2-Calabi-Yau 范畴与 3-Calabi-Yau 范畴

献给刘绍学教授 90 华诞

杨东

南京大学数学系, 南京 210093

E-mail: yangdong@nju.edu.cn

收稿日期: 2018-01-02; 接受日期: 2018-05-09; 网络出版日期: 2018-10-31

国家自然科学基金 (批准号: 11401297) 资助项目

摘要 本综述收集了关于带丛倾斜对象的 2-Calabi-Yau 范畴与带类单族的 3-Calabi-Yau 范畴之间关系的一些结果, 包括 Ginzburg 和 Kontsevich-Soibelman 对带类单族的 3-Calabi-Yau 范畴的构造以及 Buan-Marsh-Reiten-Reineke-Todorov 和 Amiot 对带丛倾斜对象的 2-Calabi-Yau 范畴的构造, 并讨论了带丛倾斜对象的 2-Calabi-Yau 范畴的标准形问题.

关键词 Calabi-Yau 三角范畴 丛倾斜对象 类单族 Ginzburg 微分分次代数 Kontsevich-Soibelman A_∞ -代数 广义丛范畴

MSC (2010) 主题分类 18E30, 16E45, 14A22

1 引言

带丛倾斜对象的 2-Calabi-Yau 范畴在对 Fomin-Zelevinsky 引入的丛代数的加性范畴化中起着核心作用, 参见文献 [1–5]. Buan 等^[1]引入的无循环圈箭图的丛范畴是这种范畴的典型例子.

带类单族的 3-Calabi-Yau 范畴在代数几何和数学物理中起着重要作用^[6,7]. 这类范畴有两种代数构造: 给定一个带势箭图, Ginzburg^[8]构造了一个 3-Calabi-Yau 微分分次代数 Γ , 其有限维导出范畴 $\mathcal{D}_{fd}(\Gamma)$ 是带类单族的 3-Calabi-Yau 范畴; Kontsevich 和 Soibelman^[7]构造了一个 3-Calabi-Yau A_∞ -代数 $\mathcal{A}$, 其完备导出范畴 $\text{per}(\mathcal{A})$ 是带类单族的 3-Calabi-Yau 范畴. 这两种构造互为 Koszul 对偶.

这两类范畴之间的直接联系最初见于文献 [9–12]. 记 Γ 为一带势箭图的 Ginzburg 微分分次代数. Amiot^[9]及 Keller 和 Yang^[11]证明了广义丛范畴 $\mathcal{C} := \text{per}(\Gamma)/\mathcal{D}_{fd}(\Gamma)$ 是带丛倾斜对象的 2-Calabi-Yau 范畴. 我们猜想, 如果基域的特征为零, 那么所有带丛倾斜对象的 2-Calabi-Yau 范畴都是这种形式. 这个猜想对所有已知的例子都成立 (参见文献 [9, 10, 13–16]).

这篇综述回顾了上述几种构造: Buan-Marsh-Reiten-Reineke-Todorov 和 Amiot 对带丛倾斜对象的 2-Calabi-Yau 范畴的构造^[1,9,11]以及 Ginzburg 和 Kontsevich-Soibelman 对带类单族的 3-Calabi-Yau 范

英文引用格式: Yang D. The interplay between 2-Calabi-Yau and 3-Calabi-Yau triangulated categories (in Chinese). Sci Sin Math, 2018, 48: 1631–1640, doi: 10.1360/N012018-00001

畴的构造^[7,8], 并且讨论了关于证明所有带丛倾斜对象的 2-Calabi-Yau 范畴都是广义丛范畴这一猜想的一些思路.

设 k 为代数封闭域, 记 $D = \text{Hom}_k(?, k)$ 为 k -对偶函子. 本文中所有范畴均为 k -范畴, 所有代数均为 k -代数. 本文中以 Σ 记所有三角范畴的平移函子.

2 预备知识

本节回顾一些基本概念: 半倾斜对象、类单族、Calabi-Yau 范畴、丛倾斜对象、带势箭图、微分分次代数和 A_∞ -代数. 我们感兴趣的对象是带类单族的 3-Calabi-Yau 范畴和带丛倾斜对象的 2-Calabi-Yau 范畴.

对三角范畴 $\mathcal{C}$ 的对象子集 $\mathcal{S}$, 记 $\text{thick}(\mathcal{S})$ 为 $\mathcal{C}$ 的包含 $\mathcal{S}$ 的最小厚子范畴, 记 $\text{add}(\mathcal{S})$ 为 $\mathcal{C}$ 的包含 $\mathcal{S}$ 且对直和与直和项封闭的最小的全子范畴. 如果一个范畴的所有态射空间都是有限维线性空间, 那么称这个范畴是态射有限范畴.

2.1 半倾斜对象

设 $\mathcal{C}$ 为三角范畴, M 为 $\mathcal{C}$ 中对象. 若 M 满足以下两个条件:

- (1) $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, \Sigma^p M) = 0, \forall p > 0;$
- (2) $\mathcal{C} = \text{thick}(M),$

则称 M 为 $\mathcal{C}$ 中半倾斜对象 (silting object, 参见文献 [17–19]).

例 2.1 设 Λ 为有限维代数. 记 $\text{proj } \Lambda$ 为有限生成投射 Λ -模构成的范畴, $\mathcal{H}^b(\text{proj } \Lambda)$ 为其有界同伦范畴, 则秩 1 自由模 Λ 为 $\mathcal{H}^b(\text{proj } \Lambda)$ 中半倾斜对象.

2.2 类单族

设 $\mathcal{C}$ 为三角范畴, $X_1, \dots, X_n$ 为 $\mathcal{C}$ 中对象. 若以下条件满足:

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_i, \Sigma^p X_j) &= 0, \quad \forall p < 0, \quad \forall 1 \leq i, j \leq n, \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_i, X_j) &= \begin{cases} k, & \text{如果 } i = j, \\ 0, & \text{如果 } i \neq j, \end{cases} \quad \forall 1 \leq i, j \leq n, \\ \mathcal{C} &= \text{thick}(X_1, \dots, X_n), \end{aligned}$$

则称 $\{X_1, \dots, X_n\}$ 为 $\mathcal{C}$ 中类单族 (simple-minded collection, 参见文献 [20, 21]).

例 2.2 设 Λ 为有限维代数. 记 $\text{mod } \Lambda$ 为有限维 (右) Λ -模构成的范畴, $\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda)$ 为其有界导出范畴. 令 $S_1, \dots, S_n$ 为 Λ 上单模同构类的一族代表元, 则 $\{S_1, \dots, S_n\}$ 为 $\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda)$ 中类单族.

2.3 Calabi-Yau 三角范畴

设 $d \in \mathbb{Z}$. 假设 $\mathcal{C}$ 为满足 Krull-Schmidt 性质的态射有限三角范畴, 并且对任意 $X, Y \in \mathcal{C}$, 有满足双函子性质的同构

$$D \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, \Sigma^d X),$$

则称 $\mathcal{C}$ 为 d -Calabi-Yau 三角范畴 (d -Calabi-Yau triangulated category, 参见文献 [22,23]; 注意到文献 [23] 称此类范畴为弱 d -Calabi-Yau 范畴).

例 2.3 设 X 为 d 维 Calabi-Yau 代数簇. 记 $\text{coh } X$ 为 X 上凝聚层范畴, 则其有界导出范畴 $\mathcal{D}^b(\text{coh } X)$ 为 d -Calabi-Yau 三角范畴.

例 2.4 设 Λ 为有限维对称代数, 则 $\mathcal{H}^b(\text{proj } \Lambda)$ 为 0-Calabi-Yau 范畴.

2.4 丛倾斜对象

设 $d \in \mathbb{Z}$, 且设 $\mathcal{C}$ 为 d -Calabi-Yau 三角范畴, T 为 $\mathcal{C}$ 中对象. 若对 $\mathcal{C}$ 中对象 X 有 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, \Sigma^p X) = 0$ ($\forall 0 < p < d$) 当且仅当 X 属于 $\text{add}(T)$, 则称 T 为 $\mathcal{C}$ 中 d -丛倾斜对象 (d -cluster-tilting object, 参见文献 [24–26]). 通常将 2-丛倾斜对象简称为丛倾斜对象.

2.5 带势箭图

设 Q 为有限箭图. 以 Q_0 记 Q 的顶点集, 以 Q_1 记 Q 的箭向集. 对 $i \in Q_0$, 以 e_i 记 i 点的平凡路; 对 $a \in Q_1$, 以 $s(a)$ 记 a 的起点, 以 $t(a)$ 记 a 的终点.

以 kQ 记 Q 的路代数 (path algebra). 令 $\mathfrak{m}$ 为 kQ 的由 Q 的箭向生成的理想. 将 kQ 对 $\mathfrak{m}$ 做完完备化, 所得到的代数称为 Q 的完备路代数 (complete path algebra), 记为 $\widehat{kQ}$.

记 $\text{Cyc}(Q)$ 为 Q 的长度不小于 3 的循环圈构成的集合, 并令

$$\text{Pot}(Q) := \left\{ \sum_{c \in \text{Cyc}(Q)} \lambda_c c \in \widehat{kQ} \mid \lambda_c \in k \right\}.$$

$\text{Pot}(Q)$ 中元素称为 Q 上的势 (potential^[27]). 如果 $\sum_{c \in \text{Cyc}(Q)} \lambda_c c$ 是有限和, 则称之为有限势.

例 2.5 令 Q 为洛当箭图: $Q = \cdot \curvearrowright \cdot$, 则 α^3 、 $\alpha^3 + \alpha^5$ 和 $\sum_{i \in \mathbb{N}} \alpha^{2i+1}$ 均为 Q 上的势.

对 $a \in Q_1$, 定义 $\partial_a : \text{Pot}(Q) \rightarrow \widehat{kQ}$ 为满足如下两个条件的唯一映射 (参见文献 [27]):

$$\begin{aligned} \partial_a \left(\sum_{c \in \text{Cyc}(Q)} \lambda_c c \right) &= \sum_{c \in \text{Cyc}(Q)} \lambda_c \partial_a(c), \\ \partial_a(\alpha_l \cdots \alpha_1) &= \sum_{r: \alpha_r = a} \alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_l \cdots \alpha_{r+1}. \end{aligned}$$

例 2.6 令 Q 为箭图

且令 $W = \alpha\beta\gamma$, 则

$$\partial_\alpha(W) = \beta\gamma, \quad \partial_\beta(W) = \gamma\alpha, \quad \partial_\gamma(W) = \alpha\beta.$$

2.6 微分分次代数和 A_∞ -代数

设 A 为分次向量空间. 若 A 上有乘法使其成为分次代数, 并有微分 d 使其成为复形, 且满足分次 Leibniz 法则 (graded Leibniz rule)

$$d(ab) = d(a)b + (-1)^n ad(b),$$

其中 a 和 b 为 A 中任意齐次元素, n 为 a 的次数, 则称 A 为微分分次代数 (differential graded algebra).

设 A 为微分分次代数. 记 $\mathcal{D}(A)$ 为微分分次右 A -模的导出范畴, $\text{per}(A) = \text{thick}(A_A)$ 为完备导出范畴, $\mathcal{D}_{fd}(A)$ 为有限维导出范畴 (即 $M \in \mathcal{D}_{fd}(A)$ 当且仅当 M 的全同调 $H^*(M)$ 是有限维向量空间), 参见文献 [28, 29].

设 A 为分次向量空间. 若有一族映射 $\{m_n : A^{\otimes_k n} \rightarrow A \mid n \geq 1\}$, 其中 m_n 为 $2-n$ 次齐次线性映射, 满足等式

$$\sum_{i+j+l=n} (-1)^{ij+l} m_{i+1+l}(\mathbf{1}^{\otimes i} \otimes m_j \otimes \mathbf{1}^{\otimes l}) = 0, \quad n \geq 1, \quad (2.1)$$

其中 $i, l \geq 0, j \geq 1$, 则称 A 为 A_∞ -代数 (A_∞ -algebra), 映射 $\{m_n\}_{n \geq 1}$ 称为 A 的乘法. 若对任意 $n \geq 3$ 都有 $m_n = 0$, 则 A 是乘法为 m_2 、微分为 m_1 的微分分次代数.

设 $d \in \mathbb{Z}$, A 为 A_∞ -代数. A 上的 d 次循环结构是一个 d 次齐次分次对称非退化双线性型

$$(-, -) : A \times A \longrightarrow k,$$

满足

$$(m_n(a_1, \dots, a_n), a_{n+1}) = (-1)^n (-1)^{|a_1|(|a_2| + \dots + |a_{n+1}|)} (m_n(a_2, \dots, a_{n+1}), a_1).$$

设 A 为 A_∞ -代数. 记 $\mathcal{D}(A)$ 为 A 上右 A_∞ -模的导出范畴, 参见文献 [30]. 类似于微分分次代数的情形, 我们可定义完备导出范畴 $\text{per}(A)$ 和有限维导出范畴 $\mathcal{D}_{fd}(A)$.

3 带类单族的 3-Calabi-Yau 三角范畴

带类单族的 3-Calabi-Yau 三角范畴代数理论包含对偶的两个方面: Ginzburg 的构造和 Kontsevich-Soibelman 的构造. 这两个构造都基于带势箭图.

3.1 Ginzburg 的构造

令 (Q, W) 为带势箭图. Ginzburg 构造了微分分次代数 $\widehat{\Gamma}(Q, W)$, 称为 (Q, W) 的完备 Ginzburg 微分分次代数, 参见文献 [8, 11]. 作为分次代数 $\widehat{\Gamma}(Q, W) = k\widehat{Q}$, 即分次箭图 $\widehat{Q}$ 的完备路代数, 其中分次箭图 $\widehat{Q}$ 的顶点与 Q 相同, 其箭向集中在三个分次:

- (1) 0 次: Q 的箭向;
- (2) -1 次: $a^* : t(a) \rightarrow s(a), \forall a \in Q_1$;
- (3) -2 次: $t_i : i \rightarrow i, \forall i \in Q_0$.

注意此处完备化取在分次代数的范畴中, 所以, $k\widehat{Q}$ 的 n 次分支中元素形如 $\sum_p \lambda_p p$, 其中 p 取遍 $\widehat{Q}$ 所有次数为 n 的路. 完备化赋予了 $\widehat{\Gamma}(Q, W) = k\widehat{Q}$ 一个伪紧拓扑, 参见文献 [11, 31]. $\widehat{\Gamma}(Q, W)$ 的微分 d 是满足下列条件的唯一 1 次齐次连续线性映射:

- (1) $d(uv) = (du)v + (-1)^n u dv$, 其中 u 和 v 为 $\widehat{\Gamma}(Q, W)$ 中任意齐次元素, n 为 u 的次数;
- (2) $d(e_i) = 0, \forall i \in Q_0$;
- (3) $d(a) = 0, \forall a \in Q_1$;
- (4) $d(a^*) = \partial_a W, \forall a \in Q_1$;
- (5) $d(t_i) = e_i(\sum_{a \in Q_1} aa^* - a^*a)e_i, \forall i \in Q_0$.

带势箭图 (Q, W) 的完备 Jacobi 代数 (the complete Jacobian algebra) 定义为 $\widehat{\Gamma}(Q, W)$ 的 0 次上调, 记为 $\widehat{J}(Q, W)$, 即

$$\widehat{J}(Q, W) = \frac{\widehat{kQ}}{(\partial_a W : a \in Q_1)},$$

其中以 $\bar{I}$ 记理想 I 的闭包. 如果势 W 是有限势, 我们可以类似定义非完备化的 Ginzburg 微分分次代数 $\Gamma(Q, W)$ 和 Jacobi 代数 $J(Q, W)$.

定理 3.1 (参见文献 [11, 定理 A.17] 和 [32]) 假设 (Q, W) 为带势箭图, $\Gamma = \widehat{\Gamma}(Q, W)$ 为其完备 Ginzburg 微分分次代数.

(1) Γ 是拓扑同调光滑 (topologically homologically smooth) 微分分次代数, 即 Γ 作为微分分次 Γ -双模属于 $\text{per}(\Gamma^{\text{op}} \widehat{\otimes} \Gamma)$. 特别地, $\text{per}(\Gamma) \supseteq \mathcal{D}_{fd}(\Gamma)$.

(2) Γ 具有双模 3-Calabi-Yau 性质, 即存在 $\mathcal{D}(\Gamma^{\text{op}} \widehat{\otimes} \Gamma)$ 中同构

$$\text{RHom}_{\Gamma^{\text{op}} \widehat{\otimes} \Gamma}(\Gamma, \Gamma^{\text{op}} \widehat{\otimes} \Gamma) \cong \Sigma^{-3} \Gamma.$$

由定理 3.1 可得 $\mathcal{D}_{fd}(\Gamma)$ 为 3-Calabi-Yau 三角范畴 (参见文献 [11, 第 A.15 小节]). 并且可验证单 $\widehat{J}(Q, W)$ -模同构类的代表元构成 $\mathcal{D}_{fd}(\Gamma)$ 中类单族.

注意到 $\Gamma = \widehat{\Gamma}(Q, W)$ 集中在非正分次, 因此, Γ 是 $\text{per}(\Gamma)$ 中半倾斜对象. 作为 Van den Bergh 的结果 [31, 定理 A 和 B] 的特殊情形, 我们有定理 3.1 的逆命题.

定理 3.2^[31] 假设域 k 的特征为 0. 设 A 为具有双模 3-Calabi-Yau 性质的拓扑同调光滑伪紧微分分次代数. 若 A 为 $\text{per}(A)$ 中半倾斜对象, 则存在带势箭图 (Q, W) 使得 A 作为微分分次代数拟同构于 $\widehat{\Gamma}(Q, W)$.

3.2 Kontsevich-Soibelman 的构造

令 (Q, W) 为带势箭图, Kontsevich 和 Soibelman 构造了一个 A_∞ -代数 $\mathcal{A}(Q, W)$, 称为 Kontsevich-Soibelman A_∞ -代数. 作为分次向量空间, $\mathcal{A}(Q, W)$ 集中在 4 个分次, 在这 4 个分次的基元素分别如下:

- (1) 0 次: $e_i, \forall i \in Q_0$;
- (2) 1 次: $a^*, \forall a \in Q_1$;
- (3) 2 次: $a \in Q_1$;
- (4) 3 次: $e_i^*, \forall i \in Q_0$.

设 $W = \sum_{c \in \text{Cyc}(Q)} \lambda_c c$. $\mathcal{A}(Q, W)$ 的乘法 m_n 定义如下:

- (1) $m_1 = 0$;
- (2) $m_2(e_{t(a)} \otimes a) = a = m_2(a \otimes e_{s(a)}), m_2(e_{s(a)} \otimes a^*) = a^* = m_2(a^* \otimes e_{t(a)}),$ 其中 $a \in Q_1$;
- (3) $m_2(e_i \otimes e_j^*) = 0 = m_2(e_j^* \otimes e_i), m_2(e_i \otimes e_i^*) = e_i^* = m_2(e_i^* \otimes e_i),$ 其中 i 和 j 为 Q 的不同顶点;
- (4) $m_2(a \otimes a^*) = t_{t(a)}^*, m_2(a^* \otimes a) = t_{s(a)}^*,$ 其中 $a \in Q_1$;
- (5) $m_n(\cdots \otimes e_i \otimes \cdots) = 0,$ 其中 $i \in Q_0, n \geq 3$;
- (6) $m_n(a_1^* \otimes \cdots \otimes a_n^*) = -\sum_{a \in Q_1} \lambda_{a_n \cdots a_1 a} a.$

定理 3.3^[7] 假设域 k 的特征为 0.

(1) 设 (Q, W) 为带势箭图, 则 $\mathcal{A}(Q, W)$ 有自然的 3 次循环结构.

(2) 设 A 为有 3 次循环结构的 A_∞ -代数且 A 的不可分解直和项构成 $\text{per}(A)$ 中类单族, 则存在带势箭图 (Q, W) 使得 A 作为 A_∞ -代数同构于 $\mathcal{A}(Q, W)$.

3.3 两个构造之间的关系

Koszul 对偶将 Ginzburg 的构造与 Kontsevich-Soibelman 的构造联系起来. 令 (Q, W) 为带势箭图, $\Gamma = \widehat{\Gamma}(Q, W)$ 为其完备 Ginzburg 微分分次代数, $\mathcal{A} = \mathcal{A}(Q, W)$ 为其 Kontsevich-Soibelman A_∞ -代数. 注意到 Γ 的微分与 $\mathcal{A}$ 的乘法之间有很强关系. 具体来讲, Γ 可由 $\mathcal{A}$ 经由对偶拔分解 (dual bar construction, 参见文献 [33, 34]) 得到:

$$\Gamma = \mathrm{Hom}_K(T_K(\mathcal{A}^{\geq 1}[1]), K),$$

其中 $K = kQ_0$, $T_K V$ 为分次 K -双模 V 的张量代数. 反之, Kontsevich-Soibelman A_∞ -代数 $\mathcal{A}$ 是 Γ 的 A_∞ -Koszul 对偶. 因此有如下三角等价:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{per}(\Gamma) & \xrightarrow{\simeq} & \mathcal{D}_{fd}(\mathcal{A}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{D}_{fd}(\Gamma) & \xrightarrow{\simeq} & \mathrm{per}(\mathcal{A}). \end{array}$$

4 带丛倾斜对象的 2-Calabi-Yau 三角范畴

带丛倾斜对象的 2-Calabi-Yau 三角范畴的典型例子是箭图的丛范畴.

设 Q 为无循环圈箭图, 则路代数 kQ 上有限维模范畴 $\mathrm{mod} kQ$ 的有界导出范畴 $\mathcal{D}^b(\mathrm{mod} kQ)$ 有 Serre 函子, 即导出 Nakayama 函子 $\nu = ? \otimes^L D(kQ)$ (参见文献 [35, 定理 4.6]). 箭图 Q 的丛范畴 (cluster category, 参见文献 [1]) $\mathcal{C}_Q$ 定义为轨道范畴

$$\mathcal{C}_Q := \mathcal{D}^b(\mathrm{mod} kQ)/(\nu\Sigma^{-2}).$$

定理 4.1 (1) $\mathcal{C}_Q$ 是 2-Calabi-Yau 三角范畴 (参见文献 [36, 定理 1 和推论 1]);

(2) kQ 在 $\mathcal{C}_Q$ 中的像是丛倾斜对象 (参见文献 [1, 定理 3.3(b)]).

带丛倾斜对象的 2-Calabi-Yau 三角范畴的构造还有两个来源:

(i) 箭图的预投射代数的模范畴 (参见文献 [37, 38]);

(ii) Gorenstein 孤立奇点的 Cohen-Macaulay 模范畴 (参见文献 [39, 40]).

对带丛倾斜对象的 2-Calabi-Yau 三角范畴 Keller 和 Reiten 有如下辨识定理.

定理 4.2 (参见文献 [10, 定理 2.1]) 设 $\mathcal{C}$ 为 2-Calabi-Yau 代数三角范畴. 假设 $\mathcal{C}$ 中某丛倾斜对象 T 的自同态代数同构于某无循环圈箭图的路代数 kQ , 则有三角等价

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_Q & \xrightarrow{\simeq} & \mathcal{C}, \\ kQ & \longmapsto & T. \end{array}$$

5 从 3-Calabi-Yau 范畴到 2-Calabi-Yau 范畴

设 (Q, W) 为带势箭图. 它的广义丛范畴 (generalised cluster category, 参见文献 [9]) 定义为三角商 $\mathcal{C}_{(Q, W)} := \mathrm{per}(\widehat{\Gamma}(Q, W))/\mathcal{D}_{fd}(\widehat{\Gamma}(Q, W))$. 注意到它等价于三角商 $\mathcal{D}_{fd}(\mathcal{A}(Q, W))/\mathrm{per}(\mathcal{A}(Q, W))$.

定理 5.1 假设 $\hat{J}(Q, W)$ 是有限维代数, 则 $\mathcal{C}_{(Q, W)}$ 是 2-Calabi-Yau 三角范畴. 进一步, $\hat{\Gamma}(Q, W)$ 在 $\mathcal{C}_{(Q, W)}$ 中的像是丛倾斜对象, 其自同态代数为 $\hat{J}(Q, W)$. 特别地, 若 Q 是无圈箭图, 则 $\mathcal{C}_{(Q, 0)}$ 三角等价于 $\mathcal{C}_Q$.

这个结果是下面定理的特殊情形. 这个更广的结果是文献 [9, 定理 2.1 和 3.5] 的“拓扑”版本, 在文献 [41, 42] 中有进一步的推广.

定理 5.2 (参见文献 [11, 定理 A.21]) 设 A 为微分分次代数. 如果 A 满足如下四个条件:

- (1) $H^i(A) = 0, \forall i > 0$;
- (2) $H^0(A)$ 是有限维代数;
- (3) A 是拓扑同调光滑伪紧微分分次代数;
- (4) A 具有双模 3-Calabi-Yau 性质,

则 $\text{per}(A)/\mathcal{D}_{fd}(A)$ 是 2-Calabi-Yau 三角范畴, 并且 A 在 $\text{per}(A)/\mathcal{D}_{fd}(A)$ 中的像是丛倾斜对象, 其自同态代数为 $H^0(A)$.

6 从 2-Calabi-Yau 范畴到 3-Calabi-Yau 范畴

受定理 4.2 和 5.1 的启发, 我们提出如下猜想 (参见文献 [43, Summary of Results, Part 2, Perspectives]):

猜想 6.1 假设域 k 的特征为 0. 设 $\mathcal{C}$ 为 2-Calabi-Yau 代数三角范畴, T 为 $\mathcal{C}$ 中丛倾斜对象, 则存在带势箭图 (Q, W) 和三角等价

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_{(Q, W)} &\xrightarrow{\simeq} \mathcal{C}, \\ \hat{\Gamma}(Q, W) &\longmapsto T.\end{aligned}$$

如果这个猜想成立, 那么, Amiot^[44] 提出的以下问题将得到肯定的回答.

问题 6.2 (参见文献 [44, 问题 2.20]) 假设域 k 的特征为 0. 设 $\mathcal{C}$ 为 2-Calabi-Yau 代数三角范畴, T 为 $\mathcal{C}$ 中丛倾斜对象, 则存在带势箭图 (Q, W) 使得 T 的自同态代数同构于 $\hat{J}(Q, W)$.

注意到, 我们对 Amiot 的原始问题进行了两处修改. 一处是我们将非完备化的 Jacobi 代数换成了完备 Jacobi 代数. 在文献 [45, 例 4.3] 中, Plamondon 给出了一个带势箭图 (Q, W) 其完备 Jacobi 代数 $\hat{J}(Q, W)$ 不是任何带势箭图的 Jacobi 代数, 由定理 5.1 可知这给出了原问题的反例. 另一处是我们添加了关于域 k 特征的条件. 如果域 k 的特征 p 为正, 那么以上问题 6.2 的答案是否定的. 例如, 令 Γ 为微分分次代数 $k\langle x, x^*, t \rangle$, 其中 x, x^* 和 t 的次数分别为 0, -1 , 和 -2 , 微分 d 由

$$d(x) = 0, \quad d(x^*) = x^{p-1}, \quad d(t) = xx^* - x^*x$$

定义, 则 Γ 满足定理 5.2 中的所有条件, 所以, $k[x]/(x^{p-1}) = H^0\Gamma$ 是 2-Calabi-Yau 代数三角范畴 $\text{per}(\Gamma)/\mathcal{D}_{fd}(\Gamma)$ 中丛倾斜对象 Γ 的自同态代数, 但是 $k[x]/(x^{p-1})$ 不是完备 Jacobi 代数. Ladkani 在文献 [46] 中给出了更多例子.

Amiot^[9] 提供了解决猜想 6.1 的一种方法. 对第 4 节中由 (i) 和 (ii) 构造出的很多 2-Calabi-Yau 三角范畴 $\mathcal{C}$, 可以构造出整体维数为 2 的有限维代数 A 使得 $\mathcal{C}$ 三角等价于 A 的丛范畴. 另一方面, A 的 3-Calabi-Yau 完备化 (3-Calabi-Yau completion, 参见文献 [32]) $\Pi_3(A)$ 满足定理 5.2 中所有条件 (我们需要将拓扑同调光滑改为同调光滑), 并且 A 的丛范畴三角等价于 $\text{per}(\Pi_3(A))/\mathcal{D}_{fd}(\Pi_3(A))$ (参见文

献 [32, 定理 6.12(a)]). 而根据 Keller 的结果 [32, 定理 6.10], 存在带势箭图 (Q, W) 使得 $\Pi_3(A)$ 拟同构于 $\Gamma(Q, W)$. 因此, $\mathcal{C}$ 三角等价于 $\text{per}(\Gamma(Q, W))/\mathcal{D}_{fd}(\Gamma(Q, W))$. 文献 [9, 13–15] 在这个方向上做了很多工作. 这个方法的“完备”版本可以用来解决猜想 6.1.

解决猜想 6.1 的另一种方法是“从 2-Calabi-Yau 范畴到 3-Calabi-Yau 范畴”. 下面解释这种方法.

设 $\mathcal{E}$ 为 Frobenius 范畴, 有投射生成子 P , 且 $M = P \oplus M'$ 为 $\mathcal{E}$ 中对象. 令 $\mathcal{C}$ 为 $\mathcal{E}$ 的稳定范畴, $A = \text{End}_{\mathcal{E}}(M)$, $e \in A$ 为对应直和项 P 的幂等元, 则 $A/AeA = \text{End}_{\mathcal{C}}(M)$. 以下结果为文献 [24, 命题 4(c)] 的推论. 假设 $\mathcal{C}$ 是 2-Calabi-Yau 三角范畴.

定理 6.3 假设 M 为 $\mathcal{C}$ 中丛倾斜对象, 并令 $\mathcal{D}_{fd, A/AeA}(\text{Mod } A)$ 为对象为全同调是有限维向量空间且支撑在 A/AeA 上的 A -模复形所构成的 $\mathcal{D}(\text{Mod } A)$ 的全子范畴, 则有如下具有双函子性的同构:

$$D \text{Hom}(X, Y) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}(Y, \Sigma^3 X),$$

其中 $X \in \text{mod } A/AeA$, $Y \in \mathcal{D}_{fd, A/AeA}(\text{Mod } A)$.

设 $S_1, \dots, S_n$ 是单 A/AeA -模同构类的代表元. 把它们看成 A -模, 则 $\{S_1, \dots, S_n\}$ 是

$$\mathcal{D}_{fd, A/AeA}(\text{Mod } A)$$

中的一个类单族. 根据 Lefèvre 的 A_{∞} 版本的三角范畴的 Morita 定理可知, 存在 A_{∞} -代数 E 和三角等价 $\text{per}(E) \rightarrow \mathcal{D}_{fd, A/AeA}(\text{Mod } A)$ 将 E 的不可分解直和项映为类单族 $\{S_1, \dots, S_n\}$ (参见文献 [47, 引理 4.1(b)]). 并且由定理 6.3 可知, 在 E 上有 3 次齐次分次对称非退化双线性型, 但是很遗憾我们不能应用定理 3.3, 因为我们不知道这是否定义了 E 上一个循环结构.

对 $\mathcal{E} = \text{MCM}(R)$, 其中 R 为完备 Gorenstein 局部交换代数且 $X = \text{Spec } R$ 只有孤立奇点, de Völcsy 和 Van den Bergh 在文献 [16] 中发展了另一种思路.

定理 6.4 (参见文献 [16, 定理 1.1]) 假设如上. 假设 $\tilde{A} \rightarrow A$ 是 A 的余纤维化极小模型并令 $B = \tilde{A}/\tilde{A}e\tilde{A}$, 则三角等价 $\text{per}(B)/\mathcal{D}_{fd}(B) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}$.

容易验证 $\mathcal{D}_{fd}(B) \simeq \mathcal{D}_{fd, A/AeA}(\text{Mod } A)$ (参见文献 [48, 推论 2.12(b)]). 如果 $\tilde{A}$ 是某带势箭图的完备 Ginzburg 微分分次代数, 则 B 是另一带势箭图 (Q, W) 的完备 Ginzburg 微分分次代数. 此时有三角等价

$$\mathcal{C}_{(Q, W)} \simeq \mathcal{C}.$$

Kalck 和 Yang 在文献 [48, 49] 中独立发展了这一思路. 作为例子, 考虑 3 维 McKay 对应.

例 6.5 设 $G \subset SL_3(k)$ 为有限子群, 则 G 作用在 $S = k[x, y, z]$ 上. 令 $R = S^G$ 为 S 的不动点子代数. 假设 $X = \text{Spec } R$ 只有孤立奇点, 则由文献 [50, 定理 2.5] 可知, 作为 R -模 S 是稳定范畴 $\text{MCM}(R)$ 中的丛倾斜对象, 且 $\text{End}_{\text{MCM}(R)}(S)$ 同构于 $\hat{J}(Q', W')$, 其中 Q' 是 McKay 箭图, W' 是 Q' 上一个典则势, 参见文献 [8, 第 4.4 小节]. 进一步, 此时投影映射 $\hat{\Gamma}(Q', W') \rightarrow \hat{J}(Q', W')$ 是 $\hat{J}(Q', W')$ 的余纤维化极小模型. 设 e 是 R 的恒等自同态, 看作 A 中元素. 记 0 为 Q' 的对应平凡表示的顶点, 且令 (Q, W) 为由 (Q', W') 去除顶点 0 之后得到的带势箭图, 则 $B = \hat{\Gamma}(Q', W')/\hat{\Gamma}(Q', W')e\hat{\Gamma}(Q', W') = \hat{\Gamma}(Q, W)$. 因此, $\text{MCM}(R)$ 三角等价于广义丛范畴 $\mathcal{C}_{(Q, W)}$.

参考文献

- 1 Buan A B, Marsh R J, Reineke M, et al. Tilting theory and cluster combinatorics. *Adv Math*, 2006, 204: 572–618
- 2 Buan A B, Marsh R J, Reiten I. Cluster mutation via quiver representations. *Comment Math Helv*, 2008, 83: 143–177

- 3 Caldero P, Keller B. From triangulated categories to cluster algebras. *Invent Math*, 2008, 172: 169–211
- 4 Palu Y. Cluster characters for 2-Calabi-Yau triangulated categories. *Ann Inst Fourier (Grenoble)*, 2008, 58: 2221–2248
- 5 Plamondon P-G. Cluster characters for cluster categories with infinite-dimensional morphism spaces. *Adv Math*, 2011, 227: 1–39
- 6 Bridgeland T. Stability conditions on a non-compact Calabi-Yau threefold. *Comm Math Phys*, 2006, 266: 715–733
- 7 Kontsevich M, Soibelman Y. Stability structures, motivic Donaldson-Thomas invariants and cluster transformations. *ArXiv:0811.2435*, 2008
- 8 Ginzburg V. Calabi-Yau algebras. *ArXiv:math/0612139*, 2006
- 9 Amiot C. Cluster categories for algebras of global dimension 2 and quivers with potential. *Ann Inst Fourier (Grenoble)*, 2009, 59: 2525–2590
- 10 Keller B, Reiten I. Acyclic Calabi-Yau categories. *Compos Math*, 2008, 144: 1332–1348
- 11 Keller B, Yang D. Derived equivalences from mutations of quivers with potential. *Adv Math*, 2011, 226: 2118–2168
- 12 Tabuada G. On the structure of Calabi-Yau categories with a cluster tilting subcategory. *Doc Math*, 2007, 12: 193–213
- 13 Amiot C, Iyama O, Reiten I. Stable categories of Cohen-Macaulay modules and cluster categories. *Amer J Math*, 2015, 137: 813–857
- 14 Amiot C, Iyama O, Reiten I, et al. Preprojective algebras and c -sortable words. *Proc Lond Math Soc (3)*, 2012, 104: 513–539
- 15 Amiot C, Reiten I, Todorov G. The ubiquity of generalized cluster categories. *Adv Math*, 2011, 226: 3813–3849
- 16 de Völcsy L D T, van den Bergh M. Explicit models for some stable categories of maximal Cohen-Macaulay modules. *Math Res Lett*, 2016, 23: 1507–1526
- 17 Keller B, Vossieck D. Aisles in derived categories. *Bull Soc Math Belg Sér A*, 1988, 40: 239–253
- 18 Aihara T, Iyama O. Silting mutation in triangulated categories. *J Lond Math Soc (2)*, 2012, 85: 633–668
- 19 Wei J. Semi-tilting complexes. *Israel J Math*, 2013, 194: 871–893
- 20 Koenig S, Yang D. Silting objects, simple-minded collections, t -structures and co- t -structures for finite-dimensional algebras. *Doc Math*, 2014, 19: 403–438
- 21 Keller B, Nicolás P. Weight structures and simple dg modules for positive dg algebras. *Int Math Res Not IMRN*, 2013, 2013: 1028–1078
- 22 Kontsevich M. Triangulated categories and geometry. Course at the École Normale Supérieure, Paris. Notes taken by J. Bellaïche, J-F Dat, I Marin, G Racinet and H Randriambololona, 1998
- 23 Keller B. Calabi-Yau triangulated categories. In: *Trends in Representation Theory of Algebras and Related Topics*. EMS Series of Congress Reports. Zürich: Eur Math Soc, 2008, 467–489
- 24 Keller B, Reiten I. Cluster-tilted algebras are Gorenstein and stably Calabi-Yau. *Adv Math*, 2007, 211: 123–151
- 25 Thomas H. Defining an m -cluster category. *J Algebra*, 2007, 318: 37–46
- 26 Zhu B. Generalized cluster complexes via quiver representations. *J Algebraic Combin*, 2008, 27: 25–54
- 27 Derksen H, Weyman J, Zelevinsky A. Quivers with potentials and their representations, I: Mutations. *Selecta Math (NS)*, 2008, 14: 59–119
- 28 Keller B. Deriving DG categories. *Ann Sci École Norm Sup (4)*, 1994, 27: 63–102
- 29 Keller B. On differential graded categories. In: *International Congress of Mathematicians, Vol. II*. Zürich: Eur Math Soc, 2006, 151–190
- 30 Keller B. A-infinity algebras, modules and functor categories. In: *Trends in Representation Theory of Algebras and Related Topics*. Contemporary Mathematics, vol. 406. Providence: Amer Math Soc, 2006, 67–93
- 31 Van den Bergh M. Calabi-Yau algebras and superpotentials. *Selecta Math (NS)*, 2015, 21: 555–603
- 32 Keller B. Deformed Calabi-Yau completions, with an appendix by Michel Van den Bergh. *J Reine Angew Math*, 2011, 654: 125–180
- 33 Lefèvre-Hasegawa K. Sur les A_∞ -catégories. *ArXiv:math.CT/0310337*, 2003
- 34 Lu D-M, Palmieri J H, Wu Q-S, et al. Koszul equivalences in A_∞ -algebras. *New York J Math*, 2008, 14: 325–378
- 35 Happel D. On the derived category of a finite-dimensional algebra. *Comment Math Helv*, 1987, 62: 339–389
- 36 Keller B. On triangulated orbit categories. *Doc Math*, 2005, 10: 551–581
- 37 Buan A B, Iyama O, Reiten I, et al. Cluster structures for 2-Calabi-Yau categories and unipotent groups. *Compos Math*, 2009, 145: 1035–1079

- 38 Geiß C, Leclerc B, Schröer J. Partial flag varieties and preprojective algebras. *Ann Inst Fourier (Grenoble)*, 2008, 58: 825–876
- 39 Burban I, Iyama O, Keller B, et al. Cluster tilting for one-dimensional hypersurface singularities. *Adv Math*, 2008, 217: 2443–2484
- 40 Iyama O. Auslander correspondence. *Adv Math*, 2007, 210: 51–82
- 41 Guo L. Cluster tilting objects in generalized higher cluster categories. *J Pure Appl Algebra*, 2011, 215: 2055–2071
- 42 Iyama O, Yang D. Silting reduction and Calabi-Yau reduction of triangulated categories. *Trans Amer Math Soc*, 2018, 370: 7861–7898
- 43 Amiot C. Sur les petites catégories triangulées. PhD Thesis. Paris: Université Paris Diderot, 2008
- 44 Amiot C. On generalized cluster categorie. In: *Representations of Algebras and Related Topics*. Zürich: Eur Math Soc, 2011, 1–53
- 45 Plamondon P-G. Generic bases for cluster algebras from the cluster category. *Int Math Res Not IMRN*, 2013, 2013: 2368–2420
- 46 Ladkani S. 2-CY tilted algebras that are not Jacobian. *ArXiv:1403.6814*, 2014
- 47 Su H, Yang D. From simple-minded collections to silting objects via Koszul duality. *Algebr Represent Theory*, 2018, 85: 1–22
- 48 Kalck M, Yang D. Relative singularity categories, I: Auslander resolutions. *Adv Math*, 2016, 301: 973–1021
- 49 Kalck M, Yang D. Relative singularity categories, III: Cluster resolutions. *Work in preparation*
- 50 Iyama O. Higher-dimensional Auslander-Reiten theory on maximal orthogonal subcategories. *Adv Math*, 2007, 210: 22–50

The interplay between 2-Calabi-Yau and 3-Calabi-Yau triangulated categories

Dong Yang

Abstract This paper surveys the constructions of 3-Calabi-Yau triangulated categories with simple-minded collections due to Ginzburg and Kontsevich-Soibelman and the constructions of 2-Calabi-Yau triangulated categories with cluster-tilting objects due to Buan-Marsh-Reiten-Reineke-Todorov and Amiot, and includes a discussion on the normal form of 2-Calabi-Yau triangulated categories with cluster-tilting objects.

Keywords Calabi-Yau triangulated category, cluster-tilting object, simple-minded collection, Ginzburg differential graded algebra, Kontsevich-Soibelman A_∞ -algebra, generalised cluster category

MSC(2010) 18E30, 16E45, 14A22

doi: 10.1360/N012018-00001