相对于 $\mathcal{G}(\mathcal{X})$ 的导出范畴

陈文静*, 刘仲奎, 杨晓燕

西北师范大学数学与统计学院, 兰州 730070

E-mail: chenwj@nwnu.edu.cn, liuzk@nwnu.edu.cn, yangxy@nwnu.edu.cn

收稿日期: 2019-05-22; 接受日期: 2019-08-28; 网络出版日期: 2020-02-20; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11761060)、西北师范大学青年教师科研能力提升计划 (批准号: NWNULKQN-18-30) 和西北师范大学博士科研启动金 (批准号: 0002020206) 资助项目

摘要 设 $\mathcal{A}$ 是有足够投射对象的 Abel 范畴, $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 是 $\mathcal{A}$ 中的完备遗传余挠对. 本文引入 Gorenstein $\mathcal{X}$ - 导出范畴, 记作 $\mathbf{D}_{\mathcal{G}(\mathcal{X})}(\mathcal{A})$, 并且从不同的角度研究 $\mathbf{D}_{\mathcal{G}(\mathcal{X})}(\mathcal{A})$. 当 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 取作特殊的余挠对时, 得到一些已知的导出范畴, 如 Gorenstein 导出范畴和 Gorenstein 平坦导出范畴等. 通过与 $\mathcal{G}(\mathcal{X})$ 有关的同伦范畴 $\mathbf{K}^{-, gxb}(\mathcal{G}(\mathcal{X}))$ 描述有界 Gorenstein $\mathcal{X}$ - 导出范畴 $\mathbf{D}_{\mathcal{G}(\mathcal{X})}^b(\mathcal{A})$ 和有界导出范畴 $\mathbf{D}^b(\mathcal{A})$, 并给出一些三角等价.

关键词 Gorenstein $\mathcal{X}$ - 对象 Gorenstein $\mathcal{X}$ - 导出范畴 三角等价

MSC (2010) 主题分类 18E30, 18G35

1 引言

经典同调代数理论的一个重要发展方向是 Gorenstein 同调代数理论, 它的基本思想是用 Gorenstein 投射模、Gorenstein 内射模和 Gorenstein 平坦模代替投射模、内射模和平坦模, 进而研究相对于这些模类的同调性质. 受此启发, Ding 等^[1] 及 Mao 和 Ding^[2] 分别引入了一类特殊的 Gorenstein 投射模和一类特殊的 Gorenstein 内射模, 称为强 Gorenstein 平坦模和 Gorenstein FP- 内射模. 随后, 这两类模引起了国内外学者的关注, 详见文献 [3–5] 等. Gillespie^[3] 将其分别称为 Ding 投射模和 Ding 内射模. 称关于 Ding 模的同调代数为 Ding 同调代数.

导出范畴是重要而自然的三角范畴, 它的引入给同调代数的研究带来了很大的方便. 2010 年, Gao 和 Zhang^[6] 引入了所谓的 Gorenstein 导出范畴, 定义了同伦范畴关于 Gorenstein 投射拟同构形成的饱和相容乘法系的局部化为 Gorenstein 投射导出范畴. 对偶地, 定义了 Gorenstein 内射导出范畴, 并且给出了 Gorenstein 导出范畴的一些刻画. 2013 年, Ren 等^[4] 定义了相对于 Ding 模的导出范畴, 并将其称为 Ding 导出范畴, 讨论了 Ding 导出范畴与导出范畴及 Gorenstein 导出范畴之间的关系.

设 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 是 Abel 范畴中的完备遗传余挠对. 相对于 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 的 Gorenstein $\mathcal{X}$ - 对象是在文献 [7] 中被引入并首先被研究的. 用 $\mathcal{G}(\mathcal{X})$ 表示所有 Gorenstein $\mathcal{X}$ - 对象构成的类. 实际上, $\mathcal{G}(\mathcal{X})$ 有许多漂

英文引用格式: Chen W J, Liu Z K, Yang X Y. The derived category with respect to $\mathcal{G}(\mathcal{X})$ (in Chinese). Sci Sin Math, 2020, 50: 979–988, doi: 10.1360/N012019-00144

亮的同调性质. 例如, 在文献 [7] 中, 当 $\mathcal{A}$ 是双完备的 Abel 范畴时, 能够定义复形的 $\mathcal{G}(\mathcal{X})$ - 分解维数, 构造复形的 Tate $\mathcal{X}$ - 分解, 研究复形的相对 Tate 上同调. 再如, 文献 [8] 证明了, 若 $\mathcal{Y}$ 关于满同态的核封闭, 则 $(\mathcal{G}(\mathcal{X}) \cap \mathcal{Y}, \mathcal{X} \cap \mathcal{Y})$ 是强左 Frobenius 对, 它诱导了正合范畴 $(\mathcal{G}(\mathcal{X}) \cap \mathcal{Y})^\wedge$ 上唯一的投射的正合模型结构, 并通过余挠对 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 和 $(\mathcal{G}(\mathcal{X}), \mathcal{G}(\mathcal{X})^\perp)$ 给出了 Abel 模型结构的更多构造方法. 若 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 被取为某个特殊的余挠对, 则一些已知的结果能被很容易地得到.

贯穿全文, 设 $\mathcal{A}$ 是有足够投射对象的 Abel 范畴, $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 是 $\mathcal{A}$ 中的完备遗传余挠对. 受以上研究的启发, 本文引入相对于 Gorenstein $\mathcal{X}$ - 对象的导出范畴, 记为 $\mathbf{D}_{\mathcal{G}(\mathcal{X})}(\mathcal{A})$, 简称 Gorenstein $\mathcal{X}$ - 导出范畴. 当 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 取作特殊的余挠对时, 得到了一些已知的导出范畴, 如 Gorenstein 导出范畴和 Gorenstein 平坦导出范畴等. 同时, 通过与 $\mathcal{G}(\mathcal{X})$ 有关的同伦范畴 $\mathbf{K}^{-, gxb}(\mathcal{G}(\mathcal{X}))$ 描述了有界 Gorenstein $\mathcal{X}$ - 导出范畴 $\mathbf{D}_{\mathcal{G}(\mathcal{X})}^b(\mathcal{A})$ 和有界导出范畴 $\mathbf{D}^b(\mathcal{A})$, 并给出了一些三角等价.

2 预备知识

设 X 是 $\mathcal{A}$ 中的对象, $\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{A}$ 中的对象类. 称态射 $f: C \rightarrow X$ 是 X 的 $\mathcal{C}$ - 预覆盖, 其中 $C \in \mathcal{C}$, 若对任意的 $C' \in \mathcal{C}$, 序列 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(C', C) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(C', f)} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(C', X) \rightarrow 0$ 是正合的. 称 $\mathcal{C}$ 是预覆盖类, 如果 $\mathcal{A}$ 中的每个对象都有 $\mathcal{C}$ - 预覆盖.

称 $\mathcal{A}$ 中对象和态射的序列

$$X = \cdots \longrightarrow X^{-2} \xrightarrow{\delta^{-2}} X^{-1} \xrightarrow{\delta^{-1}} X^0 \xrightarrow{\delta^0} X^1 \xrightarrow{\delta^1} X^2 \longrightarrow \cdots$$

是 (链) 复形, 如果对任意的 $n \in \mathbb{Z}$, $\delta^n \delta^{n-1} = 0$. 称 $\mathrm{Ker} \delta^n$ 为复形 X 的第 n 个循环, 记为 $Z^n X$. 称 $\mathrm{Im} \delta^{n-1}$ 为复形 X 的第 n 个边缘, 记为 $B^n X$. 定义复形 X 的第 n 个同调为 $H^n X = Z^n X / B^n X$. 若对任意的 $n \in \mathbb{Z}$, $H^n X = 0$, 则称 X 是零调 (正合) 的. 设 $m \in \mathbb{Z}$, 则可以构造一个复形 $X[m]$, 使得 $X[m]^n = X^{n+m}$, 并且边缘算子为 $\delta_{X[m]}^n = (-1)^m \delta_X^{n+m}$, 称 $X[m]$ 为 X 的 m 次平移. 用 $\mathbf{C}(\mathcal{A})$ 表示 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 的复形范畴. 设 X 和 Y 是复形. 我们用 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ 表示 Abel 群的复形, 其中 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)^n = \prod_{t \in \mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X^t, Y^{n+t})$, 且对任意的 $f = (f^i)_{i \in \mathbb{Z}} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)^n$, $d^n((f^i)_{i \in \mathbb{Z}}) = (d_Y^{n+i} f^i - (-1)^n f^{i+1} d_X^i)_{i \in \mathbb{Z}}$. 称态射 $f: X \rightarrow Y$ 为拟同构, 如果对任意的 $n \in \mathbb{Z}$, $H^n(f): H^n(X) \rightarrow H^n(Y)$ 是同构. 称态射 $f, g: X \rightarrow Y$ 是同伦的, 记为 $f \sim g$, 如果存在一簇态射 $(s^n: X^n \rightarrow Y^{n-1})_{n \in \mathbb{Z}}$, 使得对任意的 $n \in \mathbb{Z}$, $f^n - g^n = d_Y^{n-1} s^n + s^{n+1} d_X^n$. 若 $f \sim 0$, 则称 f 是零伦的. 称 X 是可缩复形, 如果 $\mathrm{id}_X \sim 0$.

本文未作解释的概念和记号参见文献 [9].

定义 2.1 ^[7] 一个完全 $\mathcal{X}$ - 分解是一个 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{X} \cap \mathcal{Y})$ - 正合的正合序列

$$\cdots \rightarrow X_1 \rightarrow X_0 \rightarrow X_{-1} \rightarrow X_{-2} \rightarrow \cdots,$$

其中每个 $X_i \in \mathcal{X}$. 称 M 是一个 Gorenstein $\mathcal{X}$ - 对象, 如果存在一个如上的完全 $\mathcal{X}$ - 分解使得 $M \cong \mathrm{Ker}(X_{-1} \rightarrow X_{-2})$. 用 $\mathcal{G}(\mathcal{X})$ 表示所有 Gorenstein $\mathcal{X}$ - 对象构成的类.

3 Gorenstein $\mathcal{X}$ - 导出范畴的定义

本节给出相对于 Gorenstein $\mathcal{X}$ - 对象的导出范畴的定义. 首先, 给出一些基本概念.

定义 3.1 称复形 X 是 $\mathcal{G}(\mathcal{X})$ -零调的, 如果对任意的 $G \in \mathcal{G}(\mathcal{X})$, $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(G, X)$ 是零调的. 称链映射 $f: X \rightarrow Y$ 是 $\mathcal{G}(\mathcal{X})$ -拟同构, 如果对任意的 $G \in \mathcal{G}(\mathcal{X})$, $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(G, f)$ 是拟同构.

对于 $* \in \{\emptyset, +, -, b\}$, 我们用 $\mathbf{K}^*(\mathcal{A})$ 和 $\mathbf{D}^*(\mathcal{A})$ 分别表示 $\mathcal{A}$ 的相应的同伦范畴和导出范畴, 用 $\mathbf{K}^*(\mathcal{G}(\mathcal{X}))$ 表示 $\mathcal{G}(\mathcal{X})$ 的相应的同伦范畴, 用 $\mathbf{K}_{\mathcal{G}(\mathcal{X})}^*(\mathcal{A})$ 表示所有相应的 $\mathcal{G}(\mathcal{X})$ -零调复形构成的同伦范畴, 用 $\mathbf{K}_{ac}^*(\mathcal{A})$ 表示所有相应的零调复形构成的同伦范畴, 用 $\mathbf{K}_{ac}^*(\mathcal{G}(\mathcal{X}))$ 表示所有相应的 $\mathcal{G}(\mathcal{X})$ 对象的零调复形构成的同伦范畴. 用 $\text{Prj}\mathcal{A}$ 表示 $\mathcal{A}$ 中所有投射对象构成的类. 实际上, 我们可以充分利用关键公式 $\text{Hom}_{\mathbf{K}^*(\mathcal{A})}(X, Y[n]) = H^n(\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y))$ 去解决一些基本问题.

注 3.2 (1) 由于 $\mathcal{A}$ 是有足够投射对象的 Abel 范畴, 并且 $\text{Prj}\mathcal{A} \subseteq \mathcal{X} \subseteq \mathcal{G}(\mathcal{X})$, 所以, 每个 $\mathcal{G}(\mathcal{X})$ -零调复形是零调的, 并且每个 $\mathcal{G}(\mathcal{X})$ -拟同构是拟同构.

(2) 由文献 [10, 引理 2.4] 可知, 一个复形是 $\mathcal{G}(\mathcal{X})$ -零调的当且仅当对任意的 $G \in \mathbf{K}^-(\mathcal{G}(\mathcal{X}))$, $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(G, X)$ 是零调的. 由文献 [10, 命题 2.6] 可知, 链映射 $f: X \rightarrow Y$ 是 $\mathcal{G}(\mathcal{X})$ -拟同构当且仅当对任意的 $G \in \mathbf{K}^-(\mathcal{G}(\mathcal{X}))$, $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(G, f)$ 是拟同构当且仅当对任意的 $n \in \mathbb{Z}$ 和 $G \in \mathbf{K}^-(\mathcal{G}(\mathcal{X}))$, 存在 Abel 群之间的同构 $\text{Hom}_{\mathbf{K}(\mathcal{A})}(G, f[n]): \text{Hom}_{\mathbf{K}(\mathcal{A})}(G, X[n]) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{K}(\mathcal{A})}(G, Y[n])$.

引理 3.3 对于 $* \in \{\emptyset, +, -, b\}$, $\mathbf{K}_{\mathcal{G}(\mathcal{X})}^*(\mathcal{A})$ 是 $\mathbf{K}_{ac}^*(\mathcal{A})$ 的厚子范畴, 进而, $\mathbf{K}_{\mathcal{G}(\mathcal{X})}^*(\mathcal{A})$ 是 $\mathbf{K}^*(\mathcal{A})$ 的厚子范畴.

证明 显然, $\mathbf{K}_{\mathcal{G}(\mathcal{X})}^*(\mathcal{A})$ 关于同构和平移封闭. 设 $X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow X[1]$ 是 $\mathbf{K}_{ac}^*(\mathcal{A})$ 中的好三角, 其中 $X, Z \in \mathbf{K}_{\mathcal{G}(\mathcal{X})}^*(\mathcal{A})$. 对任意的 $n \in \mathbb{Z}$ 和 $G \in \mathcal{G}(\mathcal{X})$, $\text{Hom}_{\mathbf{K}^*(\mathcal{A})}(G, X[n]) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{K}^*(\mathcal{A})}(G, Y[n]) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{K}^*(\mathcal{A})}(G, Z[n])$ 是正合的. 因为 $X, Z \in \mathbf{K}_{\mathcal{G}(\mathcal{X})}^*(\mathcal{A})$, 所以, $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(G, X)$ 和 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(G, Z)$ 是零调的. 通过关键公式可得 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(G, Y)$ 是零调的. 因此, $Y \in \mathbf{K}_{\mathcal{G}(\mathcal{X})}^*(\mathcal{A})$. 故 $\mathbf{K}_{\mathcal{G}(\mathcal{X})}^*(\mathcal{A})$ 是 $\mathbf{K}_{ac}^*(\mathcal{A})$ 的三角子范畴. 由文献 [8, 命题 3.3] 知 $\mathcal{G}(\mathcal{X})$ 关于直和项封闭, 那么 $\mathbf{K}_{\mathcal{G}(\mathcal{X})}^*(\mathcal{A})$ 是 $\mathbf{K}_{ac}^*(\mathcal{A})$ 的厚子范畴. 进一步, $\mathbf{K}_{\mathcal{G}(\mathcal{X})}^*(\mathcal{A})$ 是 $\mathbf{K}^*(\mathcal{A})$ 的厚子范畴. $\square$

定义 3.4 对于 $* \in \{\emptyset, +, -, b\}$, Verdier 商 $\mathbf{K}^*(\mathcal{A})/\mathbf{K}_{\mathcal{G}(\mathcal{X})}^*(\mathcal{A})$ 定义为相对于 $\mathcal{G}(\mathcal{X})$ 的导出范畴, 记为 $\mathbf{D}_{\mathcal{G}(\mathcal{X})}^*(\mathcal{A})$, 简称为 Gorenstein $\mathcal{X}$ -导出范畴.

我们用 $\mathcal{F}$ 表示所有平坦 R -模构成的类, 用 $\mathcal{C}$ 表示所有余挠 R -模构成的类. 众所周知, $(\mathcal{F}, \mathcal{C})$ 是一个完备遗传的余挠对.

注 3.5 (1) 如果 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = (\text{Prj}\mathcal{A}, \mathcal{A})$, 那么, $\mathbf{D}_{\mathcal{G}(\mathcal{X})}^*(\mathcal{A})$ 实际上就是相应的 Gorenstein 投射导出范畴. 此外, 若每个对象有有限的投射维数, 则 $\mathcal{G}(\mathcal{X}) = \text{Prj}\mathcal{A}$, 并且 $\mathbf{D}_{\mathcal{G}(\mathcal{X})}^*(\mathcal{A})$ 和 $\mathbf{D}^*(\mathcal{A})$ 是一致的.

(2) 假设 R 是右凝聚环, $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = (\mathcal{F}, \mathcal{C})$. 用 $\mathcal{GF}$ 表示 Gorenstein 平坦模构成的类. 由文献 [11, 注释 4.6] 可知, $\mathbf{D}_{\mathcal{G}(\mathcal{X})}^*(\mathcal{A})$ 实际上就是相应的 Gorenstein 平坦导出范畴 $\mathbf{D}_{\mathcal{GF}}^*(R)$. 然而, $\mathbf{D}_{\mathcal{GF}}^*(R)$ 的一些结果是未知的, 这也是我们为什么研究 $\mathbf{D}_{\mathcal{G}(\mathcal{X})}^*(\mathcal{A})$ 的原因之一.

4 Gorenstein $\mathcal{X}$ -导出范畴

本节研究 Gorenstein $\mathcal{X}$ -导出范畴的一些同调性质, 讨论 Gorenstein $\mathcal{X}$ -导出范畴与导出范畴之间的联系.

引理 4.1 存在一个三角等价 $\mathbf{D}^*(\mathcal{A}) = \mathbf{D}_{\mathcal{G}(\mathcal{X})}^*(\mathcal{A})/(\mathbf{K}_{ac}^*(\mathcal{A})/\mathbf{K}_{\mathcal{G}(\mathcal{X})}^*(\mathcal{A}))$.

证明 显然, 我们有如下三角等价:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^*(\mathcal{A}) &= \mathbf{K}^*(\mathcal{A})/\mathbf{K}_{ac}^*(\mathcal{A}) \\ &\cong (\mathbf{K}^*(\mathcal{A})/\mathbf{K}_{\mathcal{G}(\mathcal{X})}^*(\mathcal{A})) / (\mathbf{K}_{ac}^*(\mathcal{A})/\mathbf{K}_{\mathcal{G}(\mathcal{X})}^*(\mathcal{A})) \end{aligned}$$

$$= \mathbf{D}_{\mathcal{G}(\mathcal{X})}^*(\mathcal{A})/(\mathbf{K}_{ac}^*(\mathcal{A})/\mathbf{K}_{\mathcal{G}(\mathcal{X})}^*(\mathcal{A})),$$

其中同构式由文献 [12, 推论 4-3] 和引理 3.3 得到. $\square$

命题 4.2 商函子 $Q: \mathbf{D}_{\mathcal{G}(\mathcal{X})}^*(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{D}^*(\mathcal{A})$ 是一个三角等价当且仅当每个 Gorenstein $\mathcal{X}$ -对象是投射的.

证明 由引理 4.1 可知, 商函子 $Q: \mathbf{D}_{\mathcal{G}(\mathcal{X})}^*(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{D}^*(\mathcal{A})$ 是一个三角等价当且仅当 $\mathbf{K}_{ac}^*(\mathcal{A}) \cong \mathbf{K}_{\mathcal{G}(\mathcal{X})}^*(\mathcal{A})$ 当且仅当每个拟同构是 $\mathcal{G}(\mathcal{X})$ -拟同构. 因此充分性是显然的. 假设每个拟同构是 $\mathcal{G}(\mathcal{X})$ -拟同构. 设 G 是 Gorenstein $\mathcal{X}$ -对象, $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$ 是正合序列, 则 g 诱导了一个拟同构 g' , 具体形式如下:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow 0 & & \downarrow 0 & & \downarrow g & & \downarrow 0 & & \\ \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

由假设条件知 g' 是 $\mathcal{G}(\mathcal{X})$ -拟同构. $0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(G, A) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(G, B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(G, C) \rightarrow 0$ 是正合的. 因此, G 是投射的. 证毕. $\square$

引理 4.3 (1) 设 $G \in \mathbf{K}^-(\mathcal{G}(\mathcal{X}))$ 且 $f: X \rightarrow G$ 是 $\mathcal{G}(\mathcal{X})$ -拟同构, 则存在链映射 $g: G \rightarrow X$, 使得 $fg \sim id_G$. 特别地, g 也是 $\mathcal{G}(\mathcal{X})$ -拟同构.

(2) 设 $f: G \rightarrow Q$ 是 $\mathcal{G}(\mathcal{X})$ -拟同构, 其中 $G, Q \in \mathbf{K}^-(\mathcal{G}(\mathcal{X}))$, 则 f 是同伦等价.

证明 (1) 由注 3.2 知, 存在一个 Abel 群的同构 $\text{Hom}_{\mathbf{K}(\mathcal{A})}(G, f): \text{Hom}_{\mathbf{K}(\mathcal{A})}(G, X) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{K}(\mathcal{A})}(G, G)$. 对于态射 id_G , 存在一个态射 $g: G \rightarrow X$, 使得在 $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ 中 $fg = id_G$, 即 $fg \sim id_G$. 下面来说明 g 是 $\mathcal{G}(\mathcal{X})$ -拟同构. 对任意的 $G' \in \mathcal{G}(\mathcal{X})$ 和任意的 $n \in \mathbb{Z}$, 有 $H^n(\text{Hom}_{\mathcal{A}}(G', id_G)) = H^n(\text{Hom}_{\mathcal{A}}(G', fg)) = H^n(\text{Hom}_{\mathcal{A}}(G', f))H^n(\text{Hom}_{\mathcal{A}}(G', g))$. 因为 $f: X \rightarrow G$ 是 $\mathcal{G}(\mathcal{X})$ -拟同构, 所以, 对任意的 $n \in \mathbb{Z}$, $H^n(\text{Hom}_{\mathcal{A}}(G', f))$ 是同构, 进而 $H^n(\text{Hom}_{\mathcal{A}}(G', g))$ 也是同构, 即 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(G', g)$ 是拟同构. 故 g 是 $\mathcal{G}(\mathcal{X})$ -拟同构.

(2) 由 (1) 可知, 存在一个 $\mathcal{G}(\mathcal{X})$ -拟同构 $g: Q \rightarrow G$, 使得 $fg \sim id_Q$. 再次由 (1) 可知, 存在一个 $\mathcal{G}(\mathcal{X})$ -拟同构 $h: G \rightarrow Q$, 使得 $gh \sim id_G$. 因此, f 是同伦等价. $\square$

接下来的命题给出 Gorenstein $\mathcal{X}$ -导出范畴中态射的另一种理解方式.

命题 4.4 设 $G \in \mathbf{K}^-(\mathcal{G}(\mathcal{X}))$ 且 X 是任意复形, 则 Verdier 商函子 $Q: f \mapsto f/id_X$ 给出了一个 Abel 群同构 $\text{Hom}_{\mathbf{K}(\mathcal{A})}(G, X) \cong \text{Hom}_{\mathbf{D}_{\mathcal{G}(\mathcal{X})}(\mathcal{A})}(G, X)$.

证明 定义 $\alpha: \text{Hom}_{\mathbf{K}(\mathcal{A})}(G, X) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{D}_{\mathcal{G}(\mathcal{X})}(\mathcal{A})}(G, X)$, 其作用方式为对任意 $f \in \text{Hom}_{\mathbf{K}(\mathcal{A})}(G, X)$, $\alpha(f) = Q(f) = f/id_X$. 显然, α 是加法共变函子. 此外只需证明 α 是双射. 首先, 设 $f/id_X = 0$, 其中 $f \in \text{Hom}_{\mathbf{K}(\mathcal{A})}(G, X)$, 则存在一个 $\mathcal{G}(\mathcal{X})$ -拟同构 $s: Y \rightarrow G$, 使得 $fs \sim 0$. 由引理 4.3 可知, 存在一个 $\mathcal{G}(\mathcal{X})$ -拟同构 $g: G \rightarrow Y$, 使得 $sg \sim id_G$. 于是, $f \sim 0$. 因此, α 是单的. 其次, 对于任意的 $f/s \in \text{Hom}_{\mathbf{D}_{\mathcal{G}(\mathcal{X})}(\mathcal{A})}(G, X)$, 为方便起见, 我们用右分式来表示 f/s , 即 $G \xleftarrow{s} Y \xrightarrow{f} X$, 再次由引理 4.3 可知, 存在一个 $\mathcal{G}(\mathcal{X})$ -拟同构 $g: G \rightarrow Y$, 使得 $sg \sim id_G$, 则 $f/s = fg/id_G = Q(fg) = \alpha(fg)$. 故 α 是满的. 综上所述, α 是 Abel 群同构. $\square$

引理 4.5 ^[13] 把非零对象映为非零对象的满三角函子是忠实的.

命题 4.6 (1) $\mathbf{D}_{\mathcal{G}(\mathcal{X})}^-(\mathcal{A})$ 是 $\mathbf{D}_{\mathcal{G}(\mathcal{X})}(\mathcal{A})$ 的三角子范畴, $\mathbf{D}_{\mathcal{G}(\mathcal{X})}^b(\mathcal{A})$ 是 $\mathbf{D}_{\mathcal{G}(\mathcal{X})}^-(\mathcal{A})$ 的三角子范畴, 自然地, $\mathbf{D}_{\mathcal{G}(\mathcal{X})}^b(\mathcal{A})$ 是 $\mathbf{D}_{\mathcal{G}(\mathcal{X})}(\mathcal{A})$ 的三角子范畴.

(2) 合成函子 $\mathcal{A} \xrightarrow{i} \mathbf{K}^b(\mathcal{A}) \xrightarrow{Q} \mathbf{D}_{\mathcal{G}(\mathcal{X})}^b(\mathcal{A})$ 是满忠实的, 其中 i 是满嵌入, Q 是 Verdier 商函子.

证明 (1) 由于两个三角子范畴的证明是类似的, 下面只给出 $\mathbf{D}_{\mathcal{G}(\mathcal{X})}^-(\mathcal{A})$ 是 $\mathbf{D}_{\mathcal{G}(\mathcal{X})}(\mathcal{A})$ 的三角子范畴的证明.

注意到 $\mathbf{D}_{\mathcal{G}(\mathcal{X})}^-(\mathcal{A}) = \mathbf{K}^-(\mathcal{A})/(\mathbf{K}^-(\mathcal{A}) \cap \mathbf{K}_{\mathcal{G}(\mathcal{X})}(\mathcal{A}))$ 且 $\mathbf{D}_{\mathcal{G}(\mathcal{X})}(\mathcal{A}) = \mathbf{K}(\mathcal{A})/\mathbf{K}_{\mathcal{G}(\mathcal{X})}(\mathcal{A})$. 由文献 [14, 命题 3.2.10] 知, 只需证明对任意的 $\mathcal{G}(\mathcal{X})$ -拟同构 $f: X \rightarrow Y$, 其中 $Y \in \mathbf{K}^-(\mathcal{A})$, 存在态射 $g: Z \rightarrow X$, 其中 $Z \in \mathbf{K}^-(\mathcal{A})$, 使得 fg 是 $\mathcal{G}(\mathcal{X})$ -拟同构. 假设存在某个整数 i , 使得对任意的 $k > i$, $Y^k = 0$, 即 $Y = \cdots \rightarrow Y^{i-2} \rightarrow Y^{i-1} \rightarrow Y^i \rightarrow 0$, 则有如下交换图:

$$\begin{array}{ccccccc}
 Z = \cdots & \longrightarrow & X^{i-2} & \longrightarrow & X^{i-1} & \longrightarrow & \ker d^i \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \\
 \downarrow g & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
 X = \cdots & \longrightarrow & X^{i-2} & \longrightarrow & X^{i-1} & \longrightarrow & X^i \longrightarrow X^{i+1} \longrightarrow \cdots \\
 \downarrow f & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 Y = \cdots & \longrightarrow & Y^{i-2} & \longrightarrow & Y^{i-1} & \longrightarrow & Y^i \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots
 \end{array}$$

由于 f 是 $\mathcal{G}(\mathcal{X})$ -拟同构, 所以, g 也是 $\mathcal{G}(\mathcal{X})$ -拟同构. 因此, fg 是 $\mathcal{G}(\mathcal{X})$ -拟同构. 于是可得 $\mathbf{D}_{\mathcal{G}(\mathcal{X})}^-(\mathcal{A})$ 是 $\mathbf{D}_{\mathcal{G}(\mathcal{X})}(\mathcal{A})$ 的三角子范畴.

(2) 设 $F = Qi: \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{D}_{\mathcal{G}(\mathcal{X})}^b(\mathcal{A})$. 下面只需证明对任意的 $M, N \in \mathcal{A}$, 映射 $F: \text{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{D}_{\mathcal{G}(\mathcal{X})}^b(\mathcal{A})}(M, N)$ 是同构. 一方面, 设 $g/t: M \xleftarrow{t} L \xrightarrow{g} N$ 是 $\text{Hom}_{\mathbf{D}_{\mathcal{G}(\mathcal{X})}^b(\mathcal{A})}(M, N)$ 中的态射, 其中 t 是 $\mathcal{G}(\mathcal{X})$ -拟同构. 由注 3.2 知, t 是拟同构, 且 $M \cong H^0(L)$. 设 $f = H^0(g)H^0(t)^{-1} \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N)$. 令 $W = \cdots \rightarrow L^{-2} \xrightarrow{d^{-2}} L^{-1} \xrightarrow{d^{-1}} \ker d^0 \rightarrow 0$ 且 $i: W \hookrightarrow L$ 是标准的嵌入映射. 由 t 是 $\mathcal{G}(\mathcal{X})$ -拟同构可知, i 也是 $\mathcal{G}(\mathcal{X})$ -拟同构, 进而 ti 也是 $\mathcal{G}(\mathcal{X})$ -拟同构. 于是有下图:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & L & & \\
 & \swarrow t & \uparrow i & \searrow g & \\
 M & \xleftarrow{ti} & W & \xrightarrow{gi} & N \\
 & \nwarrow id_M & \downarrow ti & \nearrow f & \\
 & & M & &
 \end{array}$$

接下来说明 $f ti = gi$. 只需要说明第 0 层次上相等即可. 有如下交换图:

$$\begin{array}{ccc}
 W & \xrightarrow{i} & L \\
 \downarrow & & \downarrow t \\
 H^0(L) & \xrightarrow{H^0(t)} & M.
 \end{array}$$

于是, $f ti = H^0(g)H^0(t)^{-1}ti = gi$. 因此, $F(f) = f/id_M = g/t$, 即 F 是满的. 另一方面, 对任意的非零 $M \in \mathcal{A}$, $F(M) = \cdots \rightarrow 0 \rightarrow M \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$ 不是 $\mathcal{G}(\mathcal{X})$ -零调的, 即 $F(M)$ 在 $\mathbf{D}_{\mathcal{G}(\mathcal{X})}^b(\mathcal{A})$ 中不是零对象. 则 F 把非零对象映成非零对象, 由引理 4.5 知 F 是忠实的. $\square$

注 4.7 (1) 设 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = (\text{Prj } \mathcal{A}, \mathcal{A})$, 则命题 4.6(2) 就是文献 [6, 命题 2.9].

(2) 假设 R 是右凝聚环, $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = (\mathcal{F}, \mathcal{C})$, 则由文献 [11, 注释 4.6] 和命题 4.6 知, $\mathbf{D}_{\mathcal{G}\mathcal{F}}^-(R)$ 是 $\mathbf{D}_{\mathcal{G}\mathcal{F}}(R)$ 的三角子范畴, $\mathbf{D}_{\mathcal{G}\mathcal{F}}^b(R)$ 是 $\mathbf{D}_{\mathcal{G}\mathcal{F}}^-(R)$ 的三角子范畴. 自然 $\mathbf{D}_{\mathcal{G}\mathcal{F}}^b(R)$ 是 $\mathbf{D}_{\mathcal{G}\mathcal{F}}(R)$ 的三角子范畴. 同时, 合成函子 $\text{Mod } R \xrightarrow{i} \mathbf{K}^b(R) \xrightarrow{Q} \mathbf{D}_{\mathcal{G}\mathcal{F}}^b(R)$ 是满忠实的.

5 Gorenstein $\mathcal{X}$ - 导出范畴的另外一种描述

本节通过 $\mathbf{K}_{\mathcal{G}(\mathcal{X})}^-(\mathcal{A})$ 的一个三角子范畴描述 Gorenstein $\mathcal{X}$ - 导出范畴.

定义 5.1 定义

$$\mathbf{K}^{-,gxb}(\mathcal{G}(\mathcal{X})) := \{X \in \mathbf{K}^-(\mathcal{G}(\mathcal{X})) \mid \exists N(X) \in \mathbb{Z} \text{ s.t. } H^i(\text{Hom}_{\mathcal{A}}(G, X)) = 0, \forall i \leq N(X), \forall G \in \mathcal{G}(\mathcal{X})\}.$$

容易看出 $\mathbf{K}^{-,gxb}(\mathcal{G}(\mathcal{X}))$ 是 $\mathbf{K}^-(\mathcal{G}(\mathcal{X}))$ 的加法满子范畴. 因为 $\text{Prj } \mathcal{A} \subseteq \mathcal{X} \subseteq \mathcal{G}(\mathcal{X})$, 所以, 对任意的 $X \in \mathbf{K}^{-,gxb}(\mathcal{G}(\mathcal{X}))$, 存在 $N(X) \in \mathbb{Z}$, 使得对任意的 $i \leq N(X)$, 有 $H^i(X) = 0$. 显然, $\mathbf{K}^b(\mathcal{G}(\mathcal{X})) \subseteq \mathbf{K}^{-,gxb}(\mathcal{G}(\mathcal{X})) \subseteq \mathbf{K}^-(\mathcal{G}(\mathcal{X}))$.

引理 5.2 $\mathbf{K}^{-,gxb}(\mathcal{G}(\mathcal{X}))$ 是 $\mathbf{K}^-(\mathcal{G}(\mathcal{X}))$ 的厚子范畴.

证明 $\mathbf{K}^{-,gxb}(\mathcal{G}(\mathcal{X}))$ 关于同构封闭. 对任意的 $X \in \mathbf{K}^{-,gxb}(\mathcal{G}(\mathcal{X}))$, 存在 $N(X) \in \mathbb{Z}$, 使得对任意的 $i \leq N(X)$ 和 $G \in \mathcal{G}(\mathcal{X})$, $H^i(\text{Hom}_{\mathcal{A}}(G, X)) = 0$, 则对任意的 $m \in \mathbb{Z}$, 有 $H^j(\text{Hom}_{\mathcal{A}}(G, X[m])) = \text{Hom}_{\mathbf{K}(\mathcal{A})}(G, X[j+m]) = H^{j+m}(\text{Hom}_{\mathcal{A}}(G, X))$. 因此, 当 $j \leq N(X) - m$ 时, $H^j(\text{Hom}_{\mathcal{A}}(G, X[m])) = 0$. 故 $X[m] \in \mathbf{K}^{-,gxb}(\mathcal{G}(\mathcal{X}))$. 设 $X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow X[1]$ 是 $\mathbf{K}^-(\mathcal{G}(\mathcal{X}))$ 中的好三角, 其中 $X, Y \in \mathbf{K}^{-,gxb}(\mathcal{G}(\mathcal{X}))$. 由 $\mathbf{K}^{-,gxb}(\mathcal{G}(\mathcal{X}))$ 的定义可知, 存在 $N(X), N(Y) \in \mathbb{Z}$. 令 $m = \min\{N(X), N(Y)\}$. 对任意的 $G \in \mathcal{G}(\mathcal{X})$, 有正合序列 $\cdots \rightarrow H^{n-1}(\text{Hom}_{\mathcal{A}}(G, Y)) \rightarrow H^{n-1}(\text{Hom}_{\mathcal{A}}(G, Z)) \rightarrow H^n(\text{Hom}_{\mathcal{A}}(G, X)) \rightarrow \cdots$, 则对任意的 $l \leq m - 1$, $H^l(\text{Hom}_{\mathcal{A}}(G, Z)) = 0$. 取 $N(Z) = m - 1$, 则 $Z \in \mathbf{K}^{-,gxb}(\mathcal{G}(\mathcal{X}))$. 因此, $\mathbf{K}^{-,gxb}(\mathcal{G}(\mathcal{X}))$ 是 $\mathbf{K}^-(\mathcal{G}(\mathcal{X}))$ 的三角子范畴. 由文献 [8, 命题 3.3] 可知 $\mathcal{G}(\mathcal{X})$ 关于直和项封闭. 故 $\mathbf{K}^{-,gxb}(\mathcal{G}(\mathcal{X}))$ 是 $\mathbf{K}^-(\mathcal{G}(\mathcal{X}))$ 的厚子范畴. $\square$

引理 5.3 考虑 $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ 中的如下三角态射:

$$\begin{array}{ccccccc} X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & X[1] \\ f \downarrow & & g \downarrow & & h \downarrow & & f[1] \downarrow \\ X' & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & Z' & \longrightarrow & X'[1]. \end{array}$$

若 f 和 g 是 $\mathcal{G}(\mathcal{X})$ - 拟同构, 则 h 是 $\mathcal{G}(\mathcal{X})$ - 拟同构.

下面给出本文的第一个主要结果及其证明, 即对有界 Gorenstein $\mathcal{X}$ - 导出范畴的一个刻画.

定理 5.4 假设 $\mathcal{G}(\mathcal{X})$ 是预覆盖类, 则对任意的 $X \in \mathbf{K}^b(\mathcal{A})$, 存在 $\mathcal{G}(\mathcal{X})$ - 拟同构 $G_X \rightarrow X$, 其中 $G_X \in \mathbf{K}^{-,gxb}(\mathcal{G}(\mathcal{X}))$, 而且存在三角等价 $\mathbf{D}_{\mathcal{G}(\mathcal{X})}^b(\mathcal{A}) \cong \mathbf{K}^{-,gxb}(\mathcal{G}(\mathcal{X}))$.

证明 记复形 X 的非零层次的个数为 $\omega(X)$, 即 X 的宽度. 下面对 $\omega(X)$ 进行数学归纳. 首先, 假设 $\omega(X) = 1$. 不失一般性, X 可看成 B 的轴复形. 由于 $\text{Prj } \mathcal{A} \subseteq \mathcal{G}(\mathcal{X})$ 且 $\mathcal{G}(\mathcal{X})$ 是预覆盖类, 所以存在一个满的 B 的 $\mathcal{G}(\mathcal{X})$ - 预覆盖 $d^0: G^0 \rightarrow B$. 对于 $\text{Ker } d^0$, 同样存在一个满的 $\mathcal{G}(\mathcal{X})$ - 预覆盖 $d^{-1}: G^{-1} \rightarrow \text{Ker } d^0$. 通过继续此过程可得一个零调复形 $G = \cdots \rightarrow G^{-2} \xrightarrow{d^{-2}} G^{-1} \xrightarrow{d^{-1}} G^0 \xrightarrow{d^0} B \rightarrow 0$, 其中 $G^i \in \mathcal{G}(\mathcal{X})$, 并且对任意的 $G' \in \mathcal{G}(\mathcal{X})$, $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(G', G)$ 是零调的. 令 $G_X = \cdots \rightarrow G^{-2} \xrightarrow{d^{-2}} G^{-1} \xrightarrow{d^{-1}} G^0 \rightarrow 0$, 则有

$$\begin{array}{ccccccccccc} G_X & \cdots & \longrightarrow & G^{-2} & \xrightarrow{d^{-2}} & G^{-1} & \xrightarrow{d^{-1}} & G^0 & \xrightarrow{0} & 0 & \longrightarrow & \cdots \\ f \downarrow & & & 0 \downarrow & & 0 \downarrow & & d^0 \downarrow & & 0 \downarrow & & \\ X & \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots, \end{array}$$

其中 $G_X \in \mathbf{K}^{-,gxb}(\mathcal{G}(\mathcal{X}))$, f 是 $\mathcal{G}(\mathcal{X})$ - 拟同构. 其次假设 $\omega(X) \geq 2$ 且对任意的 $i < j$, $X^j \neq 0$, $X^i = 0$. 设 $Y = X^j[-j-1]$ 且 $Z = 0 \rightarrow X^{j+1} \rightarrow X^{j+2} \rightarrow X^{j+3} \rightarrow \cdots$, 则存在一个好三角

$Y \xrightarrow{d_X^j} Z \rightarrow X \rightarrow Y[1]$. 通过归纳假设和之前的证明可知, 存在两个 $\mathcal{G}(\mathcal{X})$ -拟同构 $g: G_Y \rightarrow Y$, $h: G_Z \rightarrow Z$, 其中 $G_Y, G_Z \in \mathbf{K}^{-, gxb}(\mathcal{G}(\mathcal{X}))$. 由命题 4.4 可知, $\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}^-(\mathcal{A})}(G_Y, G_Z) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}^-(\mathcal{A})}(G_Y, Z)$. 于是存在唯一的链映射 $b: G_Y \rightarrow G_Z$, 使得 $hb = d_X^j g$. 由引理 5.2 可知, 存在 $\mathbf{K}^{-, gxb}(\mathcal{G}(\mathcal{X}))$ 中的好三角 $G_Y \xrightarrow{b} G_Z \rightarrow G_X \rightarrow G_Y[1]$. 因此存在链映射 $c: G_X \rightarrow X$ 使得下图可交换:

$$\begin{array}{ccccccc} G_Y & \xrightarrow{b} & G_Z & \longrightarrow & G_X & \longrightarrow & G_Y[1] \\ g \downarrow & & h \downarrow & & c \downarrow & & g[1] \downarrow \\ Y & \xrightarrow{d_X^j} & Z & \longrightarrow & X & \longrightarrow & Y[1]. \end{array}$$

由引理 5.3 可知 c 是 $\mathcal{G}(\mathcal{X})$ -拟同构. 于是证明了第一个结论. 接下来证明第二个结论.

设 $i: \mathbf{K}^{-, gxb}(\mathcal{G}(\mathcal{X})) \rightarrow \mathbf{K}^-(\mathcal{A})$ 是满嵌入, $Q: \mathbf{K}^-(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{D}_{\mathcal{G}(\mathcal{X})}^-(\mathcal{A})$ 是 Verdier 商函子. 令 $F = Qi: \mathbf{K}^{-, gxb}(\mathcal{G}(\mathcal{X})) \rightarrow \mathbf{D}_{\mathcal{G}(\mathcal{X})}^-(\mathcal{A})$. 由命题 4.4 易得 F 是满忠实的. 对任意的 $X \in \mathbf{K}^{-, gxb}(\mathcal{G}(\mathcal{X}))$, 存在 $N(X) \in \mathbb{Z}$, 使得对任意的 $i \leq N(X)$ 和 $G \in \mathcal{G}(\mathcal{X})$, 有 $H^i(\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(G, X)) = 0$. 令 $n = N(X)$, 则存在如下 $\mathcal{G}(\mathcal{X})$ -拟同构:

$$\begin{array}{ccccccccccc} X & \cdots & \longrightarrow & X^{n-2} & \longrightarrow & X^{n-1} & \longrightarrow & X^n & \longrightarrow & X^{n+1} & \longrightarrow \cdots \\ f \downarrow & & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel & & \parallel & \\ T & \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \ker d^n & \longrightarrow & X^n & \longrightarrow & X^{n+1} & \longrightarrow \cdots \end{array}$$

于是可得在 $\mathbf{D}_{\mathcal{G}(\mathcal{X})}^-(\mathcal{A})$ 中 $F(X) \cong T$, 其中 $T \in \mathbf{K}^b(\mathcal{A})$. 显然, $\mathrm{Im} F \subseteq \mathbf{D}_{\mathcal{G}(\mathcal{X})}^b(\mathcal{A})$. 重新定义 F 为 $\mathbf{K}^{-, gxb}(\mathcal{G}(\mathcal{X})) \rightarrow \mathbf{D}_{\mathcal{G}(\mathcal{X})}^b(\mathcal{A})$, 则 F 仍然是满忠实的. 此外, 由前面的证明可知 F 是稠密的. 故 F 是一个等价函子, 即存在三角等价 $\mathbf{D}_{\mathcal{G}(\mathcal{X})}^b(\mathcal{A}) \cong \mathbf{K}^{-, gxb}(\mathcal{G}(\mathcal{X}))$. $\square$

注 5.5 (1) 设 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = (\mathrm{Prj} \mathcal{A}, \mathcal{A})$, 则定理 5.4 就是文献 [15, 引理 3.1(i)] 和 [15, 定理 3.2(i)].

(2) 设 R 是右凝聚环. 假设 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = (\mathcal{F}, \mathcal{C})$. 由 $(\mathcal{GF}, \mathcal{GF}^\perp)$ 是完备的余挠对可知 $\mathcal{GF}$ 是预覆盖类. 由文献 [11, 注释 4.6] 和定理 5.4 可知, 对任意的 $X \in \mathbf{K}^b(R)$, 存在一个 $\mathcal{GF}$ -拟同构 $G_X \rightarrow X$, 其中 $G_X \in \mathbf{K}^{-, gfb}(\mathcal{GF})$, 而且存在一个三角等价 $\mathbf{D}_{\mathcal{GF}}^b(R) \cong \mathbf{K}^{-, gfb}(\mathcal{GF})$.

6 有界导出范畴 $\mathbf{D}^b(\mathcal{A})$ 的一种描述

众所周知, 有界导出范畴 $\mathbf{D}^b(\mathcal{A})$ 可通过同伦范畴 $\mathbf{K}^{-, b}(\mathrm{Prj} \mathcal{A})$ 描述, 其中 $\mathbf{K}^{-, b}(\mathrm{Prj} \mathcal{A})$ 表示由投射对象构成的同调上有界复形构成的同伦范畴. 本节的主要目标是通过 Gorenstein $\mathcal{X}$ -对象来描述有界导出范畴 $\mathbf{D}^b(\mathcal{A})$.

引理 6.1 (1) $\mathbf{K}_{ac}^b(\mathcal{G}(\mathcal{X}))$ 是 $\mathbf{K}^{-, gxb}(\mathcal{G}(\mathcal{X}))$ 的厚子范畴.

(2) 设 $G = (G^i, d^i) \in \mathbf{K}^{-, gxb}(\mathcal{G}(\mathcal{X}))$. 若 G 是零调的, 则 $G \in \mathbf{K}_{ac}^b(\mathcal{G}(\mathcal{X}))$.

证明 (1) 显然, $\mathbf{K}_{ac}^b(\mathcal{G}(\mathcal{X}))$ 关于同构和平移封闭. 设 $X \xrightarrow{f} Y \rightarrow Z \rightarrow X[1]$ 是 $\mathbf{K}^{-, gxb}(\mathcal{G}(\mathcal{X}))$ 中的好三角, 其中 $X, Y \in \mathbf{K}_{ac}^b(\mathcal{G}(\mathcal{X}))$. 注意到, 在 $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ 中, $Z \cong \mathrm{cone}(f)$, 并且 $0 \rightarrow Y \rightarrow \mathrm{cone}(f) \rightarrow X[1] \rightarrow 0$ 是 $\mathbf{C}(\mathcal{A})$ 中的正合序列. 由于 X 和 Y 都是有界的零调复形, 所以, $\mathrm{cone}(f)$ 也是有界的零调复形. 故 $Z \in \mathbf{K}_{ac}^b(\mathcal{G}(\mathcal{X}))$. 这便证明了 $\mathbf{K}_{ac}^b(\mathcal{G}(\mathcal{X}))$ 是 $\mathbf{K}^{-, gxb}(\mathcal{G}(\mathcal{X}))$ 的三角子范畴. 由文献 [8, 命题 3.3] 可知 $\mathcal{G}(\mathcal{X})$ 关于直和项封闭. 故 $\mathbf{K}_{ac}^b(\mathcal{G}(\mathcal{X}))$ 是 $\mathbf{K}^{-, gxb}(\mathcal{G}(\mathcal{X}))$ 的厚子范畴.

(2) 设 $G = (G^i, d^i) \in \mathbf{K}^{-, gxb}(\mathcal{G}(\mathcal{X}))$ 是零调的. 由文献 [8, 推论 3.4] 可知 $\mathcal{G}(\mathcal{X})$ 是投射可解的, 从而可得 $\text{Im}d^i \in \mathcal{G}(\mathcal{X})$. 由 $\mathbf{K}^{-, gxb}(\mathcal{G}(\mathcal{X}))$ 的定义可知, 存在 $N(G) \in \mathbb{Z}$, 使得对任意的 $n \leq N(G)$ 和 $D \in \mathcal{G}(\mathcal{X})$, 有 $H^n(\text{Hom}_{\mathcal{A}}(D, G)) = 0$. 因为 G 是零调的, 所以, 对任意的 $i \in \mathbb{Z}$, 有一簇短正合列 $\{0 \rightarrow \text{Im}d^{i-1} \rightarrow G^i \rightarrow \text{Im}d^i \rightarrow 0\}_{i \in \mathbb{Z}}$. 令 $N = N(G)$. 对任意的 $i \leq N-1$, $0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\text{Im}d^i, \text{Im}d^{i-1}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\text{Im}d^i, G^i) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\text{Im}d^i, \text{Im}d^i) \rightarrow 0$ 是正合的, 也就是说 $0 \rightarrow \text{Im}d^{i-1} \rightarrow G^i \rightarrow \text{Im}d^i \rightarrow 0$ 是可裂的, 即 $G^i \cong \text{Im}d^{i-1} \oplus \text{Im}d^i$. 令 $G' = 0 \rightarrow \text{Im}d^{N-1} \rightarrow G^N \rightarrow G^{N+1} \rightarrow \dots$, 并且对任意的 $i \leq N-2$, $G_i = \dots \rightarrow 0 \rightarrow \text{Im}d^i \rightarrow \text{Im}d^i \rightarrow 0 \rightarrow \dots$, 其中 $\text{Im}d^i$ 在第 i 和 $i+1$ 位置, 其余位置都为 0, 则 $G = (\bigoplus_{i \leq N-2} G_i) \oplus G'$, 且 $G' \in \mathbf{K}_{ac}^b(\mathcal{G}(\mathcal{X}))$. 我们知道每个 G_i 实际上是可缩复形, 那么, 在 $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ 中, $G \cong G'$. 由 (1) 知 $\mathbf{K}_{ac}^b(\mathcal{G}(\mathcal{X}))$ 是三角范畴, 这就意味着 $G \in \mathbf{K}_{ac}^b(\mathcal{G}(\mathcal{X}))$. $\square$

接下来的命题建立了 $\mathbf{K}^{-, b}(\text{Prj}\mathcal{A})$ 与 $\mathbf{K}^{-, gxb}(\mathcal{G}(\mathcal{X}))$ 之间的联系.

引理 6.2 设 $\mathcal{G}(\mathcal{X})$ 是预覆盖类, $P \in \mathbf{K}^{-, b}(\text{Prj}\mathcal{A})$, 则以下结论成立.

(1) 存在拟同构 $P \rightarrow G$, 其中 $G \in \mathbf{K}^{-, gxb}(\mathcal{G}(\mathcal{X}))$;

(2) 对于任意的 $1 \leq i \leq m$ 及每个链映射 $f_i : P \rightarrow G_i$, 其中 $G_i \in \mathbf{K}^{-, gxb}(\mathcal{G}(\mathcal{X}))$, 存在拟同构 $g : P \rightarrow G$ 和链映射 $h_i : G \rightarrow G_i$, 其中 $G \in \mathbf{K}^{-, gxb}(\mathcal{G}(\mathcal{X}))$, 使得 $f_i \sim h_i g$.

证明 (1) 因为 $P \in \mathbf{K}^{-, b}(\text{Prj}\mathcal{A})$, 所以存在一个整数 N , 使得对任意的 $n \leq N$, 有 $H^n P = 0$. 对于 $\text{Ker}d^N$, 由假设可知存在一个满的 $\mathcal{G}(\mathcal{X})$ -预覆盖, 记为 $\delta^{N-1} : G^{N-1} \rightarrow \text{Ker}d^N$. 同样对于 $\text{Ker}\delta^{N-1}$, 存在一个满的 $\mathcal{G}(\mathcal{X})$ -预覆盖 $G^{N-2} \rightarrow \text{Ker}\delta^{N-1}$. 重复这种做法可得复形 $G = \dots \rightarrow G^{N-2} \rightarrow G^{N-1} \rightarrow P^N \rightarrow P^{N+1} \rightarrow \dots$. 对任意的 $n \leq N$ 和 $E \in \mathcal{G}(\mathcal{X})$, 有 $H^n(\text{Hom}_{\mathcal{A}}(E, G)) = 0$. 故 $G \in \mathbf{K}^{-, gxb}(\mathcal{G}(\mathcal{X}))$. 存在如下链映射:

$$\begin{array}{ccccccc} P = \dots & \longrightarrow & P^{N-2} & \longrightarrow & P^{N-1} & \longrightarrow & P^N & \longrightarrow & P^{N+1} & \longrightarrow & \dots \\ \downarrow g & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel & & \parallel & & \\ G = \dots & \longrightarrow & G^{N-2} & \longrightarrow & G^{N-1} & \longrightarrow & P^N & \longrightarrow & P^{N+1} & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

并且对任意的 $i \leq N$, 有 $H^i(P) = 0 = H^i(G)$. 因此, g 是拟同构.

(2) 对任意的 $1 \leq i \leq m$, 由 $G_i \in \mathbf{K}^{-, gxb}(\mathcal{G}(\mathcal{X}))$ 知, 存在 $N(G_i) \in \mathbb{Z}$, 使得对任意的 $n \leq N(G_i)$ 和 $E \in \mathcal{G}(\mathcal{X})$, $H^n(\text{Hom}_{\mathcal{A}}(E, G_i)) = 0$. 已知 $P \in \mathbf{K}^{-, b}(\text{Prj}\mathcal{A})$, 则存在 $N(P) \in \mathbb{Z}$, 使得对任意的 $n \leq N(P)$, $H^n(P) = 0$. 令 $N = \min\{N(G_1), N(G_2), \dots, N(G_m), N(P)\}$, 则对任意的 $n \leq N$, $H^n(\text{Hom}_{\mathcal{A}}(E, G_i)) = 0 = H^n(P)$. 由 (1) 可知存在如下的拟同构:

$$\begin{array}{ccccccc} P = \dots & \longrightarrow & P^{N-2} & \longrightarrow & P^{N-1} & \longrightarrow & P^N & \longrightarrow & P^{N+1} & \longrightarrow & \dots \\ \downarrow g & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel & & \parallel & & \\ G = \dots & \longrightarrow & G^{N-2} & \longrightarrow & G^{N-1} & \longrightarrow & P^N & \longrightarrow & P^{N+1} & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

其中 $G \in \mathbf{K}^{-, gxb}(\mathcal{G}(\mathcal{X}))$. 应用 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(G^{N-1}, -)$, $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(G^{N-2}, -)$, $\dots$ 到 G_i . 因为对任意的 $n \leq N$, $H^n(\text{Hom}_{\mathcal{A}}(G^{n-1}, G_i)) = 0$, 所以能构造链映射 $h_i : G \rightarrow G_i$, 具体形式如下:

$$\begin{array}{ccccccc} G = \dots & \longrightarrow & G^{N-2} & \longrightarrow & G^{N-1} & \longrightarrow & P^N & \longrightarrow & P^{N+1} & \longrightarrow & \dots \\ \downarrow h_i & & \downarrow h_i^{N-2} & & \downarrow h_i^{N-1} & & \downarrow f_i^N & & \downarrow f_i^{N+1} & & \\ G_i = \dots & \longrightarrow & G_i^{N-2} & \longrightarrow & G_i^{N-1} & \longrightarrow & G_i^N & \longrightarrow & G_i^{N+1} & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

观察到对任意的 $1 \leq i \leq m$ 和任意的 $l \geq N$, 由 g 和 h_i 的构造可知, $f_i^l - h_i^l g^l = 0$. 此外, 对于 $l = N-1$, 由 $H^{N-1}(G_i) = 0$ 可知, $f_i^{N-1} - h_i^{N-1} g^{N-1}$ 可通过 $d_i^{N-2} : G_i^{N-2} \rightarrow G_i^{N-1}$ 分解, 即存在一个映射 $x_i^{N-1} : P^{N-1} \rightarrow G_i^{N-2}$, 使得 $d_i^{N-2} x_i^{N-1} = f_i^{N-1} - h_i^{N-1} g^{N-1}$. 同样, 由 $H^{N-2}(G_i) = 0$ 可知, $f_i^{N-2} - h_i^{N-2} g^{N-2} - x_i^{N-1} d_P^{N-2}$ 可通过 $d_i^{N-3} : G_i^{N-3} \rightarrow G_i^{N-2}$ 分解, 即存在一个映射 $x_i^{N-2} : P^{N-2} \rightarrow G_i^{N-3}$, 使得 $d_i^{N-3} x_i^{N-2} = f_i^{N-2} - h_i^{N-2} g^{N-2} - x_i^{N-1} d_P^{N-2}$, 即 $f_i^{N-2} - h_i^{N-2} g^{N-2} = d_i^{N-3} x_i^{N-2} + x_i^{N-1} d_P^{N-2}$. 继续此过程可得下图:

$$\begin{array}{ccccccc} P = \cdots & \longrightarrow & P^{N-2} & \longrightarrow & P^{N-1} & \longrightarrow & P^N & \longrightarrow & P^{N+1} & \longrightarrow & \cdots \\ \downarrow f_i - h_i g & & \downarrow & \nearrow x_i^{N-1} & \downarrow & \nearrow 0 & \downarrow & \nearrow 0 & \downarrow & \nearrow 0 & \\ G_i = \cdots & \longrightarrow & G_i^{N-2} & \longrightarrow & G_i^{N-1} & \longrightarrow & G_i^N & \longrightarrow & G_i^{N+1} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

即 $f_i - h_i g$ 是零伦的. □

接下来刻画有界导出范畴 $\mathbf{D}^b(\mathcal{A})$, 即给出本文的第二个主要结果及其证明.

定理 6.3 设 $\mathcal{G}(\mathcal{X})$ 是预覆盖类, 则存在三角等价 $\mathbf{D}^b(\mathcal{A}) \cong \mathbf{K}^{-, gxb}(\mathcal{G}(\mathcal{X})) / \mathbf{K}_{ac}^b(\mathcal{G}(\mathcal{X}))$, 并且这个三角等价诱导了三角等价 $\langle \mathcal{G}(\mathcal{X}) \rangle \cong \mathbf{K}^b(\mathcal{G}(\mathcal{X})) / \mathbf{K}_{ac}^b(\mathcal{G}(\mathcal{X}))$.

证明 设 $i : \mathbf{K}^{-, gxb}(\mathcal{G}(\mathcal{X})) \rightarrow \mathbf{K}^-(\mathcal{A})$ 是满嵌入, $Q : \mathbf{K}^-(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{D}^-(\mathcal{A}) = \mathbf{K}^-(\mathcal{A}) / \mathbf{K}_{ac}^-(\mathcal{A})$ 是 Verdier 商函子. 令 $\eta = Qi : \mathbf{K}^{-, gxb}(\mathcal{G}(\mathcal{X})) \rightarrow \mathbf{D}^-(\mathcal{A})$. 对任意的 $Z \in \mathbf{K}_{ac}^b(\mathcal{G}(\mathcal{X}))$, $\eta(Z) = 0$. 由引理 6.1 知, 存在 Verdier 商函子 $Q_0 : \mathbf{K}^{-, gxb}(\mathcal{G}(\mathcal{X})) \rightarrow \mathbf{K}^{-, gxb}(\mathcal{G}(\mathcal{X})) / \mathbf{K}_{ac}^b(\mathcal{G}(\mathcal{X}))$, 则由 Verdier 商函子的泛性质知, 存在唯一的三角函子 $\bar{\eta} : \mathbf{K}^{-, gxb}(\mathcal{G}(\mathcal{X})) / \mathbf{K}_{ac}^b(\mathcal{G}(\mathcal{X})) \rightarrow \mathbf{D}^-(\mathcal{A})$, 使得 $\eta = \bar{\eta}Q_0$. 对任意的 $X \in \mathbf{K}^{-, gxb}(\mathcal{G}(\mathcal{X})) / \mathbf{K}_{ac}^b(\mathcal{G}(\mathcal{X}))$, 由文献 [9, 定理 4.2.1] 知, 存在一个拟同构 $f : P \rightarrow X$, 其中 $P \in \mathbf{K}^-(\text{Prj } \mathcal{A})$. 存在 $N(X) \in \mathbb{Z}$, 使得对任意的 $i \leq N(X)$, $H^i(X) = 0$. 由于 f 是拟同构, 所以, 对任意的 $i \leq N(X)$, $H^i(P) = 0$. 故 $P \in \mathbf{K}^{-, b}(\text{Prj } \mathcal{A}) \cong \mathbf{D}^b(\mathcal{A})$. 注意到对任意的 $Y \in \mathbf{K}^{-, b}(\text{Prj } \mathcal{A})$, 由引理 6.2 可知, 存在拟同构 $Y \rightarrow G$, 其中 $G \in \mathbf{K}^{-, gxb}(\mathcal{G}(\mathcal{X}))$, 则 $\bar{\eta}(G) \cong Y$. 重新定义 $\bar{\eta} : \mathbf{K}^{-, gxb}(\mathcal{G}(\mathcal{X})) / \mathbf{K}_{ac}^b(\mathcal{G}(\mathcal{X})) \rightarrow \mathbf{D}^b(\mathcal{A})$, 则 $\bar{\eta}$ 是稠密的. 下面说明 $\bar{\eta}$ 是满忠实的. 设 $G_1, G_2 \in \mathbf{K}^{-, gxb}(\mathcal{G}(\mathcal{X}))$ 且 a/s 是 $\text{Hom}_{\mathbf{D}^-(\mathcal{A})}(\bar{\eta}(G_1), \bar{\eta}(G_2)) = \text{Hom}_{\mathbf{D}^-(\mathcal{A})}(G_1, G_2)$ 中的任意态射, 表示为 $G_1 \xleftarrow{s} T \xrightarrow{a} G_2$, 其中 $T \in \mathbf{K}^-(\mathcal{A})$, s 是拟同构, a 是 $\mathbf{K}^-(\mathcal{A})$ 中的态射, 则存在一个拟同构 $t : P_0 \rightarrow T$, 其中 $P_0 \in \mathbf{K}^-(\text{Prj } \mathcal{A})$. 由 $G_1 \in \mathbf{K}^{-, gxb}(\mathcal{G}(\mathcal{X}))$ 可知, 存在 $N(G_1) \in \mathbb{Z}$, 使得对任意的 $i \leq N(G_1)$, $H^i(G_1) = 0$. 然而 s 和 t 是拟同构, 则可得对任意的 $i \leq N(G_1)$, $H^i(T) = 0 = H^i(P_0)$, 故 $P_0 \in \mathbf{K}^{-, b}(\text{Prj } \mathcal{A})$, 则有链映射 $st : P_0 \rightarrow G_1$ 和 $at : P_0 \rightarrow G_2$, 由引理 6.2 可知, 存在一个拟同构 $g : P_0 \rightarrow G$ 和链映射 $m : G \rightarrow G_1$, $n : G \rightarrow G_2$, 并且 $gm = st$, $ng = at$. 于是有如下交换图:

$$\begin{array}{ccccc} & & T & & \\ & \swarrow s & \uparrow t & \searrow a & \\ G_1 & \xleftarrow{st} & P_0 & \xrightarrow{at} & G_2 \\ & \swarrow m & \downarrow g & \searrow n & \\ & & G & & \end{array}$$

因为 st 和 g 是拟同构, 所以, m 也是拟同构且 $\text{cone}(m)$ 是正合的. 我们知道 $\mathbf{K}^{-, gxb}(\mathcal{G}(\mathcal{X}))$ 是 $\mathbf{K}^-(\mathcal{A})$ 的三角子范畴, 那么 $\text{cone}(m) \in \mathbf{K}^{-, gxb}(\mathcal{G}(\mathcal{X}))$. 于是, 由引理 6.1 知, $\text{cone}(m) \in \mathbf{K}_{ac}^b(\mathcal{G}(\mathcal{X}))$, 即 $n/m \in \text{Hom}_{\mathbf{K}^{-, gxb}(\mathcal{G}(\mathcal{X})) / \mathbf{K}_{ac}^b(\mathcal{G}(\mathcal{X}))}(G_1, G_2)$, 且 $a/s = n/m = \bar{\eta}(n/m)$. 因此, $\bar{\eta}$ 是满的. 假设 $G \in \mathbf{K}^{-, gxb}(\mathcal{G}(\mathcal{X}))$ 且 $\bar{\eta}(G) = 0$, 则 G 是正合的. 由引理 6.1 可知 $G \in \mathbf{K}_{ac}^b(\mathcal{G}(\mathcal{X}))$. 因此, 在 $\mathbf{K}^{-, gxb}(\mathcal{G}(\mathcal{X})) / \mathbf{K}_{ac}^b(\mathcal{G}(\mathcal{X}))$ 中,

$G = 0$. 这也就是说 $\bar{\eta}$ 把非零对象映成非零对象. 由引理 4.5 可知 $\bar{\eta}$ 是忠实的. 综上所述, $\bar{\eta}$ 是三角等价, 即 $\mathbf{D}^b(\mathcal{A}) \cong \mathbf{K}^{-, gxb}(\mathcal{G}(\mathcal{X}))/\mathbf{K}_{ac}^b(\mathcal{G}(\mathcal{X}))$.

$\mathbf{K}^b(\mathcal{G}(\mathcal{X}))/\mathbf{K}_{ac}^b(\mathcal{G}(\mathcal{X}))$ 是 $\mathbf{K}^{-, gxb}(\mathcal{G}(\mathcal{X}))/\mathbf{K}_{ac}^b(\mathcal{G}(\mathcal{X}))$ 的三角子范畴, 故 $\bar{\eta}(\mathbf{K}^b(\mathcal{G}(\mathcal{X}))/\mathbf{K}_{ac}^b(\mathcal{G}(\mathcal{X})))$ 是 $\mathbf{D}^b(\mathcal{A})$ 的三角子范畴, 而且此三角子范畴是由 $\mathcal{G}(\mathcal{X})$ 生成的, 即 $\bar{\eta}(\mathbf{K}^b(\mathcal{G}(\mathcal{X}))/\mathbf{K}_{ac}^b(\mathcal{G}(\mathcal{X}))) = \langle \mathcal{G}(\mathcal{X}) \rangle$. 故 $\mathbf{K}^b(\mathcal{G}(\mathcal{X}))/\mathbf{K}_{ac}^b(\mathcal{G}(\mathcal{X})) \cong \langle \mathcal{G}(\mathcal{X}) \rangle$. $\square$

注 6.4 (1) 设 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = (\text{Prj}\mathcal{A}, \mathcal{A})$, 则定理 6.3 就是文献 [16, 定理 5.1].

(2) 设 R 是右凝聚环. 假设 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = (\mathcal{F}, \mathcal{C})$. 由文献 [11, 注释 4.6] 和定理 6.3 可知, 存在三角等价 $\mathbf{D}^b(R) \cong \mathbf{K}^{-, gfb}(\mathcal{G}\mathcal{F})/\mathbf{K}_{ac}^b(\mathcal{G}\mathcal{F})$, 且这个三角等价诱导了另外一个三角等价 $\langle \mathcal{G}\mathcal{F} \rangle \cong \mathbf{K}^b(\mathcal{G}\mathcal{F})/\mathbf{K}_{ac}^b(\mathcal{G}\mathcal{F})$.

致谢 感谢审稿人提出的宝贵意见, 使得本文在行文和内容上都有很大的提升.

参考文献

- 1 Ding N Q, Li Y L, Mao L X. Strongly Gorenstein flat modules. J Aust Math Soc, 2009, 86: 323–338
- 2 Mao L X, Ding N Q. Gorenstein FP-injective and Gorenstein flat modules. J Algebra Appl, 2008, 7: 491–506
- 3 Gillespie J. Model structures on modules over Ding-Chen rings. Homology Homotopy Appl, 2010, 12: 61–73
- 4 Ren W, Liu Z K, Yang G. Derived categories with respect to Ding modules. J Algebra Appl, 2013, 12: 1350021
- 5 Yang G, Liu Z K, Liang L. Ding projective and Ding injective modules. Algebra Colloq, 2013, 20: 601–612
- 6 Gao N, Zhang P. Gorenstein derived categories. J Algebra, 2010, 323: 2041–2057
- 7 Yang X Y, Chen W J. Relative homological dimensions and Tate cohomology of complexes with respect to cotorsion pairs. Comm Algebra, 2017, 45: 2875–2888
- 8 Chen W J, Liu Z K, Yang X Y. A new method to construct model structures from a cotorsion pair. Comm Algebra, 2019, 47: 4420–4431
- 9 Zhang P. Triangulated Categories and Derived Categories (in Chinese). Beijing: Science Press, 2015
- 10 Christensen L W, Frankild A, Holm H. On Gorenstein projective, injective and flat dimensions—a functorial description with applications. J Algebra, 2006, 302: 231–279
- 11 Chen W J, Liu Z K, Yang X Y. Compactly generated triangulated subcategories of homotopy categories induced by cotorsion pairs. J Algebra Appl, 2018, 17: 1850180
- 12 Verdier J L. Categories derives quelques résultats (Etat 0). In: Cohomologie Etale. Lecture Notes in Mathematics, vol. 569. New York: Springer, 1977, 262–311
- 13 Rickard J. Morita theory for derived categories. J Lond Math Soc (2), 1989, 39: 436–456
- 14 Gelfand S I, Manin Y I. Methods of Homological Algebra. Berlin: Springer-Verlag, 2003
- 15 Bao Y H, Du X N, Zhao Z B. Gorenstein singularity categories. J Algebra, 2015, 428: 122–137
- 16 Kong F, Zhang P. From CM-finite to CM-free. J Pure Appl Algebra, 2016, 220: 782–801

The derived category with respect to $\mathcal{G}(\mathcal{X})$

Wenjing Chen, Zhongkui Liu & Xiaoyan Yang

Abstract Let $\mathcal{A}$ be an abelian category with enough projective objects and $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ be a complete and hereditary cotorsion pair in $\mathcal{A}$. We introduce the Gorenstein $\mathcal{X}$ -derived category, denoted by $\mathbf{D}_{\mathcal{G}(\mathcal{X})}(\mathcal{A})$, and investigate $\mathbf{D}_{\mathcal{G}(\mathcal{X})}(\mathcal{A})$ from different perspectives. When $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ is served as a special cotorsion pair, we obtain some known derived categories, such as Gorenstein derived categories, Gorenstein flat derived categories and so on. The bounded Gorenstein $\mathcal{X}$ -derived category $\mathbf{D}_{\mathcal{G}(\mathcal{X})}^b(\mathcal{A})$ and bounded derived category $\mathbf{D}^b(\mathcal{A})$ are described via the homology category $\mathbf{K}^{-, gxb}(\mathcal{G}(\mathcal{X}))$ related to $\mathcal{G}(\mathcal{X})$ and some triangle equivalences are given.

Keywords Gorenstein $\mathcal{X}$ -object, Gorenstein $\mathcal{X}$ -derived category, triangle equivalence

MSC(2010) 18E30, 18G35

doi: 10.1360/N012019-00144