乘积流形的嵌入拉回度量与 Killing 向量场

卢卫君*, 黄浩, 卢若飞

广西民族大学理学院, 南宁 530006

E-mail: weijunlu2008@126.com, m18269286374@163.com, luruofei@gxun.edu.cn

收稿日期: 2018-12-22; 接受日期: 2019-03-19; 网络出版日期: 2019-06-14; * 通信作者

广西自然科学基金 (批准号: 2015GXNSFAA139007) 和广西民族大学校级引进人才科研启动基金 (批准号: 2017KJQD002) 资助项目

摘要 在四维乘积流形 $M^4 = S^2 \times S^2$ 上如何赋予一般的 Riemann 度量并考虑其相关截曲率能否保持不变号是非常有趣的几何拓扑问题, 吸引了不少几何学者的极大关注和探索. 本文将从以下三个角度来讨论 M^4 的截曲率: (1) 嵌入 $\mathbb{R}^6$ 至 $\mathbb{R}^9$ 的拉回度量; (2) 作极小嵌入 $F: \Sigma \subset \mathbb{R}^4 \rightarrow S^5(2) \subset \mathbb{R}^6$ 得到 Clifford 环面; (3) 偶数维紧致 Riemann 流形的正截曲率度量与 Killing 向量场的奇异点之间的关系. 本文得出在这些情形之下, M^4 不可回避零截曲率的出现从而支持 Hopf 猜想.

关键词 四维乘积流形 嵌入拉回度量 Hopf 猜想 截曲率 Killing 向量场

MSC (2010) 主题分类 58B20, 58D17, 53C42

1 引言

正截曲率的研究是 Riemann 几何最古老和重要的课题, 目前知道正截曲率的例子很稀少, 如球面 $S^n(a)$ 的截曲率 $K = 1/a^2 > 0$ 、实射影空间 $\mathbb{R}P^n$ 等, 所以, 球面作乘积流形是否有正截曲率成为最佳寻找的候选对象. 但是, Hopf 观察到由 Gauss-Bonnet 公式 $\iint_M K d\sigma = 2\pi\chi(M) = 4\pi(1 - g(M))$ (其中 $\chi(M)$ 是 Euler 示性数, $g(M)$ 是 M 的亏格), 推出二维环面 $T^2 = S^1 \times S^1$ 不能容许有一个截曲率 K 处处大于 0 的 Riemann 度量, 因为一方面, $\chi(T^2) = 0$, 而另一方面 Gauss 曲率 $K > 0$ 时, $\iint_{T^2} K d\sigma > 0$, 这出现矛盾; 其次, Hamilton^[1] 引进了 Ricci 流, 证明了一个容许正 Ricci 曲率的三维紧致流形必是空间形式 (完备、单连通的常曲率空间, 而常曲率空间即为有常截面曲率的 Riemann 流形), 这意味着在三维乘积流形 $S^1 \times S^2$ 上也不存在正截面曲率的 Riemann 度量. 于是, Hopf 提出猜想: $S^2 \times S^2$ 上也不能容许有一个 Riemann 度量使得它相应的所有截曲率 $K > 0$. 这个猜想也可以拓展为, 对于两个单连通的紧致微分流形 M 和 N , 它们的积流形 $M \times N$ 不容许有截曲率处处为正数的 Riemann 度量.

本文主要通过 Whitney 嵌入技术和拉回度量来探讨两个具有正截曲率的二维球面作乘积流形 $M^4 = S^2 \times S^2$ 上的 Riemann 度量, 进一步考虑在拉回度量之下截曲率的行为. 当前遇到的困境是,

英文引用格式: Lu W J, Huang H, Lu R F. Embedding pull-back metrics and Killing vector fields on a product manifold (in Chinese). Sci Sin Math, 2020, 50: 1579–1596, doi: 10.1360/N012018-00302

$S^2 \times S^2$ 的拓扑结构似乎难以穷尽, 单纯从 S^2 的拓扑来构建 $S^2 \times S^2$ 的拓扑积结构似乎还比较平凡, 拉回的度量从属于扭积度量^[2]. 我们也尝试用 Perdoma^[3] 的技巧, 并注意到 Whitney 嵌入定理^[4] 和 Nash 嵌入定理^[5], 引入向量值函数 $F: S^2 \times S^2 \rightarrow \mathbb{R}^k$, $k = 1, 2, 3$, 考虑图 $S^2 \times S^2 \times F(S^2 \times S^2)$ 嵌入到 $\mathbb{R}^{6+k}$ 的办法来实施拉回度量 $g = f^*(\sum_{i,j=1}^{n+1} \delta_{ij} dx^i dx^j)$ 和 Levi-Civita 联络的构建, 利用 Morse 理论得出这样的拉回度量不存在严格正的截面曲率; 同时也考虑采用 Brendle^[6] 和 Hsiang^[7] 的方法, 作极小嵌入 $F: S^2 \times S^2 \rightarrow S^5(2) \subset \mathbb{R}^6$ 或 $F: S^2(1/\sqrt{2}) \times S^2(1/\sqrt{2}) \rightarrow S^5(1) \subset \mathbb{R}^6$, 得到 Clifford 环面具有零截面曲率. 最后一节从 Killing 向量场的角度证明了偶数紧 Riemann 流形的正截面曲率度量与 Killing 向量场的奇异点的关系, 从而根据 Hopf 猜想可得, $S^2 \times S^2$ 上的 Killing 向量场不应该存在正的截面曲率度量. 在这个角度上, Hsiang 和 Kleiner^[8] 在添加这个假定时给出了证明, 至于撤掉这个条件, 目前还不知道如何论证; Li 和 Liu^[9] 引进 Killing 场几何流来寻找非平凡 Killing 向量场的存在解问题.

本文约定: 所有向量丛的内积将不再区分, 一律记为括号 $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

2 相关知识

本节先回顾 Riemann 度量的存在性、嵌入子流形及拉回度量等技术, 包括一些基本的概念: 截面曲率、Levi-Civita 联络、球面上的常见拓扑及拉回度量 (参见文献 [10–13]).

定义 2.1 (表面上的 Gauss 曲率) 正则参数曲面 $S: \vec{r} = \vec{r}(u, v)$ ($(u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2$) 中的点 P 处的法曲率为

$$K(P; du: dv) = \frac{II}{I} \Big|_{P, du: dv}.$$

关于切方向 $d\vec{r}(u, v) = \vec{r}_u(P)du + \vec{r}_v(P)dv$ 的两个最值, 分别称为曲面 S 在点 P 处的主曲率, 其中 I 、 II 分别为曲面的第一、第二基本形式:

$$\begin{aligned} I &= ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2, \\ II &= d^2\vec{r}(u, v) \cdot \vec{n}(u, v) = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2. \end{aligned}$$

正则曲面 S 在点 P 处的两个主曲率 κ_1 和 κ_2 的乘积 $K = \kappa_1 \cdot \kappa_2$ 称为曲面在点 P 处的 Gauss 曲率或总曲率.

注 2.1 (1) Gauss 曲率可以利用曲面 S 的两个基本形式的系数表示为

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}.$$

(2) 球面 $S^2(a) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$ 的曲面片 $S^2(a) \setminus A$ (A 为从北极到南极并经过点 $(-a, 0, 0)$ 的半个大圆周) 可参数表示为

$$\vec{r} = \vec{r}(\theta, \varphi) = (a \cos \varphi \cos \theta, a \cos \varphi \sin \theta, a \sin \varphi),$$

其中 $\theta \in (-\pi, \pi)$, $\varphi \in (-\pi/2, \pi/2)$. 简单计算得

$$I = a^2 \cos^2 \varphi d\theta^2 + a^2 d\varphi^2, \quad II = -a \cos^2 \varphi d\theta^2 - a d\varphi^2,$$

从而主曲率 $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_n = -1/a$, Gauss 曲率 $K = 1/a^2$.

(3) 环面 $T^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x^2 + y^2} - b)^2 + z^2 = a^2\}$ 的部分曲面片参数表示为

$$\vec{r} = \vec{r}(\theta, \varphi) = ((b + a \cos \varphi) \cos \theta, (b + a \cos \varphi) \sin \theta, a \sin \varphi),$$

其中 $\theta \in (0, 2\pi)$, $\varphi \in (0, 2\pi)$, 它的第一和第二基本形式分别为

$$I = (b + a \cos \varphi)^2 d\theta^2 + a^2 d\varphi^2, \quad II = -(b + a \cos \varphi) \cos \varphi d\theta^2 - a d\varphi^2,$$

而法曲率为

$$\kappa_n = \frac{-(b + a \cos \varphi) \cos \varphi d\theta^2 - a d\varphi^2}{(b + a \cos \varphi)^2 d\theta^2 + a^2 d\varphi^2}.$$

注意到 $F = \vec{r}_\theta \cdot \vec{r}_\varphi = 0$, θ -曲线与 φ -曲线在任何一点 $P(\theta, \varphi)$ 是正交的. 设 ν 为切方向 $(d\theta : d\varphi)$ 与曲线 θ 的夹角, 则

$$\cos \nu = \frac{(\vec{r}_\theta d\theta + \vec{r}_\varphi d\varphi) \cdot \vec{r}_\theta}{|\vec{r}_\theta d\theta + \vec{r}_\varphi d\varphi| |\vec{r}_\theta|} = \frac{(b + a \cos \varphi) d\theta}{\sqrt{(b + a \cos \varphi)^2 + a^2 d\varphi^2}}, \quad \sin \nu = \sqrt{1 - \cos^2 \nu} = \frac{a d\varphi}{\sqrt{(b + a \cos \varphi)^2 + a^2 d\varphi^2}}.$$

于是,

$$\kappa_n = -\frac{\cos \varphi}{b + a \cos \varphi} \cos^2 \nu - \frac{1}{a} \sin^2 \nu = -\frac{b + 2a \cos \varphi}{2a(b + a \cos \varphi)} - \frac{b}{2a(b + a \cos \varphi)} \cos 2\nu.$$

由 $\frac{b}{2(b + a \cos \varphi)} > 0$ 得知,

$$(\kappa_n)_{\min} = -\frac{b + 2a \cos \varphi}{2a(b + a \cos \varphi)} - \frac{b}{2a(b + a \cos \varphi)} = -\frac{1}{a}.$$

当固定 θ 和 φ 时,

$$(\kappa_n)_{\max} = -\frac{b + 2a \cos \varphi}{2a(b + a \cos \varphi)} + \frac{b}{2a(b + a \cos \varphi)} = -\frac{\cos \varphi}{b + a \cos \varphi}.$$

故环面在点 (θ, φ) 处的 Gauss 曲率为

$$K(\theta, \varphi) = (\kappa_n)_{\min} \cdot (\kappa_n)_{\max} = \frac{\cos \varphi}{a(b + a \cos \varphi)}.$$

进而知在圆环面的“外环”, $\varphi \in (0, \pi/2) \cup (3\pi/2, 2\pi)$, $K > 0$; 在圆环面的“内环”, $\varphi \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$, $K < 0$; 在圆环面的“顶圆周”和“底圆周”, $\varphi = \pi/2$ 或 $\varphi = 3\pi/2$, $K = 0$.

我们知道, 点集拓扑研究的是一般拓扑空间, 微分拓扑研究的是可微流形特别是光滑流形, 而微分几何处理的是可微流形并带有某种附加结构, 这附加结构可以是一个 Riemann 度量, 也可以是一个联络, 或者一个张量场, 研究对象越少, 研究的方法和结果就越多, 例如, 微分拓扑中惯用的微积分算法, 即外微分就不能用于点集拓扑学; 一般的拓扑性质与度量和形状无关, 即在随意拉伸、压缩或弯曲但不允许重叠和撕裂之下同胚的图形共同具有的几何性质.

曲面上 Gauss 曲率的推广便是 Riemann 流形中的截曲率. 这涉及 Riemann 度量问题.

定义 2.2 设 M 是一个 m 维光滑流形, g 是 M 上的一个光滑的二阶协变张量场, 即 $\forall p \in M$, $g(p)$ 是一个二重线性映射

$$g(p) : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}, \quad \forall p \in M.$$

如果 g 是对称和正定的, 即

$$g(p)(X, Y) = g(p)(Y, X), \quad g(p)(X, X) \geq 0, \quad \forall p \in M, \quad \forall X, Y \in T_p M,$$

$g(p)(X, X) = 0$ 当且仅当 $X = 0$, 这时 $g(p)$ 是切空间 $T_p M$ 上的内积, 则称 g 是 M 上的一个 Riemann 度量. 指定了一个 Riemann 度量 g 的光滑流形 M 称为 Riemann 流形, 记为 (M, g) 或简记为 M .

在光滑流形 M 上, Riemann 度量 g 的存在性不是显而易见的. 由于在每一个局部坐标邻域 U_α 上都可以指定一个 Riemann 度量, 自然的想法是, 利用单位分解定理 (需要 M 满足第二可数公理), 把这些局部定义的 Riemann 度量作零扩充再粘贴成为流形 M 上大范围定义的 Riemann 度量. 于是有下面的 Riemann 度量存在性定理.

定理 2.1 设 M 是一个满足第二可数公理的 m 维光滑流形, 则在 M 上必存在 Riemann 度量.

证明 (1) 由于 M 满足第二可数公理, M 有可数个开集组成拓扑基, 所以, 对于 M 的任一坐标邻域开覆盖 $\Sigma_1 = \{\tilde{U}_\alpha \mid \alpha \in I\}$, 必存在 Σ_1 的一个局部有限的加细覆盖 $\Sigma = \{(U_\alpha; x_\alpha^i) \mid \alpha \in I\}$, 根据单位分解定理, 存在一族光滑函数 $\{f_\alpha \in C^\infty(M) \mid \alpha \in I\}$, 使得

$$\sum_{\alpha \in I} f_\alpha = 1, \quad 0 \leq f_\alpha \leq 1, \quad \text{Supp } f_\alpha \subset U_\alpha.$$

(2) 对于每一个 $\alpha \in I$, 在 U_α 上取 Riemann 度量 $g^{(\alpha)}$ 为

$$g^{(\alpha)} = \sum_{i,j=1}^m g_{ij}^\alpha dx_\alpha^i \otimes dx_\alpha^j = \sum_{i=1}^m dx_\alpha^i \otimes dx_\alpha^i,$$

将它扩充到 M 上引入对称的二阶协变张量场 g_α , 定义为 $\forall p \in M$,

$$g_\alpha(p) = \begin{cases} f_\alpha(p) \cdot g^{(\alpha)}(p), & p \in U_\alpha, \\ 0, & p \notin U_\alpha. \end{cases}$$

由于 $f_\alpha \cdot g^{(\alpha)} \in C^\infty(U_\alpha)$ 以及

$$\text{Supp } g_\alpha = \text{Supp } f_\alpha \cdot g_\alpha = \text{Supp } f_\alpha \cap \text{Supp } g_\alpha \subset \text{Supp } f_\alpha \subset U_\alpha,$$

所以, $f_\alpha \cdot g^{(\alpha)}$ 是 M 上的光滑二阶协变张量场.

(3) 令 $g = \sum_{\alpha \in I} g_\alpha$, 对于 $\forall p \in M$, $\sum_{\alpha \in I} g_\alpha(p)$ 不涉及级数的收敛性问题, 这是因为开覆盖 $\{U_\alpha \mid \alpha \in I\}$ 具有局部有限性, 只有有限个坐标邻域, 例如, $U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, \dots, U_{\alpha_r}$ 使得 $p \in U_{\alpha_1} \cap U_{\alpha_2} \cap \dots \cap U_{\alpha_r}$, 从而, $\sum_{\alpha \in I} g_\alpha(p) = \sum_{j=1}^r g_{\alpha_j}(p)$ 只有有限多项之和.

(4) 下证 g 具有正定性.

由于对任意 $p \in M$, $\sum_{\alpha \in I} f_\alpha(p) = 1$ 且 $f_\alpha(p) \in [0, 1]$, 所以必存在某个 $\beta_0 \in I$, 使得 $f_{\beta_0}(p) \in (0, 1]$. 于是, $\forall v \in T_p M$, 有

$$g(p)(v, v) = \sum_{\alpha \in I} f_\alpha(p) \cdot g^{(\alpha)}(v, v) \geq f_{\beta_0}(p) \cdot g^{(\beta_0)}(v, v).$$

由于已知 $g^{(\beta_0)}$ 是 U_{β_0} 上的 Riemann 度量, 它满足正定性, 即 $g^{(\beta_0)}(v, v) \geq 0$, 等号成立当且仅当 $v = 0$, 所以, $g(p)(v, v) \geq 0$ 且等号成立当且仅当 $v = 0$. 综合 (3) 和 (4) 可知, g 是 M 上的一个 Riemann 度量. $\square$

注 2.2 定理 2.1 的证明过程提供了在满足第二可数公理的光滑流形上构造 Riemann 度量的方法, 在理论上很重要, 但在实际上并不实用. 在实际应用中, 往往采用已知的 Riemann 流形 (N, h) (如 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$) 的 Riemann 度量诱导出所讨论流形上的 Riemann 度量. 这涉及浸入、嵌入等相关术语 (参见文献 [11, 12]).

定义 2.3 (映射的秩) 设 M 和 N 分别是 m 和 n 维的 C^r ($r \geq 1$) 可微流形, $f: M \rightarrow N$ 是可微映射, 对于点 $p \in M$, 切映射 $f_{*p}: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ 的像子空间 $f_*(T_p M)$ 的维数称为映射 f 在点 p 的秩, 记作 $\text{rank}_p f$.

注 2.3 (1) $\text{rank}_p f \leq \min\{m, n\}$, $\text{rank}_p f = \dim(f_{*p}(T_p M))$ 等于 f 的局部表达式 $\bar{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ 的 Jacobi 矩阵 $J_{\varphi(p)} \bar{f}$ 的秩.

(2) 当 $\text{rank}_p f = \dim M = m$ 时, 切映射 f_{*p} 是非退化的, 即在 $p \in M$ 的局部坐标系 $(U, \varphi; \{x^i\})$ 及 $f(p) \in N$ 的局部坐标系 $(V, \psi; \{y^\alpha\})$,

$$\left(f_{*p}\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right), \dots, f_{*p}\left(\frac{\partial}{\partial x^m}\right)\right) = \left(\frac{\partial}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^n}\right) \frac{\partial(y^1(x), \dots, y^n(x))}{\partial(x^1, \dots, x^m)},$$

其中

$$\text{rank}\left(\frac{\partial(y^1(x), \dots, y^n(x))}{\partial(x^1, \dots, x^m)}\right) = \min\{m, n\} = m.$$

n 维 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 中反函数定理的微分流形版本如下 (参见文献 [12]).

定理 2.2 设 M 和 N 是两个 n 维 C^r ($r \geq 1$) 流形, $f: M \rightarrow N$ 是 C^r 映射, 若映射 f 在点 p 的秩为 n , 则必存在 M 在点 p 的一个邻域 U , 使得其像集 $f(U)$ 是 N 在点 $f(p)$ 的邻域, 且限制映射 $f|_U: U \rightarrow f(U)$ 是 C^r 微分同胚.

定理 2.3 设 M 和 N 分别是 m 和 n 维光滑流形, $m < n$, 设 $f: M \rightarrow N$ 是光滑映射. 如果切映射 df 或 f_* 在点 $p \in M$ 是非退化的, 即 $\text{rank}_p f = m$, 则存在点 p 的局部坐标系 $(U; \{x^i\})$ 及点 $f(p)$ 的局部坐标系 $(V; \{y^\alpha\})$, 使得 $f(U) \subset V$, 并且 $f|_U$ 的局部表达式为

$$f^\alpha = y^\alpha \circ f = \begin{cases} x^\alpha, & 1 \leq \alpha \leq m, \\ 0, & m+1 \leq \alpha \leq n, \end{cases}$$

或

$$f(x^1, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^m, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-m}), \quad \forall (x^1, \dots, x^m) \in U,$$

即映射 f 把坐标域 U 单一地映射到 N 的一个局部坐标面内.

证明的关键在于, 利用 $\dim M = m$, 引进同维数的光滑映射

$$\tilde{f}: U \times I_{n-m} \rightarrow N,$$

$$(x^1, \dots, x^m, x^{m+1}, \dots, x^n) \mapsto \tilde{f}(x^1, \dots, x^n) = (f^1(x^1, \dots, x^m), \dots, f^m(x^1, \dots, x^m), \\ x^{m+1} + f^{m+1}(x^1, \dots, x^m), \dots, x^n + f^{n-m}(x^1, \dots, x^m)),$$

其中 U 为 M 在点 p 的局部坐标域, $x^i(p) = 0$, $y^\alpha(f(p)) = 0$,

$$I_{n-m} = \{(x^{m+1}, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^{n-m} \mid |x^\alpha - 0| < \delta, \alpha = m+1, \dots, n\},$$

δ 为充分小的正数. 适当收缩 U 之后, 便保证 $\tilde{f}$ 在点 $(p, 0) \in M \times I_{n-m}$ 的秩为 n , 由定理 2.2 知, $\tilde{f}: U \times I_{n-m} \rightarrow \tilde{f}(U \times I_{n-m})$ 为光滑同胚且

$$\tilde{f}|_{U \times \underbrace{\{0, \dots, 0\}}_{n-m}} = f|_U, \quad f(x^1, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^m, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-m}).$$

注 2.4 由定理 2.2 知, 切映射 $f_*: TM \rightarrow TN$ 在点 p 的非退化蕴含着映射 f 在点 p 的邻域内具有单性, 从而可引入“浸入”的定义.

定义 2.4 (浸入) 设 M 和 N 分别是 m 和 n 维 C^r 微分流形, $f: M \rightarrow N$ 是 C^r 可微映射 ($r \geq 1$). 若在 M 的每一点 p , 切映射 $f_{*p}: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ 都是非退化的, 则称 f 是 C^r 可微流形 N 的一个 m 维浸入子流形.

例 2.1 $\mathbb{R}^3$ 中的正则曲线 $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ 定义为 $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, 它是 $\mathbb{R}^3$ 的一维浸入子流形. 因为 $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) \neq 0, \forall t$, 即 $\gamma_{*t}: T_t(a, b) \cong \mathbb{R}^1 \rightarrow T_{\gamma(t)} \mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^3$ 是处处非退化的, $\text{rank}_t \gamma = 1, \forall t$. 虽然正则曲线在局部上一一地映入到 $\mathbb{R}^3$ 中, 但作为整条曲线来讲, 它在 $\mathbb{R}^3$ 中可能有自交点, 即映射 $\gamma: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ 本身未必是单一的. 例如, 映射 $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ 定义为

$$F(t) = \left(2 \cos \left(t - \frac{\pi}{2} \right), \sin 2 \left(t - \frac{\pi}{2} \right), 0 \right),$$

其切映射为

$$F_{*t} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) = \frac{dF(t)}{dt} = \left(-2 \sin \left(t - \frac{\pi}{2} \right), 2 \cos 2 \left(t - \frac{\pi}{2} \right), 0 \right) \neq 0, \quad \forall t.$$

这是因为

$$\begin{aligned} \left| \frac{dF(t)}{dt} \right| &= \sqrt{2 - 2 \cos 2 \left(t - \frac{\pi}{2} \right) + 4 \cos^2 2 \left(t - \frac{\pi}{2} \right)} \\ &= \sqrt{1 + \left(1 - \cos 2 \left(t - \frac{\pi}{2} \right) \right)^2 + 3 \cos^2 2 \left(t - \frac{\pi}{2} \right)} \geq 1, \end{aligned}$$

所以, $(F, \mathbb{R})$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的一维浸入子流形, 但它有周期为 2π 的映射, 当然不是单一的映射, 即使限制在 $(\pi/2, 2\pi + \pi/2)$, 仍有自交点 $F(\pi) = F(2\pi) = (0, 0)$, F 的图形是一个倒卧的 8 字.

将 F 限制于一个周期 $(-\pi, \pi)$ 内部并重新参数化, 则得映射 $G: (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$ 定义为

$$G(t) = \left(2 \cos \left(2 \arctan \left(t - \frac{\pi}{2} \right) \right), \sin 2 \left(2 \arctan \left(t - \frac{\pi}{2} \right) \right), 0 \right),$$

于是, $(G, (-\pi, \pi))$ 是单一地浸入到 $\mathbb{R}^3$ 的一维子流形.

例 2.2 $\mathbb{R}^3$ 中的正则曲面 $\gamma: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 定义为 $\gamma(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的二维浸入子流形, 因为“正则”要求 $\gamma_u \times \gamma_v \neq 0, \text{rank}_p \gamma = 2, \forall p(u, v) \in D$.

当 $f: M \rightarrow N$ 是单一的浸入映射时, M 可以和它的像集 $f(M)$ 等同起来, 从而把 M 的拓扑结构和微分结构搬到像集 $f(M)$ 上来, 这时由于 $f(M)$ 是具有这种遗传的拓扑结构和微分结构, 所以, $f: M \rightarrow f(M)$ 是可微同胚. 另一方面, $f(M)$ 既然作为 N 的子集还可以赋予 N 诱导的 (相对) 拓扑. 这正是“嵌入”定义的本质.

定义 2.5 (嵌入子流形) 设 $f: M \rightarrow N$ 是 C^r 浸入, 如果

(1) f 是单一的;

(2) 当像集 $f(M)$ 作为从 N 诱导的拓扑空间时, $f: M \rightarrow f(M)$ 是同胚, 则称浸入 (f, M) 是 N 的嵌入子流形.

判断嵌入子流形有下面两个准则.

定理 2.4 设 $f: M \rightarrow N$ 是单一的 C^r 浸入子流形, 如果 M 是紧致的, 则 (f, M) 是 N 的嵌入子流形.

定理 2.5 单一的浸入子流形 $f: M \hookrightarrow N$ 是 N 的嵌入子流形, 当且仅当对每一点 $p \in M$, 存在点 q , $f(p)$ 在 N 中的局部坐标系 $(V, \{y^\alpha\})$, 使得 $y^\alpha(q) = 0$ 且 $f(M) \cap V = \{s \in V \mid y^\alpha(s) = 0, \alpha = m+1, \dots, n\}$.

上述的嵌入或光滑嵌入概念是对微分拓扑的角度而言, 如果从 Riemann 几何角度可以谈论等距嵌入.

定义 2.6 (等距嵌入) 设 (M, g) 和 (N, h) 是两个 Riemann 流形, 若光滑嵌入 $f: M \rightarrow N$ 满足度量的拉回 $f^*(h) = g$, 即 $\forall v, w \in T_p M$, 有 $g(v, w) = f^*h(v, w) = h(f_*v, f_*w)$, 则称 f 为等距嵌入.

等价地说, 一个等距嵌入是保持曲线长度的光滑嵌入 (参见 Nash 嵌入定理 [5]).

3 嵌入拉回度量

在曲率与拓扑的相互影响中, 乘积结构一直引起人们的研究兴趣. 给定一个紧致的乘积流形 $M = M_1 \times M_2$, 人们想知道 M 是否容许携带有某种曲率条件的 Riemann 度量, 例如, 大家一般认同 M 不会容许带有正截曲率的 Riemann 度量. 目前, 这个论断还不知如何论证, 哪怕对于最简单的情形, 即两个二维球面的乘积 $M = S^2 \times S^2$ 的 Hopf 猜想. 另一方面, 经典 Preissmann 定理 [13, 14] 指出, 任何带有负截曲率的紧致 Riemann 流形 N 的基本群 $\pi_1(N)$ 的任何非平凡 Abel 子群是循环群, 这意味着这样的流形在拓扑上不可能是乘积流形, 否则 $\pi_1(N)$ 将包含 $\mathbb{Z}^2$ 作为子群. 由此可见, 乘积流形 $M = S^2 \times S^2$ 似乎不可回避地在某些地方出现零截曲率.

前面的注 2.2 已经提到直接构造 Riemann 度量的难度, 所以, 最可行的应该是利用 Whitney 嵌入定理 [4], 将四维流形 Riemann 流形 $M = S^2 \times S^2$ 嵌入到 $\mathbb{R}^{2 \times 4+1} = \mathbb{R}^9$, 按照积流形的每个积因子 S^2 嵌入 $\mathbb{R}^3$, M 至少嵌入 $\mathbb{R}^6$. 另一方面, 将 M 嵌入到具有标准球面度量的某个适当半径为 r 和维数为 k (足够大) 的球面 $\mathbb{R}^k(r)$ 也是可取的选择.

3.1 嵌入到 $\mathbb{R}^{6+N}$

二维球面 S^2 带有嵌入 $\mathbb{R}^3$ 遗传来的 Riemann 结构 (参见文献 [15, 第 331 页]), 结合 Nash 嵌入定理 [5], 下面考虑 $M = S^2 \times S^2$ 嵌入到 $\mathbb{R}^{6+N}$ ($N = 1, 2, 3$), 采用 Perdoma [3] 证明嵌入的方法以及 Bott [15] 或 Milnor [16] 的 Morse 理论, 证明下面的论断. 这样, 如果证明对任何嵌入 f , (Id, f) 都不会在 $M = S^2 \times S^2$ 上诱导出正曲率度量, 那么 M 就不会有这样的度量了.

命题 3.1 设四维 Riemann 流形 $M = S^2 \times S^2 \subset \mathbb{R}^6$ 的 N ($N = 1, 2, 3$) 维向量值函数为

$$f: M \rightarrow \mathbb{R}^N, \quad f(x, y) = (f^1(x, y), f^2(x, y), \dots, f^N(x, y)),$$

其中 $f^\alpha(x, y)$ ($\alpha = 1, 2, \dots, N$) 为 M 上的函数, 则嵌入映射

$$F: M \rightarrow \mathbb{R}^{6+N}, \quad (x, y) \mapsto F(x, y) = (x, y, f(x, y))$$

的拉回度量不存在严格正的截面曲率.

证明 记 D 为流形 M 从 $\mathbb{R}^6$ 诱导度量 g 的联络, $\tilde{D}$ 为流形 $\tilde{M} = \{F(x, y) \mid (x, y) \in M\}$ 通过嵌入映射 f 的拉回度量 h 诱导的联络; 映射 $X : M \rightarrow \mathbb{R}^6$ 表示 M 上的切向量场, 而

$$\tilde{X} : \tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}^{6+N}, \quad \tilde{X}(F(p)) = (Y(p), df^1(Y(p)), df^2(Y(p)), \dots, df^N(Y(p)))$$

表示 $\tilde{M}$ 上的切向量场; $\forall p = (p_1, p_2) \in M$, $F(p) = (p, f(p))$, 分别记 $v^T(p)$ 为 $v \in \mathbb{R}^6$ 在 $T_p M$ 上、 $w^{\tilde{T}}(F(p))$ 为 $w \in \mathbb{R}^{6+N}$ 在 $T_{F(p)} \tilde{M}$ 上的正交投影切向量. 注意到流形 $\tilde{M}$ 通过嵌入映射 f 的拉回度量与流形 M 建立等距, 也用 $\tilde{D}$ 表示 $\tilde{M}$ 上的联络.

下面先找出 $\tilde{M}$ 截曲率, 用 M 的截曲率和 F 的导数表达出来, 然后进行应用分析. 考虑到接下来的计算推证过程比较长, 我们剖分成若干步骤来推进.

(1) $\forall p = (p_1, p_2) \in M \subset \mathbb{R}^6$, 取 $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ 为 M 在 p 的开邻域 U 的一个局部正交坐标架场, 使得 $D_{e_i} e_j(p) = 0$, 这里每个 $e_i : U \rightarrow \mathbb{R}^6$ 为切向量场. 于是对应得到 $F(p)$ 的开邻域 $\tilde{U} \subset \tilde{M}$ 的局部正交坐标架场为 $\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3, \tilde{e}_4\}$, 其中 $\tilde{e}_i(F(p)) = (e_i(p), df^1(e_i(p)), df^2(e_i(p)), \dots, df^N(e_i(p)))$. 这时每个分量函数 f^α 的梯度 $\nabla f = (\nabla f^1, \nabla f^2, \dots, \nabla f^N)^t$ 和 Hessian 算子 $\text{Hess}(f) = (D(df^1), \dots, D(df^N))^t$ 可分别表示分量为

$$\begin{aligned} \nabla f^\alpha &= \sum_{i=1}^6 df^\alpha(e_i(p)) e_i(p), \quad \alpha = 1, 2, \dots, N, \\ \text{Hess}(df^\alpha)(X, Y) &= (D_Y df^\alpha)X = Y(df^\alpha(X)) - df^\alpha(D_Y X) \\ &= \begin{cases} (Y \circ X - D_Y X)(f^\alpha), \\ Y\langle X, \nabla f^\alpha \rangle - \langle D_Y X, \nabla f^\alpha \rangle = \langle X, D_Y \nabla f^\alpha \rangle, \quad \forall X, Y \in \mathcal{X}(M), \end{cases} \\ f^\alpha_{ij}(p) &= \text{Hess}(f^\alpha)(e_i(p), e_j(p)). \end{aligned} \quad (3.1)$$

(2) $\tilde{M}$ 上的度量矩阵 (h_{ij}) 和逆矩阵 (h^{ij}) 分别为

$$h_{ij} = h(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j) = \delta_{ij} + \sum_{\alpha, \beta=1}^N e_i(f^\alpha) e_j(f^\beta), \quad h^{ij} = \delta_{ij} - \frac{\sum_{\alpha, \beta=1}^N e_i(f^\alpha) e_j(f^\beta)}{1 + \|\nabla f\|^2}, \quad (3.2)$$

其中 $\|\nabla f\|^2 = \sum_{\alpha, \beta=1}^N \sum_{i=1}^4 e_i(f^\alpha) e_i(f^\beta)$.

事实上,

$$\begin{aligned} h(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j) &= \langle (e_i(p), df^1(e_i(p)), df^2(e_i(p)), \dots, df^N(e_i(p))), (e_j(p), df^1(e_j(p)), df^2(e_j(p)), \dots, df^N(e_j(p))) \rangle \\ &= \delta_{ij} + \sum_{\alpha, \beta=1}^N e_i(f^\alpha) e_j(f^\beta), \end{aligned}$$

从而,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^4 h_{ij} h^{jk} &= \sum_{j=1}^4 \left(\delta_{ij} + \sum_{\alpha, \beta=1}^N e_i(f^\alpha) e_j(f^\beta) \right) \left(\delta_{jk} - \frac{\sum_{\lambda, \mu=1}^N e_j(f^\lambda) e_k(f^\mu)}{1 + \|\nabla f\|^2} \right) \\ &= \delta_{ik} + \sum_{\alpha, \beta=1}^N e_i(f^\alpha) e_k(f^\beta) - \frac{\sum_{\alpha, \beta=1}^N e_i(f^\alpha) e_k(f^\beta)}{1 + \|\nabla f\|^2} \\ &\quad - \frac{\sum_{\alpha, \beta=1}^N e_i(f^\alpha) e_k(f^\beta) \sum_{\lambda, \mu=1}^N \sum_{j=1}^4 e_j(f^\lambda) e_j(f^\mu)}{1 + \|\nabla f\|^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \delta_{ik} + \sum_{\alpha, \beta=1}^N e_i(f^\alpha) e_k(f^\beta) \frac{\|\nabla f\|^2}{1 + \|\nabla f\|^2} - \sum_{\alpha, \beta=1}^N e_i(f^\alpha) e_k(f^\beta) \frac{\|\nabla f\|^2}{1 + \|\nabla f\|^2} \\
&= \delta_{ik}.
\end{aligned}$$

(3) 断言: 设 v 为 $\mathbb{R}^6$ 的向量, $r = (r_1, \dots, r_N)$ 为 $\mathbb{R}^N$ 的向量, 则

$$\begin{aligned}
(v, r)^{\tilde{T}} &= (v^T, \langle v^T, \nabla f^1 \rangle, \dots, \langle v^T, \nabla f^N \rangle) + \sum_{\alpha, \beta=1}^N \frac{r_\alpha - \langle v^T, \nabla f^\alpha \rangle}{1 + \|\nabla f\|^2} (\nabla f^\beta, \langle \nabla f^\beta, \nabla f^1 \rangle, \dots, \langle \nabla f^\beta, \nabla f^N \rangle) \\
&= \tilde{w},
\end{aligned} \tag{3.3}$$

其中 $w = v^T + \sum_{\alpha, \beta=1}^N \frac{r_\alpha - \langle v^T, \nabla f^\alpha \rangle}{1 + \|\nabla f\|^2} \nabla f^\beta$.

事实上, 由于 $\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3, \tilde{e}_4\}$ 为对应得到 $T_{F(p)}\tilde{M}$ 的一个基底, 所以有如下线性组合:

$$(v, r)^{\tilde{T}} = \sum_{i=1}^4 \lambda_i \tilde{e}_i. \tag{3.4}$$

(3.3) 两边内积 $\tilde{e}_j$, 得到

$$\sum_{i=1}^4 \lambda_i g_{ij} = \langle (v, r)^{\tilde{T}}, \tilde{e}_j \rangle = \langle v^T, e_j \rangle + \sum_{\alpha, \beta=1}^N r_\alpha e_j(f^\beta). \tag{3.5}$$

(3.4) 两边乘以 g^{jk} , 并对 j 求和, 得到

$$\begin{aligned}
\lambda_k &= \sum_{j=1}^4 g^{jk} \left(\langle v^T, e_j \rangle + \sum_{\alpha, \beta=1}^N r_\alpha e_j(f^\beta) \right) \\
&= \sum_{j=1}^4 \left(\delta_{jk} - \frac{\sum_{\gamma, \delta=1}^N e_j(f^\gamma) e_k(f^\delta)}{1 + \|\nabla f\|^2} \right) \left(\langle v^T, e_j \rangle + \sum_{\alpha, \beta=1}^N r_\alpha e_j(f^\beta) \right) \quad (\text{由 (3.1)}) \\
&= \langle v^T, e_k \rangle + \sum_{\alpha, \beta=1}^N r_\alpha e_k(f^\beta) - \frac{\sum_{\delta=1}^N e_k(f^\delta)}{1 + \|\nabla f\|^2} \left\langle v^T, \sum_{\gamma=1}^N \sum_{j=1}^4 e_j(f^\gamma) e_j \right\rangle \\
&\quad - \frac{\sum_{\alpha, \beta=1}^N r_\alpha e_k(f^\beta) \sum_{\gamma, \delta=1}^N \sum_{j=1}^4 e_j(f^\delta) e_j(f^\gamma)}{1 + \|\nabla f\|^2} \\
&= \langle v^T, e_k \rangle + \sum_{\alpha, \beta=1}^N r_\alpha e_k(f^\beta) - \sum_{\beta=1}^N e_k(f^\beta) \frac{\langle v^T, \sum_{\alpha=1}^N \nabla f^\alpha \rangle}{1 + \|\nabla f\|^2} - \frac{\sum_{\alpha, \beta=1}^N r_\alpha e_k(f^\beta)}{1 + \|\nabla f\|^2} \|\nabla f\|^2,
\end{aligned}$$

即

$$\lambda_k = \langle v^T, e_k \rangle + \sum_{\alpha, \beta=1}^N \frac{r_\alpha - \langle v^T, \nabla f^\alpha \rangle}{1 + \|\nabla f\|^2} e_k(f^\beta). \tag{3.6}$$

将 (3.6) 中的 k 换为 i , 代入 (3.4), 结合 $\tilde{e}_i$ 与 e_i 的关系式便得 (3.3) 的第一个等号

$$(v, r)^{\tilde{T}} = \left(\sum_{i=1}^4 \langle v^T, e_i \rangle e_i, \sum_{i=1}^4 \langle v^T, e_i \rangle e_i(f^1), \dots, \sum_{i=1}^4 \langle v^T, e_i \rangle e_i(f^N) \right)$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{\alpha=1}^N \frac{r_{\alpha} - \langle v^T, \nabla f^{\alpha} \rangle}{1 + \|\nabla f\|^2} \left(\sum_{\beta=1}^N \sum_{i=1}^4 e_i(f^{\beta}) e_i, \sum_{\beta=1}^N \sum_{i=1}^4 e_i(f^{\beta}) e_i(f^1), \dots, \sum_{\beta=1}^N \sum_{i=1}^4 e_i(f^{\beta}) e_i(f^N) \right) \\
 & = (v^T, \langle v^T, \nabla f^1 \rangle, \dots, \langle v^T, \nabla f^N \rangle) + \sum_{\alpha, \beta=1}^N \frac{r_{\alpha} - \langle v^T, \nabla f^{\alpha} \rangle}{1 + \|\nabla f\|^2} (\nabla f^{\beta}, \langle \nabla f^{\beta}, \nabla f^1 \rangle, \dots, \langle \nabla f^{\beta}, \nabla f^N \rangle).
 \end{aligned}$$

进而又得 (3.3) 的第二个等号

$$\begin{aligned}
 (v, r)^{\tilde{T}} &= (v^T, df^1(v^T), \dots, df^N(v^T)) + \sum_{\alpha, \beta=1}^N \frac{r_{\alpha} - \langle v^T, \nabla f^{\alpha} \rangle}{1 + \|\nabla f\|^2} (\nabla f^{\beta}, df^1(\nabla f^{\beta}), \dots, df^N(\nabla f^{\beta})) \\
 &= v^{\tilde{T}} + \sum_{\alpha, \beta=1}^N \frac{r_{\alpha} - \langle v^T, \nabla f^{\alpha} \rangle}{1 + \|\nabla f\|^2} \widetilde{\nabla f^{\beta}} = \tilde{w}, \\
 w &= v^T + \sum_{\alpha, \beta=1}^N \frac{r_{\alpha} - \langle v^T, \nabla f^{\alpha} \rangle}{1 + \|\nabla f\|^2} \nabla f^{\beta}.
 \end{aligned}$$

(4) 断言: 设 $u, v: M \rightarrow \mathbb{R}^6$ 为 M 的切向量场, 则 $\tilde{M}$ 上切向量场 $\tilde{u}, \tilde{v}: \tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}^{6+N}$ 的 Levi-Civita 联络为

$$\tilde{D}_{\tilde{u}} \tilde{v} = \widetilde{D_u v} + \sum_{\alpha, \beta=1}^N \frac{\text{Hess}(f^{\alpha})(u, v)}{1 + \|\nabla f\|^2} \widetilde{\nabla f^{\beta}}. \quad (3.7)$$

事实上, 设 $\alpha(t)$ 为 $M \subset \mathbb{R}^6$ 的光滑曲线且满足 $\alpha(0) = p, \alpha'(0) = u$, 则 $\beta(t) = (\alpha(t), f(\alpha(t)))$ 便为 $\tilde{M} \subset \mathbb{R}^{6+N}$ 的光滑曲线. 由于 M 和 $\tilde{M}$ 的 Riemann 度量 g 和 h 都是从 Euclid 空间诱导而来, 所以,

$$\begin{aligned}
 \tilde{D}_{\tilde{u}} \tilde{v}(\tilde{p}) &= \left(\frac{d}{dt} \tilde{v}(\beta(t)) \right)^{\tilde{T}} \Big|_{t=0} \\
 &\stackrel{(3)}{=} \left(\frac{d}{dt} v(\alpha(t)), \frac{d}{dt} \langle v, \nabla f^1 \rangle(\alpha(t)), \dots, \frac{d}{dt} \langle v, \nabla f^N \rangle(\alpha(t)) \right)^{\tilde{T}} \Big|_{t=0} \\
 &= \left(\frac{d}{dt} v(\alpha(t)) \Big|_{t=0}, \langle D_u v, \nabla f^1 \rangle + \langle v, D_u \nabla f^1 \rangle, \dots, \langle D_u v, \nabla f^N \rangle + \langle v, D_u \nabla f^N \rangle \right)^{\tilde{T}}. \quad (3.8)
 \end{aligned}$$

利用 (3.3), 并注意到 $(\frac{d}{dt} v(\alpha(t)) \Big|_{t=0})^T = D_u v$, 结合 (3.1) 中的表达式, (3.8) 可化为

$$\begin{aligned}
 \tilde{D}_{\tilde{u}} \tilde{v}(\tilde{p}) &= \widetilde{D_u v} + \sum_{\alpha, \beta=1}^N \frac{\langle D_u v, \nabla f^{\alpha} \rangle + \langle v, D_u \nabla f^{\alpha} \rangle - \langle D_u v, \nabla f^{\alpha} \rangle}{1 + \|\nabla f\|^2} \widetilde{\nabla f^{\beta}} \\
 &= \widetilde{D_u v} + \sum_{\alpha, \beta=1}^N \frac{\langle v, D_u \nabla f^{\alpha} \rangle}{1 + \|\nabla f\|^2} \widetilde{\nabla f^{\beta}} = \widetilde{D_u v} + \sum_{\alpha, \beta=1}^N \frac{\text{Hess}(f^{\alpha})(u, v)}{1 + \|\nabla f\|^2} \widetilde{\nabla f^{\beta}}.
 \end{aligned}$$

(5) 断言: 设 R 和 $\tilde{R}$ 分别为 M 和 $\tilde{M}$ 的曲率张量, 则对 M 上任意切向量场 $X, Y, Z: M \rightarrow \mathbb{R}^6$, 有

$$\begin{aligned}
 \tilde{R}(\tilde{X}, \tilde{Y})\tilde{Z} &= R(\widetilde{X}, \widetilde{Y})\tilde{Z} - \sum_{\alpha=1}^N \frac{\text{Hess}(f^{\alpha})(X, Z)}{1 + \|\nabla f\|^2} \widetilde{D_Y \nabla f^{\alpha}} + \sum_{\alpha=1}^N \frac{\text{Hess}(f^{\alpha})(Y, Z)}{1 + \|\nabla f\|^2} \widetilde{D_X \nabla f^{\alpha}} \\
 &\quad + \sum_{\alpha=1}^N \frac{D^2 df^{\alpha}(X, Z; Y) - D^2 df^{\alpha}(Y, Z; X)}{1 + \|\nabla f\|^2} \widetilde{\nabla f^{\alpha}}
 \end{aligned}$$

$$+ \sum_{\alpha=1}^N \frac{\text{Hess}(f^\alpha)(X, \nabla f^\alpha) \text{Hess}(f^\alpha)(Y, Z) - \text{Hess}(f^\alpha)(Y, \nabla f^\alpha) \text{Hess}(f^\alpha)(X, Z)}{(1 + \|\nabla f\|^2)^2} \widetilde{\nabla f^\alpha}, \quad (3.9)$$

其中

$$\begin{aligned} D^2 df^\alpha(X, Z; Y) &= (D_Y \text{Hess}(f^\alpha))(X, Z) \\ &= Y \langle X, D_Z \nabla f^\alpha \rangle - \langle D_Y X, D_Z \nabla f^\alpha \rangle - \langle D_Y Z, D_X \nabla f^\alpha \rangle. \end{aligned} \quad (3.10)$$

推导如下: 由于曲率张量 R 具有 $C^\infty(M)$ -线性性, 所以, 为简单起见, 只需要证明 (3.9) 在 $X = e_i$ 、 $Y = e_j$ 和 $Z = e_k$ 时成立.

由于 $D_{e_i} e_j(p) = 0$, 所以, $[e_i, e_j](p) = 0$. 由 (3.3) 及 $\text{Hess}(f^\alpha)(X, Y)$ 的对称性, 有 $[\tilde{e}_i, \tilde{e}_j](\tilde{p}) = 0$. 于是有

$$\tilde{R}(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j) \tilde{e}_k(\tilde{p}) = \tilde{D}_{\tilde{e}_i} \tilde{D}_{\tilde{e}_j} \tilde{e}_k(\tilde{p}) - \tilde{D}_{\tilde{e}_j} \tilde{D}_{\tilde{e}_i} \tilde{e}_k(\tilde{p}), \quad R(e_i, e_j) e_k(p) = D_{e_i} D_{e_j} e_k(p) - D_{e_j} D_{e_i} e_k(p). \quad (3.11)$$

连续利用 (3.7), 可得

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{\tilde{e}_i} \tilde{D}_{\tilde{e}_j} \tilde{e}_k(\tilde{p}) &= \tilde{D}_{\tilde{e}_i} \widetilde{D_{e_j} e_k}(\tilde{p}) + \tilde{D}_{\tilde{e}_i} \left(\sum_{\alpha, \beta=1}^N \frac{\text{Hess}(f^\alpha)(e_j, e_k)}{1 + \|\nabla f\|^2} \widetilde{\nabla f^\beta} \right)(\tilde{p}) \\ &= \widetilde{D_{e_i} D_{e_j} e_k}(\tilde{p}) + \sum_{\alpha, \beta=1}^N \frac{\text{Hess}(f^\alpha)(e_i(p), D_{e_j} e_k(p))}{1 + \|\nabla f\|^2} \widetilde{\nabla f^\beta}(\tilde{p}) \\ &\quad + \left\{ D_{e_i} \left(\sum_{\alpha, \beta=1}^N \frac{\text{Hess}(f^\alpha)(e_j, e_k)}{1 + \|\nabla f\|^2} \nabla f^\beta \right) \right\}^\sim(\tilde{p}) \\ &\quad + \sum_{\alpha, \beta, \gamma, \delta=1}^N \frac{\text{Hess}(f^\alpha)(e_j, e_k) \text{Hess}(f^\gamma)(e_i, \nabla f^\delta)|_p}{(1 + \|\nabla f\|^2)^2} \widetilde{\nabla f^\beta}(\tilde{p}) \\ &= \widetilde{D_{e_i} D_{e_j} e_k}(\tilde{p}) + \sum_{\alpha, \beta=1}^N \left(\frac{e_i(\text{Hess}(f^\alpha)(e_j, e_k))|_p}{1 + \|\nabla f\|^2} - \frac{\text{Hess}(f^\alpha)(e_j, e_k) e_i(\|\nabla f\|^2)}{(1 + \|\nabla f\|^2)^2} \right) \Big|_p \widetilde{\nabla f^\beta}(\tilde{p}) \\ &\quad + \sum_{\alpha, \beta=1}^N \frac{\text{Hess}(f^\alpha)(e_j, e_k)|_p}{1 + \|\nabla f\|^2} \widetilde{D_{e_i} \nabla f^\beta}(\tilde{p}) \\ &\quad + \sum_{\alpha, \beta, \gamma, \delta=1}^N \frac{\text{Hess}(f^\alpha)(e_j, e_k) \text{Hess}(f^\gamma)(e_i, \nabla f^\delta)|_p}{(1 + \|\nabla f\|^2)^2} \widetilde{\nabla f^\beta}(\tilde{p}), \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{\tilde{e}_i} \tilde{D}_{\tilde{e}_j} \tilde{e}_k(\tilde{p}) &= \widetilde{D_{e_i} D_{e_j} e_k}(\tilde{p}) + \sum_{\alpha, \beta=1}^N \frac{D^2 df^\alpha(e_j, e_k; e_i)|_p}{1 + \|\nabla f\|^2} \widetilde{\nabla f^\beta}(\tilde{p}) + \sum_{\alpha, \beta=1}^N \frac{\text{Hess}(f^\alpha)(e_j, e_k)|_p}{1 + \|\nabla f\|^2} \widetilde{D_{e_i} \nabla f^\beta}(\tilde{p}) \\ &\quad - \sum_{\alpha, \beta, \gamma, \delta=1}^N \frac{\text{Hess}(f^\alpha)(e_j, e_k) \text{Hess}(f^\gamma)(e_i, \nabla f^\delta)|_p}{(1 + \|\nabla f\|^2)^2} \widetilde{\nabla f^\beta}(\tilde{p}). \end{aligned}$$

最后一个等式利用了 (3.10) 和 $e_i(\|\nabla f\|^2) = 2 \sum_{\gamma, \delta} \text{Hess}(f^\gamma)(e_j, \nabla f^\delta)|_p$. 交换上式中的 i 与 j , 可得

$$\tilde{D}_{\tilde{e}_j} \tilde{D}_{\tilde{e}_i} \tilde{e}_k(\tilde{p}) = \widetilde{D_{e_j} D_{e_i} e_k}(\tilde{p}) + \sum_{\alpha, \beta=1}^N \frac{D^2 df^\alpha(e_i, e_k; e_j)|_p}{1 + \|\nabla f\|^2} \widetilde{\nabla f^\beta}(\tilde{p}) + \sum_{\alpha, \beta=1}^N \frac{\text{Hess}(f^\alpha)(e_i, e_k)|_p}{1 + \|\nabla f\|^2} \widetilde{D_{e_j} \nabla f^\beta}(\tilde{p})$$

$$- \sum_{\alpha, \beta, \gamma, \delta=1}^N \frac{\text{Hess}(f^\alpha)(e_i, e_k) \text{Hess}(f^\gamma)(e_j, \nabla f^\delta)}{(1 + \|\nabla f\|^2)^2} |_p \widetilde{\nabla f^\beta}(\tilde{p}).$$

将上两式代入 (3.11), 并注意 $X = e_i, Y = e_j, Z = e_k$, 便得到所证的 (3.9).

(6) 当 M 的截曲率为正时, 由截曲率的定义 (参见文献 [13, 第 239 页]) $K(X, Y) = -\frac{\langle R(X, Y)X, Y \rangle}{\|X \wedge Y\|^2} = \frac{\langle R(X, Y)Y, X \rangle}{\|X \wedge Y\|^2}$ 知, $\langle R(X, Y)X, Y \rangle < 0$. 另一方面, 利用 Morse 理论, 可以找到某个 Morse 函数的非退化临界点 (或鞍点), 使得在该点的截曲率为负数, 从而产生矛盾.

由于二维球面 S^2 存在有封闭的测地线即大圆 (参见文献 [15, 第 235 页]), 所以, $\forall p = (p_1, p_2) \in M$, 分别过 p_1 和 p_2 作 S^2 的封闭测地线 γ_1 和 γ_2 , 然后作一个集合

$$S = \{(x, y) \in M \mid x \in \gamma_1, y \in \gamma_2\}.$$

在 S 定义函数

$$\varphi^\alpha : S \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi^\alpha(x, y) = f^\alpha(x, y), \quad \alpha = 1, \dots, N,$$

并取单位切向量场 $X_i : \gamma_i \rightarrow \mathbb{R}^3, Y_i : S \rightarrow \mathbb{R}^6$ ($i = 1, 2$) 为 $Y_1(x, y) = (X_1(x), 0, 0, 0), Y_2(x, y) = (0, 0, 0, X_2(y))$. 由于 φ^α 是 S 的一个 Morse 函数 (含有非退化的鞍点或临界点), 设 (x_0, y_0) 为 $\varphi^\alpha(x, y) = f^\alpha(x, y)$ ($\alpha = 1, \dots, N$) 的公共非退化临界点, 即 $\nabla \varphi^\alpha(x_0, y_0) = 0, \det \text{Hess}(\varphi^\alpha)(X, Y) < 0, \forall \alpha, \forall X, Y \in \mathcal{X}(M)$. 这样的鞍点存在是因为 S 在拓扑上是一个环面, 公共临界点可以借助 Frobenius 定理.

对于任意点 $(x, y) \in S$, 记

$$\nabla f^\alpha(x, y) = \nabla \varphi^\alpha + (\nabla f^\alpha)^\perp, \quad (3.12)$$

其中 $(\nabla f^\alpha)^\perp \perp T_{(x, y)}S$. 于是, 根据文献 [17] 知, S 是一个全测地子流形, 从而有 $D_{Y_i}Y_j(x, y) \in T_{(x, y)}S$,

$$\begin{aligned} \text{Hess}(f^\alpha)(Y_i, Y_j) &= \langle D_{Y_i} \nabla f^\alpha, Y_j \rangle = \langle D_{Y_i} \nabla \varphi^\alpha, Y_j \rangle + \langle D_{Y_i} (\nabla f^\alpha)^\perp, Y_j \rangle \\ &= \langle D_{Y_i} \nabla \varphi^\alpha, Y_j \rangle + Y_i \langle (\nabla f^\alpha)^\perp, Y_j \rangle - \langle (\nabla f^\alpha)^\perp, D_{Y_i} Y_j \rangle \\ &= \langle D'_{Y_i} \nabla \varphi^\alpha, Y_j \rangle = \text{Hess}(\varphi^\alpha)(Y_i, Y_j), \end{aligned}$$

上式中 D'_{Y_i} 表示 S 的 Levi-Civita 联络.

利用 $\langle \tilde{X}, \tilde{Y} \rangle = \langle X, Y \rangle + \sum_{\alpha, \beta} df^\alpha(X) df^\beta(Y)$, 下证在 $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ 处,

$$\langle \tilde{R}(\tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2) \tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2 \rangle = -\langle \tilde{R}(\tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2) \tilde{Y}_2, \tilde{Y}_1 \rangle > 0. \quad (3.13)$$

由于 (x_0, y_0) 为每个 φ^α 在 M 的临界点, 所以,

$$0 = d\varphi^\alpha(Y_i)(x_0, y_0) = df^\alpha(Y_i)(x_0, y_0) = \langle \nabla f^\alpha, Y_i \rangle(x_0, y_0).$$

注意到 M 具有乘积度量使得由 $\{Y_1, Y_2\}$ 张成平面的截曲率为 0, 在 (x_0, y_0) 处, 由 (3.9) 得

$$\begin{aligned} \langle \tilde{R}(\tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2) \tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2 \rangle &= \langle R(\widetilde{Y_1}, \widetilde{Y_2}) Y_1, \tilde{Y}_2 \rangle - \sum_{\alpha=1}^N \frac{\text{Hess}(f^\alpha)(Y_1, Y_1)}{1 + \|\nabla f\|^2} \langle \widetilde{D_{Y_2} \nabla f^\alpha}, \tilde{Y}_2 \rangle \\ &\quad + \sum_{\alpha=1}^N \frac{\text{Hess}(f^\alpha)(Y_2, Y_1)}{1 + \|\nabla f\|^2} \langle \widetilde{D_{Y_1} \nabla f^\alpha}, \tilde{Y}_2 \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{\alpha=1}^N \frac{D^2 df^\alpha(Y_1, Y_1; Y_2) - D^2 df^\alpha(Y_2, Y_1; Y_1)}{1 + \|\nabla f\|^2} \langle \widetilde{\nabla f^\alpha}, Y_2 \rangle \\
& + \sum_{\alpha, \beta=1}^N \frac{\text{Hess}(f^\alpha)(Y_1, \nabla f^\alpha) \text{Hess}(f^\alpha)(Y_2, Y_1) - \text{Hess}(f^\alpha)(Y_2, \nabla f^\alpha) \text{Hess}(f^\alpha)(Y_1, Y_1)}{(1 + \|\nabla f\|^2)^2} \\
& \times \langle \widetilde{\nabla f^\beta}, \tilde{Y}_2 \rangle \\
& = - \sum_{\alpha, \beta=1}^N \frac{\text{Hess}(f^\alpha)(Y_1, Y_1)}{1 + \|\nabla f\|^2} (\text{Hess}(f^\beta)(Y_2, Y_2) + 0) \\
& + \sum_{\alpha, \beta=1}^N \frac{\text{Hess}(f^\alpha)(Y_2, Y_1)}{1 + \|\nabla f\|^2} (\text{Hess}(f^\beta)(Y_2, Y_1) + 0) \\
& = - \sum_{\alpha=1}^N \det \text{Hess}(f^\alpha)(Y_1, Y_2) > 0.
\end{aligned}$$

这意味着 M 不存在有 Riemann 度量使得它的截曲率处处为正数. 否则, 取 $\{Y_1, Y_2\}$ 张成平面 σ 的截曲率为正数, 即

$$K(\sigma) = -\frac{\langle R(Y_1, Y_2)Y_1, Y_2 \rangle}{\|X \wedge Y\|^2} > 0, \quad \langle R(Y_1, Y_2)Y_1, Y_2 \rangle < 0.$$

这与 (3.13) 产生矛盾. □

3.2 嵌入到 S^k

文献 [7] 或 [18, 第 188 页] 证明了两个球面的乘积 $S^p(\sqrt{\frac{p}{n}}) \times S^q(\sqrt{\frac{q}{n}}) \subset S^{n+1}$ 定义为

$$\left\{ (x_1, \dots, x_{p+1}, y_1, \dots, y_{q+1}) \in \mathbb{R}^{n+2} \left| \sum_{k=1}^{p+1} x_k^2 = \frac{p}{n}, \sum_{k=1}^{q+1} y_k^2 = \frac{q}{n} \right. \right\},$$

其中 $p+q=n$, $p, q \geq 1$, 组成 S^{n+1} 的一个亏格 1 或 2 的代数极小超曲面. Lawson 在文献 [18, 第 189 页, 命题 1] 给出了极小超曲面的刚性定理: 设 M 是一个不一定完备的 Riemann 流形, $\psi: M^n \rightarrow S^{n+1}$ 是一个等距极小浸入. 若第二基本形式 A 在 M 上为协变常数, 则 (M, ψ) 是一个开子流形, 形如下面球面乘积流形之一:

$$S^k\left(\sqrt{\frac{k}{n}}\right) \times S^{n-k}\left(\sqrt{\frac{n-k}{n}}\right), \quad k = 0, 1, \dots, \left[\frac{n}{2}\right].$$

Brendle^[6] 通过对作嵌入极小曲面 $F: \Sigma \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S^3 \subset \mathbb{R}^4$ 证明了 $F(\Sigma)$ 合同于 Clifford 环面 $S^1(1/\sqrt{2}) \times S^1(1/\sqrt{2})$, 这意味着 $F(\Sigma) = S^1(1/\sqrt{2}) \times S^1(1/\sqrt{2})$ 等距极小嵌入到 $S^3 = S^3(1)$. 等价地, 可以作嵌入极小环面 $F: \Sigma \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S^3(2) \subset \mathbb{R}^4$ 使得 $F(\Sigma) = S^1(1) \times S^1(1)$ 等距极小嵌入到 $S^3(2)$. 注意到 $F(\Sigma)$ 含有 Gauss 曲率为 0 的情形, 所以, 环面 $S^1(1) \times S^1(1)$ 也含有零截曲率. 自然地, 考虑高维的情形是否也成立这样的论断: 嵌入极小超曲面 $F: \Sigma \subset \mathbb{R}^4 \rightarrow S^5(2) \subset \mathbb{R}^6$, 使得 $F(\Sigma) = S^2 \times S^2$? 这时自然得出 $S^2 \times S^2$ 遗传有零截曲率, 可以支持 Hopf 猜想. 我们给出如下论断.

命题 3.2 设浸入 $F: \Sigma \subset \mathbb{R}^4 \rightarrow S^5(2) \subset \mathbb{R}^6$ 定义为 $\forall x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \Sigma$,

$$z = f(x) = (\cos x_1 \cos x_2, \cos x_1 \sin x_2, \sin x_1, \cos x_3 \cos x_4, \cos x_3 \sin x_4, \sin x_3),$$

则当第二基本形式 A 满足一定条件 (如 $|\nabla A|^2 = 4|\nabla|A||^2$) 时, $F(\Sigma) = S^2 \times S^2$ 作为 $S^5(2)$ 的极小嵌入子流形具有零截曲率.

这里不给出详细的证明过程, 只是采用 Brendle^[6] 的技巧方法提出主要的技术成分. 为便于调控余维数 1 时单位法向量 $\nu(x)$, 我们仍然考虑极小嵌入

$$F: \Sigma \rightarrow S^5(1), \quad F(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(z_1, \dots, z_6), \quad z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 1 = z_4^2 + z_5^2 + z_6^2,$$

并假定 $\Sigma \subset \mathbb{R}^4$ 没有脐点, 保证 $|A| > 0$. 用此六元函数 $F(X)$ 、 Σ 的单位法向量场 ν 和第二基本形式 A (满足 $\langle A_\nu(X), Y \rangle = -\langle D_X \nu, Y \rangle$) 考虑八元函数

$$Z(x, y) = \frac{Q}{\sqrt{2}}|A(x)|(1 - \langle F(x), F(y) \rangle + \langle \nu(x), F(y) \rangle), \quad \forall x, y \in \Sigma, \quad (3.14)$$

其中 Q 表示数量

$$Q = \sup_{(x, y) \in \Sigma^\circ} \sqrt{2} \frac{\langle \nu(x), F(y) \rangle}{|A(x)|(1 - \langle F(x), F(y) \rangle)} > 1 \quad (3.15)$$

的情形 (必要时用 $-\nu(x)$ 替换 $\nu(x)$), 这里 $\Sigma^\circ = \Sigma \times \Sigma - \{(x, y) \in \Sigma \times \Sigma \mid x = y\}$.

由 (3.15) 和 (3.14) 知, $Z(x, y) \geq 0, \forall (x, y) \in \Sigma \times \Sigma$. 根据极值原理, 可以找到一个点 $(\bar{x}, \bar{y}) \in \Sigma^\circ$ 使得 $Z(\bar{x}, \bar{y}) = 0$. 既然 $Z(x, y)$ 在点 $(\bar{x}, \bar{y})$ 取到整体极小值, 则应该有

$$\nabla Z(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial Z}{\partial x_i}(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{\partial Z}{\partial y_i}(\bar{x}, \bar{y}) = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

和下列矩阵 $\text{Hess } Z(\bar{x}, \bar{y})$ 的非负定:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 Z}{\partial x_1^2}(\bar{x}, \bar{y}) & \cdots & \frac{\partial^2 Z}{\partial x_1 \partial x_4}(\bar{x}, \bar{y}) & \frac{\partial^2 Z}{\partial x_1 \partial y_1}(\bar{x}, \bar{y}) & \cdots & \frac{\partial^2 Z}{\partial x_1 \partial y_4}(\bar{x}, \bar{y}) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 Z}{\partial x_4 \partial x_1}(\bar{x}, \bar{y}) & \cdots & \frac{\partial^2 Z}{\partial x_4^2}(\bar{x}, \bar{y}) & \frac{\partial^2 Z}{\partial x_4 \partial y_1}(\bar{x}, \bar{y}) & \cdots & \frac{\partial^2 Z}{\partial x_4 \partial y_4}(\bar{x}, \bar{y}) \\ \frac{\partial^2 Z}{\partial y_1 \partial x_1}(\bar{x}, \bar{y}) & \cdots & \frac{\partial^2 Z}{\partial y_1 \partial x_4}(\bar{x}, \bar{y}) & \frac{\partial^2 Z}{\partial y_1^2}(\bar{x}, \bar{y}) & \cdots & \frac{\partial^2 Z}{\partial y_1 \partial y_4}(\bar{x}, \bar{y}) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 Z}{\partial y_4 \partial x_1}(\bar{x}, \bar{y}) & \cdots & \frac{\partial^2 Z}{\partial y_4 \partial x_4}(\bar{x}, \bar{y}) & \frac{\partial^2 Z}{\partial y_4 \partial y_1}(\bar{x}, \bar{y}) & \cdots & \frac{\partial^2 Z}{\partial y_4^2}(\bar{x}, \bar{y}) \end{pmatrix}.$$

于是, 根据八元函数 $Z(x, y)$ 的二阶 Taylor 展式, 得出

$$\sum_{i=1}^4 a_i^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial x_1^2}(\bar{x}, \bar{y}) + 2 \sum_{i,j=1}^4 a_i b_j \frac{\partial^2 Z}{\partial x_i \partial y_j}(\bar{x}, \bar{y}) + \sum_{i=1}^4 b_i^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial y_1^2}(\bar{x}, \bar{y}) \geq 0, \quad (3.16)$$

其中任意 $(a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4)$ 属于 $(\bar{x}, \bar{y})$ 的某个八维开邻域 $U((\bar{x}, \bar{y}))$ 内.

为了分析 $\text{Hess} Z(x, y)$, 需要用到 Σ 的 Codazzi 方程和经典的 Simons 等式 (参见文献 [19, 定理 5.3.1]) 得到的等式

$$\Delta_\Sigma(|A|) - \frac{|\nabla|A||^2}{|A|} + (|A|^2 - 4)|A| = 0. \quad (3.17)$$

这里可能需要附加一定的条件保证有 $|\nabla A|^2 = 4|\nabla|A||^2$, 便于之后构造 $\psi(x) = |\nabla A|^2/4$, 通过推证 $\nabla\psi(x) = 0$ 获得 $|A|$ 为常数.

类似于文献 [6] 的情形, 遇到的最大障碍是 (3.17) 出现了一个不利管控符号的梯度项, 影响极值原理的运行. 这是因为 (3.14) 进行二阶偏导后利用 (3.17), (3.16) 的左端会出现包含 $Q|A(x)|$ 的符号狂野项. 选择恰当的 a_i 和 b_i , $i = 1, 2, 3, 4$, 以及分别选择点 $\bar{x}$ 和 $\bar{y}$ 附近的局部坐标系 $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ 和 $\{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ 之后, 有

$$\sum_{i=1}^4 a_i^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial x_i^2}(\bar{x}, \bar{y}) \leq \sqrt{2}Q|A|. \quad (3.18)$$

而且还有

$$\sum_{i=1}^4 b_i^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial y_i^2}(\bar{x}, \bar{y}) = \sqrt{2}Q|A|. \quad (3.19)$$

更奇妙的是, 所有混合二阶偏导数之和满足

$$\sum_{i=1}^4 a_i b_j \frac{\partial^2 Z}{\partial x_i \partial y_j}(\bar{x}, \bar{y}) = -\sqrt{2}Q|A|. \quad (3.20)$$

这样由 (3.18)–(3.20) 作组合, 便可以吸收掉 $\sqrt{2}Q|A|$, 得到

$$\sum_{i=1}^4 a_i^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial x_i^2}(\bar{x}, \bar{y}) + 2 \sum_{i=1}^4 a_i b_j \frac{\partial^2 Z}{\partial x_i \partial y_j}(\bar{x}, \bar{y}) + \sum_{i=1}^4 b_i^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial y_i^2}(\bar{x}, \bar{y}) \leq 0. \quad (3.21)$$

最后, 利用退化椭圆方程的严格极值原理^[20] 作用于 $Z(x, y)$, 可以推导出 $|A(x)|$ 为常数, $x \in \Omega \setminus \{\bar{x} \in \Sigma \mid (\bar{x}, \bar{y}) \in \Sigma^\circ, Z(\bar{x}, \bar{y})\}$. 进一步利用文献 [20] 说明 Ω 是开集后, 可以得到 $F(\Sigma) = S^2 \times S^2 \subset S^5$.

本命题成立的关键是条件 $|\nabla A|^2 = 4|\nabla|A||^2$ 存在, 这可能需要附加一定的限制条件. 好在本文主要关注 $S^2 \times S^2$ 能否从四维超曲面浸入或嵌入球面 S^5 从而看到它蕴含有零截曲率的问题. 注意到文献 [19, 注记 5.3.1], 我们获知 $S^2 \times S^2$ 是可以自然地作为极小代数簇坐拥在 S^5 里, 并可以计算出 $|A|^2 = 4$. 这也可说明 $S^2 \times S^2$ 嵌入高维数球面具有零截曲率的存在.

4 Killing 向量场

本节考虑具有正截曲率的度量和 Killing 向量场及它们的关系.

定义 4.1 (Killing 向量场^[13]) 设 U 是 m 维 Riemann 流形 M 的一个非空开子集, X 为 U 上的光滑切向量场, $\varphi(t, p)$ 是由 X 确定的局部单参数变换群, 即对于任意的 $p \in M$, $\varphi(t, p)$ 是初值问题

$$\frac{\partial \varphi(t, p)}{\partial t} = X|_{\varphi(t, p)}, \quad \varphi(0, p) = p$$

的解, 其中光滑映射 $\varphi: (-\varepsilon, \varepsilon) \times M \rightarrow M$, $(t, p) \mapsto \varphi(t, p)$ 满足 (1) $\varphi(0, p) = p$, 即 $\text{Id} = \varphi_0: M \rightarrow M$; (2) $\varphi(t + s, p) = \varphi(t, p) \cdot \varphi(s, p)$, $\varphi_t(p) \cdot \varphi_{-t} = \text{Id}(p)$. 如果对于任意的 t , 由 $p \mapsto \varphi_t(p)$ 给出的映射 $\varphi_t: M \rightarrow M$ 都是等距的, 则称 X 是 M 上的一个 Killing 向量场 (或无穷小等距).

由定义知, Riemann 流形上的 Killing 向量场是指由它生成的无穷小变换均为等距变换, 有下面的判定定理^[13].

定理 4.1 设 X 为 M 上的光滑切向量场, 则 X 是 M 上的一个 Killing 向量场的充分必要条件是它满足 Killing 方程

$$\langle D_Y X, Z \rangle + \langle D_Z X, Y \rangle = 0, \quad \forall Y, Z \in (M). \quad (4.1)$$

定理 4.2 设 M 和 N 是 Riemann 流形, $f: M \rightarrow N$ 为等距, X 为 M 上的光滑切向量场, 则 f_*X 是 N 上的一个 Killing 向量场当且仅当 X 是 M 上的 Killing 向量场.

Riemann 流形上 Killing 向量场 X 的奇异点 (即存在一点 $q \in M$, 使得 $X(q) = 0$) 与 X 的某个函数的临界点有关, 为此, 回顾这个函数的临界点概念.

定义 4.2 设 X 是 Riemann 流形 (M, g) 上的 Killing 向量场, 对于函数

$$f: M \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(p) = |X_p|^2 = g(X_p, X_p), \quad \forall p \in M, \quad X_p = X(p) \in T_p M,$$

如果 $p_0 \in M$ 满足 $df|_{p_0} = 0$, 则称 p_0 为 f 的一个临界点.

Riemann 流形的正截曲率度量与 Killing 向量场的奇异点有如下关系 (参见文献 [13, 第 260 页]).

定理 4.3 设 (M, g) 是一个偶数维的紧致 Riemann 流形, 若 M 具有正的截面曲率, 则在 M 上的每一个 Killing 向量场都有奇异点.

证明 (1) 设 M 的 Riemann 度量 $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ 诱导的 Levi-Civita 联络为 D . 对于 M 上的任意一个 Killing 向量场, 作光滑函数

$$f: M \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(p) = \|X_p\|^2, \quad \forall p \in M.$$

由于 M 紧致, 所以, 连续函数 f 在 M 存在有最大值和最小值, 设 $f(p_0) = \min_{p \in M} f(p)$, 则

$$df(p_0) = 0, \quad d^2 f(p_0) > 0. \quad (4.2)$$

由此知 p_0 为 f 的一个临界点.

(2) 不妨设 p_0 不是 Killing 向量场的奇异点, 即 $X_{p_0} \neq 0$. 记 X_{p_0} 的正交补空间为 $X_{p_0}^\perp$. 作映射

$$L_X: T_{p_0} M \rightarrow T_{p_0} M, \quad L_X(Y_{p_0}) = D_Y X, \quad \forall Y \in \mathcal{X}(M). \quad (4.3)$$

由于 p_0 为 f 的一个临界点, X 为 Killing 向量场, 所以有

$$\langle L_X(Y), X \rangle(p_0) = 0, \quad \langle D_X X, Y \rangle(p_0) = 0. \quad (4.4)$$

这是由于 $\langle D_Y X, X \rangle(p_0) = \frac{1}{2} Y \langle X, X \rangle(p_0) = \frac{1}{2} Y(f)(p_0) = \frac{1}{2} df_{p_0}(Y_{p_0})$, 由 (4.2) 的第一式得到 (4.4) 的第一个等式. 再结合 Killing 方程 (4.1), 取 $Z = X$, 便获得 (4.4) 的第二个等式.

(4.4) 的第一个等式意味着 $X_{p_0}^\perp = T_{p_0} M \setminus \{X_{p_0}\}$. 由 $\dim(M)$ 为偶数知, $\dim(X_{p_0}^\perp) = \dim(T_{p_0} M) - \dim(X_{p_0}) = \dim(M) - 1$ 为奇数.

(4) 断言:

$$\|L_X(Y)\|_{p_0}^2 = \frac{1}{2} Y_{p_0} Y \|X\|^2 - \langle R(X, Y)X, Y \rangle(p_0), \quad \forall Y \in \mathcal{X}(M). \quad (4.5)$$

事实上, 由于 $Y \langle X, X \rangle = 2 \langle D_Y X, X \rangle$, 由 Killing 方程 (4.1) 得到 $Y \|X\|^2 = -2 \langle Y, D_X X \rangle$. 从而,

$$\frac{1}{2} Y_{p_0} Y \|X\|^2 = -Y \langle Y, D_X X \rangle(p_0) = -\langle D_Y Y, D_X X \rangle(p_0) - \langle Y, D_Y D_X X \rangle(p_0). \quad (4.6)$$

由 (4.2) 的第一式, 有 $\langle D_Y Y, D_X X \rangle(p_0) = 0$. 故 (4.6) 简化为

$$\frac{1}{2} Y_{p_0} Y \|X\|^2 = -\langle Y, D_Y D_X X \rangle(p_0). \quad (4.7)$$

另一方面,

$$\begin{aligned} \langle D_X D_Y X, Y \rangle(p_0) &= X \langle D_Y X, Y \rangle(p_0) - \langle D_Y X, D_X Y \rangle(p_0) \stackrel{(4.2)}{=} -\langle D_Y X, D_X Y \rangle(p_0), \\ \langle D_{[X,Y]} X, Y \rangle(p_0) &\stackrel{(4.1)}{=} -\langle [X, Y], D_Y X \rangle = -\langle D_X Y - D_Y X, D_Y X \rangle = -\langle D_X Y, D_Y X \rangle + \|D_Y X\|^2, \end{aligned}$$

所以,

$$\begin{aligned} -\langle R(X, Y)X, Y \rangle(p_0) &= -\langle D_X D_Y X - D_Y D_X X - D_{[X,Y]} X, Y \rangle \\ &= -\langle D_X D_Y X, Y \rangle(p_0) + \langle D_Y D_X X, Y \rangle(p_0) + \langle D_{[X,Y]} X, Y \rangle(p_0) \\ &= \langle D_Y D_X X, Y \rangle(p_0) + \|D_Y X\|^2(p_0). \end{aligned} \quad (4.8)$$

将 (4.7) 和 (4.8) 相加便得出 (4.5).

(5) 根据截曲率的定义 (参见文献 [13, 第 239 页]) $K(X, Y) = -\frac{\langle R(X, Y)X, Y \rangle}{\|X \wedge Y\|^2} = \frac{\langle R(X, Y)Y, X \rangle}{\|X \wedge Y\|^2}$ 可知, $K(X, Y) > 0$ 相当于 $-\langle R(X, Y)X, Y \rangle > 0$. 而由 (4.4) 知, $Y_{p_0}(Y(f)) = d^2 f_{p_0}(Y, Y) > 0$, 故由 (4.5) 得出, 当 $Y \neq 0$ 时 $L_X(Y) \neq 0$. 这说明线性变换 L_X 是单射, 从而, L_X 是同构, 进而, $\det(L_X) \neq 0$.

(6) 根据 Killing 方程 (4.1), 得出 L_X 是一个反对称的线性变换 $\langle L_X(Y), Z \rangle = -\langle Y, L_X(Z) \rangle$. 从而, $\det(L_X) = (-1)^{\dim(X_{p_0}^\perp)} \det(L_X^t)$. 而由于 $\det(L_X^t) = \det(L_X) \neq 0$, 所以, $\dim(X_{p_0}^\perp)$ 必为偶数, 这与第二步的结论 “ $\dim(X_{p_0}^\perp)$ 是奇数” 产生矛盾.

综上所述, 有 $X_{p_0} = 0$, 即在 M 上的每一个 Killing 向量场都有奇异点. $\square$

按照定理 4.3 的逆否命题和 Hopf 猜想, 我们得到以下命题.

命题 4.1 若四维紧致 Riemann 流形 $S^2 \times S^2$ 的每一个 Killing 向量场都没有奇异点, 则 $S^2 \times S^2$ 不存在正截曲率的度量.

命题 4.1 的证明关键在于, 如何论证 $S^2 \times S^2$ 的每一个没有奇异点的 Killing 向量场 X , 由 X 确定的单参数变换群

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi(t, (p, q))}{\partial t} = X|_{\varphi(t, (p, q))}, & \forall (p, q) \in S^2 \times S^2, \\ \varphi(0, (p, q)) = (p, q), \end{cases} \quad (4.9)$$

其中每个 $\varphi_t: S^2 \times S^2 \rightarrow S^2 \times S^2$ ($t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$) 都是等距, (4.9) 是否有解? 这是很深刻的问题.

Hsiang 和 Kleiner^[8] 先证明了 “如果一个具有正截面曲率的四维闭流形 M 容许有非零 Killing 向量场, 那么 M 必与 S^4 或 $\mathbb{C}P^2$ 同胚”, 从而推出结论 “带有非平凡 Killing 向量场的不容许有一个正截曲率的 Riemann 度量”. 至于去掉附加限制条件 “有非平凡 Killing 向量场” 的情形, 还不知道如何证明. Li 和 Liu^[9] 通过引进 Killing 向量场的几何热流, 试图寻找一个热流 X_t 一致收敛于相对给定度量 g 的非零 Killing 向量场 X , 其中 g 是光滑闭 Riemann 流形的一个具有正截曲率的度量, 进一步结合文献 [8] 的结论, 获得 Hopf 猜想的论证, 但此路也碰到瓶颈.

致谢 本文主要是第一作者在 2018 年访学美国加州大学期间完成的. 在此, 第一作者非常感谢加州大学洛杉矶分校 (UCLA) 数学系提供一流的学习科研环境, 以及访问导师刘克峰教授给予良好的科研训练并慷慨地提供一些好的想法. 同时也感谢哥伦比亚大学数学系教授 Simons Brendle 对嵌入球面的高维情形给予的指点, 让作者能洞悉他在文献 [6] 的精微思想并敢于去尝试新的情形. 在此也对审稿人提出好的建议表示感谢.

参考文献

- 1 Hamilton R S. Three-manifolds with positive Ricci curvature. *J Differential Geom*, 1982, 17: 255–306
- 2 Leysen J, Verstraelen L. On warped products and a conjecture of H. Hopf. *Soochow J Math*, 1987, 13: 175–178
- 3 Perdoma O. Metrics on products of surfaces with non-positive sectional curvature. *Israel J Math*, 2006, 156: 65–71
- 4 Whitney H. Differentiable manifolds. *Ann of Math (2)*, 1936, 37: 645–680
- 5 Nash J. The imbedding problem for Riemannian manifolds. *Ann of Math (2)*, 1956, 63: 20–63
- 6 Brendle S. Embedded minimal tori in S^3 and the Lawson conjecture. *Acta Math*, 2013, 211: 177–190
- 7 Hsiang W Y. Remarks on closed minimal submanifolds in the standard Riemannian m -sphere. *J Differential Geom*, 1967, 1: 257–267
- 8 Hsiang W Y, Kleiner B. On the topology of positively curved 4-manifolds with symmetry. *J Differential Geom*, 1989, 29: 615–621
- 9 Li Y, Liu K F. A geometric heat flow for vector fields. *Sci China Math*, 2015, 58: 673–688
- 10 王幼宁, 刘继志. 微分几何讲义. 北京: 北京师范大学出版社, 2003
- 11 张筑生. 微分拓扑新讲. 北京: 北京大学出版社, 2002
- 12 陈维桓. 微分流形初步 (第二版). 北京: 高等教育出版社, 2001
- 13 陈维桓, 李兴校. 黎曼几何引论 (上册). 北京: 北京大学出版社, 1998
- 14 Ruggiero R O. Weak stability of the geodesic flow and Preissmann's theorem. *Ergodic Theory Dynam Systems*, 2000, 20: 1231–1251
- 15 Bott R. Lectures on Morse theory, old and new. *Bull Amer Math Soc (NS)*, 1982, 7: 331–358
- 16 Milnor J. 莫尔斯理论. 米尔诺, 江嘉禾, 译. 北京: 科学出版社, 1998
- 17 Do Carmo M. *Riemannian Geometry*. Basel: Birkhäuser, 1998
- 18 Lawson H B Jr. Local rigidity theorems for minimal hypersurfaces. *Ann of Math (2)*, 1969, 89: 187–197
- 19 Simons J. Minimal varieties in Riemannian manifolds. *Ann of Math (2)*, 1968, 88: 62–105
- 20 Brendle S. *Ricci Flow and the Sphere Theorem*. Graduate Studies in Mathematics, vol. 111. Providence: Amer Math Soc, 2010

Embedding pull-back metrics and Killing vector fields on a product manifold

Weijun Lu, Hao Huang & Ruofei Lu

Abstract How to endow the general Riemannian metrics on the 4-dimensional product manifold $M^4 = S^2 \times S^2$ and whether the sign of the corresponding sectional curvature keeps unchanged are rather interesting problems in geometry and topology, which have drawn many geometers' attention to explore. In this paper, we discuss the sectional curvature on M from the following three aspects: (1) pull-back metrics embedded $\mathbb{R}^6$ to $\mathbb{R}^9$; (2) Clifford torus embedded minimal hypersurface $F: \Sigma \subset \mathbb{R}^4 \rightarrow S^5(2) \subset \mathbb{R}^6$; (3) the relationship between metrics with positive sectional curvature and singular points of Killing vector fields on even-dimensional compact Riemannian manifolds. Under these cases, we conclude that M^4 does not avoid the occurrence of null sectional curvature, which supports the Hopf conjecture.

Keywords four-dimensional product manifold, embedding pull-back metric, Hopf conjecture, sectional curvature, Killing vector field

MSC(2010) 58B20, 58D17, 53C42

doi: 10.1360/N012018-00302