非对称随机微分方程的泛函不等式

献给严士健教授 90 华诞

王风雨

北京师范大学数学科学学院, 北京 100875

E-mail: wangfy@bnu.edu.cn

收稿日期: 2018-05-30; 接受日期: 2018-08-30; 网络出版日期: 2019-04-16

国家自然科学基金 (批准号: 11771326 和 11431014) 资助项目

摘要 通常非对称 Markov 半群比相应的对称半群有更好的分析性质. 例如, Wang (2017) 给出一类超压缩 (因此, 在 L^2 和相对熵下指数遍历) 的非对称 Markov 半群, 其对称半群甚至不遍历. 本文讨论反方向的问题: 在什么条件下, 非对称 Markov 半群和相应的对称半群享有同等的性质. 分别对于由 Brown 运动和 Lévy 跳过程驱动的随机微分方程, 本文得到了非对称半群和对称半群在一些重要性质方面地位对等的充分必要条件, 这些性质包括指数收敛性、一致可积性、 H -超压缩性和 S -超有界性.

关键词 非对称半群 泛函不等式 指数收敛性 一致可积性 超有界性

MSC (2010) 主题分类 60J60, 58J65

1 引言

非对称 Markov 半群通常会比相应的对称 Markov 半群有更好的性质. 考虑 Polish 空间 E , 以及有界可测函数空间上具有唯一不变概率测度 μ 的非对称 Markov 半群 P_t . 令 $(L, \mathcal{D}(L))$ 为 P_t 在 $L^2(\mu)$ 上的生成算子, 考虑能量型 (在扇形条件下, 称为 Dirichlet 型):

$$\mathcal{E}(f, g) := -\mu(fLg) = -\int_E fLg d\mu, \quad f, g \in \mathcal{D}(L).$$

以 $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ 记 $\mathcal{D}(L)$ 在 Sobolev 范数 $\|f\|_{\mathcal{E}} := \|f\|_{L^2(\mu)} + \sqrt{\mathcal{E}(f, f)}$ 下的闭包. 设

$$\hat{L} := \frac{1}{2}(L + L^*), \quad \mathcal{D}(\hat{L}) = \mathcal{D}(L) \cap \mathcal{D}(L^*)$$

生成 $L^2(\mu)$ 上的对称 Markov 半群 $\hat{P}_t$, 其中 $(L^*, \mathcal{D}(L^*))$ 为 L 在 $L^2(\mu)$ 中的伴随算子. 由文献 [1] 知, 如果存在常数 $c \geq 1$ 和 $\lambda > 0$ 使得

$$\|\hat{P}_t f - \mu(f)\|_{L^2(\mu)} \leq ce^{-\lambda t} \|f - \mu(f)\|_{L^2(\mu)}, \quad t \geq 0, \quad f \in L^2(\mu), \quad (1.1)$$

英文引用格式: Wang F Y. Functional inequalities for non-symmetric stochastic differential equations (in Chinese). Sci Sin Math, 2020, 50: 167–178, doi: 10.1360/N012018-00150

则 Poincaré 不等式

$$\mu(f^2) \leq \frac{1}{\lambda} \mathcal{E}(f, f) + \mu(f)^2, \quad f \in \mathcal{D}(\mathcal{E}) \quad (1.2)$$

成立. 熟知, 该不等式等价于 (1.1) 对于 $c = 1$ 成立, 也等价于非对称半群 P_t 的指数收敛性

$$\|P_t f - \mu(f)\|_{L^2(\mu)} \leq c e^{-\lambda t} \|f - \mu(f)\|_{L^2(\mu)}, \quad t \geq 0, \quad f \in L^2(\mu) \quad (1.3)$$

对于 $c = 1$ 成立. 可见, 非对称半群 P_t 的收敛速度不差于对称半群. 实际上, 有许多例子表明, P_t 的指数收敛速度可以严格地大于 $\hat{P}_t$ 的指数收敛速度, 参见文献 [2, 3] 及其文献. 文献 [4] 新近给出了一类超压缩 (因此, 在 L^2 和相对熵下指数遍历) 的非对称扩散半群, 其对称半群甚至不遍历.

本文考虑反面的问题: 在什么条件下, 非对称 Markov 半群 P_t 和相应的对称 Markov 半群 $\hat{P}_t$ 享有相同的性质. 除了前面提到的指数收敛性外, 我们还考虑如下三条性质:

- (1) 一致可积性: $\|P_t\|_{\text{tail}} := \lim_{R \rightarrow \infty} \sup_{\mu(f^2) \leq 1} \|(P_t f) 1_{\{|P_t f| \geq R\}}\|_{L^2(\mu)} = 0$.
- (2) H -超压缩性: 对于充分大的 $t > 0$, 有 $\|P_t\|_{L^2(\mu) \rightarrow L^4(\mu)} = 1$.
- (3) S -超有界性: 对于所有的 $t > 0$, 有 $\|P_t\|_{L^2(\mu) \rightarrow L^4(\mu)} < \infty$.

对于对称 Markov 半群, 这些性质可以被相应能量 (Dirichlet) 型的泛函不等式精确地刻画, 参见文献 [5, 6]. 如果对称 Markov 半群 P_t 具有指数收敛性、一致可积性、 H -超压缩性或 S -超有界性, 那么非对称 Markov 半群 P_t 也具有这些性质. 我们将给出一类 Markov 半群, 使得反过来的论断也成立, 即如果 P_t 具有这些性质, 则 $\hat{P}_t$ 也具有这些性质.

一类已知的例子是 Riemann 流形上曲率下有界的扩散半群 P_t , 根据文献 [7] 可知, P_t 是 H -超压缩的或 S -超有界性的, 当且仅当 $\hat{P}_t$ 也具有这些性质.

在余下的两节里, 我们分别就 Brown 运动和 Lévy 跳过程驱动的随机偏微分方程研究这个问题. 对于这两类模型, 曲率的下界条件不是显式条件, 为便于验证, 我们将代之以由方程的系数给出的显式条件.

2 Brown 运动驱动的随机微分方程

考虑 $\mathbb{R}^d$ 上的随机微分方程:

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t, \quad (2.1)$$

其中 $b : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ 局部有界可测, $\sigma : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d$ 局部 Lipschitz 连续且存在常数 $K > 0$ 和 $\lambda_2 \geq \lambda_1 > 0$ 使得

$$\|\sigma(x) - \sigma(y)\|_{HS}^2 + 2\langle b(x) - b(y), x - y \rangle \leq K|x - y|^2, \quad x, y \in \mathbb{R}^d, \quad (2.2)$$

$$G\lambda_1 I \leq \sigma\sigma^* \leq \lambda_2 I, \quad (2.3)$$

其中 I 为 $d \times d$ 单位矩阵, 则任给初值 $x \in \mathbb{R}^d$, 该方程具有唯一的强解 $(X_t^x)_{t \geq 0}$. 相应的 Markov 半群 P_t 定义为

$$P_t f(x) := \mathbb{E}f(X_t^x), \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad f \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R}^d).$$

假设 P_t 具有唯一的不变概率测度 μ , 则相应的对称 Markov 半群的 Dirichlet 型为

$$\mathcal{E}(f, g) := \frac{1}{2} \mu(\langle \sigma\sigma^* \nabla f, \nabla g \rangle) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \langle \sigma\sigma^* \nabla f, \nabla g \rangle d\mu, \quad f, g \in \mathcal{D}(\mathcal{E}),$$

其中 $\mathcal{D}(\mathcal{E}) = H^{1,2}(\mu)$ 是 $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ 在 Sobolev 范数 $\|f\|_{1,2} := \sqrt{\mu(f^2 + |\nabla f|^2)}$ 下的完备化.

由文献 [1] 知, 对于每一个常数 $c \geq 1$, 指数式收敛性 (1.1) 等价于 Poincaré 不等式 (1.2); 而由文献 [5, 7] 知, $\hat{P}_t$ 的一致可积性等价于超 Poincaré 不等式

$$\mu(f^2) \leq r\mathcal{E}(f, f) + \beta(r)\mu(|f|)^2, \quad f \in H^{1,2}(\mu) \quad (2.4)$$

对于某参考函数 $\beta: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ 成立. 不失一般性, 我们总假设 β 为减函数.

2.1 主要结果

第一个结果表明, 在条件 (2.2) 和 (2.3) 下, P_t 和 $\hat{P}_t$ 共享指数收敛性和一致可积性.

定理 2.1 设 (2.2) 和 (2.3) 对于某些常数 $K, \lambda_1, \lambda_2 > 0$ 成立, 则

(1) 存在常数 $\lambda > 0$ 使得 (1.2) (等价地, (1.3) 和 (1.1) 对于 $c = 1$) 成立, 当且仅当 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|P_t\|_{\text{tail}} < 1$. 从而, 如果 (1.1) 和 (1.3) 之一对于某常数 $c \geq 1$ 成立, 则它们对于 $c = 1$ 同时成立.

(2) (2.4) 对于某函数 $\beta: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ (等价地, $\|\hat{P}_t\|_{\text{tail}} = 0$ 对所有 $t > 0$) 成立, 当且仅当 $\|P_t\|_{\text{tail}} = 0$ 对于所有的 $t > 0$ 成立.

其次, 考虑对数 Sobolev 不等式

$$\mu(f^2 \log f^2) \leq C\mathcal{E}(f, f), \quad f \in H^{1,2}(\mu), \quad \mu(f^2) = 1, \quad (2.5)$$

其中 $C > 0$ 为常数; 以及超对数 Sobolev 不等式

$$\mu(f^2 \log f^2) \leq r\mathcal{E}(f, f) + \beta(r), \quad f \in H^{1,2}(\mu), \quad \mu(f^2) = 1, \quad r > 0, \quad (2.6)$$

其中 $\beta: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ 为某减函数. 由文献 [8], 它们分别等价于 $\hat{P}_t$ 的 H -超压缩性和 S -超有界性. 对于 $a := \sigma\sigma^*$, $(g_{ij})_{1 \leq i, j \leq d} := a^{-1}$, 令

$$\Gamma_{ij}^k := \frac{1}{2} \sum_{m=1}^d (\partial_i g_{mj} + \partial_j g_{im} - \partial_m g_{ij}) a_{km}, \quad 1 \leq i, j, k \leq d,$$

并定义如下矩阵 Γab :

$$(\Gamma ab)_{ij} := \sum_{k,l=1}^d \Gamma_{kl}^i a_{kj} b_k, \quad 1 \leq i, j \leq d.$$

为保证 P_t 和 $\hat{P}_t$ 共享这两个性质, 假设存在常数 $K > 0$ 使得

$$\Gamma ab + \nabla_b(\sigma\sigma^*) - 2(\nabla b)\sigma\sigma^* \geq -KI. \quad (2.7)$$

这里, 对于 $d \times d$ 矩阵 A , 不等式 $A \geq KI$ 是指 $\langle Av, v \rangle \geq K|v|^2$ 对于所有的 $v \in \mathbb{R}^d$ 成立. 此外, 矩阵 ∇b 具有分量 $(\nabla b)_{ij} := \langle \nabla_{e_i} b, e_j \rangle$, 其中 $\{e_i\}_{1 \leq i \leq d}$ 是 $\mathbb{R}^d$ 上典则标准坐标基. 易见, $\nabla_v b = (\nabla b)v$, $v \in \mathbb{R}^d$.

定理 2.2 假设 $b \in C^1$ 和 $a \in C_b^2$ 使得 (2.7) 对于某常数 $K > 0$ 成立, 则

(1) (2.5) 对于某常数 $C > 0$ 成立 (等价地, $\hat{P}_t$ 为 H -超压缩), 当且仅当 P_t 为 H -超压缩.

(2) (2.6) 对于某 $\beta: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ 成立 (等价地, $\hat{P}_t$ 为 S -超有界), 当且仅当 P_t 为 S -超有界.

在下面的推论中, 我们将条件 (2.2) 修改成

$$\|\sigma(x) - \sigma(y)\|_{HS}^2 + 2\langle b(x) - b(y), x - y \rangle \leq C_1|x - y| + C_2|x - y|^2, \quad x, y \in \mathbb{R}^d, \quad (2.8)$$

其中 C_1 和 C_2 是常数. 因为我们只使用常数 C_2 , 相比条件 (2.2), 该条件的优势是, 在应用中我们往往可以取到 $C_2 < K$. 例如, 当 σ 为常值且对于某常数 $r > 0$, $b(x) = -x|x|^r$, (2.2) 对于 $K < 0$ 不成立, 而 (2.8) 对于所有的 $C_2 < 0$ 成立.

推论 2.3 假设存在常数 $\lambda_1, \lambda_2, C_1 > 0$ 和 $C_2 \in \mathbb{R}$ 使得 (2.3) 和 (2.8) 成立. 令 $\lambda_3 = \sup_{x,y} \|\sigma(x) - \sigma(y)\|^2$.

(1) 如果存在常数 $\theta > \frac{C_2^+ \sqrt{2\lambda_3}}{\lambda_3(\sqrt{2\lambda_3+\lambda_1}-\sqrt{2\lambda_3})}$ 使得 $\mu(e^{\theta|\cdot|^2}) < \infty$ (该条件在 $C_2 < 0$ 时成立), 则 P_t 超压缩且存在常数 $\lambda > 0$ 使得 Poincaré 不等式 (1.2) (等价地, (1.3) 和 (1.1) 对于 $c = 1$) 成立. 如果进一步地 $\sigma\sigma^* \in C_b^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d)$ 且 (2.7) 对于某常数 K 成立, 则对数 Sobolev 不等式 (2.5) 对于某常数 $C > 0$ 成立, 从而, $\hat{P}_t$ 是 H -超压缩的.

(2) 如果对于所有的常数 $\theta > 0$ 有 $\mu(e^{\theta|\cdot|^2}) < \infty$, 则 P_t 是 S -超有界的, 且超 Poincaré 不等式 (2.4) 对于某函数 $\beta: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ 成立, 从而, $\|\hat{P}_t\|_{\text{tail}} = 0$ 对于所有的 $t > 0$ 成立. 如果进一步地 $\sigma\sigma^* \in C_b^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d)$ 且 (2.7) 对于某常数 K 成立, 则超对数 Sobolev 不等式 (2.6) 对于某函数 $\beta: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ 成立, 从而, $\hat{P}_t$ 是 S -超有界的.

为验证推论 2.3 中的条件, 令 $L = \frac{1}{2}\text{Tr}(\sigma\sigma^*\nabla^2) + b \cdot \nabla$, 它是半群 P_t 的无穷小生成元. 对于 $\theta > 0$, 有 $Le^{\theta|\cdot|^2}(x) = \theta e^{\theta|x|^2} \{2\langle b(x), x \rangle + 2\theta|\sigma^*(x)x|^2 + \text{Tr}(\sigma\sigma^*)(x)\}$, $x \in \mathbb{R}^d$. 于是, 当

$$\limsup_{|x| \rightarrow \infty} \{2\langle b(x), x \rangle + 2\theta|\sigma^*(x)x|^2 + \text{Tr}(\sigma\sigma^*)(x)\} < 0 \quad (2.9)$$

时, 有 $\mu(e^{\theta|\cdot|^2}) < \infty$. 而当 σ 有界且

$$\limsup_{|x| \rightarrow \infty} \frac{\langle b(x), x \rangle}{|x|^2} = -\infty \quad (2.10)$$

时, $\mu(e^{\theta|\cdot|^2}) < \infty$ 对于所有常数 $\theta > 0$ 成立. 因此, 我们有下面的例子.

例 2.4 (1) 假设存在常数 $\lambda_2 \geq \lambda_1 > 0$ 使得 $\lambda_1 I \leq a := \sigma\sigma^* \leq \lambda_2 I$. 常数 $\delta > 0$ 和 $r \geq 0$ 以及局部 Lipschitz 连续的 $b_0: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ 满足

$$\limsup_{|x| \rightarrow \infty} \frac{\|\nabla b_0\|(x)}{|x|^r} < \delta,$$

取 $b(x) = b_0(x) - \delta x|x|^r$, 则对任给的 $x, y \in \mathbb{R}^d$ 和 $\gamma_s := x + s(y - x)$, $s \in [0, 1]$, 有

$$\begin{aligned} \langle b(x) - b(y), x - y \rangle &= \int_0^1 \left\{ |x - y| \langle \nabla b_0(\gamma_s), \gamma'_s \rangle - \delta \left\langle \frac{d}{ds}(\gamma_s |\gamma_s|^r), \gamma'_s \right\rangle \right\} ds \\ &\leq c_1 - c_2 |x - y|^2 + \int_0^1 \{ \delta |x - y|^2 |\gamma_s|^r - \delta |x - y|^2 |\gamma_s|^r - \delta r |\gamma_s|^{r-2} \langle \gamma_s, \gamma'_s \rangle^2 \} ds \\ &\leq c_1 - c_2 |x - y|^2, \end{aligned}$$

其中 $c_1, c_2 > 0$ 为两个不依赖于 x 和 y 的常数. 从而存在常数 $C_1 > 0$ 和 $C_2 < 0$ 使得条件 (2.8) 成立. 由推论 2.3(1) 知, P_t 是 H -超压缩的, 且存在常数 $\lambda > 0$ 使得 (1.3) 和 (1.1) 对于 $c = 1$ 成立. 如果 $r > 0$, 则条件 (2.10) 成立, 从而由推论 2.3(2) 知, 超 Poincaré 不等式成立且对于所有的 $t > 0$ 有 $\|\hat{P}_t\|_{\text{tail}} = 0$.

(2) 假设 $\sigma \in C_b^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d)$ 且存在常数 $\lambda_1 > 0$ 使得 $\sigma\sigma^* \geq \lambda_1 I$. 取 $b(x) = b_0(x) - \delta x|x|^r$, 其中 $b_0 \in C_b^1(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d)$, 且 $\delta > 0$ 和 $r \geq 0$ 为常数. 如果

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x| \cdot \|\nabla \sigma(x)\| = 0,$$

则存在常数 K 和 C_1 以及 $C_2 < 0$, 使得条件 (2.8) 和 (2.7) 成立, 故由推论 2.3(1) 知, 存在常数 $C > 0$ 使得对数 Sobolev 不等式 (2.5) 成立, 从而, P_t 和 $\hat{P}_t$ 都是 H -超压缩的. 如果还有 $r > 0$, 则超对数 Sobolev 不等式 (2.6) 对于某 $\beta: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ 成立, 从而, P_t 和 $\hat{P}_t$ 都是 S -超有界的.

2.2 结果的证明

先给出关于非对称 Markov 半群的一个一般结果. 设 $(E, \mathcal{F}, \mu)$ 是一个概率空间, P_t 是 $L^2(\mu)$ 上以 μ 为不变测度的 Markov 半群, $(L, \mathcal{D}(L))$ 为其生成算子, 则

$$2\mathcal{E}(f, f) := -2\mu(fLf) = -\frac{d}{dt}\mu((P_tf)^2)\Big|_{t=0} \geq 0, \quad f \in \mathcal{D}(L).$$

我们有如下结果.

引理 2.5 假设存在 $\alpha \in C([0, \infty); [0, \infty))$ 使得 P_t 满足下面的 Poincaré 型不等式:

$$\mu(f^2) \leq \alpha(t)\mathcal{E}(f, f) + \mu((P_tf)^2), \quad t \geq 0, \quad f \in \mathcal{D}(L), \quad (2.11)$$

则下面命题成立:

(1) 存在 $t > 0$ 使得 $\|P_t\|_{\text{tail}} < 1$ 当且仅当存在常数 $\lambda, c > 0$ 使得下面残缺的 Poincaré 不等式成立:

$$\mu(f^2) \leq \frac{1}{\lambda}\mathcal{E}(f, f) + c\mu(|f|)^2, \quad f \in \mathcal{D}(L). \quad (2.12)$$

从而, 如果存在 $t > 0$ 使得 $\|P_t\|_{\text{tail}} < 1$, 则存在常数 $\lambda > 0$ 使得

$$\|P_t\|_{\text{tail}} \leq e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0. \quad (2.13)$$

(2) 令 $\alpha(0) = 0$, 则 $\|P_t\|_{\text{tail}} = 0$ 对所有的 $t > 0$ 成立当且仅当存在 $\beta: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ 使得超 Poincaré 不等式 (2.4) 对所有的 $f \in \mathcal{D}(L)$ 成立.

证明 (1) 我们使用文献 [6, 定理 3.2.2(1)]. 由于其证明只用到半群的次 Markov 性而没用其中的扇形条件, 因此, 该条件可以去掉. 由条件 (2.3) 知对称 Dirichlet 型不可约, 该定理表明残缺的 Poincaré 不等式 (2.12) 蕴含 (2.13). 故假设存在 $t > 0$ 使得 $\|P_t\|_{\text{tail}} < 1$, 只需证明 (2.12). 此时, 存在常数 $\varepsilon \in (0, 1)$ 和 $R > 0$ 使得对所有的 $f \in L^2(\mu)$, $\mu(f^2) \leq 1$, 有

$$\mu((P_tf)^2 1_{\{|P_tf| \geq R\}}) \leq \varepsilon.$$

从而,

$$\mu((P_tf)^2) \leq \varepsilon + R\mu(|P_tf|) \leq \varepsilon + \frac{1-\varepsilon}{2} + \frac{R^2}{2(1-\varepsilon)}\mu(|f|)^2.$$

将此式代入 (2.11) 得

$$\mu(f^2) \leq \frac{2\alpha(t)}{1-\varepsilon}\mathcal{E}(f, f) + \frac{R^2}{(1-\varepsilon)^2}\mu(|f|)^2, \quad f \in H^{1,2}(\mu).$$

于是存在常数 $\lambda, c > 0$ 使得 (2.12) 成立.

(2) 由文献 [6, 定理 3.2.2(1)] 知, 超 Poincaré 不等式蕴含 $(P_t)_{t>0}$ 的一致可积性. 故只需证明当 $\|P_t\|_{\text{tail}} = 0$ 对于所有的 $t > 0$ 成立时, 存在 β 使得 (2.4) 成立. 此时存在 $R: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ 使得

$$\mu((P_tf)^2 1_{\{|P_tf| \geq R_t\}}) \leq \frac{1}{4}, \quad t > 0, \quad \mu(f^2) \leq 1.$$

如上所证, 该式蕴含

$$\mu((P_t f)^2) \leq \frac{1}{4} + R_t \mu(|P_t f|) \leq \frac{1}{2} + R_t^2 \mu(|f|)^2, \quad t > 0, \quad \mu(f^2) \leq 1.$$

由此及 (2.11) 得

$$\mu(f^2) \leq 2\alpha(t)\mathcal{E}(f, f) + 2R_t^2 \mu(|f|)^2, \quad t > 0, \quad f \in H^{1,2}(\mu).$$

由于 $\alpha(0) = 0$, 该式 (2.4) 对于 $\beta(r) := \inf\{2R_t^2 : 2\alpha(t) \leq r\} < \infty$ ($r > 0$) 成立. $\square$

定理 2.1 的证明 熟知, 如文献 [9, 引理 2.2], (2.2) 蕴含

$$|\nabla P_t f|^2 \leq e^{Kt} P_t |\nabla f|^2, \quad f \in C_b^1(\mathbb{R}^d), \quad t \geq 0. \quad (2.14)$$

由此结合 (2.3), 并使用 Itô 公式, 对于所有的 $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, 有

$$\begin{aligned} d(P_{t-s} f)^2(X_s) &= \{L(P_{t-s} f)^2 - 2(P_{t-s} f)LP_{t-s} f\}(X_s)ds + 2\langle \nabla P_{t-s} f(X_s), \sigma(X_s)dB_s \rangle \\ &= |\sigma^* \nabla P_{t-s} f|^2(X_s)ds + 2\langle \nabla P_{t-s} f(X_s), \sigma(X_s)dB_s \rangle \\ &\leq \frac{\lambda_2}{\lambda_1} e^{K(t-s)} P_{t-s} |\sigma^* \nabla f|^2(X_s)ds + 2\langle \nabla P_{t-s} f(X_s), \sigma(X_s)dB_s \rangle, \quad s \in [0, t]. \end{aligned}$$

则对于 $X_0 = x$, 有

$$\begin{aligned} P_t f^2(x) - (P_t f)^2(x) &= \mathbb{E} \int_0^t d(P_{t-s} f)^2(X_s) \\ &\leq \frac{\lambda_2 P_t |\sigma^* \nabla f|^2(x)}{\lambda_1} \int_0^t e^{K(t-s)} ds \\ &= \frac{\lambda_2 (e^{Kt} - 1) P_t |\sigma^* \nabla f|^2(x)}{\lambda_1 K}. \end{aligned}$$

上式关于 μ 积分得

$$\mu(f^2) \leq \frac{\lambda_2 (e^{Kt} - 1)}{\lambda_1 K} \mathcal{E}(f, f) + \mu((P_t f)^2), \quad t \geq 0 \quad (2.15)$$

对于所有的 $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ 成立, 从而也对于所有的 $f \in H^{1,2}(\mu)$ 成立. 则由引理 2.5 得定理 2.1 中除 (1) 的第二个结论之外的所有论断.

熟知 (1.3) (或 (1.1) 对于 $c = 1$) 等价于 Poincaré 不等式 (1.2), 且存在 β 使得 (2.4) 成立当且仅当对于所有的 $t > 0$, 有 $\|\hat{P}_t\|_{\text{tail}} = 0$ (参见文献 [10] 或 [6, 定理 3.2.2]). 由于 $(\mathcal{E}, H_\sigma^{1,2}(\mu))$ 是不可约的 Dirichlet 型, 由文献 [11] 知, (2.12) 蕴含 (1.2). 因此, (1) 中的第二个结论由第一个结论推出. $\square$

定理 2.2 的证明 如文献 [12, 命题 2.7] 的证明所示, $\sigma\sigma^* \in C_b^2(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d)$ 和条件 (2.7) 蕴含存在常数 $K' > 0$ 使得

$$\Gamma_2(f, f) := \frac{1}{2} L\Gamma(f, f) - \Gamma(f, Lf) \geq -K'\Gamma(f, f), \quad f \in C^\infty(\mathbb{R}^d). \quad (2.16)$$

从而, 由文献 [7, 定理 2.1] 得到所需结果. $\square$

为证明推论 2.3, 我们使用条件 (2.8) 建立如下的 Harnack 不等式, 该不等式改进了文献 [13] 中使用条件 (2.2) 所得到的不等式.

引理 2.6 在推论 2.3 的假设之下, 对于给定的 $\delta \in (0, 1)$, 令 $\lambda_\delta = \sqrt{1 + \frac{(1-\delta)^2}{8\lambda_3}} - 1$, 则对于所有的非负函数 $f \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R}^d)$, 下面的 Harnack 不等式成立:

$$(P_T f(y))^{\frac{1+\lambda_\delta}{\lambda_\delta}} \leq (P_T f^{\frac{1+\lambda_\delta}{\lambda_\delta}})(x) \exp \left[\frac{(1-\delta)C_1^2 T}{16\delta\lambda_\delta\lambda_3} + \frac{C_2|x-y|^2}{4\lambda_\delta\lambda_3(1-e^{-C_2 T})} \right], \quad T > 0, \quad x, y \in \mathbb{R}^d.$$

证明 给定 $T > 0$ 和 $x, y \in \mathbb{R}^d$, 令

$$\xi_t = \frac{1}{C_2}(1 - e^{C_2(t-T)}), \quad t \in [0, T],$$

即在文献 [13, 定理 1.1] 的证明中取 $\delta = 1$. 我们使用文献 [13, (2.3)] 中的耦合:

$$\begin{cases} dX_t = \sigma(X_t)dB_t + b(X_t)dt, & X_0 = x, \\ dY_t = \sigma(Y_t)dB_t + \left\{ b(Y_t) + \frac{1}{\xi_t}\sigma(Y_t)\sigma(X_t)^{-1}(X_t - Y_t) \right\}dt, & Y_0 = y, \quad t \in [0, T]. \end{cases} \quad (2.17)$$

如文献 [13] 所解释,

$$R := \exp \left[- \int_0^T \langle \xi_t^{-1}\sigma(X_t)^{-1}(X_t - Y_t), dB_t \rangle - \frac{1}{2} \int_0^T \frac{|\sigma(X_t)^{-1}(X_t - Y_t)|^2}{\xi_t^2} dt \right] \quad (2.18)$$

是关于概率 $\mathbb{P}$ 的一个概率密度, 在概率测度 $\mathbb{Q} := R\mathbb{P}$ 之下, 过程

$$\tilde{B}_t := B_t + \int_0^t \frac{1}{\xi_s}\sigma(X_s)^{-1}(X_s - Y_s)ds, \quad t \in [0, T]$$

是一个 d - 维的 Brown 运动, 而且

$$X_T = Y_T, \quad \mathbb{Q}\text{-a.s.} \quad (2.19)$$

将 (2.17) 改写为

$$\begin{cases} dX_t = \sigma(X_t)d\tilde{B}_t + \left\{ b(X_t) - \frac{X_t - Y_t}{\xi_t} \right\}dt, & X_0 = x, \\ dY_t = \sigma(Y_t)d\tilde{B}_t + b(Y_t)dt, & Y_0 = y, \quad t \in [0, T]. \end{cases} \quad (2.20)$$

由 Itô 公式和 (2.8) 得

$$\begin{aligned} d|X_t - Y_t|^2 &\leq \left\{ C_1|X_t - Y_t| + C_2|X_t - Y_t|^2 - \frac{2|X_t - Y_t|^2}{\xi_t} \right\}dt \\ &\quad + 2\langle (\sigma(X_t) - \sigma(Y_t))d\tilde{B}_t, X_t - Y_t \rangle, \quad t < T. \end{aligned}$$

如同在文献 [13, (2.5)] 中取 $\theta = 1$, 该式蕴含

$$\begin{aligned} d\frac{|X_t - Y_t|^2}{\xi_t} &\leq \frac{2}{\xi_t}\langle (\sigma(X_t) - \sigma(Y_t))d\tilde{B}_t, X_t - Y_t \rangle - \frac{|X_t - Y_t|^2}{\xi_t^2}dt + \frac{C_1|X_t - Y_t|}{\xi_t}dt \\ &\leq \frac{2}{\xi_t}\langle (\sigma(X_t) - \sigma(Y_t))d\tilde{B}_t, X_t - Y_t \rangle - \frac{(1-\delta)|X_t - Y_t|^2}{\xi_t^2}dt + \frac{C_1^2}{4\delta}dt, \quad t \in [0, T]. \end{aligned}$$

从而, 任给 $\lambda > 0$, 有

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \exp \left[\lambda \int_0^T \frac{|X_t - Y_t|^2}{\xi_t^2} dt - \frac{\lambda|x-y|^2}{(1-\delta)\xi_0} - \frac{C_1^2\lambda T}{4\delta(1-\delta)} \right]$$

$$\begin{aligned} &\leq \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \exp \left[\frac{2\lambda}{1-\delta} \int_0^T \frac{1}{\xi_t} \langle (\sigma(X_t) - \sigma(Y_t))^* (X_t - Y_t), d\tilde{B}_t \rangle \right] \\ &\leq \left(\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \exp \left[\frac{8\lambda^2\lambda_3}{(1-\delta)^2} \int_0^T \frac{|X_t - Y_t|^2}{\xi_t^2} dt \right] \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (2.21)$$

这里我们使用了鞅不等式 $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} e^{M_t} \leq \sqrt{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} e^{2\langle M \rangle_t}}$, 其中 M_t 为 $\mathbb{Q}$ 下的连续鞅. 令 $\lambda = \frac{(1-\delta)^2}{8\lambda_3}$, 由简单的逼近方法^[13], 我们可以假设

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \exp \left[\lambda \int_0^T \frac{|X_t - Y_t|^2}{\xi_t^2} dt \right] < \infty,$$

从而, 由 (2.21) 推出

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \exp \left[\frac{(1-\delta)^2}{8\lambda_3} \int_0^T \frac{|X_t - Y_t|^2}{\xi_t^2} dt \right] \leq \exp \left[\frac{(1-\delta)C_1^2 T}{16\delta\lambda_3} + \frac{(1-\delta)C_2|x-y|^2}{4\lambda_3(1-e^{-C_2T})} \right]. \quad (2.22)$$

由 (2.18) 将 R 写成 $R = e^{-M_T + \frac{1}{2}\langle M \rangle_T}$, 其中

$$M_t := \int_0^t \langle \xi_s^{-1} \sigma(X_s)^{-1} (X_s - Y_s), d\tilde{B}_s \rangle, \quad t \in [0, T]$$

是 $\mathbb{Q}$ -鞅, 对于所有的 $\varepsilon > 0$, 有

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} R^\varepsilon &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} e^{-\varepsilon M_T + \frac{\varepsilon}{2}\langle M \rangle_T} \leq \{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} e^{-2\varepsilon M_T - 2\varepsilon^2\langle M \rangle_T}\}^{\frac{1}{2}} (\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} e^{(\varepsilon+2\varepsilon^2)\langle M \rangle_T})^{\frac{1}{2}} \\ &= (\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} e^{(\varepsilon+2\varepsilon^2)\langle M \rangle_T})^{\frac{1}{2}} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \exp \left[\frac{\varepsilon + 2\varepsilon^2}{\lambda_1} \int_0^T \frac{|X_t - Y_t|^2}{\xi_t^2} dt \right]. \end{aligned}$$

由于 $\frac{\lambda_\delta + 2\lambda_\delta^2}{\lambda_1} = \frac{(1-\delta)^2}{8\lambda_3}$, 由此结合 (2.22) 得

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} R^{\lambda_\delta} \leq \exp \left[\frac{(1-\delta)C_1^2 T}{16\delta\lambda_3} + \frac{(1-\delta)C_2|x-y|^2}{4\lambda_3(1-e^{-C_2T})} \right]. \quad (2.23)$$

由于 (2.17) 和 (2.20) 蕴含

$$P_T f(y) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} f(Y_T), \quad P_T f(x) = \mathbb{E} f(X_T), \quad f \in \mathcal{B}_b^+(\mathbb{R}^d),$$

因此, 由 (2.19) 和 (2.23) 可推出

$$\begin{aligned} (P_T f(y))^{\frac{1+\lambda_\delta}{\lambda_\delta}} &= (\mathbb{E}[Rf(X_T)])^{\frac{1+\lambda_\delta}{\lambda_\delta}} \\ &\leq (P_T f^{\frac{1+\lambda_\delta}{\lambda_\delta}}(x))(\mathbb{E} R^{1+\lambda_\delta})^{\frac{1}{\lambda_\delta}} = (P_T f^{\frac{1+\lambda_\delta}{\lambda_\delta}}(x))(\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} R^{\lambda_\delta})^{\frac{1}{\lambda_\delta}} \\ &\leq (P_T f^{\frac{1+\lambda_\delta}{\lambda_\delta}}(x)) \exp \left[\frac{(1-\delta)C_1^2 T}{16\delta\lambda_\delta\lambda_3} + \frac{(1-\delta)C_2|x-y|^2}{4\lambda_\delta\lambda_3(1-e^{-C_2T})} \right]. \end{aligned}$$

证毕. □

推论 2.3 的证明 (1) 令 $L = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d (\sigma\sigma^*)_{ij} \partial_i \partial_j + \sum_{i=1}^d b_i \partial_i$. 容易看出, 当 $C_2 < 0$ 时, (2.3) 和 (2.8) 蕴含 $Le^{\theta|\cdot|^2} \leq B_1 - B_2 e^{\theta|\cdot|^2}$ 对于某些常数 $\theta, B_1, B_2 > 0$ 成立. 熟知, 该条件推出 $\mu(e^{\theta|\cdot|^2}) < \infty$. 也就是说, 当 $C_2 < 0$ 时, 推论 2.3 中的条件成立.

其次, 由于

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{(1-\delta)C_2}{4\lambda_\delta\lambda_3(1-e^{-C_2T})} = \frac{C_2^+ \sqrt{2\lambda_3}}{\lambda_3(\sqrt{2\lambda_3} + \lambda_1 - \sqrt{2\lambda_3})} =: \theta_0 < \theta,$$

因此, 任给 $\theta_1 \in (\theta_0, \theta)$, 存在常数 $C, T > 0$ 和 $\delta \in (0, 1)$ 使得 Jensen 不等式和 $\mu(|\cdot|^2) < \infty$ (由于 $\mu(e^{\theta|\cdot|^2}) < \infty$) 蕴含

$$\int_{\mathbb{R}^d} \exp \left[-\frac{(1-\delta)C_2|x-y|^2}{4\lambda_\delta\lambda_3(1-e^{-C_2T})} \right] \mu(dx) \geq \exp \left[-\frac{(1-\delta)C_2\mu(|y-\cdot|^2)}{4\lambda_\delta\lambda_3(1-e^{-C_2T})} \right] \geq Ce^{-\theta_1|y|^2}, \quad y \in \mathbb{R}^d.$$

故由引理 2.6 知,

$$\begin{aligned} \exp \left[\frac{(1-\delta)C_1^2T}{16\delta\lambda_\delta\lambda_3} \right] \mu(f^{\frac{1+\lambda_\delta}{\lambda_\delta}}) &= \exp \left[\frac{(1-\delta)C_1^2T}{16\delta\lambda_\delta\lambda_3} \right] \int_{\mathbb{R}^d} P_T f^{\frac{1+\lambda_\delta}{\lambda_\delta}}(x) \mu(dx) \\ &\geq (P_T f)^{\frac{1+\lambda_\delta}{\lambda_\delta}}(y) \int_{\mathbb{R}^d} \exp \left[-\frac{(1-\delta)C_2|x-y|^2}{4\lambda_\delta\lambda_3(1-e^{-C_2T})} \right] \mu(dx) \\ &\geq Ce^{-\theta_1|y|^2} (P_T f)^{\frac{1+\lambda_\delta}{\lambda_\delta}}(y) \end{aligned}$$

对于所有的 $f \in \mathcal{B}_b^+(\mathbb{R}^d)$ 和 $y \in \mathbb{R}^d$ 成立. 从而存在常数 $C' > 0$ 使得

$$(P_T f)^{\frac{1+\lambda_\delta}{\lambda_\delta}} \leq C' \mu(f^{\frac{1+\lambda_\delta}{\lambda_\delta}}) e^{\theta_1|\cdot|^2}, \quad f \in \mathcal{B}_b^+(\mathbb{R}^d).$$

于是, 对于 $1 < p := \frac{1+\lambda_\delta}{\lambda_\delta} < q := \frac{\theta p}{\theta_1}$, 有

$$\|P_T\|_{L^p(\mu) \rightarrow L^q(\mu)} \leq C(T)^{\frac{\lambda_\delta}{1+\lambda_\delta}} \{\mu(e^{\theta|\cdot|^2})\}^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

由 Riesz-Thorin 插值定理和半群性质可知, 该式蕴含 $\|P_{t_0}\|_{L^2(\mu) \rightarrow L^4(\mu)} < \infty$ 对于某个常数 $t_0 \in [T, \infty)$ 成立. 特别地, $\|P_{t_0}\|_{\text{tail}} = 0$. 由定理 2.1(1) 知 Poincaré 不等式成立, 因而, (1.3) 和 (1.1) 对于 $c = 1$ 成立. 再者, $\|P_{t_0}\|_{L^2(\mu) \rightarrow L^4(\mu)} < \infty$ 和 (1.3) 蕴含 P_t 的 H -超压缩性, 如文献 [14, 定理 1.1] 证明中的步骤 (d).

最后, 如果 $\sigma\sigma^* \in C_b^2(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d)$ 且 (2.7) 对于某常数 $K \in \mathbb{R}$ 成立, 则 (2.16) 对于某常数 $K' > 0$ 成立. 根据文献 [7, 定理 2.1] 可知, P_t 的 H -超压缩性蕴含对数 Sobolev 不等式 (2.5) 对于某常数 $C > 0$ 成立, 从而, $\hat{P}_t$ 也具有 H -超压缩性.

(2) 如果存在常数 $\theta > 0$ 使得 $\mu(e^{\theta|\cdot|^2}) < \infty$, 则由引理 2.6 和 Riesz-Thorin 插值定理知, 对于所有的 $t > 0$, 有 $\|P_t\|_{L^2(\mu) \rightarrow L^4(\mu)} < \infty$, 即 P_t 是 S -超有界的. 故由定理 2.1(2) 知, 超 Poincaré 不等式 (2.4) 对于某个函数 $\beta: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ 成立, 从而对于所有的 $t > 0$ 有 $\|\hat{P}_t\|_{\text{tail}} = 0$.

如果进一步地 (2.7) 对于某常数 $K \in \mathbb{R}$ 成立, 根据文献 [7, 定理 2.1], P_t 的 S -超有界性蕴含超对数 Sobolev 不等式 (2.6) 对于某 $\beta: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ 成立, 因此, $\hat{P}_t$ 也是 S -超有界的. $\square$

3 Lévy 跳过程驱动随机微分方程

考虑 $\mathbb{R}^d$ 上的随机微分方程:

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma dL_t, \quad (3.1)$$

其中 L_t 是 $\mathbb{R}^d$ 上具有跳测度 ν 的 Lévy 过程, $\sigma \in \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d$ 可逆, $b: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ 可微使得 ∇b 局部有界, 则对于所有的初值, 方程具有唯一的解. 本节假设解非爆炸且相应的 Markov 半群 P_t 具有唯一的不变概率测度 μ .

假设 $\Phi \in C([0, \infty)) \cap C^2((0, \infty))$ 为满足 $\Phi(0) = 0$ 的凸函数, 使得

$$\Psi_\Phi(u, v) := \Phi(u) - \Phi(v) - \Phi'(v)(u - v), \quad u, v \geq 0$$

是二元的非负凸函数. 典型的例子包括 $\Phi(u) = u \log u$ 和 $\Phi(u) = u^p$, $p \in [1, 2]$. 考虑 P_t 在 Φ -熵下的指数式收敛性, 即存在常数 $c, \lambda > 0$ 使得

$$\text{Ent}_\mu^\Phi(P_t f) := \mu(\Phi(P_t f)) - \Phi(\mu(f)) \leq c e^{-\lambda t} \text{Ent}_\mu^\Phi(f), \quad f \in \mathcal{B}_b^+(\mathbb{R}^d). \quad (3.2)$$

为此, 我们引入下面的 Φ -熵不等式 (3.3).

令

$$\Gamma_{\Phi, \nu}(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \Psi_\Phi(f(x + \sigma z), f(x)) \nu(dz), \quad f \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R}^d).$$

易见, 对于所有的 $f \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R}^d)$, $\Gamma_{\Phi, \nu}(f) \in [0, \infty]$ 有定义, 并且对于 $f \in C_b^2(\mathbb{R}^d)$, 有 $\Gamma_{\Phi, \nu}(f) < \infty$. 根据文献 [15, 定理 1.1] 的证明, 任给常数 $C > 0$, Φ -熵不等式

$$\text{Ent}_\mu^\Phi(f) \leq C \mu(\Gamma_{\Phi, \nu}(f)), \quad f \in \mathcal{B}_b^+(\mathbb{R}^d) \quad (3.3)$$

等价于半群的指数式收敛

$$\text{Ent}_\mu^\Phi(P_t f) \leq e^{-t/C} \text{Ent}_\mu^\Phi(f), \quad t \geq 0, \quad f \in \mathcal{B}_b^+(\mathbb{R}^d). \quad (3.4)$$

特别地, 当 $\Phi(u) = u^2$ 时,

$$\Gamma_{\Phi, \nu}(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x + \sigma z) - f(x)|^2 \nu(dz),$$

且 (3.3) 也等价于

$$\text{Ent}_\mu^\Phi(\hat{P}_t f) \leq e^{-t/C} \text{Ent}_\mu^\Phi(f), \quad t \geq 0, \quad f \in \mathcal{B}_b^+(\mathbb{R}^d), \quad (3.5)$$

其中 $\hat{P}_t$ 是相应于下面对称 Dirichlet 型的对称 Markov 半群:

$$\mathcal{E}(f, g) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} |f(x + \sigma z) - f(x)|^2 \nu(dz) \mu(dx), \quad \mathcal{D}(\mathcal{E}) := \{f \in L^2(\mu), \mathcal{E}(f, f) < \infty\}.$$

为证明 (3.2) 蕴含 (3.3), 我们需要以下条件:

$$\nu(dz) = \rho(z) dz, \quad \sup_{\frac{|z|}{|z'|} \in [\frac{1}{R}, R]} \frac{\rho(z)}{\rho(z')} < \infty, \quad R \geq 1. \quad (3.6)$$

特别地, 如果 $\nu(dz) = \rho(z) dz$ 且存在常数 $\kappa_2 > \kappa_1 > 0$ 使得

$$\frac{\kappa_1}{|z|^{d+\alpha}} \leq \rho(z) \leq \frac{\kappa_2}{|z|^{d+\alpha}}, \quad (3.7)$$

则该条件成立.

定理 3.1 假设 (3.6) 成立, 且存在常数 $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ 使得

$$\lambda_1 |v|^2 \leq \langle \sigma^{-1}(\nabla b) \sigma v, v \rangle \leq \lambda_2 |v|^2, \quad v \in \mathbb{R}^d, \quad (3.8)$$

则以下命题成立:

(1) (3.3) (等价地, (3.4) 且在 $\Phi(u) = u^2$ 时也等价于 (3.5)) 对于某常数 $C > 0$ 成立, 当且仅当存在常数 $c, \lambda > 0$ 使得 (3.2) 成立.

(2) Poincaré 不等式 (1.2) (等价地, (1.3) 和 (1.1) 对于 $c = 1$) 对于某常数 $\lambda > 0$ 成立, 当且仅当存在常数 $t > 0$ 使得 $\|P_t\|_{\text{tail}} < 1$.

(3) 超 Poincaré 不等式 (2.4) 对于某函数 $\beta: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ (等价地, $\|\hat{P}_t\|_{\text{tail}} = 0$ 对于所有 $t > 0$) 成立, 当且仅当对于所有的 $t > 0$ 有 $\|P_t\|_{\text{tail}} = 0$.

证明 我们使用文献 [15, 第 2 节]. 令 $a_s(z) = \sigma z$, $(s, z) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^d$. 以 $(X_t^x)_{t \geq 0}$ 记 (3.1) 的初值 $X_0 = x$ 的解. 对于 $(s, z) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^d$, 令 $(X_t^{s,x}(z))_{t \geq 0}$ 为下方方程的解:

$$X_t^{s,x}(z) = x + \int_0^t b(X_r^{s,x}(z)) dr + \sigma L_t + \sigma z 1_{[0,t]}(s), \quad t \geq 0.$$

此外, 对于给定的 $T > 0$, 令

$$\psi_s(z) = \sigma^{-1}(X_T^{s,x}(z) - X_T^x), \quad (s, z) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^d.$$

由文献 [15, (3.1)–(3.3)] 知, (3.8) 蕴含

$$|\det(\nabla \psi_s)^{-1}| \leq e^{-\lambda_1(T-s)d}, \quad |z|e^{-\lambda_2(T-s)} \leq |\psi_s^{-1}(z)| \leq e^{-\lambda_1(T-s)}|z|, \quad s \in [0, T], \quad z \in \mathbb{R}^d.$$

由此结合 (3.6) 知,

$$\begin{aligned} (\nu \circ \psi_s^{-1})(dz) &= \rho(\psi_s^{-1}(z)) |\det \nabla \psi_s^{-1}|(z) dz \\ &= \rho(\psi_s^{-1}(z)) |\det(\nabla \psi_s)^{-1}|(\psi_s^{-1}(z)) dz \leq C(T) \nu(dz), \quad 0 \leq s \leq T \end{aligned}$$

对于某增函数 $C : [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ 成立. 从而, 由文献 [15, 定理 2.1] 得

$$\text{Ent}_{P_T}^\Phi(f) \leq (P_T \Gamma_{\Phi, \nu}(f)) \int_0^T C(t) dt \leq TC(T) P_T \Gamma_{\Phi, \nu}(f), \quad f \in \mathcal{B}_b^+(\mathbb{R}^d). \quad (3.9)$$

由此我们证明所需论断如下.

对于论断 (1), 只需证明 (3.2) 蕴含 (3.3). 由 (3.9), 有

$$\mu(\Phi(f)) \leq \mu(\Phi(P_t f)) + tC(t)\mu(\Gamma_{\Phi, \nu}(f)), \quad t > 0, \quad f \in \mathcal{B}_b^+(\mathbb{R}^d). \quad (3.10)$$

结合 (3.2) 得

$$\text{Ent}_\mu^\Phi(f) \leq \text{Ent}_\mu^\Phi(P_t f) + tC(t)\mu(\Gamma_{\Phi, \nu}(f)) \leq ce^{-\lambda t} \text{Ent}_\mu^\Phi(f) + tC(t)\mu(\Gamma_{\Phi, \nu}(f)).$$

从而, (3.3) 对于如下常数成立:

$$C := \inf_{t > \lambda^{-1} \log(c \vee 1)} \frac{tC(t)}{1 - ce^{-\lambda t}} < \infty.$$

对于论断 (2) 和 (3), 取 $\Phi(u) = u^2$ 使得 (3.10) 化为 (2.15), 则这两个论断的证明如同定理 2.1 的证明. $\square$

参考文献

- 1 Röckner M, Wang F Y. Weak Poincaré inequalities and L^2 -convergence rates of Markov semigroups. J Funct Anal, 2001, 185: 564–603
- 2 Hwang C R, Hwang-Ma S Y, Sheu S J. Accelerating diffusions. Ann Appl Probab, 2005, 15: 1433–1444
- 3 Huang L J, Mao Y H. On some mixing times for nonreversible finite Markov chains. J Appl Probab, 2017, 54: 627–637
- 4 Wang F Y. Hypercontractivity and applications for stochastic Hamiltonian systems. J Funct Anal, 2017, 272: 5360–5383

- 5 Wang F Y. Functional inequalities, semigroup properties and spectrum estimates. *Infin Dimens Anal Quantum Probab Relat Top*, 2000, 3: 263–295
- 6 Wang F Y. *Functional Inequalities, Markov Semigroups and Spectral Theory*. Beijing: Science Press, 2005
- 7 Röckner M, Wang F Y. Supercontractivity and ultracontractivity for (non-symmetric) diffusion semigroups on manifolds. *Forum Math*, 2003, 15: 893–921
- 8 Gross L. *Logarithmic Sobolev Inequalities and Contractivity Properties of Semigroups*. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1563. New York: Springer-Verlag, 1993
- 9 Röckner M, Wang F Y. Log-Harnack inequality for stochastic differential equations in Hilbert spaces and its consequences. *Infin Dimens Anal Quantum Probab Relat Top*, 2010, 13: 27–37
- 10 Wang F Y. Functional inequalities for empty essential spectrum. *J Funct Anal*, 2000, 170: 219–245
- 11 Wang F Y. Criteria of spectral gap for Markov operators. *J Funct Anal*, 2014, 266: 2137–2152
- 12 Wang F Y. Exponential contraction in Wasserstein distances for diffusion semigroups with negative curvature. *ArXiv:1603.05749*, 2016
- 13 Wang F Y. Harnack inequality for SDE with multiplicative noise and extension to Neumann semigroup on nonconvex manifolds. *Ann Probab*, 2011, 39: 1449–1467
- 14 Bao J, Wang F Y, Yuan C. Hypercontractivity for functional stochastic differential equations. *Stochastic Process Appl*, 2015, 125: 3636–3656
- 15 Wang F Y. Φ -entropy inequality and application for SDEs with jumps. *J Math Anal Appl*, 2014, 418: 861–873

Functional inequalities for non-symmetric stochastic differential equations

Fengyu Wang

Abstract A non-symmetric Markov semigroup usually has better properties than the corresponding symmetric one. For example, Wang (2017) provides a class of non-symmetric Markov semigroups which are hypercontractive (and thus converge exponentially in both L^2 and entropy), but the symmetric ones are even not ergodic. In this paper, we consider the inverse problem: search for reasonable conditions to ensure that a non-symmetric Markov semigroup and its symmetrization share the properties of exponential convergence, uniform integrability, hypercontractivity, and super boundedness. Since in the symmetric case these properties are precisely characterized by functional inequalities of the Dirichlet form, the key point of the study is to prove these inequalities for non-symmetric Markov processes. Stochastic differential equations driven by Brown motion or Lévy jump process are investigated.

Keywords non-symmetric semigroup, functional inequality, exponential convergence, uniform integrability, super boundedness

MSC(2010) 60J60, 58J65

doi: 10.1360/N012018-00150