幂零 Lie 群上的尖锐不等式

献给王斯雷教授 85 华诞

刘和平¹, 张安^{2*}

1. 北京大学数学科学学院, 北京 100871;

2. 中国科学技术大学数学科学学院, 合肥 230026

E-mail: hepingliu@math.pku.edu.cn, azhang@ustc.edu.cn

收稿日期: 2018-05-30; 接受日期: 2018-06-25; 网络出版日期: 2018-10-11; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11371036 和 11801536)、法国国家科研署 (ANR) (批准号: ANR-12-BS01-0019 和 ANR-17-CE40-0030) 和欧洲研究委员会 (ERC) (批准号: 291214) 资助项目

摘要 本文首先回顾近些年关于幂零 Lie 群上尖锐不等式的工作, 包括最佳常数、极值函数、稳定性和其他一些改进, 然后证明了一个新的次临界不等式. 本文讨论了共形对称性、紧性、谱估计和流方法. 在具有高维中心的群上对奇异指标有正定性的限制为我们的研究带来了额外的难度.

关键词 极值函数 HLS (Hardy-Littlewood-Sobolev) 不等式 幂零 Lie 群

MSC (2010) 主题分类 43A80, 26D10, 35A23

1 引言

多年来, 重要不等式的最佳常数和极值函数一直是分析、几何、概率、偏微分方程和数学物理等众多邻域中的重要课题. 它们通常能够揭示底空间、流形或群所蕴含的深刻几何性质, 因而在几何和分析中有重要地位, 也吸引了众多数学家致力于此邻域的研究并取得了丰富的结果.

大多数情形下, 我们考虑一个有界线性算子 $T: L^p(X) \mapsto L^q(Y)$, 其中 X 和 Y 为两个测度空间. 称算子范数 $\|T\| := \sup \|Tf\|_q / \|f\|_p$ 为最佳常数, 通常用 C 表示. 这个基本定义, 可以推广到更一般的空间、算子或泛函. 很自然地可以提问: 是否存在非零函数, 使得最佳常数可以被取到? 这类非零函数, 称为对应于算子、不等式或泛函的极值函数. 如果有一列非零函数列逼近于最佳常数, 则称它为极化函数列. 对于变分极值问题, 首先要解决极值函数的存在性和唯一性. 在一些特殊情形下, 问题本身蕴含了非常好的几何性质, 特别是对称性, 这使得我们能够得到极值函数的显式表达式. 但在一般情形下, 要得到闭形式的表达式非常困难. 这时, 在保证存在性的前提下, 可以转向研究极值函数的一些定性和定量性质, 如正则性、对称下降性和逼近性质等. 对于已知极值函数的变分极值问题, 则可以研究极值函数的稳定性和余项估计.

英文引用格式: Liu H P, Zhang A. On sharp inequalities on nilpotent Lie groups (in Chinese). Sci Sin Math, 2018, 48: 1371–1386, doi: 10.1360/N012018-00149

集中紧方法对证明存在性起到至关重要的作用^[1]. 局部化和靴带自益方法是证明正则性的强有力工具. 推广的移动平面方法^[2]或其他重排方法在证明可能的对称下降性质时非常有效. 著名的 Riesz-Sobolev 重排不等式和多线性的 Brascamp-Lieb-Luttinger 不等式是重要的基本工具, 而这些不等式取等情形的刻画起到了非常关键的作用. 虽然在大多数情形下, 这类重排极值问题本身尚未被解决, 但已有很多重要的结果, 如文献 [3, 4]. Bianchi-Egnell 方法^[5]可应用于证明稳定性和余项估计. 对非局部算子的稳定性, 文献 [6] 得到了很好的结果. 非线性流和长时间行为的谱分析方法可用于改进几何泛函不等式的整体估计. 相反, 极值函数对称性的研究在发展扩散方程理论中也有重要作用^[7-9]. 最优运输方法在一些情形下可以带来更好的结果^[10], 而 Euler-Lagrange 方程通常能给我们很好的启发. 算子不等式和底空间的几何结构是问题的关键, 因此, 我们需要对它们进行更精细的开发和运用.

总而言之, 我们致力于从多种不同的角度来更好地理解和优化几何与分析中的重要不等式. 在这个日趋活跃的研究领域中, 虽然已取得了许多重要的进展, 但仍有许多有趣的问题亟待解决.

Euclid 空间上经典的 HLS 不等式和相关的 Sobolev 嵌入不等式的研究, 长期以来一直受到广泛的关注. Aubin^[11]和 Talenti^[12]最早给出了一阶 Sobolev 嵌入不等式的所有极值函数和最佳常数. 之后, Lieb^[13]取得了突破性成果, 在 $\mathbb{R}^n$ 和球面 S^n 上证明了尖锐的对称指标的 HLS 不等式, 并给出了所有极值函数: 对于任意的指标 $0 < \lambda < n$, 有

$$\iint_{(\mathbb{R}^n)^2} \frac{f(x)g(y)}{|x-y|^\lambda} dx dy \leq C_{n,\lambda} \|f\|_p \|g\|_p, \quad p = \frac{2n}{2n-\lambda},$$

在允许平移和伸缩的前提下, 等号成立当且仅当

$$f = (1 + |x|^2)^{-(2n-\lambda)/2}.$$

紧性和对称重排方法在文献 [13] 中发挥了核心作用, 也因为其具有广泛的通用性而成为了研究很多变分问题的标准方法. Carlen 和 Loss^[14]通过简化和整合 Lieb 的方法, 给出了一种竞争对称化方法用于直接证明 Barenblatt 函数就是极值函数. 这种方法是对任意正的 L^p 函数交替使用共形作用和对称重排, 极好地平衡了对称群的“坏”和“好”的双面作用, 从而构造了一系列特殊的强收敛极化函数列. 其他不依赖对称重排的方法可参见 Frank 和 Lieb 的工作 [15, 16]. 文献 [15] 是用逆正定性得到关于部分指标 $\lambda \geq n-2$ 的结果. 文献 [16] 使用的反变分谱估计方法首先被用于研究 Heisenberg 群 (非交换) 上的 HLS 不等式, 并取得了重要的突破^[17].

在经典 Euclid 空间和 Riemann 流形上, 上述变分极值问题已有很多漂亮而深刻的结果. 但在次 Riemann 流形上, 已知的结果相对较少, 实质性的突破在相当长一段时间内更是凤毛麟角. 20 世纪 80 年代最重要的结果是 Jerison 和 Lee^[18]在研究 CR (Cauchy-Riemann) 球面上 Yamabe 问题时得到的最优 Sobolev 不等式. 令 X 表示 Heisenberg 群 $\mathbb{H}^n$ 上的水平梯度, 他们证明了对于尖锐不等式

$$\|Xf\|_2 \geq C_n \|f\|_{2^*}, \quad 2^* = \frac{2(n+1)}{n},$$

等号成立当且仅当极值函数为

$$f = ((1 + |z|^2)^2 + |t|^2)^{-n}, \quad u = (z, t) \in \mathbb{H}^n. \quad (1.1)$$

在部分对称性条件下, 该结果被推广到某些 Heisenberg 型群上 (参见文献 [19]), 如四元数情形^[20, 21]. 文献 [18] 是 CR 几何上最早的深刻结果, 在其后相当长一段时间内, 我们对关于其他指标的 HLS 和 Sobolev 不等式的极值函数都知之甚少. 事实上, Jerison-Lee 的结果已经深刻揭示了, 在 Euclid 空间

上变分极值问题中大放异彩的对称重排方法, 在解决具有非交换性的卷积不等式时无能为力. 直到近期, Frank 和 Lieb^[17] 运用谱方法证明了二阶逆变分不等式, 从而解决了 Heisenberg 群和 CR 球面上所有对称指标的 HLS 变分极值问题. 这个优美的结果证明了紧 CR 球面上 HLS 不等式的变分极值函数只能是常值函数. 该结果可以对部分奇异的指标推广到 I 型群上 (参见文献 [22, 23]). 证明可参见文献 [24–27]. 在文献 [17] 不久之前, Branson 等^[27] 在 Heisenberg 群上得到了端点情形下对数 HLS 不等式的极值函数和 CR 球面上的 Beckner-Onofri 不等式. 他们的结果验证了关于一般 HLS 问题的猜想, 也启发了 Frank 和 Lieb 运用反变分不等式方法来研究 Heisenberg 群上的 HLS 问题. 文献 [28] 改进了这些不等式, 证明了极值函数的稳定性并比较了 HLS 不等式与分数阶 Sobolev 不等式的对偶余项, 从而推广了 Euclid 空间上相应的结果 (参见文献 [7, 29, 30]). 在 Euclid 空间和球面上, 还可以得到一个次临界版本的尖锐不等式^[31]. 我们在第 5 节中将该结果推广到 I 型群上. 最后, 我们指出近期得到的 Heisenberg 群上的几个重要的 Moser-Trudinger 型指数嵌入不等式^[27, 32, 33].

HLS 不等式作为测度空间上弱型 Young 不等式的特殊情形, 可以推广到一般的齐次幂零群上^[34]. Carnot 群是一类单连通的分层幂零 Lie 群, 可以在其上自然地定义不变 Haar 测度、群运算、齐次结构和次 Laplace 算子. H 型群和 I 型群^[35, 36] 为 Carnot 群的特殊子类, 是研究调和分析和亚椭圆算子的理想流形. 在这两类群上, 齐次范数是严格意义下的空间范数, HLS 不等式的极值问题相对容易处理. 令 $|\cdot|$ 表示 Carnot 群 G 上标准的齐次范数, Q 为齐次维数. 对任意的相容性指标

$$0 < \lambda < Q, \quad 1 < p, q < \infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{\lambda}{Q} = 2,$$

我们有 Carnot 群 G 上的 HLS 不等式

$$\| |\cdot|^{-\lambda} * f \|_{q'} \leq C \|f\|_p. \quad (1.2)$$

关于该不等式的极值问题, 存在性和正则性在文献 [37] 中给出. 使用的方法分别为集中紧方法和标准靴带自益方法^[1, 38].

命题 1.1 变分极值问题 (1.2) 的极值函数是存在且光滑的.

文献 [1, 13] 给出了 Euclid 空间上 HLS 变分问题的极值函数的存在性. Heisenberg 群上 HLS 的极值函数的存在性在文献 [39] 中给出. 关于存在性和正则性更早的结果, Vassilev^[40] 研究了一类 Folland-Stein 嵌入不等式. 集中紧方法是解决分析和偏微分方程中一大类变分极值问题的非常有效的方法. 但是注意到, 与 Euclid 空间上经典的 HLS 类似, (1.2) 同样蕴含了丰富的对称性, 而这种对称性很容易使极化函数列的弱极限退化为零, 集中紧方法失效. 所以, 我们需要更有效的工具来开发不等式本身蕴含的对称性. 在 Euclid 空间上, 一个非常完美的工具就是对称下降重排. 但对于其他群, 他们的非交换性使得完全 Euclid 径向和齐次径向测地极值函数都是不存在的. 文献 [18] 给出了 Heisenberg 群上一个典型的例子 (1.1). 除了集中紧方法之外, 另一个极具技巧性的紧性方法可应用于 I 型群上的研究. 但该方法强烈依赖于核的正定性, 对具有高维中心的群, 只能得到部分指标 (参见文献 [17, 23]). 在得到存在性之后, 找到极值函数的闭形式显式表达式是非常困难的. 事实上, 即使在 Euclid 空间上, 该问题也是未知的. 所以, 我们需要研究极值函数的定性性质. 文献 [2, 38] 证明了 Euclid 空间上极值函数的正则性. 我们使用类似的方法可以证明 Carnot 群上相应的正则性, 结果对所有的临界点同样成立. 该方法主要是将非线性局部估计和靴带自益方法相结合. 这种连续方法也出现在发展方程的研究中, 对刻画正则性和长时间行为有重要作用, 读者可参见文献 [41]. 在下一节中, 我们将回顾 I 型群上的尖锐分数阶不等式.

2 I 型群上的尖锐 HLS 不等式

在 I 型群上, 关于 HLS 变分极值问题, 我们有下面的结果 (参见文献 [22, 23]):

定理 2.1 (尖锐 HLS 不等式) 设 G 为 I 型群, 齐次维数为 Q , 中心维数为 d . $|\cdot|$ 表示 G 上的齐次范数, du 为 Haar 测度. 对于 $2(d-1)_+ < \lambda < Q$ 和 $p = 2Q/(2Q - \lambda)$, 有尖锐不等式

$$\iint_{G^2} \frac{f(u)g(v)}{|u^{-1}v|^\lambda} dudv \leq C_{Q,d,\lambda} \|f\|_p \|g\|_p, \quad (2.1)$$

模掉共型对称群后, 极值函数是唯一的, 表示为 $f \approx g \approx J_C^{1/p}$, 其中 J_C 为 Cayley 变换的 Jacobi 行列式.

注 2.1 I 型群是一类特殊的 H 型群, 与秩一非紧对称空间紧密联系. 由 Clifford 代数模的研究可知, 任意 I 型群同构于 $G = \mathbb{K}^n \times \text{Im}\mathbb{K}$, 其中 $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$, n 为适当的次数. 对应于 $\mathbb{K}$ 的四种情形, I 型群的中心维数分别为 0、1、3 和 7. 特别地, 若中心维数 $d = 7$, 则 $n = 1$. 将 I 型群 G 中的元素表示为 $u = (z, t)$, 其中 $z \in \mathbb{K}^n$, $t \in \text{Im}\mathbb{K}$, 则 G 的群运算定义为 $uu' = (z, t)(z', t') = (z + z', t + t' + 2\text{Im}z \cdot \bar{z}')$. Haar 测度表示为 $du = dzdt$, 齐次维数 $Q = (d+1)n + 2d$. $|u| = (|z|^4 + |t|^2)^{1/4}$ 为 G 上的齐次范数. G 上的左平移变换 $L_u : v \rightarrow u^{-1}v$ ($u, v \in G$)、伸缩变换 $\delta u = (\delta z, \delta^2 t)$ 和反演变换 $u \mapsto (\frac{-z}{|z|^2 - t}, \frac{-t}{|z|^2 - t})$ 生成 G 上的整个共形变换群 $\text{Aut}(G)$. 可以证明: I 型群上 HLS 变分问题在下列共形作用下是不变的: $\sigma(f) = f \circ \sigma J_\sigma^{1/p}$, $\sigma \in \text{Aut}(G)$. 所以, 极值函数具有唯一性. 解决 HLS 变分问题的一个重要思想就是利用非紧 Lie 群与紧球面的同胚关系. 在 I 型群 G 与紧球面 $\mathbb{S}^{Q-d}$: $Cu = (\frac{2z}{1+|z|^2-t}, \frac{1-|z|^2+t}{1+|z|^2-t})$ 之间, 有自然的 Cayley 变换, 对应的 Jacobi 行列式为 $J_C = 2^{Q-d}((1+|z|^2)^2 + |t|^2)^{-Q/2}$. 该变换是 $\mathbb{R}^n$ 与 $\mathbb{S}^{2n+1}$ 之间的球测地变换的推广. 由 Cayley 变换, 我们可以在球面上得到一个等价的不等式, 即推论 2.1. 上述定理, 是文献 [19] 中关于指标 $\lambda = Q - 2$ 的推广, 同时也是四元数群上 [20, 21] 和 Heisenberg 群上 [18] 去掉了部分对称性的结果. 最后, 注意到当中心维数 $d > 1$ 时, 以上结果对端点 $\lambda = 2(d-1)$ 成立. 在下文中, 我们始终要求 $0 < \lambda \in [2(d-1)_+, Q)$.

推论 2.1 (球面上的 HLS 不等式) 在球面 $\mathbb{S}^{Q-d} \subset \mathbb{K}^{n+1}$ 上, 有尖锐不等式

$$\iint_{(\mathbb{S}^{Q-d})^2} \frac{F(\zeta)G(\eta)}{|1 - \zeta \cdot \bar{\eta}|^{\lambda/2}} d\zeta d\eta \leq 2^{\lambda(2-d/Q-d/2)} C_{Q,d,\lambda} \|F\|_p \|G\|_p,$$

极值函数表示为 $G \approx F(\zeta) \approx |1 - \xi \cdot \bar{\zeta}|^{-(2Q-\lambda)/2}$, 其中 $\xi \in B_1(\mathbb{K}^{n+1})$.

注 2.2 这里使用球面上标准的 Lebesgue 测度 $d\zeta$. 证明该不等式的关键为群上的度量和球面度量的关系, 即

$$2^{1-d/2} |1 - \zeta \cdot \bar{\eta}|^{1/2} = 2^{d/Q-1} J_C(u)^{1/(2Q)} J_C(v)^{1/(2Q)} |u^{-1}v|.$$

3 Sobolev 不等式

由尖锐 HLS 不等式, 可以得到其他一些与之相关的尖锐不等式.

推论 3.1 (尖锐分数阶 Sobolev 不等式) 对 Sobolev 空间 $H^{s/2}$ 上的任意函数 f , 有下面的尖锐不等式:

$$\int_G f L_s f du \geq C_{Q,d,\lambda}^{-1} \|f\|_{p'}^2,$$

其中 $s + \lambda = Q$, $1/p + 1/p' = 1$. L_s 为“分数阶次 Laplace 算子”, 对应的基本解为 $|u|^{-\lambda}$. 极值函数 $f = J_C^{1/p'}$ 是唯一的.

注 3.1 Sobolev 空间 $H^{s/2}$ 和相应的 Sobolev 范数 $\|\cdot\|_{H^{s/2}}$, 可以由以上不等式左边的泛函导出. 类似地, 我们也可以定义关于 HLS 泛函的分布空间 $H^{-s/2}$ 和相应的 HLS 范数 $\|\cdot\|_{H^{-s/2}}$. 在 Euclid 空间上, $L_s \approx (-\Delta)^{s/2}$. 我们使用球 Fourier 变换, 通过次 Laplace 算子与沿中心变量的左不变向量场的谱给出分数阶次 Laplace 算子 L_s . 利用球面上的分数阶共形次 Laplace 算子 A_s , 可以将上述结果推广到球面上. 这类算子与共形作用相缠结, 它们都是共形不变的, 并且是与经典半单 Lie 群算子补序列表示相联系的缠结算子. 由规范化, 上述不等式的最佳常数都由相关的微分和积分算子的谱缺口给出.

推论 3.2 (球面对数 Sobolev 不等式) 对任意的 $0 \leq F \in L^2 \log L(\mathbb{S}^{Q-d})$ 满足 $\int_{\mathbb{S}^{Q-d}} F^2 = |\mathbb{S}^{Q-d}|$, 有尖锐不等式

$$\iint_{(\mathbb{S}^{Q-d})^2} \frac{|F(\zeta) - F(\eta)|^2}{|1 - \zeta \cdot \bar{\eta}|^{Q/2}} d\zeta d\eta \geq C_{Q,d}^{\log \text{Sob}} \int_{\mathbb{S}^{Q-d}} F^2 \log F^2 d\zeta,$$

规范化后的极值函数表示为 $F(\zeta) \approx |1 - \xi \cdot \bar{\zeta}|^{-Q/2}$, $\xi \in B_1(\mathbb{K}^{n+1})$.

注 3.2 左边的奇异积分度量了球面函数的光滑性, 可以由分数阶共形次 Laplace 算子 A_s 在端点 $s = 0$ 的泛函微分刻画, 经典情形的类似, 参见文献 [42, 43]. 当中心维数 $d = 0, 1$ 时, 在端点 $s = n$ 或 $\lambda = 0$ 处存在尖锐的 Beckner-Onofri 和 Log-HLS 不等式 [27, 44]. 当中心维数 $d = 3, 7$ 时, 尖锐的 HLS 不等式对 $0 < \lambda < 2(d-1)$ 同样成立.

4 稳定性和余项问题

I 型群上另一个主要结果, 是对定理 2.1 中尖锐不等式的优化 [28]. 我们推导 HLS 不等式和分数阶 Sobolev 不等式的稳定性, 推广了文献 [29] 的结果, 并类似于文献 [7, 30] 对对偶余项进行比较. 令 M_{HLS} 和 M_{FS} 分别表示 HLS 不等式的极值函数和分数阶 Sobolev 不等式的极值函数构成的流形.

定理 4.1 (稳定性和余项问题) 存在正的常数 $\alpha = \alpha(Q, d, \lambda)$ 使得

$$C_{Q,d,\lambda} \|f\|_p^2 - \|f\|_{H^{-s/2}}^2 \geq \alpha \inf_{g \in M_{\text{HLS}}} \|f - g\|_p^2,$$

且

$$\|f\|_{H^{s/2}}^2 - C_{Q,d,\lambda}^{-1} \|f\|_{p'}^2 \geq \alpha \inf_{g \in M_{\text{FS}}} \|f - g\|_{H^{s/2}}^2.$$

对于对偶余项, 在 $f \geq 0$ 时, 有整体估计

$$\|f\|_{p'}^{2(p'-2)} (\|f\|_{H^{s/2}}^2 - C_{Q,d,\lambda}^{-1} \|f\|_{p'}^2) \geq C_{Q,d,\lambda}^{-2} (C_{Q,d,\lambda} \|f^{p'/p}\|_p^2 - \|f^{p'/p}\|_{H^{-s/2}}^2)$$

和局部估计

$$\liminf_{f \xrightarrow{H^{s/2}} M_{\text{FS}}} \frac{\|f\|_{p'}^{2(p'-2)} (\|f\|_{H^{s/2}}^2 - C_{Q,d,\lambda}^{-1} \|f\|_{p'}^2)}{C_{Q,d,\lambda} \|f^{p'/p}\|_p^2 - \|f^{p'/p}\|_{H^{-s/2}}^2} \geq \frac{Q + 2 + 2\text{sign}d + s}{Q + 2 + 2\text{sign}d - s} C_{Q,d,\lambda}^{-2}.$$

注 4.1 上述定理对群和球面同样成立. 稳定性由局部稳定性和反证法得到, 因此没有得到明显的常数. 整体稳定性的构造性证明仍是公开问题. 局部对偶估计是谱估计, 整体对偶估计可由平方技巧给出. 它们给出商泛函最佳常数的下界和上界. 当 $d = 1, 2$ 时, 关于 Log-HLS 和 Beckner-Onofri 不等式有类似的对偶估计.

5 次临界不等式

本节考虑 CR 球面上的一些次临界不等式和相应的余项问题. 我们会给出这些不等式的最佳常数, 并且证明它们的极值函数为常值函数. 这些不等式, 由临界分数阶 Sobolev 不等式、对数 Sobolev 不等式和 Poincaré 不等式插值得到. 我们得到了分数阶算子的谱的严格凸性, 它是我们证明次临界不等式的关键. 由该不等式立刻可以得到分数阶热流熵泛函的指数衰减和 Heisenberg 群上的一个加权不等式. 我们将在 I 型群上给出相应的结果.

近期, Jean 等^[31] 已经在单位球面 $\mathbb{S}^n$ 上给出一个最优的次临界分数阶 Sobolev 不等式, 并讨论了相关的应用. 他们证明了, 给定参数

$$s \in (0, n), \quad 2 < q < q(s) := \frac{2n}{n-s},$$

有不等式

$$\|F\|_q^2 - \|F\|_2^2 \leq C_{s,q}^{\text{Sob}} \int_{\mathbb{S}^n} F \mathcal{L}_s F d\zeta,$$

其中 $\mathcal{L}_s$ 是分数阶 Laplace 算子, 对应的谱表示为

$$\lambda_k(\mathcal{L}_s) = \frac{\Gamma(k + \frac{n+s}{2})}{\Gamma(k + \frac{n-s}{2})} - \frac{\Gamma(\frac{n+s}{2})}{\Gamma(\frac{n-s}{2})}.$$

这个分数阶不等式不是严格共形不变的, 但与标准的球面共形不变算子有紧密的联系. 不等式是对局部 Laplace-Beltrami 算子 $\mathcal{L}_2 = -\Delta$ 的推广^[44]. 最佳常数由谱缺口和 (非线性) 流的渐近行为的线性化确定. 流被用于给出熵的指数衰减速度. 等价的加权结果也在 Euclid 空间给出. 本节的目标, 是将 Euclid 空间和实球面上的结果, 推广到 Heisenberg 群和 CR 球面上. 在这个过程中, 谱的凸性将发挥核心作用. 本节使用球面上规范化概率测度, 并仍记为 $d\zeta$. 注意到, 分数阶算子 A_s 和 L_s 与文献 [22, 23] 中的定义也相差一个常数.

5.1 CR 球面上的分数阶次临界不等式

在复球面 $\mathbb{S}^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ 上, 给定 $n \in \mathbb{N}$, $0 < s < Q := 2n + 2$, $q = q(s) := \frac{2Q}{Q-s}$ 和正则化的球面测度 $d\zeta$, 有临界不等式^[17]:

$$\int_{\mathbb{S}^{2n+1}} F A_s F d\zeta \geq \|F\|_q^2, \quad (5.1)$$

其中分数阶共形次 Laplace 算子的谱关于双球调和分解 $L^2(\mathbb{S}^{2n+1}) = \bigoplus_{j,k \in \mathbb{N}} H_{j,k}$ 有唯一的表达式

$$\lambda_{j,k}(A_s) = \lambda_{j,k}(q) := \frac{\Gamma^2(\frac{Q}{2q})}{\Gamma^2(\frac{Q}{2q'})} \frac{\Gamma(j + \frac{Q}{2q'})\Gamma(k + \frac{Q}{2q'})}{\Gamma(j + \frac{Q}{2q})\Gamma(k + \frac{Q}{2q})}. \quad (5.2)$$

参数 Q 称为 CR 齐次维数. 因为算子在共形作用下不变, 所以, 该不等式也称为分数阶共形不变 Sobolev 不等式. 如果将 (5.2) 推广到 $s \in (-Q, 0)$, $A_s := A_{-s}^{-1}$, 则 (5.1) 对 HLS 不等式同样成立. 而利用临界不等式 (5.1) 和一个有趣的谱凸性观察, 就可以得到次临界不等式关于 $q < q(s) = \frac{2Q}{Q-s}$ 的最佳常数 1 和唯一的常数值极值函数

$$\frac{\|F\|_q^2 - \|F\|_2^2}{q-2} \leq \int_{\mathbb{S}^{2n+1}} F \mathcal{A}_s F d\zeta, \quad \text{其中 } \mathcal{A}_s := \frac{A_s - 1}{q(s) - 2}. \quad (5.3)$$

结果见图 1 和定理 5.1.

图 1 (5.3) 的最佳常数, 不依赖于 q , 对于给定的 s , 只由临界指标 $q = q_*(s)$ 决定. 如果 $s \in (-Q, 0)$, 则该指标由 HLS 不等式给出; 如果 $s \in (0, Q)$, 则由 Sobolev 不等式给出. $s = 0$ 时, (5.3) 为次临界不等式. 如果 $q = 2$, 对应于分数阶对数 Sobolev 不等式; 如果 $s \in (0, Q)$, 对应于次临界的分数阶对数 Sobolev 不等式

为此, 我们需要研究特征函数 $\lambda_{j,k}$ 关于 $q \in (1, \infty)$ 的凸性. 定义

$$\gamma_{j,k}(x) = \frac{\Gamma^2(x)\Gamma(j+Q/2-x)\Gamma(k+Q/2-x)}{\Gamma^2(Q/2-x)\Gamma(j+x)\Gamma(k+x)} > 0,$$

使得 $\lambda_{j,k}(q) = \gamma_{j,k}(\frac{Q}{2q})$, 则

$$\alpha_{j,k}(x) := -\frac{\gamma'_{j,k}(x)}{\gamma_{j,k}(x)} = \alpha_j + \alpha_k := \sum_{i=0}^{j-1} \beta_i(x) + \sum_{i=0}^{k-1} \beta_i(x) > 0,$$

其中

$$\beta_i(x) := \frac{1}{i+Q/2-x} + \frac{1}{i+x},$$

$$\frac{\gamma''_{j,k}(x)}{\gamma_{j,k}(x)} = (\alpha_{j,k}(x))^2 - \alpha'_{j,k}(x).$$

对于 $j+k > 1$, 凸性

$$x\gamma''_{j,k} + 2\gamma'_{j,k} > 0$$

等价于

$$\alpha_{j,k}^2 - \alpha'_{j,k} - \frac{2}{x}\alpha_{j,k} > 0.$$

因为

$$\left(\alpha_j^2 - \alpha'_j - \frac{2}{x}\alpha_j\right) + \left(\alpha_k^2 - \alpha'_k - \frac{2}{x}\alpha_k\right) + 2\alpha_j\alpha_k > 0, \quad \forall j+k > 1,$$

所以, 凸性是显然的. 在经典球面上, 通过计算

$$\beta_0^2 - \beta'_0 - \frac{2}{x}\beta_0 = 0 \quad \text{和} \quad 2\beta_0\beta_i + \beta_i^2 - \beta'_i - \frac{2}{x}\beta_i > 0,$$

可以证明

$$\alpha_j^2 - \alpha'_j - \frac{2}{x}\alpha_j > 0.$$

对于任意的 $F \in H^{s/2}$, 次临界不等式 (5.3) 由临界不等式 (5.1) 和上述凸性给出. 进一步, 我们可以得到 (5.3) 的优化, (5.1) 的变形为

$$\frac{\|F\|_q^2 - \|F\|_2^2}{q-2} \leq \int_{\mathbb{S}^{2n+1}} F \mathcal{A}_s F d\zeta - \sum_{j+k>1} \left(\frac{\lambda_{j,k}(q(s)) - 1}{q(s) - 2} - \frac{\lambda_{j,k}(q) - 1}{q - 2} \right) \|F_{j,k}\|_2^2,$$

其中函数 F 有双球调和分解 $F = \sum_{j,k=0}^{\infty} F_{j,k}$.

总而言之, 我们证明了下面的定理:

定理 5.1 给定 $n \in \mathbb{N}$, $s \in (-Q, Q)$, $1 \leq q \neq 2 \leq q(s) = \frac{2Q}{Q-s}$. 对于 $q < q(s)$, (5.3) 为尖锐不等式当且仅当 F 为常值函数; 对于 $q = q(s)$, (5.3) 为尖锐不等式当且仅当 $F = J_\tau^{1/q}$, 其中 $\tau \in \text{Aut}(\mathbb{S}^{2n+1})$. 对于 $q \rightarrow 2$ ($s \geq 0$) 的情形, 对应于分数阶的对数 Sobolev 不等式, 左边替换为熵泛函

$$\int_{\mathbb{S}^{2n+1}} F^2 \log \left(\frac{|F|}{\|F\|_2} \right) d\zeta.$$

关于余项, 我们有一个明确的表达式

$$\int_{\mathbb{S}^{2n+1}} F R_{s,q} F d\zeta,$$

其中 $R_{s,q}$ 为半正定算子, 其积分核由对应 $k = 0, 1$ 的经典球调和分解生成.

注 5.1 当 $s = 0$ 时,

$$\mathcal{A}_0 := \lim_{s \rightarrow 0} \mathcal{A}_s = A'_0.$$

在 $s \rightarrow 0$ 且 $q \rightarrow 2$ 的临界情形下, 不等式退化成为对数 Sobolev 不等式, 而定理 2.1 告诉我们, 事实上不等式对次临界指标 $q < 2$ 也是成立的. 在经典球面 $\mathbb{S}^n$ 上, 端点 $s = Q = n$ 情形被 Beckner-Onofri 不等式^[44] 或类似于 (5.3) 的次临界 L^q Sobolev 不等式取代^[31]. $s = -Q$ 对应于 Log-HLS 不等式^[14, 44]. 这涉及一个端点共形 Laplace 算子. 但是在 CR 球面, 没有类似的共形不变算子存在. Branson 等^[27] 的一个重要观察是, 在共形变换下不变的算子核空间存在类似的不等式. 这在 $s = Q$ 的情形下涉及一个有趣的微分算子. (5.3) 的最优性通过线性化得到. 这是能够得到最佳常数的技术原因.

5.2 分数阶流的渐近速度

与经典情形一样, 群上的渐近性质也可以借助非线性扩散流来研究. 事实上, 由定理 2.1, 我们可以在下面的分数阶热流上应用熵方法:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - q \nabla \cdot (v^{1-\frac{1}{q}} \nabla (-\Delta)^{-1} \mathcal{A}_s v^{\frac{1}{q}}) = 0. \quad (5.4)$$

注意到 (5.4) 是一个 1 次齐次方程, 但是当 $q \neq 1$ 且 $s \neq 2$ 时是非线性的. 定义一般的熵

$$\mathcal{E}_q[v] := \frac{1}{q-2} \left[\left(\int_{\mathbb{S}^{2n+1}} v d\zeta \right)^{\frac{2}{q}} - \int_{\mathbb{S}^{2n+1}} v^{\frac{2}{q}} d\zeta \right].$$

可以直接验证: 假设 (5.4) 的任意严格正解, 如果它足够光滑并满足一定的衰减性质, 则对广义熵有下面的衰减估计:

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}_q[v(t, \cdot)] = -2 \int_{\mathbb{S}^{2n+1}} \nabla v^{\frac{1}{q}} \cdot \nabla (-\Delta)^{-1} \mathcal{A}_s v^{\frac{1}{q}} d\zeta = -2 \int_{\mathbb{S}^{2n+1}} v^{\frac{1}{q}} \mathcal{A}_s v^{\frac{1}{q}} d\zeta,$$

对 $F = v^{1/q}$ 用 (5.3), 可以得出 $\mathcal{E}_q[v(t, \cdot)]$ 是指数阶速降的.

推论 5.1 令 $n \geq 1$, $s \in (0, Q)$, $q \in [1, 2) \cup (2, q(s)]$. 如果 v 是 $C^1(\mathbb{R}^+; L^\infty(\mathbb{S}^{2n+1}))$ 中的正定函数使得 $v^{1/q} \in C^1(\mathbb{R}^+; H^{s/2}(\mathbb{S}^{2n+1}))$, 并且在 $\mathbb{S}^{2n+1}$ 上, v 是 (5.4) 关于初始条件 $v_0 > 0$ 的解, 则

$$\mathcal{E}_q[v(t, \cdot)] \leq \mathcal{E}_q[v_0]e^{-2t}, \quad \forall t \geq 0.$$

除了渐近性的研究, 通过 Cayley 变换, 次临界不等式还可以给出 Heisenberg 群上的加权分数阶不等式.

5.3 Heisenberg 群上的分数阶加权次临界不等式

给出 n 维 Heisenberg 群 $\mathbb{H}^n = \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$ 上的非交换群运算 $uu' = (z, t)(z', t') = (z \cdot z', t + t' + 2\text{Im}z \cdot z')$ 和 Haar 测度 $du = dzdt$. 可以在 $\mathbb{H}^n$ 上定义齐次范数和伸缩

$$|u| = |(z, t)| = (|z|^4 + |t|^2)^{1/4}, \quad u = (z, t) \mapsto \delta u = (\delta u, \delta^2 t).$$

这样定义的伸缩, 连同左平移和反演变换

$$u = (z, t) \mapsto u_{\text{inv}} = \left(\frac{-z}{|z|^2 - it}, \frac{-it}{|z|^4 + |t|^2} \right)$$

张成了 Heisenberg 群上的共形变换群 $\text{Aut}(\mathbb{H}^n)$. 令 L 和 T 分别表示次 Laplace 算子和关于中心变量的左不变的向量场, 我们可以得到谱的刻画和分数阶次 Laplace 算子的基本解

$$\begin{aligned} L_s &= \frac{\Gamma^2(\frac{Q-s}{4})}{\Gamma^2(\frac{Q+s}{4})} |2T|^{s/2} \frac{\Gamma(L|2T|^{-1} + \frac{2+s}{4})}{\Gamma(L|2T|^{-1} + \frac{2-s}{4})}, \\ L_s^{-1} &= \frac{2^{\frac{Q-s}{2}-2} \Gamma^2(\frac{Q+s}{4})}{\pi^{Q/2} \Gamma(s/2)} |u|^{s-Q}. \end{aligned}$$

关于分数阶次 Laplace 算子存在一个内蕴的共形对称性

$$J_\sigma^{\frac{Q+s}{2Q}} (L_s f) \circ \sigma = L_s (J_\sigma^{\frac{Q-s}{2Q}} f \circ \sigma), \quad \forall \sigma \in \text{Aut}(\mathbb{H}^n),$$

并且通过 (边界) Cayley 变换

$$\mathcal{C} : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{S}^{2n+1} : u = (z, t) \mapsto \zeta = \left(\frac{2z}{1 + |z|^2 - it}, \frac{1 - |z|^2 + it}{1 + |z|^2 - it} \right)$$

可以建立与球面的共形关系:

$$L_s (|2J_{\mathcal{C}}|^{\frac{Q-s}{2Q}} F \circ \mathcal{C}) = |2J_{\mathcal{C}}|^{\frac{Q+s}{2Q}} (A_s F) \circ \mathcal{C}.$$

Cayley 变换的 Jacobi 行列式表示为

$$J_{\mathcal{C}} = 2^{Q-1} ((1 + |z|^2)^2 + t^2)^{-Q/2}.$$

这是复双曲空间的非紧边界与紧球面之间的共形变换. 关于分数阶次 Laplace 算子的 Sobolev 范数, 我们有 Heisenberg 群上的分数阶不等式和相应的最佳常数

$$\|f\|_q^2 \leq 2^{-s/Q} |\mathbb{S}^{2n+1}|^{2/q-1} \|f\|_{H^{s/2}}^2, \quad q = q(s) = \frac{2Q}{Q-s}.$$

对于临界性指标 $q = q(s)$, 该不等式等价于 (5.1). 对次临界指标, 需要考虑加权的不等式. 在 (5.3) 中, 用 Cayley 变换 C 和相应的共形变换 $F = f \circ C J_C^{1/q(s)}$, 我们马上可以得到 Heisenberg 群上一个加权的不等式

$$\left(\int_{\mathbb{H}^n} \frac{|f|^q}{((1+|z|^2)^2 + t^2)^{\frac{Q}{2}(1-\frac{q}{q(s)})}} du \right)^{\frac{2}{q}} \leq a \int_{\mathbb{H}^n} \frac{|f|^2}{((1+|z|^2)^2 + t^2)^{\frac{Q}{2}(1-\frac{2}{q(s)})}} du + b \int_{\mathbb{H}^n} f L_s f du,$$

其中 a 、 b 和极值函数都会在下文的推论中给出. 现在在 Heisenberg 群 $\mathbb{H}^n$ 上定义 Sobolev 范数和加权的 Lebesgue 范数为

$$\|f\|_{H^{s/2}}^2 := \int_{\mathbb{H}^n} f L_s f du, \quad \|f\|_{q,\beta}^q := \int_{\mathbb{H}^n} |f|^q ((1+|z|^2)^2 + t^2)^{-\beta/4} du,$$

则有下面的推论:

推论 5.2 给定指标 $0 < s < Q/2$ 、 $q \in (2, q(s)]$ 和 $\beta = 2Q(1 - q/q(s))$, 有以下分数次尖锐次临界不等式:

$$\|f\|_{q,\beta}^2 \leq a \|f\|_{H^{s/2}(\mathbb{H}^n)}^2 + b \|f\|_{2,2s}^2,$$

其中

$$a = 2^{-s/Q - (2n+1)(2/q - 2/q(s))} \left(\frac{q-2}{q(s)-2} \right) |\mathbb{S}^{2n+1}|^{2/q-1},$$

$$b = 2^{(2n+1)(1-2/q)} \left(\frac{q(s)-q}{q(s)-2} \right) |\mathbb{S}^{2n+1}|^{2/q-1}.$$

对于 $q < q(s)$, 极值函数为

$$f_s^* = ((1+|z|^2)^2 + t^2)^{-(Q-s)/4}$$

的常数倍; 对于 $q = q(s)$, 极值函数为 $f_s^* \circ \sigma J_\sigma^{1/q(s)}$ 的常数倍, 其中 $\sigma \in \text{Aut}(\mathbb{H}^n)$. 当 $\beta = 0$ 和 $b = 0$ 时, 不等式是共形不变的.

5.4 其他球面和 Iwasawa 群上的推广

类似的次临界不等式也存在于秩 1 对称空间的边界, 即 I 型群上^[19–23]. 这时, 我们只需考虑指标满足 $0 < s \leq Q - 2(d-1)$ 和中心维数 $d = 3, 7$ 的情形^[22, 23]. 由 Clifford 代数模可知, 任意 I 型群同构于 $G = \mathbb{K}^n \times \text{Im} \mathbb{K}$, 其中群运算表示为

$$uu' = (z, t)(z', t') = (z + z', t + t' + 2\text{Im} z \cdot \bar{z}'),$$

$\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$. 当 $\mathbb{K} = \mathbb{O}$ 时, $n = 1$, 对应的八元数群的中心 $d = 7$, 则齐次维数 $Q = (d+1)n + 2d$, 中心维数 $d = \dim \mathbb{K} - 1$. 在对应的球面 $\mathbb{S}^{Q-d} \subset \mathbb{K}^{n+1}$ 上, 分数阶算子的谱为

$$\lambda_{j,k}(A_s) = \lambda_{j,k}(q) := \frac{\Gamma(\frac{Q}{2q})\Gamma(\frac{Q}{2q} + \frac{1-d}{2})}{\Gamma(\frac{Q}{2q'})\Gamma(\frac{Q}{2q'} + \frac{1-d}{2})} \frac{\Gamma(j + \frac{Q}{2q'})\Gamma(k + \frac{Q}{2q'} + \frac{1-d}{2})}{\Gamma(j + \frac{Q}{2q})\Gamma(k + \frac{Q}{2q} + \frac{1-d}{2})},$$

其中 $q = q(s) = 2Q/(Q-s)$ (参见文献 [45, 46] 或 [37]). 关于变量 q 的谱函数一定是凸的, 这意味着球面上的次临界分数阶不等式也在 I 型群上.

定理 5.2 令 G 表示一个 I 型群, 齐次维数为 Q , 中心维数为 d . 对于指标 $\pm Q \neq s \in [-(Q-2(d-1)_+), Q-2(d-1)_+]$ 和 $1 \leq q \neq 2 \leq q(s) = \frac{2Q}{Q-s}$, 有球面 $\mathbb{S}^{Q-d}$ 上的尖锐次临界分数阶不等式

$$\frac{\|F\|_q^2 - \|F\|_2^2}{q-2} \leq \int_{\mathbb{S}^{Q-d}} F \mathcal{A}_s F d\zeta,$$

其中

$$\mathcal{A}_s := \frac{A_s - 1}{q(s) - 2}.$$

如果 $q < q(s)$, 等号成立当且仅当 F 为常值函数; 如果 $q = q(s)$, 等号成立当且仅当 $F = J_\tau^{1/q}$, 其中 $\tau \in \text{Aut}(\mathbb{S}^{Q-d})$. $q \rightarrow 2$ ($s \geq 0$) 的情形对应于分数阶对数 Sobolev 不等式. 余项表示为 $\int_{\mathbb{S}^{Q-d}} F R_{s,q} F d\zeta$, 其中 $R_{s,q}$ 为半正定算子, 核由经典球调和分解中 $k = 0, 1$ 的项张成. 以上结果对 I 型群 G 上关于其他分数阶算子 L_s 的加权不等式也成立.

注 5.2 我们可以在一般的 H 型群上考虑类似的次临界问题, 临界问题目前也仍待解决. 此外, 还可以在更一般的紧 Riemann 流形上考察类似的问题. 局部的结果参见文献 [8].

致谢 作者感谢审稿人认真阅读本文并提出许多重要的修改意见. 第二作者感谢 Université Paris-Dauphine 的访问邀请. 本文还得到王敏博士的很多帮助, 在此表示衷心感谢.

参考文献

- 1 Lions P L. The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limit case, Part 2. *Rev Mat Iberoam*, 1985, 1: 45–121
- 2 Chen W, Li C, Ou B. Classification of solutions for an integral equation. *Comm Pure Appl Math*, 2006, 59: 330–343
- 3 Burchard A. Cases of equality in the Riesz rearrangement inequality. *Ann of Math* (2), 1996, 143: 499–527
- 4 Christ M, Flock T C. Cases of equality in certain multilinear inequalities of Hardy-Riesz-Rogers-Brascamp-Lieb-Luttinger type. *J Funct Anal*, 2014, 267: 998–1010
- 5 Bianchi G, Egnell H. A note on the Sobolev inequality. *J Funct Anal*, 1991, 100: 18–24
- 6 Christ M. A sharpened Hausdorff-Young inequality. *ArXiv:1406.1210*, 2014
- 7 Dolbeault J, Jankowiak G. Sobolev and Hardy-Littlewood-Sobolev inequalities. *J Differential Equations*, 2014, 257: 1689–1720
- 8 Dolbeault J, Esteban M J, Loss M. Nonlinear flows and rigidity results on compact manifolds. *J Funct Anal*, 2014, 267: 1338–1363
- 9 Dolbeault J, Esteban M J, Loss M. Rigidity versus symmetry breaking via nonlinear flows on cylinders and Euclidean spaces. *Invent Math*, 2016, 206: 397–440
- 10 Cordero-Erausquin D, Nazaret B, Villani C. A mass-transportation approach to sharp Sobolev and Gagliardo-Nirenberg inequalities. *Adv Math*, 2004, 182: 307–332
- 11 Aubin T. Problèmes isopérimétriques et espaces de Sobolev. *C R Acad Sci Paris Sér A-B*, 1975, 280: A279–A281
- 12 Talenti G. Best constant in Sobolev inequality. *Ann Mat Pura Appl* (4), 1976, 110: 353–372
- 13 Lieb E H. Sharp constants in the Hardy-Littlewood-Sobolev and related inequalities. *Ann of Math* (2), 1983, 118: 349–374
- 14 Carlen E A, Loss M. Extremals of functionals with competing symmetries. *J Funct Anal*, 1990, 88: 437–456
- 15 Frank R L, Lieb E H. Inversion positivity and the sharp Hardy-Littlewood-Sobolev inequality. *Calc Var Partial Differential Equations*, 2010, 39: 85–99
- 16 Frank R L, Lieb E H. A new, rearrangement-free proof of the sharp Hardy-Littlewood-Sobolev inequality. In: *Spectral theory, function spaces and inequalities*, vol. 219. Basel: Birkhäuser/Springer, 2012, 55–67
- 17 Frank R L, Lieb E H. Sharp constants in several inequalities on the Heisenberg group. *Ann of Math* (2), 2012, 176: 349–381
- 18 Jerison D, Lee J M. Extremals for the Sobolev inequality on the Heisenberg group and the CR Yamabe problem. *J Amer Math Soc*, 1988, 1: 1–13
- 19 Garofalo N, Vassilev D. Symmetry properties of positive entire solutions of Yamabe-type equations on groups of Heisenberg type. *Duke Math J*, 2001, 106: 411–448

- 20 Ivanov S, Minchev I, Vassilev D. Extremals for the Sobolev inequality on the seven-dimensional quaternionic Heisenberg group and the quaternionic contact Yamabe problem. *J Eur Math Soc (JEMS)*, 2010, 12: 1041–1067
- 21 Ivanov S, Minchev I, Vassilev D. The optimal constant in the L^2 Folland-Stein inequality on the quaternionic Heisenberg group. *Ann Sc Norm Super Pisa Cl Sci (5)*, 2012, 11: 635–652
- 22 Christ M, Liu H, Zhang A. Sharp Hardy-Littlewood-Sobolev inequalities on the octonionic Heisenberg group. *Calc Var Partial Differential Equations*, 2016, 55: 11
- 23 Christ M, Liu H, Zhang A. Sharp Hardy-Littlewood-Sobolev inequalities on quaternionic Heisenberg groups. *Nonlinear Anal*, 2016, 130: 361–395
- 24 Hersch J. Quatre propriétés isopérimétriques de membranes sphériques homogènes. *C R Acad Sci Paris Sér A-B*, 1970, 270: A1645–A1648
- 25 Chang S Y A, Yang P C. Prescribing Gaussian curvature on S^2 . *Acta Math*, 1987, 159: 215–259
- 26 Chang S Y A, Yang P C. Extremal metrics of zeta function determinants on 4-manifolds. *Ann of Math (2)*, 1995, 142: 171–212
- 27 Branson T P, Fontana L, Morpurgo C. Moser-Trudinger and Beckner-Onofri’s inequalities on the CR sphere. *Ann of Math (2)*, 2013, 177: 1–52
- 28 Liu H, Zhang A. Remainder terms for several inequalities on some groups of Heisenberg-type. *Sci China Math*, 2015, 58: 2565–2580
- 29 Chen S, Frank R L, Weth T. Remainder terms in the fractional Sobolev inequality. *Indiana Univ Math J*, 2013, 62: 1381–1397
- 30 Jankowiak G, Hoang Nguyen V. Fractional Sobolev and Hardy-Littlewood-Sobolev inequalities. *ArXiv:1404.1028*, 2014
- 31 Dolbeault J, Zhang A. Optimal functional inequalities for fractional operators on the sphere and applications. *Adv Nonlinear Stud*, 2016, 16: 863–880
- 32 Cohn W S, Lu G. Best constants for Moser-Trudinger inequalities on the Heisenberg group. *Indiana Univ Math J*, 2001, 50: 1567–1592
- 33 Cohn W S, Lu G. Sharp constants for Moser-Trudinger inequalities on spheres in complex space $\mathbb{C}^n$. *Comm Pure Appl Math*, 2004, 57: 1458–1493
- 34 Folland G B, Stein E M. Estimates for the complex and analysis on the Heisenberg group. *Comm Pure Appl Math*, 1974, 27: 429–522
- 35 Kaplan A. Fundamental solutions for a class of hypoelliptic PDE generated by composition of quadratic forms. *Trans Amer Math Soc*, 1980, 258: 147–153
- 36 Cowling M, Dooley A H, Korányi A, et al. H-type groups and Iwasawa decompositions. *Adv Math*, 1991, 87: 1–41
- 37 张安. Heisenberg 型群上的最优 Sobolev 型不等式. 博士学位论文. 北京: 清华大学, 2015
- 38 Hang F. On the integral systems related to Hardy-Littlewood-Sobolev inequality. *Math Res Lett*, 2007, 14: 373–383
- 39 Han X. Existence of maximizers for Hardy-Littlewood-Sobolev inequalities on the Heisenberg group. *Indiana Univ Math J*, 2013, 62: 737–751
- 40 Vassilev D. Existence of solutions and regularity near the characteristic boundary for sub-Laplacian equations on Carnot groups. *Pacific J Math*, 2006, 227: 361–397
- 41 Tao T. *Nonlinear Dispersive Equations: Local and Global Analysis*. Washington: Amer Math Soc, 2006
- 42 Beckner W. Logarithmic Sobolev inequalities and the existence of singular integrals. *Forum Math*, 1997, 9: 303–323
- 43 Carlen E, Loss M. Competing symmetries, the logarithmic HLS inequality and Onofri’s inequality on S^n . *Geom Funct Anal*, 1992, 2: 90–104
- 44 Beckner W. Sharp Sobolev inequalities on the sphere and the Moser-Trudinger inequality. *Ann of Math (2)*, 1993, 138: 213–242
- 45 Johnson K D. Composition series and intertwining operators for the spherical principal series, II. *Trans Amer Math Soc*, 1976, 215: 269–283
- 46 Johnson K D, Wallach N R. Composition series and intertwining operators for the spherical principal series, I. *Trans Amer Math Soc*, 1977, 229: 137–173

附录 A 临界不等式的证明思路

定理 5.1 的证明 类似于 Frank-Lieb 的方法, 我们可以将证明过程分为下列几步:

步骤 1 首先需要给出极值函数的存在性. 证明存在性的一个非常有效的方法就是 Lion 给出的集中紧方法 (参见文献 [1]). 事实上, 我们也可以使用文献 [17] 中给出的“紧性 $+T^*T$ ”方法予以证明.

这种方法严格依赖于指标满足 $\lambda > 2(d-1)_+$ 时分数阶积分算子积分核的正定性, 所以只能对正定函数证明. 注意到, 对于中心是高维的情形, 端点是半正定的, 这时可以通过考虑正定情形下的唯一性来得到半正定情形的存在性 (假设 $F = G$). 关于正定性, 见命题 A.3.

步骤 2 下面考虑极值函数的唯一性. 由 Chang-Yang 给出的零重心条件可知, 常值函数是满足零重心条件的唯一极值函数.

定理 A.1 对于任意一个极值函数 F , 存在共形变换 $\tau \in \text{Aut}(\mathbb{S}^{Q-d})$, 使得新函数 $H = F \circ \tau J_\tau^{1/p}$ 满足零重心条件

$$\int_{\mathbb{S}^{Q-d}} H(\zeta) \zeta d\zeta = 0.$$

零重心条件可以很好地刻画共形群的作用. 最近也被应用于 Heisenberg 群上对数 HLS 极值问题的研究中 (参见文献 [27]). 用群上的伸缩变换和球面的旋转变换, 可以证明上述引理并得到极值函数的显式表达式. 为此, 我们需要给出下面的命题.

命题 A.1 满足零重心条件的极值函数一定是常值函数.

步骤 3 在计算出 HLS 泛函的阶次变分之后, 在满足零重心条件的极值函数 H 周围, 沿着关于复坐标 ζ_j^i 的扰动 $\varphi_j^i = H\zeta_j^i$, 通过求和及对称性, 可以得到下面的不等式:

$$\iint_{(\mathbb{S}^{Q-d})^2} \frac{H(\zeta)H(\eta)2\text{Re}(\zeta, \eta)_{\mathbb{C}}}{|1 - \zeta \cdot \bar{\eta}|^{\lambda/2}} d\zeta d\eta \leq 2(p-1) \iint_{(\mathbb{S}^{Q-d})^2} \frac{H(\zeta)H(\eta)}{|1 - \zeta \cdot \bar{\eta}|^{\lambda/2}} d\zeta d\eta,$$

其中 $(\zeta, \eta)_{\mathbb{C}}$ 表示复向量的乘法, 这里实部等于 $\bar{\zeta} \cdot \eta$.

步骤 4 最后证明以上二阶变分不等式的逆形式, 其中等号成立当且仅当 H 为常值函数. 这需要对谱做精细的计算. 为此, 我们将 $L^2(\mathbb{S}^{Q-d})$ 的球调和子空间参数化为 $V_{j,k}$ 指标 $\{(j, k)\} \in I$.

命题 A.2 给定 $0 < \lambda \in [2(d-1)_+, Q)$, 不等式

$$\iint_{(\mathbb{S}^{Q-d})^2} \frac{F(\zeta)F(\eta)2\text{Re}(\zeta, \eta)_{\mathbb{C}}}{|1 - \zeta \cdot \bar{\eta}|^{\lambda/2}} d\zeta d\eta \geq 2(p-1) \iint_{(\mathbb{S}^{Q-d})^2} \frac{F(\zeta)F(\eta)}{|1 - \zeta \cdot \bar{\eta}|^{\lambda/2}} d\zeta d\eta$$

对任意的 $F \in L^2(\mathbb{S}^{Q-d})$ 成立. 如果 $\lambda > 2(d-1)_+$, 等号成立当且仅当 F 为常值函数; 如果 $\lambda = 2(d-1)$ 且 $d > 1$, 等号成立当且仅当 $F \in V_{0,0} \oplus V_{j \geq k \geq 2}$.

证明逆形式的四元数不等式, 因为

$$\frac{2\text{Re}(\zeta, \eta)_{\mathbb{C}}}{|1 - \zeta \cdot \bar{\eta}|^{\lambda/2}} = \frac{2\text{Re}\bar{\zeta} \cdot \eta}{|1 - \zeta \cdot \bar{\eta}|^{\lambda/2}} = \frac{1}{|1 - \zeta \cdot \bar{\eta}|^{\lambda/2}} + \frac{|\zeta \cdot \bar{\eta}|^2}{|1 - \zeta \cdot \bar{\eta}|^{\lambda/2}} - \frac{1}{|1 - \zeta \cdot \bar{\eta}|^{\lambda/2-2}},$$

我们可以关于以下两个核计算对应的积分算子的谱:

$$K_1^\lambda = \frac{1}{|1 - \zeta \cdot \bar{\eta}|^{\lambda/2}} \quad \text{和} \quad K_2^\lambda = \frac{|\zeta \cdot \bar{\eta}|^2}{|1 - \zeta \cdot \bar{\eta}|^{\lambda/2}}.$$

命题 A.3 (特征值) 两个核关于球调和分解的特征值分别表示为

$$E_{j,k}^1 = \frac{2\pi^{\frac{Q-d}{2}+1}\Gamma((Q-\lambda)/2)}{\Gamma(\lambda/4)\Gamma(\lambda/4-d/2+1)} \frac{\Gamma(j+\lambda/4)}{\Gamma(j+(2Q-\lambda)/4)} \frac{\Gamma(k+\lambda/4+(1-d)/2)}{\Gamma(k+(2Q-\lambda)/4+(1-d)/2)}$$

和

$$E_{j,k}^2 = E_{j,k}^1 \left[1 - \left(\frac{\lambda}{4} - \frac{1+d}{2} \right) (c-a-b) \left(\frac{1}{(a-1)(c-a)} + \frac{1}{(b-1)(c-b)} \right) \right]$$

$$- \left(\frac{\lambda}{4} - \frac{1+d}{2} \right) \frac{c-a-b+1}{(a-1)(b-1)(c-a)(c-b)} \Bigg] \Bigg],$$

其中

$$(a, b, c) := \left(j + \frac{\lambda}{4}, k + \frac{\lambda}{4} + \frac{1-d}{2}, j+k + \frac{Q}{2} + \frac{1-d}{2} \right).$$

步骤 5 (结论) 对于正定情形 $\lambda > 2(d-1)_+$, 由步骤 3 和 4 可知, 满足零重心条件的极值函数一定是常值函数. 由步骤 2 可知, 任意极值函数可以关于某一个共形变换 τ 写成 $J_\tau^{1/p}$ 的形式. 对于半正定情形 $\lambda = 2(d-1)$ 且 $d > 1$, 我们可以借助 Euler-Lagrange 方程证明极值函数 $F \in V_{0,0} \oplus V_{j \geq k \geq 2}$. 极值函数的显式表达式和共形变换的 Jacobi 行列式在群和球面上都可以通过直接计算得到. 这样, 我们就证明了定理 5.1 和推论 2.1. $\square$

推论 3.1 的证明 我们在球面上考虑问题并假设 $A_s^{-1} = |1 - \zeta \cdot \bar{\eta}|^{-\lambda/2}$. 用 L^2 上的内积 $(\cdot, \cdot)$ 和 Cauchy-Schwartz 不等式, 可以得到对偶结果

$$\begin{aligned} \|F\|_{p'}^2 &= \sup_{\|G\|_p=1} (F, G)^2 = \sup_{\|G\|_p=1} (A_s^{1/2} F, A_s^{-1/2} G)^2 \\ &\leq \sup_{\|G\|_p=1} (F, A_s F)(G, A_s^{-1} G) \\ &= C_{Q,d,\lambda}(F, A_s F), \end{aligned}$$

等号成立当且仅当 G 是球面 HLS 不等式的极值函数且 $F = G^{p/p'}$, 即对于球面上任意的共形变换 τ , $F = J_\tau^{1/p'}$. $\square$

推论 3.2 的证明 可以使用类似于经典情形下的方法进行讨论. 注意到

$$\iint_{(\mathbb{S}^{Q-d})^2} \frac{F^2(\zeta) + F^2(\eta)}{|1 - \zeta \cdot \bar{\eta}|^{\lambda/2}} d\zeta d\eta = 2E_{0,0}^1 |\mathbb{S}^{Q-d}| = 2C_{Q,d,\lambda}^{\text{SHLS}} |\mathbb{S}^{Q-d}|^{2/p},$$

减去两倍的尖锐球面 HLS 不等式, 可以得到

$$\iint_{(\mathbb{S}^{Q-d})^2} \frac{|F(\zeta) - F(\eta)|^2}{|1 - \zeta \cdot \bar{\eta}|^{\lambda/2}} d\zeta d\eta \geq 2C_{Q,d,\lambda}^{\text{SHLS}} (|\mathbb{S}^{Q-d}|^{2/p} - \|F\|_p^2) \xrightarrow{\lambda \rightarrow Q} C_{Q,d}^{\log \text{Sob}} \int_{\mathbb{S}^{Q-d}} F^2 \log F^2 d\zeta.$$

事实上, 我们也可以通过减去 $s = 0$ 时的尖锐 Sobolev 不等式来得到上述结果. $\square$

定理 4.1 的证明 我们在球面上证明定理 4.1.

稳定性 首先需要证明下面两个引理, 分别是关于局部的稳定性和紧性的讨论. $d = 0$ 时, 令 $E_1 = E_{1,1}^1$; $d > 0$ 时, 令 $E_1 = E_{1,0}^1$. 类似地, 用命题 A.3 中给出的特征值定义 E_2 , 则

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{Q+s+2+2\text{sign}d}{Q-s+2+2\text{sign}d} \quad \text{和} \quad 1 - \frac{E_2}{E_1} = \frac{2s}{Q+s+2+2\text{sign}d}.$$

引理 A.1 (局部稳定性) 令 $d(F, G)$ 表示相应的度量, 在局部意义下, 有下列稳定性估计:

(1) 当 $\|F\|_{H^{s/2}} > d(F, M_{\text{FS}}) \rightarrow 0$ 时,

$$\begin{aligned} d^2(F, M_{\text{FS}}) &\geq \|F\|_{H^{s/2}}^2 - C_{Q,d,\lambda}^{-1} \|F\|_{p'}^2 \\ &\geq \left(1 - \frac{E_2}{E_1} \right) d^2(F, M_{\text{FS}}) + o(d^2(F, M_{\text{FS}})). \end{aligned}$$

(2) 存在正的常数 α_0 和 α_1 , 只依赖于 Q 、 d 和 λ , 使得对于任意的 $F \in L^p$, 当 $d(F, M_{\text{HLS}}) \rightarrow 0$ 且 $F \not\rightarrow 0$ 时, 有

$$\begin{aligned} & \|F\|_p(\alpha_1 d(F, M_{\text{HLS}}) + o(d(F, M_{\text{HLS}}))) \\ & \geq C_{Q,d,\lambda} \|F\|_p^2 - \|F\|_{H^{-s/2}}^2 \\ & \geq \alpha_0 d^2(F, M_{\text{HLS}}) + o(d^2(F, M_{\text{HLS}})). \end{aligned}$$

注 A.1 第一个估计可以由正交分解、Taylor 展开和特征函数的估计得到. 注意到, 当 $p < 2$ 时, 变分泛函不在 C^2 中, 所以第二个估计更为复杂. Christ 在研究 Hausdorff-Young 不等式的变分问题时得到了一般形式的二阶变分引理, 我们可以直接借助这个引理来得到以上定理中的第二个局部估计.

引理 A.2 (紧性) 令 (F_j) 表示 HLS 不等式或分数阶 Sobolev 不等式的极化函数列, 即

$$\frac{\|F_j\|_{H^{-s/2}}^2}{\|F_j\|_p^2} \xrightarrow{j} C_{Q,d,\lambda} \quad \text{或} \quad \frac{\|F_j\|_{H^{s/2}}^2}{\|F_j\|_{p'}^2} \xrightarrow{j} C_{Q,d,\lambda}^{-1},$$

则

$$\frac{d(F_j, M_{\text{HLS}})}{\|F_j\|_p} \xrightarrow{j} 0 \quad \text{或} \quad \frac{d(F_j, M_{\text{FS}})}{\|F_j\|_{H^{s/2}}} \xrightarrow{j} 0.$$

注 A.2 该引理给出了极化函数列的紧性, 是一个不平凡的结果. 由此可以得出极化函数列的强极限和极值函数的存在性.

总结 用反证法, 如果不存在 $\alpha > 0$ 使得定理 4.1 成立, 则存在一列函数 (F_j) , 使得余项和距离平方的商趋于零. 这意味着这列函数为极化函数列, 则由紧性引理可知, 该极化函数列在极值函数构成的流形的邻域内. 这样, 我们可以得出局部的稳定性估计, 从而得到余项的正的下界. 与假设矛盾. 定理得证.

对偶余项估计 对于整体估计, 使用平方完备的方法, 证明

$$\| \|F\|_{p'}^{p'-2} A_s^{1/2} F - C_{Q,d,\lambda}^{-1} A_s^{-1/2} (F^{p'/p}) \|_2^2 \geq 0.$$

对于局部估计, 则通过 Taylor 展开证明. 令 $F = 1 + \varphi$, 其中 $\varphi \perp T_1 M = H_0 \oplus H_1$, 则商泛函可以由 φ 的线性化得到. 取球调和分解

$$\varphi = \sum_I \varphi_{j,k},$$

则对于常数列 $(c_{j,k})$, 有

$$\begin{aligned} & \liminf_{\varphi \rightarrow 0, \varphi \perp T_1 M} \frac{\|F\|_{p'}^{2(p'-2)} (\|F\|_{H^{s/2}}^2 - C_{Q,d,\lambda}^{-1} \|F\|_{p'}^2)}{C_{Q,d,\lambda} \|F^{p'/p}\|_p^2 - \|F^{p'/p}\|_{H^{-s/2}}^2} \\ & = \liminf E_1 \frac{\sum_{\varphi \perp T_1 M} c_{j,k} \|\varphi_{j,k}\|_2^2}{\sum_{\varphi \perp T_1 M} E_{j,k} c_{j,k} \|\varphi_{j,k}\|_2^2} \\ & = \frac{E_1}{E_2}. \end{aligned}$$

结论得证. 对于 $d = 0, 1$ 时的对数 HLS 不等式和 Beckner-Onofri 不等式, 我们可以按照同样的方法予以证明. $\square$

On sharp inequalities on nilpotent Lie groups

Heping Liu & An Zhang

Abstract In this paper, we review some recent works on sharp fractional inequalities on nilpotent Lie groups, studying their sharp constants, extremizers, stability and other improvements. We also prove a new sharp subcritical inequality in Section 5. The conformal symmetry, compactness, spectral estimates and flow methods are discussed. We remark that a positivity-type restriction on the singular exponent is required in cases for groups with high dimensional centres, which brings extra difficulty.

Keywords extremizer, HLS (Hardy-Littlewood-Sobolev) inequality, nilpotent Lie groups

MSC(2010) 43A80, 26D10, 35A23

doi: 10.1360/N012018-00149