基于虚拟领弹-从弹的集群分布式协同制导技术研究

林德福^{1,2}, 何绍溟^{1,2*}, 王江^{1,2}, 李博雅^{1,2}

1. 北京理工大学宇航学院, 北京 100081;

2. 北京理工大学无人系统自主控制技术北京市重点实验室, 北京 100081

* E-mail: hesm@bit.edu.cn

收稿日期: 2019-07-30; 接受日期: 2019-10-09; 网络版发表日期: 2020-04-15

国家自然科学基金(批准号: U1613225)资助项目

摘要 本文讨论了多导弹集群分布式协同制导的问题并设计了一种基于虚拟领弹-从弹架构的制导律用于满足攻击时间约束的要求. 该分布式协同制导律是一种由基础制导指令和攻击时间误差反馈项组成的复合制导律. 对于仅考虑终端攻击时间约束的场景, 基础制导律为传统的纯比例导引; 若同时考虑终端落角和攻击时间约束, 基础制导律为基于剩余飞行时间加权的最优落角约束制导律. 通过理论分析, 本文证明了所设计的分布式协同制导律能够使得所有导弹的攻击时间误差在目标命中时刻严格收敛于零. 对于不考虑/考虑终端角度的场景进行仿真, 验证了所提出制导律的有效性.

关键词 饱和攻击, 分布式协同制导, 攻击时间控制, 攻击角度控制

1 引言

随着现代军事技术的发展, 机场和大型军舰等高价值战略目标都采用多种近程防空系统对付来袭导弹. 集群协同饱和攻击是一种有效突破近程防空系统的有效攻击手段^[1,2]. 集群协同攻击的目的是使得具有不同初始发射条件的导弹能够同时击中目标以达到饱和攻击的目的. 根据不同的攻击时间调节方式, 协同攻击制导律可以分为两大类: (1) 单独控制每枚导弹的攻击时间的制导律; (2) 分布式协同调节所有导弹之间攻击时间误差的制导律.

针对单独控制每枚导弹攻击时间的制导律已有很多, 例如偏置比例导引制导律^[1~6]、非线性控制制导律^[7~10]、几何制导律^[11,12]. 文献[2]基于线性的相对运动模型利用最优控制理论推导了一种可以控制攻击时间的偏置比例导引. 为了消除线性化误差的影响, 文献[3]基于非线性运动模型提出了一种类似的时间协同制导律. 文献[4]应用Schwarz不等式证明了制导律^[3,4]的最优性并给出了相应的性能函数指标. 文献[1]采用类似于文献[3]的复合制导指令, 利用最优误差动力学推导了一种三维时间协同制导律. 相比在偏航和俯仰通道独立利用二维制导律, 理论分析和仿真结果证明

引用格式: 林德福, 何绍溟, 王江, 等. 基于虚拟领弹-从弹的集群分布式协同制导技术研究. 中国科学: 技术科学, 2020, 50: 506–515

Lin D F, He S M, Wang J, et al. On virtual leader-follower-based distributed cooperative swarm guidance strategy (in Chinese). Sci Sin Tech, 2020, 50: 506–515, doi: 10.1360/SST-2019-0265

直接采用三维制导律可以有效节省控制能量^[1]. 时间控制制导律的设计可以转化为一种有限时间控制问题, 其目的是希望控制攻击时间在有限时间内收敛于零. 基于该一般架构, 文献[7~10]利用李雅普诺夫稳定性理论、滑模控制以及反馈线性化研究了非线性攻击时间控制制导律. 基于几何关系的制导律也可用于控制飞行时间以达到多枚导弹同时击中目标的目的. 文献[11,12]分别基于椭圆和圆形的轨迹特性推导了满足特定飞行时间的开环理想飞行弹道并利用比例-积分-微分控制的思想设计了一种闭环制导律用于协同攻击.

随着集群智能协同控制理论的发展, 基于不同通讯架构的多导弹协同攻击时间控制制导律在近几年被广泛研究^[13~18]. 文献[13]选取多导弹之间的攻击时间方差为误差函数, 通过李雅普诺夫稳定性理论研究了一种具有时间约束的集中式变系数比例导引. 为了消除集中式制导律对通讯网络稳定性的高度依赖, 文献[14~16]假设导弹的飞行速度可控, 基于多智能体一致性理论设计了分布式协同打击制导律. 这类制导律包含垂直于速度方向和平行于速度方向的制导指令: 垂直于速度方向的指令用于控制视线角速度以达到命中目标的要求; 平行于速度方向的指令用于调节导弹飞行速度的大小以满足攻击时间的要求. 在实际战场中, 大部分战术导弹在末制导段均是基于气动力控制的, 因此导弹的飞行速度一般是不可控的变量. 基于此考虑, 设计不依赖于控制飞行速度的时间协同制导律更具有实际工程意义. 文献[17]假设所有导弹的速度完全一致, 研究了一种不需要估计剩余飞行时间的两阶段时间协同制导策略. 该制导律第一阶段用于调节导弹的速度前置角和弹目相对距离; 当满足第二阶段的初始条件时, 所有导弹切换成相同的比例导引用于协同打击. 文献[18]进一步分析了通讯延迟对分布式协同制导律^[17]的影响并推导了保证制导系统稳定性的通讯延迟时间上界.

受以上分析的启发, 本文研究了一种基于虚拟领弹-从弹架构的新型分布式协同时间控制制导律. 虚拟领弹用于提供期望攻击时间的信息, 所有导弹以从弹身份“跟随”虚拟领弹以达到在特定时刻同时击中目标的要求. 该制导律由基础制导指令和攻击时间误差偏置项两部分组成. 对于仅考虑终端攻击时间约束的场景, 基础制导律为传统的纯比例导引; 若同时考虑终

端落角和攻击时间约束, 基础制导律为基于剩余飞行时间加权的最优落角约束制导律. 攻击时间误差偏置项用于动态调节各个导弹之间的攻击时间误差以达到同时攻击目标的要求. 理论分析证明各个导弹的攻击时间误差能够在目标命中时刻严格收敛于零. 最后, 本文通过非线性仿真验证了所设计制导算法的有效性.

相比于已有协同制导律^[13~18], 本文所设计的制导算法具有以下优点: (1) 只需要部分导弹获得虚拟领弹提供的期望攻击时间信息; (2) 不需要所有导弹的飞行速度完全一致的假设; (3) 不需要导弹飞行速度精确可控的假设. 同时, 本文提出的设计方法具有一定的普适性: 对于任意给定的基础制导律及其对应的剩余飞行时间估算方法, 采用本文的方法均可将其拓展为具有时间约束的分布式协同制导律. 相比于基础制导律, 协同制导律的实现不需要额外的制导信息, 因此具有良好的工程应用价值.

2 问题描述

2.1 弹目相对运动关系

本文考虑 N 个导弹组成的集群协同打击一个静止目标的场景. 为方便描述, 将第 i 个导弹和目标分别记作 M_i 和 T . 为简化分析, 本文作如下攻击时间控制制导律设计中的常用假设:

假设1 导弹和目标均为质点模型;

假设2 导弹的驾驶仪为理想系统没有响应延迟;

假设3 导弹的飞行速度为常值;

假设4 忽略地球引力和地球旋转带来的影响.

导弹与目标之间的二维相对运动关系如图1所示. 其中 XOY 为惯性坐标系, γ_i , θ_i 和 λ_i 分别为导弹的弹道倾角、速度前置角和弹目视线角, R_i 为弹目相对距离, $V_{M,i}$ 和 $a_{M,i}$ 分别为导弹的飞行速度和法向加速度. 根据图1, 可得导弹和目标之间的相对运动方程为

$$\dot{R}_i = -V_{M,i} \cos \theta_i, \quad (1)$$

$$\dot{\lambda}_i = -\frac{V_{M,i} \sin \theta_i}{R_i}, \quad (2)$$

$$\dot{\gamma}_i = \frac{a_{M,i}}{V_{M,i}}. \quad (3)$$

根据几何关系, 导弹的速度前置角可表示为

图 1 导弹和目标之间的相对运动关系

Figure 1 Relative kinematics between the missile and the target.

$$\theta_i = \gamma_i - \lambda_i. \quad (4)$$

2.2 通讯网络

本文采用一个无向连接的拓扑图 $G = \{\mathcal{N}, \mathcal{E}\}$ 来表征 N 个导弹直接的通讯拓扑结构^[19]. 其中, $\mathcal{N} = \{v_1, v_2, \dots, v_N\}$ 为该拓扑图顶点的集合, 每个顶点表示一个导弹; $\mathcal{E} = \{(i, j) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N}\}$ 表示相邻导弹之间的连接关系. 若第 i 个导弹和第 j 个导弹能够相互通讯, 则 $(v_i, v_j) \in \mathcal{E}$ 且 $(v_j, v_i) \in \mathcal{E}$. 为设计协同制导律, 本文假设该通讯拓扑图是强连通的, 即任意两导弹之间至少存在一条通讯路径. 拓扑图 G 的邻接矩阵可表示为 $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{N \times N}$. 其中,

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if } (v_i, v_j) \in \mathcal{E}, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (5)$$

拓扑图 G 的拉普拉斯矩阵定义为 $\mathbf{L} = [l_{ij}] \in \mathbb{R}^{N \times N}$. 其中,

$$l_{ij} = \begin{cases} \sum_{k=1}^N a_{ik}, & j = i, \\ -a_{ij}, & j \neq i. \end{cases} \quad (6)$$

定义 $d_i = \sum_{j=1}^N a_{ij}$ 为每个导弹的连接度以及拓扑图 G 的连接度矩阵 $\mathbf{D} = \text{diag}\{d_1, d_2, \dots, d_N\}$. 拉普拉斯矩阵 $\mathbf{L}$ 则可表示为 $\mathbf{L} = \mathbf{D} - \mathbf{A}$.

2.3 协同制导问题描述

饱和攻击的目的是使得具有不同初始发射条件的导弹能够在期望的时刻 t_d 同时击中目标. 为方便描述, 本文将期望攻击时间 t_d 记作一个虚拟领弹提供的信息,

所有导弹看作该虚拟领弹的从弹. 由于各种因素的干扰, 并不是所有导弹都能获得虚拟领弹提供的信息. 考虑该情况, 本文针对每枚导弹定义一个二值变量 $b_i \in \{0, 1\}$. 如果第 i 个导弹能够获得虚拟领弹提供的期望攻击时间 t_d 信息, 则 $b_i = 1$, 否则 $b_i = 0$. 为方便分析, 定义对角矩阵 $\mathbf{B} = \text{diag}\{b_1, b_2, \dots, b_N\}$.

定义 $t_{f,i}$ 为第 i 个导弹的攻击时间, 本文的目的是为导弹集群设计分布式协同制导(distributed cooperative guidance, DCG)指令 $a_{M,i}$ 使得所有导弹能够在期望的时间 t_d 击中目标, 即

$$\lim_{t \rightarrow t_{f,i}} t_{f,i} = t_d, \quad \lim_{t \rightarrow t_d} R_i = 0. \quad (7)$$

3 考虑时间约束的分布式协同制导律

3.1 算法设计

众所周知, 制导律的首要目的是使得导弹以零脱靶量命中目标. 为了同时保证零脱靶量以及攻击时间的要求, 本文采用基于偏置比例导引的复合制导策略, 即

$$a_{M,i} = a_{\text{PNG},i} + a_{b,i}, \quad (8)$$

式中, $a_{\text{PNG},i}$ 为保证命中目标的纯比例导引项, $a_{b,i}$ 为调节攻击时间的偏置项.

纯比例导引(proportional navigation guidance, PNG)的制导指令为

$$a_{\text{PNG},i} = N_p V_{M,i} \dot{\lambda}_i, \quad (9)$$

式中, $N_p \geq 2$ 为纯比例导引的导航系数.

由式(2)和(9)可得纯比例导引的另一种指令:

$$a_{\text{PNG},i} = -\frac{N_p V_{M,i}^2 \sin \theta_i}{R_i}. \quad (10)$$

根据文献[3], 纯比例导引作用下的攻击时间可近似为

$$t_{f,i} = t + \frac{R_i}{V_{M,i}} \left[1 + \frac{\sin^2 \theta_i}{2(2N_p - 1)} \right]. \quad (11)$$

定义误差函数

$$e_i = \sum_{j=1}^N a_{ij} (t_{f,i} - t_{f,j}) + b_i (t_{f,i} - t_d). \quad (12)$$

引理1 定义 $\mathbf{E} = [e_1, e_2, \dots, e_N]^T$, 若 $\mathbf{E} = \mathbf{0}_{N \times 1}$, 则

$$t_{f,i} = t_d, \quad i \in \{1, 2, \dots, N\}. \quad (13)$$

证明 若 $\mathbf{E} = \mathbf{0}_{N \times 1}$, 则

$$(\mathbf{L} + \mathbf{B})[t_{f,1}, t_{f,2}, \dots, t_{f,N}]^T = \mathbf{B}\mathbf{1}_{N \times 1}t_d. \quad (14)$$

由于 $\mathbf{L}\mathbf{1}_{N \times 1} = \mathbf{0}_{N \times 1}$, 式(14)可以表示为

$$\begin{aligned} (\mathbf{L} + \mathbf{B})[t_{f,1}, t_{f,2}, \dots, t_{f,N}]^T &= (\mathbf{L}\mathbf{1}_{N \times 1} + \mathbf{B}\mathbf{1}_{N \times 1})t_d \\ &= (\mathbf{L} + \mathbf{B})\mathbf{1}_{N \times 1}t_d. \end{aligned} \quad (15)$$

注意到 $[b_1, b_2, \dots, b_N]^T = (\mathbf{L} + \mathbf{B})\mathbf{1}_{N \times 1}$ 以及存在至少 1 枚导弹可以获得虚拟领弹的信息, 即 $\exists i$ 使得 $b_i \neq 0$. 基于此, 容易验证矩阵 $(\mathbf{L} + \mathbf{B})$ 的秩为 N . 因此, 矩阵 $(\mathbf{L} + \mathbf{B})$ 是可逆的. 将此特性应用于式(15)可得 $t_{f,i} = t_d, \quad i \in \{1, 2, \dots, N\}$.

引理1表明, 若误差函数 e_i 收敛于零, 则所有导弹的攻击时间收敛于期望命中时间 t_d . 为了使得攻击时间误差函数在目标命中时刻收敛于零, 本文根据最优误差动力学^[4]设计如下的偏置项:

$$\begin{aligned} a_{b,i} &= \frac{(2N_p - 1)V_{M,i}^2}{R_i \sin \theta_i} u_i, \\ u_i &= - \left(\sum_{j=1}^N a_{ij} + b_i \right)^{-1} \left(- \sum_{j=1}^N a_{ij} u_j + \frac{K}{t_{go,i}} e_i \right), \end{aligned} \quad (16)$$

式中, $t_{go,i} = t_{f,i} - t$ 表示第 i 个导弹的剩余飞行时间, $K > 0$ 是调节误差函数收敛速度的增益.

由式(8)和(13)可得最终的制导律指令为

$$a_{M,i} = - \frac{N_p V_{M,i}^2 \sin \theta_i}{R_i} + \frac{(2N_p - 1)V_{M,i}^2}{R_i \sin \theta_i} u_i. \quad (17)$$

3.2 制导律实施

本文提出的分布式协同制导算法的具体实施步骤如下:

步骤1 每枚导弹根据自身惯导提供的信息 $V_{M,i}$ 以及导引头提供的信息 R_i 和 θ_i 利用式(11)预测攻击时间 $t_{f,i}$;

步骤2 导弹集群接收虚拟领弹提供的信息 t_d ;

步骤3 相邻导弹之间相互通讯交互各自的预测攻击时间 $t_{f,i}$;

步骤4 根据式(12)计算攻击时间误差函数 e_i ;

步骤5 根据式(16)计算偏置项并根据式(17)实现分布式制导.

注释1 不同于文献[3~10], 本文设计的协同制导律只需要部分导弹获得虚拟领弹提供的期望攻击时间信息 t_d . 同时, 由于制导律(17)是分布式的, 每枚导弹仅需要和其相邻的导弹通讯即可.

注释2 相比于分布式协同制导算法^[14~16], 制导律(17)的实施仅需要控制法向加速度, 而文献[14~16]提出的算法需要额外精确控制导弹的飞行速度. 需要注意的是, 大部分战术导弹在末制导段均是基于气动力控制的, 因此导弹的飞行速度一般是不可控的变量. 基于此考虑, 本文所设计的制导律更具有实际工程意义.

注释3 与基于多智能体一致性的协同制导律^[17,18]相比, 制导律(17)能够保证攻击时间误差的严格有限时间收敛. 该特性会在后文中具体分析. 同时, 文献[17,18]提出的制导律假设所有导弹的飞行速度完全一致, 而本文所设计的制导律不需要该假设, 因此更符合实际情况. 另外, 由式(17)可以看出, 本文提出的制导律能够给出连续的制导指令, 而文献[17,18]设计的制导律存在指令跳变.

注释4 尽管制导律(17)是在静止目标的假设下推导出来的, 该制导律同时适用于攻击匀速移动目标. 假设目标的移动速度为 V_T , 则预测命中点的坐标可以表示为

$$\begin{aligned} x_T(t_f) &= x_T(0) + V_T t_d, \\ y_T(t_f) &= y_T(0) + V_T t_d, \end{aligned} \quad (18)$$

式中, $[x_T(0), y_T(0)]^T$ 为目标的初始位置. 将预测命中点 $[x_T(t_f), y_T(t_f)]^T$ 看作静止目标点即可运用本文设计的协同制导律对匀速移动目标实施饱和攻击.

3.3 收敛性分析

本小节主要分析制导律(17)作用下的攻击时间收敛特性.

定理1 在制导律(17)的作用下, 所有导弹均能在期望时间 t_d 命中目标.

证明 对式(11)两边求导可得

$$\begin{aligned}
 i_{f,i} &= \frac{\dot{R}_i}{V_{M,i}} \left[1 + \frac{\sin^2 \theta_i}{2(2N_p - 1)} \right] + \frac{R_i \sin \theta_i \cos \theta_i \dot{\theta}_i}{(2N_p - 1)V_{M,i}} + 1 \\
 &= -\cos \theta_i \left[1 + \frac{\sin^2 \theta_i}{2(2N_p - 1)} \right] + \frac{R_i \sin \theta_i \cos \theta_i}{(2N_p - 1)V_{M,i}} \\
 &\quad \times \left(\frac{a_{PNG,i} + a_{b,i}}{V_{M,i}} - \dot{\lambda}_i \right) + 1 \\
 &= -\cos \theta_i \left[1 + \frac{\sin^2 \theta_i}{2(2N_p - 1)} \right] - \frac{(N-1) \sin^2 \theta_i \cos \theta_i}{2N_p - 1} \\
 &\quad + \frac{R_i \sin \theta_i \cos \theta_i}{(2N_p - 1)V_{M,i}^2} a_{b,i} + 1. \tag{19}
 \end{aligned}$$

在末制导段, 速度前置角可以看作是一个小量, 即 $\sin \theta_i \approx \theta_i$, $\cos \theta_i \approx 1 - \theta_i^2/2$. 基于该小角度假设同时忽略式(19)中 θ_i 的高阶项, 可得

$$i_{f,i} = \frac{R_i \sin \theta_i}{(2N_p - 1)V_{M,i}^2} a_{b,i}. \tag{20}$$

对 $\mathbf{E}$ 求导并将制导指令式(17)代入其中可得

$$\dot{\mathbf{E}} = (\mathbf{L} + \mathbf{B})\mathbf{U}, \tag{21}$$

式中, $\mathbf{U} = [u_1, u_2, \dots, u_N]^T$. 根据 u_i 的定义易验证

$$\mathbf{U} = -(\mathbf{D} + \mathbf{B})^{-1} \left[-\mathbf{A}\mathbf{U} + K \left[\frac{e_1}{t_{go,1}}, \frac{e_2}{t_{go,2}}, \dots, \frac{e_N}{t_{go,N}} \right]^T \right]. \tag{22}$$

注意到

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{I} - (\mathbf{D} + \mathbf{B})^{-1}\mathbf{A}] &= (\mathbf{D} + \mathbf{B})^{-1}[(\mathbf{D} + \mathbf{B}) - \mathbf{A}] \\
 &= (\mathbf{D} + \mathbf{B})^{-1}[\mathbf{L} + \mathbf{B}].
 \end{aligned} \tag{23}$$

将式(23)代入式(22)可得

$$\mathbf{U} = -K(\mathbf{D} + \mathbf{B})^{-1} \left[\frac{e_1}{t_{go,1}}, \frac{e_2}{t_{go,2}}, \dots, \frac{e_N}{t_{go,N}} \right]^T. \tag{24}$$

由式(21)和(24)可得

$$\dot{\mathbf{E}} = -K \left[\frac{e_1}{t_{go,1}}, \frac{e_2}{t_{go,2}}, \dots, \frac{e_N}{t_{go,N}} \right]^T, \tag{25}$$

也即

$$\dot{e}_i + \frac{K}{t_{go,i}} e_i = 0. \tag{26}$$

解微分方程(26)可得

$$e_i = e_i(0) \left(\frac{t_{go,i}}{t_{f,i}} \right)^K, \tag{27}$$

式中, $e_i(0)$ 表示误差 e_i 的初值. 式(27)表明, 误差函数 e_i

会在目标命中时刻严格收敛于零. 同时, 增大增益 K 可以加快误差函数的收敛速度. 在式(27)的基础上应用引理1的结论可知所有导弹的攻击时间均能在终端时刻收敛于期望值 t_d . 另外, 由式(13)可知制导律(17)会在命中目标时刻收敛于比例导引. 进而根据式(11)易证

$$\lim_{t \rightarrow t_d} R_i \rightarrow 0, \tag{28}$$

也即所有导弹能同时以期望的攻击时间命中目标.

注释5 由式(17)可以看出 $\theta_i=0$ 是制导律的一个奇点, 即制导指令在该点无限大. 但是, 利用反证法容易验证在制导律(17)的作用下 $\theta_i \neq 0$, $\forall t < t_{f,i}$. 假设存在一个时刻 $t_{s,i}$, $0 < t_{s,i} < t_{f,i}$, 使得 $\theta_i(t)=0$, $\forall t \in [t_{s,i}, t_{f,i}]$. 根据速度前置角的定义可知, 导弹在时间区间 $[t_{s,i}, t_{f,i}]$ 内会沿着一条直线击中目标. 这意味着误差函数 e_i 会在时刻 $t_{s,i}$ 收敛于零. 然而, 根据定理1可知, 误差函数 e_i 仅在 $t_{f,i}$ 时刻收敛于零. 因此, 易知 $t_{s,i}=t_{f,i}$, 也即 $\theta_i=0$ 是一个平凡奇点. 图2给出了本文提出的协同制导律作用下的导弹速度前置角示例图.

4 同时考虑角度和时间约束的分布式协同制导律

在一些情况下, 导弹需要以特定的角度对目标进行攻击, 以增强战斗部的毁伤效果^[20]. 本节对上一节提出的分布式协同制导律进行拓展, 研究同时考虑终端角度和攻击时间约束的分布式协同制导律.

图2 协同制导律作用下的速度前置角示例图

Figure 2 Example of velocity lead angle under the proposed guidance law.

4.1 算法设计

与第3节设计方法类似, 本节采用复合制导策略 $a_{M,i} = a_{\text{IAC},i} + a_{b,i}$ 来满足零脱靶量、终端角度和攻击时间约束. 其中, $a_{\text{IAC},i}$ 为满足零脱靶量和终端角度的基础制导律, $a_{b,i}$ 为调节攻击时间的偏置项. 定义 $\gamma_{f,i}$ 为第 i 个导弹的终端期望落角, 本文采用基于剩余飞行时间加权的最优落角约束制导律(time-to-go weighted optimal impact angle guidance, TWOIACG)^[20] 作为基础制导律 $a_{\text{IAC},i}$. 该制导律的制导指令为

$$a_{\text{IAC},i} = -\frac{V_{M,i}^2}{R_i} \left[2(m+2)\theta_i + (m+1)(m+2)\theta_{f,i} \right], \quad (29)$$

式中, $\theta_{f,i} = \gamma_{f,i} - \lambda_i$, 非负整数 $m \geq 0$ 为制导增益. 采用基于剩余飞行时间加权的最优落角约束制导律的好处在于该制导律在满足 $m \geq 1$ 时能够保证导弹的终端过载收敛于零, 从而能够提供足够大的控制裕度来抵消外部干扰对制导精度的影响.

根据文献[20], 在制导律(29)的作用下, 导弹的攻击时间可表示为

$$t_{f,i} = \frac{R_i}{V_{M,i}} \times \left[1 + \frac{(m+2)\theta_i^2 + (m+1)^2(m+2)\theta_{f,i}^2 - (m+1)\theta_i\theta_{f,i}}{2(2m+3)(2m+5)} \right]. \quad (30)$$

与第3节类似, 定义攻击时间误差函数:

$$e_i = \sum_{j=1}^N a_{ij}(t_{f,i} - t_{f,j}) + b_i(t_{f,i} - t_d). \quad (31)$$

为了使误差函数 e_i 在有限时间内收敛于零, 本文设计如下的制导偏置项:

$$a_{b,i} = \frac{2(2m+3)(2m+5)V_{M,i}^2}{R_i[(2m+4)\theta_i - (m+1)\theta_{f,i}]} u_i, \quad (32)$$

$$u_i = -\left(\sum_{j=1}^N a_{ij} + b_i \right)^{-1} \left(-\sum_{j=1}^N a_{ij} u_j + \frac{K}{t_{go,i}} e_i \right),$$

式中, $K > 0$ 是调节误差函数收敛速度的增益.

根据式(29)和(32)可得同时考虑角度和时间约束的分布式协同制导律的最终制导指令为

$$a_{M,i} = -\frac{V_{M,i}^2}{R_i} \left[2(m+2)\theta_i + (m+1)(m+2)\theta_{f,i} \right] + \frac{2(2m+3)(2m+5)V_{M,i}^2}{R_i[(2m+4)\theta_i - (m+1)\theta_{f,i}]} u_i. \quad (33)$$

制导律(33)的具体实施步骤与制导律(17)类似, 此处不再赘述. 具体细节可参见3.2小节.

4.2 收敛性分析

本小节主要分析制导律(33)作用下的攻击时间收敛特性.

定理2 在制导律(33)的作用下, 所有导弹均能在期望时间 t_d 以期望的角度命中目标.

证明 对式(30)两边求导可得

$$\begin{aligned} \dot{t}_{f,i} = & 1 - \cos\theta_i \left[1 + \frac{(m+2)\theta_i^2 + (m+1)^2(m+2)\theta_{f,i}^2 - (m+1)\theta_i\theta_{f,i}}{2(2m+3)(2m+5)} \right] \\ & + \frac{R_i}{2(2m+3)(2m+5)V_{M,i}} [(2m+4)\theta_i - (m+1)\theta_{f,i}] \dot{\theta}_i \\ & + \frac{1}{2(2m+3)(2m+5)V_{M,i}} \\ & \times [(2m+3)\theta_i + (2m^2+6m+3)\theta_{f,i}] \sin\theta_i. \end{aligned} \quad (34)$$

由于末制导段速度前置角 θ_i 为小量, 即 $\sin\theta_i \approx \theta_i$, $\cos\theta_i \approx 1 - \theta_i^2/2$. 式(34)可简化为

$$\begin{aligned} \dot{t}_{f,i} = & 1 - \left(1 - \frac{1}{2}\theta_i^2 \right) \\ & \times \left[1 + \frac{(m+2)\theta_i^2 + (m+1)^2(m+2)\theta_{f,i}^2 - (m+1)\theta_i\theta_{f,i}}{2(2m+3)(2m+5)} \right] \\ & + \frac{R_i}{2(2m+3)(2m+5)V_{M,i}} [(2m+4)\theta_i - (m+1)\theta_{f,i}] \\ & \times \frac{a_{\text{IAC},i} + a_{b,i}}{V_{M,i}} + \frac{1}{2(2m+3)(2m+5)V_{M,i}} \\ & \times [(2m+3)\theta_i + (2m^2+6m+3)\theta_{f,i}] \theta_i \\ = & \frac{[(2m+4)\theta_i - (m+1)\theta_{f,i}]R_i}{2(2m+3)(2m+5)V_{M,i}^2} a_{b,i}. \end{aligned} \quad (35)$$

将式(32)代入上式并仿照定理1证明的类似步骤即可证明定理2.

注释6 由式(33)可以看出 $(2m+4)\theta_i = (m+1)\theta_{f,i}$ 是

制导律的一个奇点, 即制导指令在该奇点无限大. 与制导律(17)不同, 该奇点是一个非平凡奇点. 为了消除奇

点的影响, 本文采用死区的思想对制导律(33)进行如下改进:

$$a_{b,i} = \begin{cases} \frac{2(2m+3)(2m+5)V_{M,i}^2}{R_i[(2m+4)\theta_i - (m+1)\theta_{f,i}]} u_i, & |(2m+4)\theta_i - (m+1)\theta_{f,i}| > \delta, \\ \frac{2(2m+3)(2m+5)V_{M,i}^2}{R_i\delta \operatorname{sgn}[(2m+4)\theta_i - (m+1)\theta_{f,i}]} u_i, & |(2m+4)\theta_i - (m+1)\theta_{f,i}| \leq \delta, \end{cases} \quad (36)$$

式中, $\delta > 0$ 是一个常数.

5 仿真验证

本节以四导弹集群协同打击一匀速移动非机动目标为例对所提出的制导律进行验证. 仿真所需的初始条件如表1所示. 实施协同打击的期望攻击时间为60 s. 在本节的仿真中, 假设仅导弹1可以获得虚拟领弹提供的期望飞行时间信息, 即 $b_1=1$, $b_2=0$, $b_3=0$ 以及 $b_4=0$. 为验证协同制导律的分布式特性, 假设导弹1可与导弹2, 3, 4进行信息交互, 而导弹2, 3, 4之间不可进行通信. 该通讯拓扑图 G 的邻接矩阵可表示为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (37)$$

5.1 只考虑攻击时间约束的协同打击

本小节针对无攻击角度约束的分布式协同制导律(17)进行仿真验证, 并与传统比例导引制导律进行对比. 制导律(17)的设计参数为 $N_p=3$ 和 $K=8$. 仿真结果如图3~5所示.

图3给出了不同制导律作用下的导弹飞行轨迹图. 由该图可以看出两种不同的制导律均能导引导弹精确击中目标. 在纯比例导引的作用下, 4枚导弹命中目标

的时间分别46.48, 36.67, 43.25和44.73 s. 由于设置的期望攻击时间大于纯比例导引作用下4枚导弹飞行时间的最大值, 本文协同制导律作用下的导弹飞行弹道线更加弯曲. 图4给出了制导律(17)作用下的剩余飞行时间曲线. 该图表明所有导弹的剩余飞行时间都能在最终时刻收敛于期望的攻击时间, 也即所有导弹能在期望时刻命中目标. 图5为两种不同制导律的法向加速度响应曲线, 可以看出两种制导律均能保证导弹的终端指令收敛于零, 这有利于增大抵消外部扰动的控制裕度. 相比于纯比例导引, 本文所设计的协同制导律能够消除不同导弹之间的剩余飞行时间误差, 因此

图3 制导律(17)作用下的导弹飞行轨迹
Figure 3 Flight trajectories of all missiles under guidance law (17).

表1 初始条件
Table 1 Initial conditions

参数	目标	导弹1	导弹2	导弹3	导弹4
初始位置 (m)	(14200, 0)	(0, 2000)	(3000, 4000)	(0, -3000)	(3000, 0)
初始速度倾角 (°)	180	5	20	0	0
速度 (m/s)	20	290	300	310	270

图 4 制导律(17)作用下的剩余飞行时间
Figure 4 Time-to-go under guidance law (17).

图 6 制导律(33)作用下的导弹飞行轨迹
Figure 6 Flight trajectories of all missiles under guidance law (33).

图 5 制导律(17)作用下的导弹法向加速度指令
Figure 5 Missile lateral acceleration command under guidance law (17).

图 7 制导律(33)作用下的剩余飞行时间
Figure 7 Time-to-go under guidance law (33).

在末制导初期需要消耗更多的能量。

5.2 同时考虑攻击角度和时间约束的协同打击

本小节针对同时考虑攻击角度和时间约束的分布式协同制导律(33)进行仿真验证, 并与传统基于剩余飞行时间加权的最优落角约束制导律进行对比。四枚导弹的期望终端角度约束分别为 -60° , -90° , 90° 和 45° 。制导律(33)的设计参数为 $m=1$, $K=6$ 和 $\delta=0.1$ 。仿真结果如图6~8所示。

图6给出了两种不同制导律作用下的导弹飞行轨迹, 可以看出所有弹道均能以特定的角度命中目标。基于剩余飞行时间加权的最优落角约束制导律作用下的4枚导弹的飞行时间分别为53.43, 47.45, 59.65和

41.24 s。和上一小节的结果类似, 导弹在协同制导律的作用下会偏离原有基础制导律的轨迹用于增加飞行时间。图7为协同制导律(33)作用下导弹剩余飞行时间曲线, 可以看出4枚导弹的剩余飞行时间均能在期望攻击时刻收敛于零, 即所有导弹均满足期望攻击时间的约束。图8给出了两种不同制导律作用下的导弹法向加速度响应曲线。由于基础制导律TWOIACG的制导增益满足 $m \geq 1$, 导弹的终端过载严格收敛于零。相比于TWOIACG, 本文所设计的协同制导律增加了一项偏置项, 因此末制导飞行初期需要较大的法向过载用于调节不同导弹之间的飞行时间误差。当各导弹的飞行时间逐渐收敛于期望的攻击时间时, 协同制导律逐渐与TWOIACG趋于一致。图8同时表明协同制导律作

图8 制导律(33)作用下的导弹法向加速度指令

Figure 8 Missile lateral acceleration command under guidance law (33).

用下导弹4的法向加速度指令在48.52 s时出现了奇点,而采用死区控制的方式很好地避免了奇点带来的不利影响。

6 讨论与结论

针对多导弹集群分布式协同目标打击的问题,本文提出了一种基于虚拟领弹-从弹的分布式协同制导律。该制导律是一种由基础制导指令和攻击时间误差反馈组成的复合制导律。仅考虑终端攻击时间约束的场景,本文采用纯比例导引为基础制导律;若同时考虑终端落角和攻击时间约束,本文采用基于剩余飞行时间加权的最优落角约束制导律为基础制导律。对于给定的基础制导律,所设计的攻击时间误差反馈项能够使得所有导弹之间的攻击时间误差在终端时刻严格收敛于零。数值仿真结果表明,该协同制导律能够满足不同场景下的饱和和攻击要求。

与已有协同制导律相比,本文所设计的制导算法只需要部分导弹获得虚拟领弹提供的期望攻击时间信息。同时,实施该制导律不需要所有导弹的飞行速度完全一致以及飞行速度精确可控的假设。因此,该制导律具有良好的工程应用价值。

参考文献

- He S, Lin D. Three-dimensional optimal impact time guidance for antiship missiles. *J Guid Control Dyn*, 2018, 42: 941–948
- Jeon I S, Lee J I, Tahk M J. Impact-time-control guidance law for anti-ship missiles. *IEEE Trans Contr Syst Technol*, 2006, 14: 260–266
- Jeon I S, Lee J I, Tahk M J. Impact-time-control guidance with generalized proportional navigation based on nonlinear formulation. *J Guid Control Dyn*, 2016, 39: 1887–1892
- He S, Lee C H. Optimality of error dynamics in missile guidance problems. *J Guid Control Dyn*, 2018, 41: 1624–1633
- Cho N, Kim Y. Modified pure proportional navigation guidance law for impact time control. *J Guid Control Dyn*, 2016, 39: 852–872
- Tahk M J, Shim S W, Hong S M, et al. Impact time control based on time-to-go prediction for sea-skimming antiship missiles. *IEEE Trans Aerosp Electron Syst*, 2018, 54: 2043–2052
- Saleem A, Ratnoo A. Lyapunov-based guidance law for impact time control and simultaneous arrival. *J Guid Control Dyn*, 2015, 39: 164–173
- Cho D, Kim H J, Tahk M J. Nonsingular sliding mode guidance for impact time control. *J Guid Control Dyn*, 2015, 39: 61–68
- Kumar S R, Ghose D. Impact time guidance for large heading errors using sliding mode control. *IEEE Trans Aerosp Electron Syst*, 2015, 51: 3123–3138
- Jeon I S, Lee J I. Impact-time-control guidance law with constraints on seeker look angle. *IEEE Trans Aerosp Electron Syst*, 2017, 53: 2621–2627
- Livermore R, Tsalik R, Shima T. Elliptic guidance. *J Guid Control Dyn*, 2018, 41: 2435–2444
- Tsalik R, Shima T. Circular impact-time guidance. *J Guid Control Dyn*, 2019, 42: 1836–1847
- Jeon I S, Lee J I, Tahk M J. Homing guidance law for cooperative attack of multiple missiles. *J Guid Control Dyn*, 2010, 33: 275–280
- Wang X H, Tan C P. 3-D impact angle constrained distributed cooperative guidance for maneuvering targets without angular-rate measurements. *Control Eng Practice*, 2018, 78: 142–159
- Zhou J, Yang J. Distributed guidance law design for cooperative simultaneous attacks with multiple missiles. *J Guid Control Dyn*, 2016, 39: 2439–2447
- Zhou J, Yang J. Guidance law design for impact time attack against moving targets. *IEEE Trans Aerosp Electron Syst*, 2018, 54: 2580–2589
- He S, Wang W, Lin D, et al. Consensus-based two-stage salvo attack guidance. *IEEE Trans Aerosp Electron Syst*, 2017, 54: 1555–1566
- He S, Kim M, Song T, et al. Three-dimensional salvo attack guidance considering communication delay. *Aerospace Sci Tech*, 2018, 73: 1–9

- 19 Olfati-Saber R, Murray R M. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays. *IEEE Trans Automat Contr*, 2004, 49: 1520–1533
- 20 Ryoo C K, Cho H, Tahk M J. Time-to-go weighted optimal guidance with impact angle constraints. *IEEE Trans Contr Syst Technol*, 2006, 14: 483–492

On virtual leader-follower-based distributed cooperative swarm guidance strategy

LIN DeFu^{1,2}, HE ShaoMing^{1,2}, WANG Jiang^{1,2} & LI BoYa^{1,2}

¹ School of Aerospace Engineering, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China;

² Beijing Key Laboratory of UAV Autonomous Control, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China

This paper investigates the problem of salvo attack guidance of multiple missiles and suggests a virtual leader-follower-based distributed cooperative guidance law to address this problem. The proposed guidance law is composed of two different parts: a baseline guidance law and an impact-time error feedback term. For scenarios with only impact-time constraint, the baseline guidance law is chosen as the classical pure proportional navigation for target capture. When considering both impact angle and impact time constraints, the well-known time-to-go weighted optimal guidance is leveraged as the baseline guidance law. Theoretical analysis reveals that the impact-time discrepancy among all missiles converges to zero at the time of impact. Finally, numerical analysis is conducted to demonstrate the effectiveness of the proposed algorithm.

salvo attack, distributed cooperative guidance, impact time control, impact angle control

doi: [10.1360/SST-2019-0265](https://doi.org/10.1360/SST-2019-0265)