一类具对数非线性项的薄膜方程

献给伍卓群教授 90 华诞

韩玉柱, 高文杰*, 石小葳

吉林大学数学学院, 长春 130012

E-mail: yzhan@jlu.edu.cn, wjgao@jlu.edu.cn, wei-crystal@yeah.net

收稿日期: 2018-02-05; 接受日期: 2018-06-05; 网络出版日期: 2018-09-16; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11401252) 和吉林省青年基金 (批准号: 20160520103JH) 资助项目

摘要 本文主要研究一类具对数非线性项的薄膜方程初边值问题. 首先利用 Galerkin 逼近得到了弱解的局部存在性; 然后借助修正的对数型 Sobolev 不等式和位势井方法, 证明了一定条件下弱解的整体存在性和无穷远处爆破性及整体解的衰减估计.

关键词 薄膜方程 对数非线性项 位势井 整体存在 无穷远爆破

MSC (2010) 主题分类 35K25, 35K58

1 引言

本文研究一类具对数非线性项的如下四阶抛物型方程初边值问题:

$$\begin{cases} u_t + \Delta^2 u = u \ln |u|, & (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, & (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (1.1)$$

其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$) 是具光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界区域, ν 是 $\partial\Omega$ 上的单位外法向量, $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$.

众所周知, 许多物理过程, 如相变、薄膜增长等过程, 都可以用如下形式的四阶抛物型方程来描述 (参见文献 [1, 2]):

$$u_t + \Delta^2 u - \nabla \cdot (f(\nabla u)) = g(x, t, u). \quad (1.2)$$

近年来, 对方程 (1.2) 的不同初边值问题进行了广泛研究. 例如, 当 $f(s) = s^{p-2}s$ 时, King 等 [3] 在适当的函数空间中证明了 (1.2) 在适当的初边值条件下弱解的局部存在性、唯一性和正则性. 当

英文引用格式: Han Y Z, Gao W J, Shi X W. A class of thin-film equations with logarithmic nonlinearity (in Chinese). Sci Sin Math, 2019, 49: 1765–1778, doi: 10.1360/N012018-00024

$g(x, t, u) \equiv 0$ 时, Liu^[4,5] 就一维和二维情形研究了 (1.2) 的古典解. 基于 Campanato 空间和一致 Schauder 型估计, 他证明了古典解的整体存在性.

另一方面, 当非线性项 $g(x, t, u)$ 关于 u 满足超线性增长条件时, 方程 (1.2) 的解可能在有限时刻发生爆破. 例如, 近年来, 人们考虑了如下一维薄膜方程初边值问题:

$$\begin{cases} u_t + u_{xxxx} - (|u_x|^{p-2}u_x)_x = |u|^{q-1}u - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} |u|^{q-1}u dx, & (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ u_x = u_{xxx} = 0, & (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega \end{cases} \quad (1.3)$$

解的全局存在性、有限时间爆破性和长时间行为, 其中 $\Omega = (0, a)$ 是开区间, $p > 1$, $q > \max\{1, p-1\}$, $u_0 \in H^2(\Omega)$ 满足 $\int_{\Omega} u_0(x) dx = 0$. 利用由 Payne 和 Sattinger^[6] 及 Sattinger^[7] 于 20 世纪 70 年代首次提出、后经 Liu^[8] 及 Xu 和 Su^[9] 改进的位势井方法, Qu 和 Zhou^[10] 就初始能量为次临界和临界的情形给出了当 (1.3) 中不含 $-(|u_x|^{p-2}u_x)_x$ 时该问题解整体存在和有限时刻爆破的一个阈值结果. Zhou^[11] 利用能量方法证明了当初始能量为正时问题 (1.3) 的解在有限时刻爆破, 他同时得到了爆破时间的上界估计. 之后, Li 等^[12] 将文献 [10] 的结果推广到问题 (1.3) 并给出了爆破解的数值模拟. 随后, Dong 和 Zhou^[13] 不仅给出了问题 (1.3) 在次临界初始能量时爆破时间的上、下界估计, 而且给出了超临界初始能量时解整体存在或有限时刻爆破的一些充分条件.

对于空间维数 $n \geq 1$ 的情形, Xu 等^[14] 考虑了如下形式的初边值问题:

$$\begin{cases} u_t - q\Delta u + \Delta^2 u = g(u), & (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, & (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (1.4)$$

其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$) 是具光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界区域, ν 是 $\partial\Omega$ 上的单位外法向量, g 满足适当的结构性条件. 借助修正的位势井方法, 他们证明了当初值位于位势井内时, 问题 (1.4) 的解整体存在; 而当初值落在位势井外时, 解会在有限时刻爆破. 此外, 他们还利用迭代技术证明了问题 (1.4) 在 $H^k(\Omega)$ ($k \geq 0$) 中有整体吸引子.

受上述文献启发, 一个自然的问题是, 如果将问题 (1.4) 中的非线性项 $g(u)$ 替换成其他形式, 如对数非线性项 $u \ln |u|$, 其解的性质会有哪些变化? 值得指出的是, 具对数非线性项的发展型方程解的整体存在和爆破性质已成为近年来研究的热点问题. 有兴趣的读者可以参见文献 [15–17]. 然而, 据我们所知, 对具对数非线性项的四阶方程解的整体存在和爆破性质的研究还没有任何结果, 这正是本文的主要研究方向. 为了简单起见, 我们仅考虑问题 (1.4) 当 $q = 0$ 且 $g(u) = u \ln |u|$ 的情形, 即问题 (1.1). 本文的第一个目的是就次临界初始能量情形给出解整体存在的充分性条件及整体解的衰减速率估计; 第二个目的是研究解的爆破性质. 最近, Han^[18] 证明了当非线性项为 $|u|^{q-1}u$ ($1 < q < \frac{n+4}{n-4}$) 时问题 (1.1) 存在有限时刻爆破解. 然而, 对于问题 (1.1), 我们将证明其解仅在无穷远处爆破. 这表明多项式型非线性项对于问题 (1.1) 存在有限时刻爆破解是至关重要的.

需要指出的是, 对数非线性项的存在会给位势井方法的应用带来一定的困难. 为了处理问题 (1.1) 中的对数项 $u \ln |u|$, 我们需要一个修正的对数型 Sobolev 不等式, 这个不等式将在第 2 节中给出.

本文结构如下: 第 2 节给出一些必要的引理并介绍与对数非线性项 $u \ln |u|$ 相关的位势井及其性质; 第 3 节证明问题 (1.1) 弱解的局部和整体存在性及整体解的衰减估计; 最后, 第 4 节证明解的无穷远处爆破性质.

2 预备知识

2.1 记号和预备引理

我们首先引入一些本文中使用的记号. 令 $1 \leq p \leq \infty$, 对任意 $u \in L^p(\Omega)$, $\|u\|_p$ 表示 u 的 $L^p(\Omega)$ 范数, 以 $(\cdot, \cdot)$ 表示 $L^2(\Omega)$ 空间中的内积. 记 $X = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, $X_0 = X \setminus \{0\}$. 对空间 X 赋以范数 $\|u\|_X = \|\Delta u\|_2$. 由 Poincaré 不等式和下面的 (2.4) 易知这个范数与 X 中标准的范数等价.

为了处理对数非线性项 $u \ln |u|$, 我们需要以下两个引理. 引理 2.1 可直接验证; 引理 2.2 是修正的对数型 Sobolev 不等式.

引理 2.1 设 σ 是任意给定正数, 则如下不等式成立:

$$\ln s \leq \frac{e^{-1}}{\sigma} s^\sigma, \quad s \in [1, +\infty). \quad (2.1)$$

引理 2.2 假设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界光滑区域, 则对任意 $u \in X$ 和任意 $a > 0$, 有

$$2 \int_{\Omega} |u(x)|^2 \ln \left(\frac{|u(x)|}{\|u\|_{L^2(\Omega)}} \right) dx + n(1 + \ln a) \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{a^2}{\pi \lambda_1} \int_{\Omega} |\Delta u(x)|^2 dx, \quad (2.2)$$

其中 $\lambda_1 > 0$ 是 $-\Delta$ 在 Ω 上满足齐次 Dirichlet 边界条件的第一特征值.

证明 由文献 [19] 知, 对任意 $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$ 和 $a > 0$, 有

$$2 \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^2 \ln \left(\frac{|u(x)|}{\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}} \right) dx + n(1 + \ln a) \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \leq \frac{a^2}{\pi} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^2 dx.$$

从而, 对任意 $u \in H_0^1(\Omega)$, 补充定义 $u(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega$, 则 $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$, 且下述不等式成立:

$$2 \int_{\Omega} |u(x)|^2 \ln \left(\frac{|u(x)|}{\|u\|_{L^2(\Omega)}} \right) dx + n(1 + \ln a) \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{a^2}{\pi} \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx. \quad (2.3)$$

于是, 对任意 $u \in X$, 由分部积分公式和带 ε 的 Cauchy 不等式得

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx &= \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma - \int_{\Omega} u \Delta u dx = - \int_{\Omega} u \Delta u dx \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega} |u|^2 dx + \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2\lambda_1} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx. \end{aligned} \quad (2.4)$$

令 $\varepsilon = \lambda_1$, 则得

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \leq \frac{1}{\lambda_1} \int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx.$$

结合 (2.3) 可知 (2.2) 成立. 证毕. $\square$

本文考虑问题 (1.1) 的弱解. 定义如下.

定义 2.1 (弱解) 令 $T > 0$. 称 $u = u(x, t) \in L^\infty(0, T; X)$ 是问题 (1.1) 在 $\Omega \times [0, T]$ 上的弱解, 如果 $u_t \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$, $u(x, 0) = u_0$ 且满足对任意 $\phi \in X$, 有

$$(u_t, \phi) + (\Delta u, \Delta \phi) = (u \ln |u|, \phi), \quad \text{a.e. } t \in (0, T). \quad (2.5)$$

如果对任意 $T > 0$, $u(x, t)$ 是问题 (1.1) 在 $\Omega \times [0, T]$ 上的弱解, 则称之为问题 (1.1) 的整体 (弱) 解.

在本小节的最后, 我们给出一个特殊形式的 Gagliardo-Nirenberg 内插不等式和一个基本的积分不等式, 后者将在证明整体解的衰减估计中起重要作用.

引理 2.3 ^[20] 对任意 $u \in X$, 下述不等式成立:

$$\|u\|_{2+\sigma}^{2+\sigma} \leq C \|\Delta u\|_2^{\alpha(2+\sigma)} \|u\|_2^{(1-\alpha)(2+\sigma)}, \quad (2.6)$$

其中当 $n \leq 4$ 时, $\sigma > 0$, 当 $n > 4$ 时, $0 < \sigma < \frac{8}{n-4}$; $\alpha \in (0, 1)$ 满足 $\frac{2\alpha}{n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2+\sigma}$; $C > 0$ 是只依赖于 n 和 σ 的常数.

引理 2.4 ^[15] 假设 $y(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ 是一个单调不减函数, 且存在常数 $A > 0$ 使得

$$\int_s^{+\infty} y(t) dt \leq Ay(s), \quad 0 \leq s < +\infty,$$

则 $y(t) \leq y(0)e^{1-t/A}$, $t \geq 0$.

2.2 位势井

由于本文主要是采用位势井方法, 在本小节, 我们定义与之相关的泛函和集合, 并研究其基本性质. 对任意 $u \in X$, 令

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{1}{2} \|\Delta u\|_2^2 - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u|^2 \ln |u| dx + \frac{1}{4} \int_{\Omega} |u|^2 dx, \\ I(u) &= \|\Delta u\|_2^2 - \int_{\Omega} |u|^2 \ln |u| dx. \end{aligned}$$

定义 Nehari 流形

$$\mathcal{N} = \{u \in X_0 \mid I(u) = 0\}.$$

由引理 2.1–2.3 和 Lebesgue 控制收敛定理可知泛函 $J(u)$ 和 $I(u)$ 在 X 上都是连续的.

下面几个引理刻画了泛函 $J(u)$ 、 $I(u)$ 及 Nehari 流形的基本性质, 其中引理 2.5 的证明是标准的, 感兴趣的读者可以参见文献 [15, 16].

引理 2.5 设 $u \in X_0$, 则

- (i) $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} J(\lambda u) = 0$, $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} J(\lambda u) = -\infty$.
- (ii) 存在唯一 $\lambda^* = \lambda^*(u) > 0$ 使得 $\frac{d}{d\lambda} J(\lambda u)|_{\lambda=\lambda^*} = 0$, $J(\lambda u)$ 在 $0 < \lambda \leq \lambda^*$ 时单调递增, 在 $\lambda^* \leq \lambda < +\infty$ 时单调递减, 在 $\lambda = \lambda^*$ 处取得最大值.
- (iii) 当 $0 < \lambda < \lambda^*$ 时, $I(\lambda u) > 0$; 当 $\lambda^* < \lambda < +\infty$ 时, $I(\lambda u) < 0$; $I(\lambda^* u) = 0$.

注 2.1 引理 2.5(iii) 表明 $\mathcal{N}$ 非空.

引理 2.6 令 $u \in X_0$ 并记 $R := (2\pi\lambda_1)^{n/4} e^{n/2}$, 则下述结论成立:

- (i) 如果 $0 < \|u\|_2 < R$, 那么 $I(u) > 0$;
- (ii) 如果 $I(u) < 0$, 那么 $\|u\|_2 > R$;
- (iii) 如果 $I(u) = 0$, 那么 $\|u\|_2 \geq R$.

证明 由对数型 Sobolev 不等式 (2.2) 可得

$$I(u) = \|\Delta u\|_2^2 - \int_{\Omega} |u|^2 \ln |u| dx$$

$$\begin{aligned}
&= \|\Delta u\|_2^2 - \int_{\Omega} |u|^2 \left(\ln \frac{|u|}{\|u\|_2} + \ln \|u\|_2 \right) dx \\
&\geq \left(1 - \frac{a^2}{2\pi\lambda_1} \right) \|\Delta u\|_2^2 + \left(\frac{n(1+\ln a)}{2} - \ln \|u\|_2 \right) \|u\|_2^2.
\end{aligned}$$

取 $a = \sqrt{2\pi\lambda_1}$, 则由上式可知,

$$I(u) \geq \left(\frac{n(2 + \ln 2\pi\lambda_1)}{4} - \ln \|u\|_2 \right) \|u\|_2^2. \quad (2.7)$$

由 (2.7) 可直接验证 (i)–(iii) 成立. 证毕. $\square$

引理 2.7 泛函 $J(u)$ 在 $\mathcal{N}$ 上是强制的.

证明 由 $J(u)$ 、 $I(u)$ 和 $\mathcal{N}$ 的定义可知, 对任意 $u \in \mathcal{N}$, 有

$$J(u) = \frac{1}{4} \|u\|_2^2. \quad (2.8)$$

另一方面, 由引理 2.1 得

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} |u|^2 \ln |u| dx &= \int_{\Omega_1} |u|^2 \ln |u| dx + \int_{\Omega_2} |u|^2 \ln |u| dx \\
&\leq C \int_{\Omega_2} |u|^{2+\sigma} dx \leq C \|u\|_{2+\sigma}^{2+\sigma},
\end{aligned} \quad (2.9)$$

其中 $\sigma > 0$,

$$\Omega_1 = \{x \in \Omega : |u(x)| \leq 1\}, \quad \Omega_2 = \{x \in \Omega : |u(x)| > 1\}.$$

对 (2.9) 右端应用 Gagliardo-Nirenberg 插值不等式 (2.6) 得

$$\int_{\Omega} |u|^2 \ln |u| dx \leq C \|\Delta u\|_2^{\alpha(2+\sigma)} \|u\|_2^{(1-\alpha)(2+\sigma)},$$

其中

$$\alpha = \frac{n}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2+\sigma} \right).$$

令 $0 < \sigma < \frac{8}{n}$, 则 $\alpha(2+\sigma) = \frac{n\sigma}{4} < 2$. 注意到 $u \in \mathcal{N}$, 对上式右端应用带 ε 的 Young 不等式, 得

$$\|\Delta u\|_2^2 = \int_{\Omega} |u|^2 \ln |u| dx \leq \varepsilon \|\Delta u\|_2^2 + C(\varepsilon) \|u\|_2^{2\beta},$$

其中

$$\varepsilon > 0, \quad \beta = \frac{(1-\alpha)(2+\sigma)}{2-\alpha(2+\sigma)} > 1.$$

取 $0 < \varepsilon < 1$, 则知存在常数 $\tilde{C} > 0$ 使得

$$J(u) = \frac{1}{4} \|u\|_2^2 \geq \tilde{C} (\|\Delta u\|_2^2)^{1/\beta},$$

即 $J(u)$ 在 $\mathcal{N}$ 上是强制的. 证毕. $\square$

定义

$$W_1 = \{u \in X : J(u) < d\}, \quad W_2 = \{u \in X : J(u) = d\}, \quad W = W_1 \cup W_2,$$

$$\begin{aligned} W_1^+ &= \{u \in W_1 : I(u) > 0\}, & W_2^+ &= \{u \in W_2 : I(u) > 0\}, & W^+ &= W_1^+ \cup W_2^+, \\ W_1^- &= \{u \in W_1 : I(u) < 0\}, & W_2^- &= \{u \in W_2 : I(u) < 0\}, & W^- &= W_1^- \cup W_2^-, \end{aligned}$$

其中

$$d = \inf_{u \in X_0} \sup_{\lambda > 0} J(\lambda u) = \inf_{u \in \mathcal{N}} J(u)$$

是位势井的井深. 下面的引理表明井深 $d > 0$.

引理 2.8 井深 $d > 0$. 更确切地有

$$d \geq M := \frac{(2\pi\lambda_1)^{n/2}e^n}{4} = \frac{R^2}{4}.$$

证明 由引理 2.5 知, 对任意 $u \in X_0$, 有 $I(\lambda^*u) = 0$. 结合引理 2.6(iii) 得 $\|\lambda^*u\|_2 \geq (2\pi\lambda_1)^{n/4}e^{n/2}$. 注意到 (2.8), 得

$$\sup_{\lambda > 0} J(\lambda u) \geq J(\lambda^*u) = \frac{\|\lambda^*u\|_2^2}{4} \geq \frac{(2\pi\lambda_1)^{n/2}e^n}{4} = M.$$

对上式左端关于 $u \in X_0$ 取下确界可知, $d \geq M$. 证毕. $\square$

3 局部解和衰减的整体解

本节首先建立问题 (1.1) 弱解的局部存在性, 然后证明当初值落在 W^+ 时问题 (1.1) 衰减整体解的存在性及其衰减估计.

定理 3.1 (局部存在性) 假设 $u_0 \in X$, 则存在常数 $T_0 > 0$ 使得问题 (1.1) 在 $\Omega \times [0, T_0)$ 中有一个弱解 $u(x, t)$. 此外, $u(x, t)$ 满足如下的能量恒等式:

$$\int_0^t \|u_\tau(\tau)\|_2^2 d\tau + J(u(t)) = J(u_0), \quad t \in [0, T_0]. \quad (\text{E})$$

证明 我们利用 Galerkin 逼近结合先验估计来证明弱解的局部存在性. 设 $\{\phi_j(x)\}_{j=1}^\infty$ 是 X 中的标准正交基底, 并定义 X 的有限维子空间

$$V_m = \text{span}\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m\}.$$

取 $u_{0m} \in V_m$, 使得当 $m \rightarrow +\infty$ 时,

$$u_{0m} = \sum_{j=1}^m b_j^m \phi_j(x) \rightarrow u_0 \text{ 在 } X \text{ 中强收敛}. \quad (3.1)$$

构造问题 (1.1) 的逼近解

$$u_m(x, t) = \sum_{j=1}^m a_j^m(t) \phi_j(x), \quad m = 1, 2, \dots,$$

其系数 $a_j^m(t)$ ($1 \leq j \leq m$) 满足常微分方程组

$$(u_{mt}, \phi_i) + (\Delta u_m, \Delta \phi_i) = (u_m \ln |u_m|, \phi_i), \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (3.2)$$

和初始条件

$$a_j^m(0) = b_j^m, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (3.3)$$

根据 Peano 定理可知 (3.2) 和 (3.3) 存在局部解.

将 (3.2) 的两端同时乘以 $a_i^m(t)$ 并对 i 从 1 到 m 求和得

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_m(t)\|_2^2 + \|\Delta u_m(t)\|_2^2 = \int_{\Omega} |u_m(t)|^2 \ln |u_m(t)| dx. \quad (3.4)$$

对 (3.4) 的右端项应用类似于证明引理 2.7 的讨论可得

$$\int_{\Omega} |u_m(t)|^2 \ln |u_m(t)| dx \leq \varepsilon \|\Delta u_m(t)\|_2^2 + C(\varepsilon) \|u_m(t)\|_2^{2\beta}, \quad (3.5)$$

其中

$$\varepsilon > 0, \quad 1 < \beta = \frac{(1-\alpha)(2+\sigma)}{2-\alpha(2+\sigma)}, \quad 0 < \sigma < \frac{8}{n}, \quad \alpha = \frac{n}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2+\sigma} \right).$$

结合 (3.4) 和 (3.5) 并利用 Gronwall-Bellman-Bihari 型不等式可知, 存在常数 $T_0 > 0$ 使得对所有的 $t \in [0, T_0]$, 都有

$$\|u_m(t)\|_2^2 \leq C_{T_0}, \quad t \in [0, T_0]. \quad (3.6)$$

将 (3.2) 的两端同时乘以 $\frac{d}{dt} a_i^m(t)$, 对 i 从 1 到 m 求和并关于时间变量在 $[0, t]$ 上积分, 得

$$\int_0^t \|u_{m\tau}(\tau)\|_2^2 d\tau + J(u_m(t)) = J(u_{0m}). \quad (3.7)$$

由 u_{0m} 在 X 中强收敛于 u_0 及 $J(u)$ 在 X 上的连续性知, 存在常数 $C > 0$ 使得

$$J(u_{0m}) \leq C, \quad \forall m \geq 1. \quad (3.8)$$

另一方面, 根据 (3.5) 和 (3.6) 知,

$$J(u_m(t)) \geq \frac{1-\varepsilon}{2} \|\Delta u_m(t)\|_2^2 - C(T_0, \varepsilon), \quad (3.9)$$

其中 $C(T_0, \varepsilon)$ 是只依赖于 T_0 和 ε 的正常数.

由 (3.7)–(3.9) 可得如下估计:

$$\|u_m\|_{L^\infty(0, T_0; X)} \leq C, \quad (3.10)$$

$$\|u_{mt}\|_{L^2(0, T_0; L^2(\Omega))} \leq C. \quad (3.11)$$

结合先验估计 (3.10)、(3.11) 和 Aubin-Lions 紧致性定理可知, 存在函数 u 和 $\{u_m\}_{m=1}^\infty$ 的子序列 (不妨仍记为其本身) 使得

$$u_m \rightarrow u, \quad \text{在 } L^\infty(0, T_0; X) \text{ 中弱}^* \text{ 收敛}, \quad (3.12)$$

$$u_{mt} \rightarrow u_t, \quad \text{在 } L^2(0, T_0; L^2(\Omega)) \text{ 中弱收敛}, \quad (3.13)$$

$$u_m \rightarrow u, \quad \text{在 } C([0, T_0]; L^r(\Omega)) \text{ 中强收敛}, \quad \forall r \in [2, s), \quad (3.14)$$

其中当 $n > 4$ 时, $s = \frac{2n}{n-4}$; 当 $n \leq 4$ 时, $s = +\infty$. 特别地, (3.14) 蕴含

$$u_m \ln |u_m| \rightarrow u \ln |u|, \quad \text{a.e. } (x, t) \in \Omega \times (0, T_0). \quad (3.15)$$

另一方面, 经直接计算并结合引理 2.1 得

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (u_m \ln |u_m|)^2 dx &= \int_{\Omega_1} (u_m \ln |u_m|)^2 dx + \int_{\Omega_2} (u_m \ln |u_m|)^2 dx \\ &\leq e^{-2} |\Omega| + \frac{e^{-2}}{\sigma^2} \int_{\Omega_2} |u_m|^{2+2\sigma} dx \\ &\leq e^{-2} |\Omega| + \frac{e^{-2}}{\sigma^2} B^{2+2\sigma} \|\Delta u_m\|_2^{2+2\sigma} \leq C, \end{aligned} \quad (3.16)$$

其中 $\sigma > 0$ 是适当小的常数, $B > 0$ 是从 X 到 $L^{2+2\sigma}(\Omega)$ 的最佳嵌入常数. 由 (3.15) 和 (3.16) 可知,

$$u_m \ln |u_m| \rightarrow u \ln |u|, \quad \text{在 } L^\infty(0, T_0; L^2(\Omega)) \text{ 中弱}^* \text{ 收敛}. \quad (3.17)$$

借助 (3.12)、(3.13) 和 (3.17), 在 (3.2) 和 (3.3) 中令 $m \rightarrow +\infty$, 易知 u 是问题 (1.1) 在 $\Omega \times [0, T_0)$ 上的一个弱解.

当 u 适当光滑时, 我们可以选取 u_t 作为检验函数来证明能量恒等式 (E). 通过逼近可知 (E) 对弱解同样成立. 证毕. $\square$

注 3.1 (3.14) 表明 $u \in C([0, T_0]; L^2(\Omega))$, 能量恒等式 (E) 表明 $J(u(t))$ 关于 t 连续. 由此并注意到 $I(u(t)) = 2J(u(t)) - \frac{1}{2}\|u(t)\|_2^2$, 可知 $I(u(t))$ 关于 t 也连续.

下面的定理是本节的主要结果.

定理 3.2 设 $u_0 \in W^+$, 则问题 (1.1) 有一个衰减的整体弱解 $u(x, t)$ 满足 $u(x, t) \in \overline{W^+}$, $t \in [0, \infty)$. 进一步, 我们有如下衰减估计:

(i) 如果 $J(u_0) < M$, 则

$$\|u(t)\|_2 \leq \|u_0\|_2 e^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(\ln \frac{M}{J(u_0)})t}, \quad t \geq 0;$$

(ii) 如果 $J(u_0) = M$, 则存在 $\varepsilon \in (0, M)$ 和 $t_\varepsilon > 0$ 使得

$$\|u(t)\|_2 \leq \|u(t_\varepsilon)\|_2 e^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(\ln \frac{M}{M-\varepsilon})t}, \quad t \geq t_\varepsilon.$$

证明 证明分为两种情形.

情形 (I) $u_0 \in W_1^+$.

(1) 弱解的整体存在性. 令 $\{\phi_j(x)\}_{j=1}^\infty$ 、 $\{u_m\}_{m=1}^\infty$ 和 $\{u_{0m}\}_{m=1}^\infty$ 如定理 3.1 所述, T_m 是 $u_m(x, t)$ 的最大存在时间, 则易知 (3.7) 对 $t \in [0, T_m)$ 仍然成立. 由 $J(u)$ 和 $I(u)$ 在 X 上的连续性和 (3.1) 可知, 当 m 充分大时, $u_{0m} \in W_1^+$. 此外, 由 (3.1)、(3.3) 和 (3.7) 并注意到 $J(u)$ 在 X 上的连续性, 及 $J(u_0) < d$ 知, 当 m 充分大时,

$$\int_0^t \|u_{m\tau}(\tau)\|_2^2 d\tau + J(u_m(t)) < d, \quad t \in [0, T_m). \quad (3.18)$$

我们断言, 当 m 充分大时, $u_m(x, t) \in W_1^+$, $\forall t \in [0, T_m)$. 若不然, 由 $u_m(x, t)$ 的连续性可知, 存在 $t_0 \in (0, T_m)$ 使得 $u_m(x, t_0) \in \partial W_1^+$, 即

$$J(u_m(t_0)) = d, \quad (3.19)$$

或者

$$I(u_m(t_0)) = 0, \quad \|\Delta u_m(t_0)\|_2 \neq 0. \quad (3.20)$$

然而, (3.19) 显然与 (3.18) 矛盾. 如果 (3.20) 成立, 根据井深 d 的定义可得

$$J(u_m(t_0)) \geq \inf_{u \in \mathcal{N}} J(u) = d,$$

这也与 (3.18) 矛盾. 因此, $u_m(x, t) \in W_1^+$ 对所有的 $t \in [0, T_m)$ 成立.

由 (3.18) 并结合 $J(u)$ 、 $I(u)$ 和 W_1^+ 的定义可知, 对充分大的 m , 有

$$\|u_m(t)\|_2^2 \leq 4d, \quad \int_0^t \|u_{m\tau}(\tau)\|_2^2 d\tau < d, \quad t \in [0, T_m). \quad (3.21)$$

此外, 由修正的对数型 Sobolev 不等式 (2.2), 可得

$$\begin{aligned} \|\Delta u_m(t)\|_2^2 &= 2J(u_m(t)) + \int_{\Omega} u_m^2(t) \ln |u_m(t)| dx - \frac{1}{2} \|u_m(t)\|_2^2 \\ &= 2J(u_m(t)) + \int_{\Omega} u_m^2(t) \left(\ln \frac{|u_m(t)|}{\|u_m(t)\|_2} + \ln \|u_m(t)\|_2 \right) dx - \frac{1}{2} \|u_m(t)\|_2^2 \\ &\leq 2J(u_m(t)) + \frac{a^2}{2\pi\lambda_1} \|\Delta u_m(t)\|_2^2 - \frac{n(1+\ln a)}{2} \|u_m(t)\|_2^2 \\ &\quad + \|u_m(t)\|_2^2 \ln \|u_m(t)\|_2 - \frac{1}{2} \|u_m(t)\|_2^2. \end{aligned}$$

令 $a = \sqrt{\pi\lambda_1}$, 则得

$$\|\Delta u_m(t)\|_2^2 \leq C_d, \quad t \in [0, T_m). \quad (3.22)$$

注意到 (3.21) 和 (3.22) 的右端常数不依赖于 T_m , 故对任意 $T > 0$, 可取 $T_m = T$.

借助估计式 (3.21) 和 (3.22) 并重复定理 3.1 的证明可知问题 (1.1) 在 $\Omega \times [0, T]$ 上有一个弱解 $u(x, t)$ 且能量恒等式 (E) 成立. 由 $T > 0$ 的任意性知 $u(x, t)$ 是问题 (1.1) 的一个整体弱解.

(2) 衰减估计. 首先给出 $J(u_0) < M$ 时整体解的衰减估计. 由 $u(x, t) \in \overline{W_1^+}$, $J(u) = \frac{1}{2}I(u) + \frac{1}{4}\|u\|_2^2$ 和能量恒等式 (E) 得

$$\|u(t)\|_2^2 \leq 4J(u) \leq 4J(u_0) < 4M. \quad (3.23)$$

结合 (2.7) 和 (3.23) 并注意到 M 的定义, 可得以下估计:

$$I(u) \geq \frac{1}{2}(\ln M - \ln J(u_0))\|u\|_2^2. \quad (3.24)$$

另一方面, 在 (2.5) 中选取 u 作为检验函数, 可知对任意 $t < T$, 有

$$\int_t^T I(u(\tau)) d\tau = \frac{1}{2}\|u(t)\|_2^2 - \frac{1}{2}\|u(T)\|_2^2 \leq \frac{1}{2}\|u(t)\|_2^2. \quad (3.25)$$

由 (3.24) 和 (3.25) 得

$$\int_t^T \|u(\tau)\|_2^2 d\tau \leq \left(\ln \frac{M}{J(u_0)} \right)^{-1} \|u(t)\|_2^2. \quad (3.26)$$

在 (3.26) 中令 $T \rightarrow +\infty$ 并应用引理 2.4, 得

$$\|u(t)\|_2 \leq \|u_0\|_2 e^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(\ln \frac{M}{J(u_0)})t}, \quad t \geq 0.$$

如果 $J(u_0) = M$, 那么由 $I(u(t))$ 的连续性和 $I(u_0) > 0$ 可知, 存在 $t^0 > 0$ 使得对任意 $t \in [0, t^0]$ 有 $I(u(t)) > 0$. 注意到

$$I(u(t)) = - \int_{\Omega} u_t(t) u(t) dx,$$

故对任意 $t \in [0, t^0]$, 有 $\|u_t(t)\|_2^2 > 0$. 于是, 存在 $\varepsilon \in (0, M)$ 和 $t_\varepsilon \in (0, t^0)$ 使得

$$J(u(t_\varepsilon)) = J(u_0) - \int_0^{t_\varepsilon} \|u_t(t)\|_2^2 dt = M - \varepsilon.$$

取 $t = t_\varepsilon$ 作为初始时间, 并应用类似于 $J(u_0) < M$ 时的讨论可得如下衰减估计:

$$\|u(t)\|_2 \leq \|u(t_\varepsilon)\|_2 e^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(\ln \frac{M-\varepsilon}{J(u(t_\varepsilon))})t}, \quad t \geq t_\varepsilon.$$

情形 (II) $u_0 \in W_2^+$.

为了证明此时问题 (1.1) 弱解的整体存在性, 我们采用逼近的方法. 为此, 令

$$s_k = 1 - \frac{1}{k}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

并考虑以下初边值问题:

$$\begin{cases} u_t + \Delta^2 u = u \ln |u|, & (x, t) \in \Omega \times (0, +\infty), \\ u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, & (x, t) \in \partial\Omega \times (0, +\infty), \\ u(x, 0) = s_k u_0(x) \triangleq u_{0k}, & x \in \Omega. \end{cases} \quad (3.27)$$

注意到 $I(u_0) > 0$, 由引理 2.5(iii) 知, 存在唯一的 $\lambda^* = \lambda^*(u_0) > 1$ 使得 $I(\lambda^* u_0) = 0$. 于是由 $s_k < 1 < \lambda^*$ 知, $I(u_{0k}) = I(s_k u_0) > 0$, $J(u_{0k}) = J(s_k u_0) < J(u_0) = d$. 这表明 $u_{0k} \in W_1^+$. 由情形 (I) 的结论可知对每一个正整数 k , 问题 (3.27) 都有一个整体弱解 $u_k(x, t)$ 使得 $u_k \in L^\infty(0, \infty; X)$, $u_{kt} \in L^2(0, \infty; L^2(\Omega))$, $u_k(t) \in \overline{W}^+$, $\forall 0 \leq t < \infty$, 且满足

$$(u_{kt}, v) + (\Delta u_k, \Delta v) = (u_k \ln |u_k|, v), \quad v \in X$$

和

$$\int_0^t \|u_{k\tau}\|_2^2 d\tau + J(u_k(t)) = J(u_{0k}) < d.$$

余下部分的证明与情形 (I) 的第一部分完全类似, 兹从略. 证毕. $\square$

4 无穷远处爆破的整体解

本节将证明, 当区域 Ω 适当小且初值不在位势井内时, 问题 (1.1) 整体解的 L^2 范数将在无穷远处爆破, 主要结果是如下的定理:

定理 4.1 设 Ω 适当小使得 λ_1 满足 $\lambda_1 \geq \frac{1}{2\pi e^2}$, $u_0 \in W^-$ 满足 $J(u_0) \leq M$, $u(x, t)$ 是问题 (1.1) 的弱解, 则 $u(x, t)$ 在无穷远处爆破, 即

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|u(t)\|_2^2 = +\infty.$$

证明 我们将证明分为两步.

第 1 步 $J(u_0) < M$, $I(u_0) < 0$.

设 $u(x, t)$ 是问题 (1.1) 当初值 u_0 满足 $J(u_0) < M$ ($\leq d$) 和 $I(u_0) < 0$ 时的弱解. 应用与证明定理 3.2 中断言类似的讨论可以证明 $u(x, t) \in W_1^-$. 将此与引理 2.6(ii) 结合可知,

$$\|u(t)\|_2^2 > R^2 = 4M. \quad (4.1)$$

定义 $G(t) = \int_0^t \|u(\tau)\|_2^2 d\tau$, 则

$$G'(t) = \|u(t)\|_2^2, \quad G''(t) = 2(u_t, u) = -2I(u(t)). \quad (4.2)$$

注意到 $\lambda_1 \geq \frac{1}{2\pi e^2}$, 由 (2.7) 和 (4.2) 得

$$G'(t) \ln G'(t) - G''(t) \geq \frac{n(2 + \ln(2\pi\lambda_1))}{2} \|u(t)\|_2^2 \geq 0. \quad (4.3)$$

这表明,

$$(\ln G'(t))' \leq \ln G'(t).$$

经积分得

$$\ln \|u(t)\|_2^2 = \ln G'(t) \leq e^t \ln G'(0) = e^t \ln \|u_0\|_2^2$$

和

$$\|u(t)\|_2 \leq \|u_0\|_2^{e^t}, \quad t \geq 0.$$

这意味着 $u(x, t)$ 不会在任意有限时刻爆破.

另一方面, 由能量恒等式 (E) 和 (4.2) 可得

$$G''(t) = -4J(u(t)) + G'(t) = -4J(u_0) + 4 \int_0^t \|u(\tau)\|_2^2 d\tau + G'(t). \quad (4.4)$$

注意到

$$(G'(t))^2 = 4 \left(\int_0^t \int_{\Omega} u_{\tau} u dx d\tau \right)^2 + 2\|u_0\|_2^2 G'(t) - \|u_0\|_2^4,$$

我们有

$$\begin{aligned} G''(t)G(t) - G'(t)^2 &= 4 \left[\int_0^t \|u_{\tau}\|_2^2 d\tau \int_0^t \|u\|_2^2 d\tau - \left(\int_0^t \int_{\Omega} u_{\tau} u dx d\tau \right)^2 \right] \\ &\quad - 4J(u_0)G(t) + G'(t)G(t) - 2\|u_0\|_2^2 G'(t) + \|u_0\|_2^4. \end{aligned}$$

借助于 Cauchy-Schwarz 不等式

$$\int_0^t \int_{\Omega} u_{\tau} u dx d\tau \leq \int_0^t \|u_{\tau}\|_2^2 d\tau \int_0^t \|u\|_2^2 d\tau,$$

可以进一步得到

$$G''(t)G(t) - G'(t)^2 \geq G'(t)G(t) - 4J(u_0)G(t) - 2\|u_0\|_2^2 G'(t). \quad (4.5)$$

如果 $J(u_0) \leq 0$, 那么 (4.5) 和 (4.1) 蕴含

$$G''(t)G(t) - G'(t)^2 \geq G'(t)[G(t) - 2\|u_0\|_2^2] \geq 2G'(t)[2Mt - \|u_0\|_2^2] > 0, \quad t > \frac{\|u_0\|_2^2}{2M}.$$

如果 $0 < J(u_0) < M$, 我们将 (4.5) 改写如下:

$$G''(t)G(t) - G'(t)^2 \geq G(t)\left(\frac{G'(t)}{2} - 4J(u_0)\right) + G'(t)\left(\frac{G(t)}{2} - 2\|u_0\|_2^2\right). \quad (4.6)$$

由 (4.1) 和 (4.4) 得

$$G''(t) \geq 4(M - J(u_0)).$$

进而可知, 对任意 $t \geq 0$, 有

$$\begin{aligned} G'(t) &\geq 4(M - J(u_0))t + G'(0) \geq 4(M - J(u_0))t, \\ G(t) &\geq 2(M - J(u_0))t^2 + G(0) = 2(M - J(u_0))t^2. \end{aligned}$$

因此, 对于充分大的 t , 有

$$G''(t)G(t) - G'(t)^2 > 0.$$

综合以上两种情形可知, 当 $J(u_0) < M$, $I(u_0) < 0$ 时, 存在 $t_0 > 0$ 使得

$$G''(t)G(t) - G'(t)^2 > 0, \quad t \geq t_0. \quad (4.7)$$

直接计算可得

$$(\ln G(t))' = \frac{G'(t)}{G(t)}, \quad (\ln G(t))'' = \left(\frac{G'(t)}{G(t)}\right)' = \frac{G''(t)G(t) - G'(t)^2}{G^2(t)}. \quad (4.8)$$

对 (4.8) 中第二和一式分别在 $[t_0, t]$ 上积分并结合 (4.7) 得

$$(\ln G(t))' = (\ln G(t_0))' + \int_{t_0}^t \frac{G''(\tau)G(\tau) - G'(\tau)^2}{G^2(\tau)} d\tau$$

和

$$\ln G(t) - \ln G(t_0) = \int_{t_0}^t (\ln G(\tau))' d\tau \geq \frac{G'(t_0)}{G(t_0)}(t - t_0).$$

或等价地有

$$G(t) \geq G(t_0)e^{\frac{G'(t_0)}{G(t_0)}(t-t_0)}. \quad (4.9)$$

结合 (4.1) 和 (4.7)–(4.9) 得

$$\|u(t)\|_2^2 = G'(t) \geq \frac{G'(t_0)}{G(t_0)} G(t) \geq G'(t_0) e^{\frac{G'(t_0)}{G(t_0)}(t-t_0)} \geq 4Me^{\frac{G'(t_0)}{G(t_0)}(t-t_0)}. \quad (4.10)$$

这表明

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|u(t)\|_2^2 = +\infty,$$

即 $u(x, t)$ 在无穷远爆破.

第 2 步 $J(u_0) = M, I(u_0) < 0$.

如果 $J(u_0) = M$, 再次应用 $I(u(t))$ 的连续性和 $I(u_0) < 0$ 可知, 存在 $\bar{t} > 0$ 使得对任意 $t \in [0, \bar{t}]$ 都有 $I(u(t)) < 0$. 注意到 $I(u(t)) = -\int_{\Omega} u_t(t)u(t)dx$, 故当 $t \in [0, \bar{t}]$ 时, $\|u_t(t)\|_2^2 > 0$. 因此, 存在 $\bar{\varepsilon} \in (0, M)$ 和 $\bar{t}_{\varepsilon} \in (0, \bar{t})$ 使得

$$J(u(\bar{t}_{\varepsilon})) = J(u_0) - \int_0^{\bar{t}_{\varepsilon}} \|u_t(t)\|_2^2 dt = M - \bar{\varepsilon}.$$

以 $t = \bar{t}_{\varepsilon}$ 作为初始时刻, 并应用类似于情形 $J(u_0) < M$ 和 $I(u_0) < 0$ 时的讨论, 可得

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|u(t)\|_2^2 = +\infty.$$

证毕. □

致谢 感谢审稿人对本文初稿提出的宝贵建议.

参考文献

- 1 Ortiz M, Repetto E A, Si H. A continuum model of kinetic roughening and coarsening in thin films. *J Mech Phys Solids*, 1999, 47: 697–730
- 2 Zangwill A. Some causes and a consequence of epitaxial roughening. *J Cryst Growth*, 1996, 163: 8–21
- 3 King B B, Stein O, Winkler M. A fourth-order parabolic equation modeling epitaxial thin film growth. *J Math Anal Appl*, 2003, 286: 459–490
- 4 Liu C C. Regularity of solutions for a fourth order parabolic equation. *Bull Belg Math Soc Simon Stevin*, 2006, 13: 527–535
- 5 Liu C C. A fourth order parabolic equation with nonlinear principal part. *Nonlinear Anal*, 2008, 68: 393–401
- 6 Payne L E, Sattinger D H. Saddle points and instability of nonlinear hyperbolic equations. *Israel J Math*, 1975, 22: 273–303
- 7 Sattinger D H. On global solution of nonlinear hyperbolic equations. *Arch Ration Mech Anal*, 1968, 30: 148–172
- 8 Liu Y C. On potential wells and vacuum isolating of solutions for semilinear wave equations. *J Differential Equations*, 2003, 192: 155–169
- 9 Xu R Z, Su J. Global existence and finite time blow-up for a class of semilinear pseudo-parabolic equations. *J Funct Anal*, 2013, 264: 2732–2763
- 10 Qu C Y, Zhou W S. Blow-up and extinction for a thin-film equation with initial-boundary value conditions. *J Math Anal Appl*, 2016, 436: 796–809
- 11 Zhou J. Blow-up for a thin-film equation with positive initial energy. *J Math Anal Appl*, 2017, 446: 1133–1138
- 12 Li Q W, Gao W J, Han Y Z. Global existence blow up and extinction for a class of thin-film equation. *Nonlinear Anal*, 2016, 147: 96–109
- 13 Dong Z H, Zhou J. Global existence and finite time blow-up for a class of thin-film equation. *Z Angew Math Phys*, 2017, 68: 89
- 14 Xu R Z, Chen T L, Liu C M, et al. Global well-posedness and global attractor of fourth order semilinear parabolic equation. *Math Methods Appl Sci*, 2015, 38: 1515–1529
- 15 Chen H, Tian S Y. Initial boundary value problem for a class of semilinear pseudo-parabolic equations with logarithmic nonlinearity. *J Differential Equations*, 2015, 258: 4424–4442

- 16 Chen H, Luo P, Liu G W. Global solution and blow-up of a semilinear heat equation with logarithmic nonlinearity. *J Math Anal Appl*, 2015, 422: 84–98
- 17 Le C N, Le X T. Global solution and blow-up for a class of p -Laplacian evolution equations with logarithmic nonlinearity. *Acta Appl Math*, 2017, 151: 149–169
- 18 Han Y Z. A class of fourth-order parabolic equation with arbitrary initial energy. *Nonlinear Anal Real World Appl*, 2018, 43: 451–466
- 19 Gross L. Logarithmic Sobolev inequalities. *Amer J Math*, 1976, 97: 1061–1083
- 20 Brezis H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. New York: Springer, 2010

A class of thin-film equations with logarithmic nonlinearity

Yuzhu Han, Wenjie Gao & Xiaowei Shi

Abstract The main purpose of this paper is to study an initial-boundary value problem for a thin-film equation with logarithmic nonlinearity. Local existence of weak solutions is obtained by using Galerkin's approximation. By using the modified logarithmic Sobolev inequality and the potential well method, we obtain the existence of global solutions and solutions that blow up at infinity under some suitable conditions. The decay estimates of the global solutions are also derived.

Keywords thin-film equation, logarithmic nonlinearity, potential well, global existence, blow up at infinity

MSC(2010) 35K25, 35K58

doi: 10.1360/N012018-00024