \Pi$ 取上确界并联立 (5.7), 利用 $V_1(x_1)$ 和 $V_2(x_2)$ 的动态规划原理, 有

$$V_m(x_1 + x_2 - I) \geq V_1(x_1) + V_2(x_2).$$

接下来将构造一个满足定理 4.2 中条件的函数.

引理 5.3 定义 $v(x_1, x_2)$ 为

$$\begin{aligned}
 v(x_1, x_2) &= \sup_{\tau \in \mathcal{T}} E_{x_1, x_2} [e^{-\delta(\tau \wedge (\tau_{1,0} \vee \tau_{2,0}))} \max\{V_1(R_1(\tau \wedge (\tau_{1,0} \vee \tau_{2,0}))) + V_2(R_2(\tau \wedge (\tau_{1,0} \vee \tau_{2,0}))), \\
 &V_m(R_1(\tau \wedge (\tau_{1,0} \vee \tau_{2,0})) + R_2(\tau \wedge (\tau_{1,0} \vee \tau_{2,0})) - I)\}], \quad (5.8)
 \end{aligned}$$

则 $v(x_1, x_2) \leq V(x_1, x_2)$.

证明 由定理 4.1 知, 对任意 $\pi \in \Pi$, 有

$$\begin{aligned}
 V(x_1, x_2) &\geq E_{x_1, x_2} \left[\int_0^{T^\pi \wedge \tau^\pi} e^{-\delta t} d(L_1^\pi(t) + L_2^\pi(t)) + e^{-\delta(T^\pi \wedge \tau^\pi)} V_m(X_1^\pi(T^\pi \wedge \tau^\pi) + X_2^\pi(T^\pi \wedge \tau^\pi) - I) \right] \\
 &= E_{x_1, x_2} \left[\int_0^{T^\pi \wedge \tau^\pi} e^{-\delta t} d(L_1^\pi(t) + L_2^\pi(t)) + e^{-\delta(T^\pi \wedge \tau^\pi)} V(X_1^\pi(T^\pi \wedge \tau^\pi), X_2^\pi(T^\pi \wedge \tau^\pi)) \right].
 \end{aligned}$$

在策略 $\tilde{\pi} = (t, 0, 0, L_m^*)$ 下可得

$$V(x_1, x_2) \geq E_{x_1, x_2}[e^{-\delta(t \wedge \tau^{\tilde{\pi}})} V(R_1(t \wedge \tau^{\tilde{\pi}}), R_2(t \wedge \tau^{\tilde{\pi}}))].$$

这意味着 $e^{-\delta(t \wedge \tau^{\tilde{\pi}})} V(R_1(t \wedge \tau^{\tilde{\pi}}), R_2(t \wedge \tau^{\tilde{\pi}}))$ 是一个上鞅且大于 $\max\{V_1(x_1) + V_2(x_2), V_m(x_1 + x_2 - I)\}$. 另一方面, 根据最优停止理论, $v(x_1, x_2)$ 是大于 $\max\{V_1(x_1) + V_2(x_2), V_m(x_1 + x_2 - I)\}$ 的最小上鞅. 因此, 不等式 $V(x_1, x_2) \geq v(x_1, x_2)$ 成立.

令 $S_0 = \{(x_1, x_2) : v(x_1, x_2) = V_1(x_1) + V_2(x_2)\}$ 且 $S_m = \{(x_1, x_2) : v(x_1, x_2) = V_m(x_1 + x_2 - I)\}$. 由引理 5.2 知 $S_0 \subseteq \mathcal{Q}_2$ 且 $S_m \subseteq \mathcal{Q}_1$. $\square$

引理 5.4 若 $b_m^* - b_1^* + I < \frac{\mu_m - \mu_1}{\delta}$ 或 $b_m^* - b_2^* + I < \frac{\mu_m - \mu_2}{\delta}$, 则 $S_m \neq \emptyset$.

证明 我们用反证法证明. 假设 $S_m = \emptyset$, 则有

$$\begin{aligned} V_m(x_1 + x_2 - I) &< v(x_1, x_2) \\ &= \sup_{\tau \in \mathcal{T}} E_{x_1, x_2}[e^{-\delta(\tau \wedge (\tau_{1,0} \vee \tau_{2,0}))} (V_1(R_1(\tau \wedge (\tau_{1,0} \vee \tau_{2,0}))) + V_2(R_2(\tau \wedge (\tau_{1,0} \vee \tau_{2,0}))))] \\ &\leq V_1(x_1) + V_2(x_2). \end{aligned}$$

就是说

$$V_m(x_1 + x_2 - I) < V_1(x_1) + V_2(x_2), \quad (x_1, x_2) \in \mathcal{R}_+^2.$$

也就是说 $b_m^* - b_1^* + I \geq \frac{\mu_m - \mu_1}{\delta}$, 且 $b_m^* - b_2^* + I \geq \frac{\mu_m - \mu_2}{\delta}$. 与引理的假设矛盾. $\square$

接下来将给出 $v(x_1, x_2)$ 的表达式.

性质 5.1 如果 $S_0 \neq \emptyset$, 则由 (5.8) 定义的 $v(x_1, x_2)$ 可以被 (5.9) 表达.

证明 首先研究一下 S_0 和 S_m . 定义

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \sup\{x_2 : v(x, x_2) = V_1(x) + V_2(x_2)\}, \\ f_2(x) &= \inf\{x_2 : v(x, x_2) = V_m(x + x_2 - I)\}, \end{aligned}$$

其中 $\sup \emptyset = 0$ 且 $\inf \emptyset = \infty$.

定义

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_1 &= \{(x_1, x_2) : x_1 \geq 0, 0 \leq x_2 \leq f_1(x_1)\}, \\ \mathcal{U}_2 &= \{(x_1, x_2) : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, f_1(x_1) \leq x_2 \leq f_2(x_1)\}, \\ \mathcal{U}_3 &= \{(x_1, x_2) : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_2 \geq f_2(x_1)\}, \\ \tau_{S_i} &= \inf\{t \geq 0 : (R_1(t), R_2(t)) \in S_i\}, \quad i = 0, m, \\ \tau_{\mathcal{U}_i} &= \inf\{t \geq 0 : (R_1(t), R_2(t)) \in \mathcal{U}_i\}, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

如果 $(x_1, x_2) \in S_0 \subseteq \mathcal{Q}_2$, 则由 $\mathcal{Q}_2$ 定义可知, $(y_1, y_2) \in \mathcal{Q}_2$, $y_1 \leq x_1$, $y_2 \leq x_2$. 因此,

$$\begin{aligned} v(y_1, y_2) &= E_{y_1, y_2}[e^{-\delta(\tau_{S_0} \wedge (\tau_{1,0} \vee \tau_{2,0}))} (V_1(R_1(\tau_{S_0} \wedge (\tau_{1,0} \vee \tau_{2,0}))) + V_2(R_2(\tau_{S_0} \wedge (\tau_{1,0} \vee \tau_{2,0}))))] \\ &\leq V_1(y_1) + V_2(y_2). \end{aligned}$$

另一方面, $v(y_1, y_2) \geq V_1(y_1) + V_2(y_2)$, 所以, $v(y_1, y_2) = V_1(y_1) + V_2(y_2)$. 也就是说, $(y_1, y_2) \in S_0$. 因此, 由以上分析可知, $S_0 = \mathcal{U}_1$. 用类似的分析可得 $S_m = \mathcal{U}_3$. 进一步地, 通过应用最优停止理论, 对任意 $(x_1, x_2) \in \mathcal{U}_2$, 有

$$\mathcal{L}_{1,2}v(x_1, x_2) - \delta v(x_1, x_2) = 0,$$

且

$$\begin{aligned} v(x_1, x_2) &= \mathbb{E}_{x_1, x_2}[e^{-\tau_{\mathcal{U}_1}} 1_{\{\tau_{\mathcal{U}_1} < \tau_{\mathcal{U}_3}\}} (V_1(R_1(\tau_{\mathcal{U}_1})) + V_2(R_2(\tau_{\mathcal{U}_1})))] \\ &\quad + \mathbb{E}_{x_1, x_2}[e^{-\tau_{\mathcal{U}_3}} 1_{\{\tau_{\mathcal{U}_1} > \tau_{\mathcal{U}_3}\}} (V_m(R_1(\tau_{\mathcal{U}_1}) + R_2(\tau_{\mathcal{U}_1}) - I))]. \end{aligned}$$

总而言之,

$$v(x_1, x_2) = \begin{cases} V_1(x_1) + V_2(x_2), & (x_1, x_2) \in \mathcal{U}_1, \\ g(x_1, x_2), & (x_1, x_2) \in \mathcal{U}_2, \\ V_m(x_1 + x_2 - I), & (x_1, x_2) \in \mathcal{U}_3, \end{cases} \quad (5.9)$$

其中

$$\begin{aligned} g(x_1, x_2) &= \mathbb{E}_{x_1, x_2}[e^{-\tau_{\mathcal{U}_1}} 1_{\{\tau_{\mathcal{U}_1} < \tau_{\mathcal{U}_3}\}} (V_1(R_1(\tau_{\mathcal{U}_1})) + V_2(R_2(\tau_{\mathcal{U}_1})))] \\ &\quad + \mathbb{E}_{x_1, x_2}[e^{-\tau_{\mathcal{U}_3}} 1_{\{\tau_{\mathcal{U}_1} > \tau_{\mathcal{U}_3}\}} (V_m(R_1(\tau_{\mathcal{U}_1}) + R_2(\tau_{\mathcal{U}_1}) - I))]. \end{aligned}$$

证毕. $\square$

接下来的两个性质给出了分红壁与合并时刻的关系. 有了性质中给出的关系, 我们就能更直观地分析最优分红策略和合并时刻.

性质 5.2 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 非增.

证明 假设存在两点 $(x_1, f_1(x_1))$ 和 $(y_1, f_1(y_1))$ 满足 $x_1 < y_1$, $f_1(x_1) < f_1(y_1)$, 由于 $(y_1, f_1(y_1)) \in S_0$, 因此, 由性质 5.1 中的分析可知, $(x_1, f_1(y_1)) \in S_0$, 与 $f_1(x_1)$ 定义矛盾, 因此, $f_1(x)$ 非增. 同理, $f_2(x)$ 非增. $\square$

定义

$$f_1^{-1}(y) = \inf\{x : f_1(x) = y\}, \quad f_2^{-1}(y) = \inf\{x : f_2(x) = y\}.$$

性质 5.3 $(b_1^*, b_2^*) \in \mathcal{U}_1$.

证明 假设 $(b_1^*, b_2^*) \notin \mathcal{U}_1$, 则存在 $r_1 \in (0, f_1^{-1}(0))$ 满足 $0 < f_1(r_1) < b_2^*$ 和 $0 < r_1 < b_1^*$. 令

$$\tau_{b_1^*} = \inf\{t \geq 0 : R_1(t) = b_1^*\}, \quad \tau_{b_2^*} = \inf\{t \geq 0 : R_2(t) = b_2^*\}, \quad \tau = \tau_{1,0} \wedge \tau_{2,0} \wedge \tau_{b_1^*} \wedge \tau_{b_2^*},$$

则

$$\begin{aligned} v(r_1, f_1(r_1)) &= V_1(r_1) + V_2(f_1(r_1)) \\ &= \mathbb{E}_{r_1, f_1(r_1)}[e^{-\delta\tau} (V_1(R_1(\tau)) + V_2(R_2(\tau)))] \\ &= \mathbb{E}_{r_1, f_1(r_1)}[e^{-\delta\tau} 1_{\{R_2(\tau) > f_1(R_1(\tau))\}} (V_1(R_1(\tau)) + V_2(R_2(\tau)))] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + E_{r_1, f_1(r_1)}[e^{-\delta\tau} 1_{\{R_2(\tau) \leq f_1(R_1(\tau))\}} (V_1(R_1(\tau)) + V_2(R_2(\tau)))] \\
& < E_{r_1, f_1(r_1)}[e^{-\delta\tau} 1_{\{R_2(\tau) \leq f_1(R_1(\tau))\}} (V_1(R_1(\tau)) + V_2(R_2(\tau)))] \\
& \quad + E_{r_1, f_1(r_1)}[e^{-\delta\tau} 1_{\{R_2(\tau) > f_1(R_1(\tau))\}} v(R_1(\tau), R_2(\tau))] \\
& = E_{r_1, f_1(r_1)}[e^{-\delta\tau} v(R_1(\tau), R_2(\tau))] \\
& \leq v(r_1, f_1(r_1)).
\end{aligned}$$

以上不等式不可能成立, 所以, $(b_1^*, b_2^*) \in \mathcal{U}_1$.

显然, 第二个等式由 $e^{-\delta(t \wedge \tau)}(V_1(R_1(t \wedge \tau)) + V_2(R_2(t \wedge \tau)))$ 的鞅性推出, 最后一个等式由 $e^{-\delta t}v(R_1(t), R_2(t))$ 的上鞅性推出. $\square$

性质 5.4 $\{(x_1, x_2) : x_1 + x_2 = b_m^* + I\} \subseteq \mathcal{U}_3$.

证明 显然, 对 $(x_1, x_2) \in \mathcal{Q}_1$, 有

$$V_m(x_1 + x_2 - I) \geq V_1(x_1) + V_2(x_2). \quad (5.10)$$

如果进一步地, $x_1 \geq b_1^*$, $x_2 \geq b_2^*$ 且 $x_1 + x_2 \geq b_m^* + I$, 则 (5.10) 变为

$$\frac{\mu_m - \mu_1 - \mu_2}{\delta} \geq b_m^* + I - b_1^* - b_2^*.$$

假设存在 $r_1 \in [0, f_2^{-1}(0)]$ 满足 $b_m^* + I - r_1 < f_2(r_1)$. 如果 $(r_1, b_m^* + I - r_1) \in S_0$, 则

$$v(r_1, b_m^* + I - r_1) = V_1(r_1) + V_2(b_m^* + I - r_1) \leq b_m^* + I - b_1^* - b_2^* + \frac{\mu_1 + \mu_2}{\delta} \leq \frac{\mu_m}{\delta}.$$

否则, 由于

$$\begin{aligned}
v(r_1, b_m^* + I - r_1) &= E_{r_1, b_m^* + I - r_1}[e^{-\delta(\tau_{S_0} \wedge \tau_{S_m})} \max\{V_1(R_1(\tau_{S_0} \wedge \tau_{S_m})) + V_2(R_2(\tau_{S_0} \wedge \tau_{S_m})), \\
& \quad V_m(R_1(\tau_{S_0} \wedge \tau_{S_m}) + R_2(\tau_{S_0} \wedge \tau_{S_m}) - I)\}] \\
&\leq E_{r_1, b_m^* + I - r_1}\left[1_{\{\tau_{S_0} \leq \tau_{S_m}\}} e^{-\delta\tau_{S_0}} \left(\frac{\mu_1 + \mu_2}{\delta} + R_1(\tau_{S_0}) + R_2(\tau_{S_0}) - b_1^* - b_2^*\right)\right] \\
& \quad + E_{r_1, b_m^* + I - r_1}\left[1_{\{\tau_{S_0} > \tau_{S_m}\}} e^{-\delta\tau_{S_m}} \left(\frac{\mu_m}{\delta} + R_1(\tau_{S_m}) + R_2(\tau_{S_m}) - b_m^* - I\right)\right] \\
&\leq E_{r_1, b_m^* + I - r_1}\left[e^{-\delta(\tau_{S_0} \wedge \tau_{S_m})} \left(\frac{\mu_m}{\delta} + R_1(\tau_{S_0} \wedge \tau_{S_m}) + R_2(\tau_{S_0} \wedge \tau_{S_m}) - b_m^* - I\right)\right], \quad (5.11)
\end{aligned}$$

进一步地, 由性质 5.2 可知,

$$R_1(s) \geq b_1^*, \quad 0 \leq s \leq \tau_{S_0} \wedge \tau_{S_m},$$

且

$$R_2(s) \geq b_2^*, \quad 0 \leq s \leq \tau_{S_0} \wedge \tau_{S_m},$$

则应用 Itô 公式可得

$$E_{r_1, b_m^* + I - r_1}\left[e^{-\delta(\tau_{S_0} \wedge \tau_{S_m})} \left(\frac{\mu_m}{\delta} + R_1(\tau_{S_0} \wedge \tau_{S_m}) + R_2(\tau_{S_0} \wedge \tau_{S_m}) - b_m^* - I\right)\right]$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\mu_m}{\delta} + E_{r_1, b_m^* + I - r_1} \left[\int_0^{(\tau_{S_0} \wedge \tau_{S_m})} e^{-\delta s} \left(-\delta \left(R_1(s) + R_2(s) - b_m^* - I + \frac{\mu_m}{\delta} \right) + \mu_1 + \mu_2 \right) ds \right] \\
 &\leq \frac{\mu_m}{\delta}.
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

联立 (5.11) 和 (5.12) 可得 $v(r_1, b_m^* + I - r_1) \leq \frac{\mu_m}{\delta}$. 另一方面, $(r_1, b_m^* + I - r_1) \notin S_m$ 可推得

$$v(r_1, b_m^* + I - r_1) > V_m(b_m^* + I) = \frac{\mu_m}{\delta}.$$

上述两个等式推出矛盾, 性质得证. 接下来的定理给出当两个公司风险相关系数为零时, 第二种情形下的最优策略及值函数. $\square$

定理 5.3 如果 $\rho = 0$, 则 $V(x_1, x_2) = v(x_1, x_2)$. 最优策略如下:

- (1) 如果盈余过程在 $\mathcal{U}_1$ 内, 两个公司永不合并, 并应用自己的最优分红策略;
- (2) 如果盈余过程在 $\mathcal{U}_3$ 内, 两个公司马上合并, 合并公司应用自己的最优分红策略;
- (3) 如果盈余过程在 $\mathcal{U}_2$ 内, 两个公司不分红并等待直到它们的盈余过程到达区域 $\mathcal{U}_1$ 或 $\mathcal{U}_3$, 接下来, 他们施行以上策略.

证明 首先证明 $v(x_1, x_2)$ 满足定理 4.2 的条件. 显然, 根据 (5.9), 只需证明对 a.e. $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$,

$$g_{x_1}(x_1, x_2) \geq 1, \quad \text{a.s. } (x_1, x_2) \in \mathcal{U}_2$$

且

$$g_{x_2}(x_1, x_2) \geq 1, \quad \text{a.s. } (x_1, x_2) \in \mathcal{U}_2.$$

由性质 5.2 知, $(x_1, x_2) \in \mathcal{U}_2$, 我们有 $(x_1, x_2) \geq (b_1^*, b_2^*)$, 则

$$V_1'(x_1) = V_2'(x_2) = 1 \quad \text{且} \quad V_1''(x_1) = V_2''(x_2) = 0.$$

用反证法证明, 假设存在非空区域 $\mathcal{X} \subset \mathcal{U}_2$, 其上有性质

$$\begin{aligned}
 &g_{x_1}(x_1, x_2) < 1 \quad \text{或} \quad g_{x_2}(x_1, x_2) < 1, \quad (x_1, x_2) \in \mathcal{X}, \\
 &g_{x_1}(x_1, x_2) = 1 \quad \text{且} \quad g_{x_2}(x_1, x_2) = 1, \quad (x_1, x_2) \in \partial\mathcal{X}.
 \end{aligned}$$

定义

$$\begin{aligned}
 p_1(x_2) &= \sup\{x_1 : g_{x_1, x_1}(x_1, x_2) = 0, (x_1, x_2) \in \mathcal{X}\}, \\
 p_2(x_1) &= \inf\{x_2 : g_{x_2, x_2}(x_1, x_2) = 0, (x_1, x_2) \in \mathcal{X}\}.
 \end{aligned}$$

记 $x_1 = p_1(x_2)$ 和 $x_2 = p_2(x_1)$ 的交点为 (z_1, z_2) , 则

$$g_{x_1, x_1}(z_1, z_2) = g_{x_2, x_2}(z_1, z_2) = 0.$$

如果 $g_{x_1}(z_1, z_2) \leq 1$ 且 $g_{x_2}(z_1, z_2) \leq 1$, 联立 $g(z_1, z_2) > V_1(z_1) + V_2(z_2)$ 、 $V_1'(z_1) = V_2'(z_2) = 1$ 和 $V_1''(z_1) = V_2''(z_2) = 0$ 可得

$$0 = \mathcal{L}_{1,2}g(z_1, z_2) - \delta g(z_1, z_2) < \mathcal{L}_{1,2}(V_1(z_1) + V_2(z_2)) - \delta(V_1(z_1) + V_2(z_2)) \leq 0.$$

这是一个矛盾. 如果 $g_{x_1}(z_1, z_2) > 1$ 或 $g_{x_2}(z_1, z_2) > 1$, 不失一般性, 假设 $g_{x_1}(z_1, z_2) > 1$, 定义 (r_1, z_2) 是 $x_2 = z_2$ 和 $\partial\mathcal{X}$ 右边交点, 由 $p_1(x)$ 的定义, 有 $g_{x_1 x_1}(x_1, z_2) \leq 0$, $z_1 < x_1 < r_1$, 则

$$g_{x_1}(x_1, z_2) \geq g_{x_1}(r_1, z_2) = 1, \quad z_1 < x_1 < r_1,$$

这意味着

$$g_{x_2}(x_1, z_2) < 1, \quad z_1 < x_1 < r_1.$$

由于 $g_{x_2}(x_1, x_2) = 1$, $(x_1, x_2) \in \partial\mathcal{X}$, 再考虑到 $p_2(x)$ 的定义, 则有 $g_{x_2 x_2}(r_1, z_2) \leq 0$. 因此,

$$0 = \mathcal{L}_{1,2}g(r_1, z_2) - \delta g(r_1, z_2) < \mathcal{L}_{1,2}(V_1(r_1) + V_2(z_2)) - \delta(V_1(r_1) + V_2(z_2)) \leq 0.$$

这是一个矛盾. 这两种情形我们都得到矛盾, 所以,

$$g_{x_1}(x_1, x_2) \geq 1, \quad \text{a.s. } (x_1, x_2) \in \mathcal{U}_2,$$

且

$$g_{x_2}(x_1, x_2) \geq 1, \quad \text{a.s. } (x_1, x_2) \in \mathcal{U}_2.$$

联立 (5.9) 并根据 $v(x_1, x_2)$ 的定义可知, $v(x_1, x_2)$ 满足定理 4.2 的条件, 可知 $v(x_1, x_2) \geq V(x_1, x_2)$. 进一步地, 引理 5.3 告诉我们 $v(x_1, x_2) \leq V(x_1, x_2)$, 由此可得 $v(x_1, x_2) = V(x_1, x_2)$. 由 (5.9) 可知, $J_{\pi^*}(x_1, x_2) = v(x_1, x_2) = V(x_1, x_2)$. 显然, π^* 是最优策略. $\square$

总之, 若 $\rho = 0$ 且 $S_0 \neq \emptyset$, 则我们能得到第二种情形下值函数确切的表达式.

6 结论

本文的最优化目标为最大化两个公司的期望累计折现分红和. 显然合并前的两个公司是为共同利益努力的, 因此, 文中的结论一般用于解决母公司旗下的两个子公司的合并问题.

由定理 5.2 可知, 当 $V_1(x_1) + V_2(x_2) \geq V_m(x_1 + x_2 - I)$ 时, 两公司采取不合并的策略. 这是符合实际情况的, 若合并前后公司的累计折现分红和差别不大, 且合并费用较高, 则合并给两公司带来的好处不足以抵消合并费用, 因此, 此时应采取不合并的策略. 第二种情形下值函数由引理 5.3 中定义的函数 v 给出. 由 v 的定义可知, 此时, 合并费用越高, 越不容易达到合并区域; 两公司的盈余和越大, 越容易达到合并区域. 因此, 合并时刻和合并费用成反比, 与两公司的盈余和成正比. 很明显, 当合并费用变高时, 两公司需要积攒资金, 应付之后的合并, 因此, 合并时刻会延迟; 两公司的盈余和越大, 其准备得就越充分, 因此, 合并时刻会提前.

致谢 感谢匿名审稿人给出的宝贵意见和建议.

参考文献

- 1 Linn S C, Switzer J A. Are cash acquisitions associated with better postcombination operating performance than stock acquisitions? *J Bank Finance*, 2001, 25: 1113–1138
- 2 Perry M K, Porter R H. Oligopoly and the incentive for horizontal Merger. *Amer Econ Rev*, 1985, 75: 219–227
- 3 Gerber H U, Shiu E S W. On the merger of two companies. *N Am Actuar J*, 2006, 10: 60–67

- 4 Décamps J P, Villeneuve S. Optimal dividend policy and growth option. *Finance Stoch*, 2006, 11: 3–27
- 5 Okawa M, Tsujimura M. The value of a merger and its optimal timing. *Appl Financ Econ*, 2009, 19: 1477–1485
- 6 Jacka S D. Optimal stopping and the American put. *Math Finance*, 1991, 1: 1–14
- 7 Tsitsiklis J N, van Roy B. Optimal stopping of Markov processes: Hilbert space theory, approximation algorithms, and an application to pricing high-dimensional financial derivatives. *IEEE Trans Automat Control*, 1999, 44: 1840–1851
- 8 Bally V, Pagès G. A quantization algorithm for solving multidimensional discrete-time optimal stopping problems. *Bernoulli*, 2003, 9: 1003–1049
- 9 Fleming W H, Soner M. *Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions*, 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 2006

The optimal time to merge for two insurance companies

Ya'nan Li, Lihua Bai & Junyi Guo

Abstract In Gerber and Shiu (2006) an interesting link is provided between the feasibility of a merger of two companies and the theory of optimal dividend strategy. They give a situation in which the merger of the two companies will result in a gain and this result can give a useful guideline on corporate governance. At the end of Gerber and Shiu (2006), a more realistic problem is raised, i.e., what is the best time to merge? In order to analyze this problem, we first use the theory of the mixed singular control/two-dimensional optimal stopping to prove the corresponding dynamic programming principle and the verification theorem. Then, we consider the problem in two cases. In Case 1, merging of companies is never necessary and the two companies pay dividends according to their own optimal dividend policies. In Case 2, the problem is much more difficult. We split the whole region into three subsets $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \mathcal{U}_3$, the optimal strategy depends on which subset the reserve processes of the two companies lie in: If they lie in region $\mathcal{U}_1$, the optimal policies are the same as those in Case 1; if they lie in region $\mathcal{U}_3$, the two companies merge immediately and the merged company follows its own optimal dividend policy; if they lie in region $\mathcal{U}_2$, the two companies pay no dividends and wait until their surplus processes reach either region $\mathcal{U}_1$ or region $\mathcal{U}_3$, afterwards, they follow the optimal policies described above.

Keywords optimal time to merge, optimal dividend, optimal stopping theorem, HJB (Hamilton-Jacob-Bellman) equation, implicit function theorem

MSC(2010) 93E20, 91B30

doi: 10.1360/N012017-00075