各向异性函数空间上的多线性算子的估计及其应用

邱小丽¹, 齐春燕², 刘雄¹, 李宝德^{1*}

1. 新疆大学数学与系统科学学院, 乌鲁木齐 830046;

2. 乌鲁木齐市第 126 中学, 乌鲁木齐 830057

E-mail: 2237424863@qq.com, 630848101@qq.com, 1394758246@qq.com, 1246530557@qq.com

收稿日期: 2019-01-03; 接受日期: 2019-05-28; 网络出版日期: 2019-11-08; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11861062, 11661075 和 11561065) 资助项目

摘要 设 A 是 $\mathbb{R}^n$ 上的各向异性伸缩, L 是由各向异性 Calderón-Zygmund 算子生成的一般的多线性算子. 本文得到 L 从加权 Lebesgue 空间 $L_w^p(\mathbb{R}^n)$ 到无权的各向异性 Hardy 空间 $H_A^p(\mathbb{R}^n)$ 的有界性. 另外, 对各向异性 Hardy 空间 $H^1(\mathbb{R}^n)$ 和加权各向异性 BMO 空间 $BMO_A^w(\mathbb{R}^n)$ 得到包含关系: $BMO_A^w(\mathbb{R}^n) \subset (H_A^1(\mathbb{R}^n))^*$. 作为应用, 对加权各向异性 BMO 函数 b 和各向异性 Calderón-Zygmund 算子 T 生成的交换子 $[T, b]$, 得到 $\|[T, b](f)\|_{L_w^p(\mathbb{R}^n)} \leq C \|b\|_{BMO_A^w(\mathbb{R}^n)} \|f\|_{L_w^p(\mathbb{R}^n)}$. 以上所有结果在经典的各向异性情形下也是新的.

关键词 各向异性 Muckenhoupt 权 Hardy 空间 多线性算子 Calderón-Zygmund 算子 交换子

MSC (2010) 主题分类 42B35, 42B20, 74E10

1 引言

Hardy 空间 $H^p(\mathbb{R}^n)$ 的实变理论在分析和偏微分方程等领域发挥着至关重要的作用 (参见文献 [1–7]). 例如, 当 $p \in (0, 1]$ 时, Hardy 空间 $H^p(\mathbb{R}^n)$ 是 Lebesgue 空间 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 的很好的替代. 众所周知, Riesz 变换在 Lebesgue 空间 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上是无界的, 但在 Hardy 空间 $H^p(\mathbb{R}^n)$ 上是有界的. 因此, 对经典的 Hardy 空间 $H^p(\mathbb{R}^n)$ 作了各种推广, 其中一个方向是研究更一般的具有各向异性扩张结构的各向异性 Hardy 空间 $H_A^p(\mathbb{R}^n)$ (参见文献 [1]). 此类 Hardy 空间包括了 Fefferman 和 Stein^[4] 的经典的各向异性 Hardy 空间和 Calderón 和 Torchinsky^[8] 的抛物线型 Hardy 空间. 考虑到各向异性 Hardy 空间 $H_A^p(\mathbb{R}^n)$ 的一般性, 更多各向异性 Hardy 空间 $H_A^p(\mathbb{R}^n)$ 的实变特征及其应用已被研究 (参见文献 [1, 9–11]). 另外, 局部各向异性 Hardy 空间^[12]、各向异性 Hardy Lorentz 空间^[13] 和各向异性 Musielak-Orlicz Hardy 空间^[14] 等都被研究. 当研究起源于小波理论的一般离散扩张结构时, 各向异性函数空间也扮演着重要的角色 (参见文献 [1]).

英文引用格式: Qiu X L, Qi C Y, Liu X, et al. Estimates for multilinear operators on anisotropic function spaces and their applications (in Chinese). Sci Sin Math, 2021, 51: 499–512, doi: 10.1360/N012019-00006

一对函数 (f, g) 从 $\mathbb{R}^2$ 到 $\mathbb{R}^2$ 的 Jacobi 行列式定义如下:

$$J(f, g) = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial g}{\partial x_2} - \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial g}{\partial x_1}.$$

J 从乘积 Sobolev 空间 $L_1^2(\mathbb{R}) \times L_1^2(\mathbb{R})$ 到经典的 Hardy 空间 $H^1(\mathbb{R}^2)$ 上的有界性被 Coifman 等^[15] 证明. Coifman 等^[16] 将上述结论推广到了 n 维情形: J 从 $L_1^p(\mathbb{R}^n) \times L_1^q(\mathbb{R}^n)$ 到 $H^r(\mathbb{R}^n)$ 是有界的, 其中 $p, q > 1$, $r^{-1} = p^{-1} + q^{-1}$. 这个结果被 Grafakos^[5] 进一步推广, 并得到了由 Calderón-Zygmund 算子生成的一类多线性算子在 Hardy 空间上的有界性.

设 A 是 $\mathbb{R}^n$ 上的扩张矩阵, $b := |\det A|$ 且 λ_- 是大于 1 且小于 A 的任意特征值的模的常数. Ding 和 Lan^[10] 得到了由各向异性 Calderón-Zygmund 算子生成的一般的多线性算子 L 从 $L^p(\mathbb{R}^n) \times L^q(\mathbb{R}^n)$ 到各向异性 Hardy 空间 $H_A^p(\mathbb{R}^n)$ 的有界性, 其中 $p, q > 1$, $r^{-1} = p^{-1} + q^{-1}$ 且 $r \in (\ln b / [\ln b + \ln(\lambda_-)], \infty)$.

受 Grafakos^[5] 及 Ding 和 Lan^[10] 的启发, 对多线性算子 L , 本文进一步得到如下不等式:

$$\|L(f, g)\|_{H_A^r(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{L_w^p(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L_{w^{-q/p}}^q(\mathbb{R}^n)}, \quad (1.1)$$

其中 w 属于各向异性 Muckenhoupt A_1 权 (详见定理 3.1). 这个结果看起来有些奇怪. 因为通常有界性的结果均是无权的或者加权的, 但这是一个混合的情形. 然而, 这个结果对得到一类各向异性交换子的加权估计却是合理的 (参见定理 5.1 或 (1.3)).

下面回顾交换子的研究现状并介绍本文的相关结论. 在研究椭圆型方程和某些非线性偏微分方程解的估计时, 交换子的有界性估计有重要的应用 (参见文献 [16–18]). Calderón-Zygmund 算子 T 和 BMO($\mathbb{R}^n$) 函数 b 生成的交换子

$$T_b(f) := [b, T](f) = bT(f) - T(bf)$$

起初由 Coifman 等^[3] 研究, 对任意的 $1 < p < \infty$, 他们证明了 T_b 在 Lebesgue 空间 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上是有界的. 文献 [19, 第 202 页] 考虑了交换子 $[T, b]$ 在加权 Lebesgue 空间 $L_w^p(\mathbb{R}^n)$ 上的有界性, 即

$$\|[T, b](f)\|_{L_w^p(\mathbb{R}^n)} \leq C \|b\|_{\text{BMO}(\mathbb{R}^n)} \|f\|_{L_w^p(\mathbb{R}^n)}, \quad (1.2)$$

其中 w 属于 Muckenhoupt A_p 权. 随后, Ding 和 Lan^[10] 研究了各向异性情形下的交换子的有界性. 具体地, 对一类各向异性 Calderón-Zygmund 算子 T_A 和各向异性 BMO $_A(\mathbb{R}^n)$ 函数 b 生成的交换子 $[T_A, b]$, 有

$$\|[T_A, b](f)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C \|b\|_{\text{BMO}_A(\mathbb{R}^n)} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

受 Grafakos^[5] 及 Ding 和 Lan^[10] 的启发, 通过使用上述貌似奇怪的多线性算子 L 的估计 (1.1), 本文得到了一个新的正常的加权估计如下:

$$\|[T_A, b](f)\|_{L_w^p(\mathbb{R}^n)} \leq C \|b\|_{\text{BMO}_A^w(\mathbb{R}^n)} \|f\|_{L_w^p(\mathbb{R}^n)}, \quad (1.3)$$

其中 w 属于各向异性 Muckenhoupt A_1 权. 即使回到各向齐性情形下, 即 A 取为特殊的双倍单位矩阵时, 这也不同于 (1.2) 中的加权估计. 值得一提的是, 为了证明 (1.3), 下面的包含关系起到了重要作用: 对于各向异性 Hardy 空间 $H_A^1(\mathbb{R}^n)$ 、加权各向异性 BMO 空间 BMO $_A^w(\mathbb{R}^n)$ 和各向异性 Muckenhoupt A_1 权 w , 有下面的包含关系成立:

$$\text{BMO}_A^w(\mathbb{R}^n) \subset (H_A^1(\mathbb{R}^n))^*. \quad (1.4)$$

本文的安排如下. 第 2 节介绍扩张矩阵、各向异性 Muckenhoupt 权和各向异性 Hardy 空间的概念. 第 3 节得到各向异性多线性算子的一些加权估计 (参见定理 3.1). 第 4 节证明 (1.4) (详见定理 4.2). 这里需要指出的是, 与 Lebesgue 测度和加权 Lebesgue 测度有关的一个不等式起到了关键作用 (参见引理 4.2). 作为定理 3.1 和 4.2 的应用, 即 (1.1) 和 (1.4), 第 5 节得到加权各向异性交换子的有界性估计, 即 (1.3) 或详见定理 5.1.

为行文方便, 对全文作如下约定. 设 $\mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$, $\mathbb{Z}_+ := \{0\} \cup \mathbb{N}$. $E + F$ 表示为集合 $E, F \subset \mathbb{R}^n$ 的代数和 $\{x + y : x \in E, y \in F\}$. 对任意的 $\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (\mathbb{Z}_+)^n$, 设 $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ 且 $\partial^\alpha := (\frac{\partial}{\partial x_1})^{\alpha_1} \dots (\frac{\partial}{\partial x_n})^{\alpha_n}$. $I_{n \times n}$ 表示 $n \times n$ 单位矩阵. 设 C 是与主要变量无关的常数, 但它在不同行可表示不同的值. 用记号 $D \lesssim F$ 表示 $D \leq CF$. 若 $D \lesssim F$ 且 $F \lesssim D$, 则记作 $D \sim F$. 对集合 $E \subset \mathbb{R}^n$, 设 E^c 表示集合 $\mathbb{R}^n \setminus E$, χ_E 表示集合 E 的特征函数且 $|E|$ 表示 E 的 n 维 Lebesgue 测度. 对任意的 $a \in \mathbb{R}$, $[a]$ 表示不超过 a 的最大整数. 对 $q \in [1, \infty)$, 用 q' 表示它的共轭指标, 即 $1/q + 1/q' = 1$. 对 Lebesgue 可测集合 E , 设 $\omega(E) := \int_E \omega(x) dx$. 如无特别声明, $\mathbb{R}^n$ 上的函数空间 $\mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$ 简记为 $\mathcal{X}$. $\mathcal{S}$ 表示 Schwartz 函数空间, $\mathcal{S}'$ 表示缓增分布空间. C_c^∞ 表示具有紧支集的无穷可微函数空间.

2 预备知识

首先回顾扩张矩阵的概念和性质 (参见文献 [1, 第 5 页]). $n \times n$ 实矩阵 A 称为扩张矩阵, 若

$$\min_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda| > 1,$$

其中 $\sigma(A)$ 为矩阵 A 的全体特征值组成的集合. 设 λ_- 和 λ_+ 是满足如下条件的两个正数:

$$1 < \lambda_- < \min\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\} \leq \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\} < \lambda_+.$$

若扩张矩阵 A 为复数域 $\mathbb{C}$ 上的可对角化矩阵, 则记

$$\lambda_- := \min\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}, \quad \lambda_+ := \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

文献 [1, 第 5 页, 引理 2.2] 证明了如下结论: 对给定的扩张矩阵 A , 可以找到一个大于 1 的实数 r 和开椭圆 $\Delta := \{x \in \mathbb{R}^n : |Px| < 1\}$, 使得 $\Delta \subset r\Delta \subset A\Delta$, 其中 P 表示一个非退化的 $n \times n$ 矩阵. 通过标量变更, 不妨假设 $|\Delta| = 1$. 设 $B_k := A^k \Delta$, $k \in \mathbb{Z}$. 易知 B_k 是开集, 并且满足 $B_k \subset rB_k \subset B_{k+1}$, 以及 $|B_k| = b^k$, $b := |\det A|$. 设 σ 是一个满足 $2B_0 \subset B_\sigma$ 的最小整数. 对任意的 $k, j \in \mathbb{Z}$ ($k \leq j$), 有如下包含关系:

$$B_k + B_j \subset B_{j+\sigma}, \quad (2.1)$$

$$B_k + (B_{k+\sigma})^c \subset (B_k)^c. \quad (2.2)$$

定义 2.1 (参见文献 [1, 第 6 页, 定义 2.3]) 若 $\rho_A : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ 满足如下条件:

- (i) 对任意的 $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}_n\}$, $\rho_A(x) > 0$;
- (ii) 对任意的 $x \in \mathbb{R}^n$, $\rho_A(Ax) = b\rho_A(x)$, 其中 $b := |\det A|$;
- (iii) 对任意的 $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\rho_A(x+y) \leq H[\rho_A(x) + \rho_A(y)]$, 其中 $H \in [1, \infty)$ 是不依赖于 x 和 y 的常数, 则称 ρ 是相关于扩张矩阵 A 的拟范数.

当 $A := 2I_{n \times n}$ 时, 对任意的 $x \in \mathbb{R}^n$, 设 $\rho(x) := |x|^n$, 则 ρ 是一个相关于扩张矩阵 A 的齐次拟范数.

阶梯拟范数 ρ 定义如下:

$$\rho(x) := \begin{cases} \sum_{k \in \mathbb{Z}} b^k \chi_{B_{k+1} \setminus B_k}(x), & x \neq \mathbf{0}_n, \\ 0, & x = \mathbf{0}_n. \end{cases}$$

对任意的 $x, y \in \mathbb{R}^n$, 由 (2.1) 和 (2.2) 可得

$$\rho(x+y) \leq b^\sigma (\max\{\rho(x), \rho(y)\}) \leq b^\sigma [\rho(x) + \rho(y)].$$

由文献 [20] 可知 $(\mathbb{R}^n, \rho, dx)$ 为齐型空间, 其中 dx 表示 n 维 Lebesgue 测度.

定义 2.2 设 $q \in [1, \infty)$ 且 ω 是 $\mathbb{R}^n$ 上的非负可测函数. 当 $q \in (1, \infty)$ 时, 若存在正常数 C , 使得对任意的 $x \in \mathbb{R}^n$ 和 $k \in \mathbb{Z}$, 有

$$\frac{1}{|B_k|} \int_{x+B_k} \omega(y) dy \left\{ \frac{1}{|B_k|} \int_{x+B_k} [\omega(y)]^{-\frac{1}{q-1}} dy \right\}^{q-1} \leq C,$$

则称函数 ω 属于 Muckenhoupt A_q 权; 当 $q = 1$ 时, 若存在正常数 C , 使得对任意的 $x \in \mathbb{R}^n$ 和 $k \in \mathbb{Z}$, 有

$$\frac{1}{|B_k|} \int_{x+B_k} \omega(y) dy \left\{ \operatorname{ess\,sup}_{y \in x+B_k} [\omega(y)]^{-1} \right\} \leq C,$$

则称函数 ω 属于 Muckenhoupt A_1 权.

定义 $A_\infty := \bigcup_{1 \leq q < \infty} A_q$. 对任意的 $\omega \in A_\infty$, 其关键指标定义为

$$q(\omega) := \inf\{q \in [1, \infty) : \omega \in A_q\}. \quad (2.3)$$

显然, $q(\omega) \in [1, \infty)$. 若 $q(\omega) \in (1, \infty)$, 通过类似文献 [9, 第 3072 页] 的讨论, 易知 $\omega \notin A_{q(\omega)}$. 此外, 存在 $\omega \in (\bigcap_{q>1} A_q) \setminus A_1$ 使得 $q(\omega) = 1$ (参见文献 [21, 第 254 页, 注释]).

对任意的 $\omega \in A_\infty$, $p \in (0, \infty)$, 设加权 Lebesgue 函数空间为

$$L_\omega^p := \{f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ 是可测函数且 } \|f\|_{L_\omega^p} < \infty\},$$

其中

$$\|f\|_{L_\omega^p} := \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \omega(x) dx \right\}^{1/p}.$$

对于 $N \in \mathbb{N}$, 设

$$\mathcal{S}_N := \left\{ \phi \in \mathcal{S} : \sup_{x \in \mathbb{R}^n, |\alpha| \leq N+1} [1 + \rho(x)]^{N+2} |\partial^\alpha \phi(x)| \leq 1 \right\}.$$

对 Schwartz 函数 $\phi \in \mathcal{S}$, 设 $\phi_k(x) := b^k \phi(A^k x)$, $k \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R}^n$.

假设 $f \in \mathcal{S}'$. 关于 Schwartz 函数 φ 的 f 的非切向极大函数定义为

$$\mathcal{M}_\varphi f(x) := \sup\{|f * \varphi_k(y)| : x - y \in B_k, k \in \mathbb{Z}\}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

对于给定的 $N \in \mathbb{N}$, f 的非切向主值极大函数定义为

$$\mathcal{M}_N f(x) := \sup_{\varphi \in \mathcal{S}_N} \mathcal{M}_\varphi f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

对任意的 $0 < p < \infty$, 定义

$$N_p := \begin{cases} \left\lfloor \frac{(\frac{1}{p} - 1) \ln b}{\ln \lambda_-} \right\rfloor + 2, & 0 < p \leq 1, \\ 2, & p > 1. \end{cases}$$

定义 2.3 设 $p \in (0, 1]$. 对每一个整数 $N \geq N_p$, 相关于扩张矩阵 A 的各向异性 Hardy 空间定义为

$$H_{A,N}^p := \{f \in \mathcal{S}' : \mathcal{M}_N f \in L^p\}.$$

此外, 定义 $\|f\|_{H_{A,N}^p} := \|\mathcal{M}_N f\|_{L^p}$.

注 2.1 由文献 [10, 第 170 页] 知, 当 $N \geq N_p$ 时, $H_{A,N}^p$ 的定义与 N 无关, 故简记为 H_A^p .

3 多线性算子的估计

本节得到一类由各向异性 Calderón-Zygmund 算子生成的多线性算子的有界性. 首先回顾一些定义.

定义 3.1 对 $\mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}_n\}$ 上的局部可积函数 K , 若存在正常数 C 和 γ , 满足

- (i) $|K(x)| \leq \frac{C}{\rho(x)}$;
- (ii) 对满足条件 $0 < b^{2\sigma} \rho(y) < \rho(x)$ 的任意 $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}_n\}$, 有

$$|K(x-y) - K(x)| \leq C \frac{[\rho(y)]^\gamma}{[\rho(x)]^{1+\gamma}},$$

则称 K 是 (相关于扩张矩阵 A 和拟范数 ρ 的) 各向异性 Calderón-Zygmund 核.

对任意的 $f \in C_c^\infty$, 若 T 是 L^2 上的有界线性算子, 且存在各向异性 Calderón-Zygmund 核 K 使其满足

$$Tf(x) := \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y)f(y)dy, \quad x \notin \text{supp } f,$$

则称 T 是一个各向异性 Calderón-Zygmund 算子.

设 I 和 J 是两个不小于 2 的整数, $\{T_i^j\}_{i=1,2,\dots,I,j=1,2,\dots,J}$ 是如定义 3.1 所示的各向异性 Calderón-Zygmund 算子且 $\vec{f} := (f_1, f_2, \dots, f_J) \in (C_c^\infty)^J$. J -线性算子 L 定义为

$$L(\vec{f}) := \sum_{i=1}^I (T_i^1 f_1)(T_i^2 f_2) \cdots (T_i^J f_J).$$

定理 3.1 设 $\omega \in \mathbb{A}_\infty$, $q(\omega)$ 如定义 (2.3) 所示, $p_1, p_2, \dots, p_J > q(\omega)$, $p := (p_1^{-1} + p_2^{-1} + \cdots + p_J^{-1})^{-1}$ 是它们的调和平均. 若 $\{p_j\}_{j=1}^J$ 的任一子集的调和平均大于 $q(\omega)$ 且对任意的 $\vec{f} \in (C_c^\infty)^J$, J -线性算子 L 满足

$$\int_{\mathbb{R}^n} L(\vec{f})(x)dx = 0,$$

则有

(i) 若 $p > 1$, 则 L 可以延拓为从 $L_{\omega}^{p_1} \times L_{\omega}^{p_2} \times \cdots \times L_{\omega}^{p_J}$ 到 L_{ω}^p 的有界线性算子;

(ii) 若 $\omega \in \mathbb{A}_1$, $1 \geq p > \frac{\ln b}{\ln b + \ln(\lambda_-)}$ 且 $J = 2$, 则 L 可以延拓为从 $L_{\omega}^{p_1} \times L_{\omega^{-p_2/p_1}}^{p_2}$ 到 H_A^p 的有界线性算子.

注 3.1 (i) 当文献 [10, 定理 1.1(ii)] 中 $J = 2$ 时, 定理 3.1(ii) 是文献 [10, 定理 1.1(ii)] 的加权情形下的推广, 即当 $\omega \equiv 1$ 和 $J = 2$ 时, 定理 3.1(ii) 与文献 [10, 定理 1.1(ii)] 一致.

(ii) 当 $A := 2I_{n \times n}$ 且 $\omega \equiv 1$ 时, 定理 3.1 回到经典无权情形下, 与文献 [2, 定理 1] 中参数 $J = 2$ 的情形一致.

(iii) 当 $p = \frac{\ln b}{\ln b + \ln(\lambda_-)}$ 且权 $\omega \in \mathbb{A}_1$ 时, Qi 等在文献 [22, 定理 4.2] 中证明了 J -线性算子 L 从乘积加权 Lebesgue 空间到加权各向异性弱 Hardy 空间的有界性.

引理 3.1 (参见文献 [9, 定理 A.3]) 若 $q \in (1, \infty)$ 且 $\omega \in \mathbb{A}_q$, 则各向异性 Calderón-Zygmund 算子 T 在 L_{ω}^q 上有界.

引理 3.2 (参见文献 [1, 定理 7.1]) 若 $p \in (0, 1]$, $\psi \in \mathcal{S}$ 且 $\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) dx \neq 0$, 则对任意的 $f \in \mathcal{S}'$, 存在正常数 C 使得

$$\|f\|_{H_A^p} := \|\mathcal{M}_N f\|_{L^p} \leq C \|\mathcal{M}_{\psi}^0 f\|_{L^p},$$

其中, 对任意的 $x \in \mathbb{R}^n$, 有 $\mathcal{M}_{\psi}^0 f(x) := \sup_{k \in \mathbb{Z}} |\psi_k * f(x)|$.

引理 3.3(i) 和 3.3(ii) 分别来自文献 [23, 第 284 和 291 页].

引理 3.3 (i) 若 $1 \leq p \leq q \leq \infty$, 则 $A_q \subset A_p$.

(ii) 设 $p \in [1, \infty)$. 若 $\widetilde{\omega}_1, \widetilde{\omega}_2 \in \mathbb{A}_1$, 则 $\widetilde{\omega}_1 \widetilde{\omega}_2^{1-p} \in \mathbb{A}_p$.

引理 3.4 设 $p_j \in [1, \infty)$, $s_j \in [1, p_j]$, 其中 $j = 1, 2$ 且 $1 = p_1^{-1} + p_2^{-1}$. 若 $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{A}_1$, 则

$$\omega_1 \in \mathbb{A}_{p_1/s_1}, \quad \omega_2^{-p_2/p_1} \in \mathbb{A}_{p_2/s_2}.$$

证明 因为 $\frac{p_1}{s_1} \geq 1$, 由引理 3.3(i) 可知, $\mathbb{A}_1 \subset \mathbb{A}_{p_1/s_1}$, 则有 $\omega_1 \in \mathbb{A}_{p_1/s_1}$. 注意到 $\frac{p_2}{s_2} \geq 1$, 设 $\widetilde{\omega}_1 \equiv 1$, $\widetilde{\omega}_2 = \omega_2$, $p = p_2$, 则由引理 3.3(ii) 可得

$$\omega_1 \omega_2^{1-p_2} = \omega_2^{-p_2/p_1} \in \mathbb{A}_{p_2} \subset \mathbb{A}_{p_2/s_2}.$$

证毕. □

引理 3.5 若 $q \in (1, \infty)$, $\omega \in \mathbb{A}_q$ 且 K 是如定义 3.1 所示的各向异性 Calderón-Zygmund 核, 则对任意的 $f \in L_{\omega}^q$, 极大截断 Calderón-Zygmund 算子

$$T^*(f)(x) := \sup_{k \in \mathbb{Z}} \left| \int_{x+B_k^c} K(x-y)f(y)dy \right|, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

在 L_{ω}^q 上有界.

定理 3.1 的证明 (i) 对 J -线性算子 L , $J \geq 2$ 情形下的证明与 $J = 2$ 的情形类似, 为简便起见, 仅考虑 $J = 2$ 的情形.

设 $\omega \in \mathbb{A}_{\infty}$, $p_1, p_2 \in (q(\omega), \infty)$ 且 $p = (p_1^{-1} + p_2^{-1})^{-1}$. 若 $p > 1$, 由 Minkowski 不等式、Hölder 不等式和引理 3.1, 对任意的 $f_1 \in L_{\omega}^{p_1}$, $f_2 \in L_{\omega}^{p_2}$ 和 $\omega \in \mathbb{A}_{p_1} \cap \mathbb{A}_{p_2}$, 可得

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |L(f_1, f_2)(x)|^p \omega(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \sum_{i=1}^I \left(\int_{\mathbb{R}^n} |T_i^1(f_1)(x) T_i^2(f_2)(x)|^p \omega(x) dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{i=1}^I \|T_i^1(f_1)\|_{L_\omega^{p_1}} \|T_i^2(f_2)\|_{L_\omega^{p_2}} \\ &\lesssim \|f_1\|_{L_\omega^{p_1}} \|f_2\|_{L_\omega^{p_2}}, \end{aligned}$$

则 (i) 得证.

(ii) 令 $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty$ 且满足 $\text{supp } \psi \subset B_{-\sigma}$ 和 $\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) dx \neq 0$. 对任意的 $x, x_0 \in \mathbb{R}^n$ 和 $k \in \mathbb{Z}$, 定义

$$\psi_{k,x_0}(x) := b^k \psi(A^k(x_0 - x)).$$

当 $\ln b / [\ln b + \ln(\lambda_-)] < p \leq 1$ 时, 对任意的 $f_1, f_2 \in \mathcal{C}_c^\infty$, 由引理 3.2 可得

$$\|\mathcal{M}_N L(f_1, f_2)\|_{L^p} \lesssim \|\mathcal{M}_\psi^0 L(f_1, f_2)\|_{L^p}.$$

故只需对任意的 $f_1 \in L_\omega^{p_1}, f_2 \in L_{\omega^{-p_2/p_1}}^{p_2}, \omega \in \mathbb{A}_1$, 证

$$\|\mathcal{M}_\psi^0 L(f_1, f_2)\|_{L^p} \lesssim \|f_1\|_{L_\omega^{p_1}} \|f_2\|_{L_{\omega^{-p_2/p_1}}^{p_2}}.$$

取一个光滑的截断函数 η 满足 $B_{2\sigma}$ 上 $\eta \equiv 1$ 且 $\text{supp } \eta \subset B_{3\sigma}$. 对任意的 $x \in \mathbb{R}^n$, 设

$$\eta_k^{(0)}(x) := \eta(A^k(x_0 - x))$$

和

$$\eta_k^{(1)}(x) := 1 - \eta_k^{(0)}(x).$$

因为 L 是一个 J -线性算子且 $L(\eta_k^{(0)} f_1, \eta_k^{(0)} f_2) = L(f_1 - \eta_k^{(1)} f_1, f_2 - \eta_k^{(1)} f_2)$, 故有

$$\begin{aligned} L(f_1, f_2) &= L(f_1 - \eta_k^{(1)} f_1 + \eta_k^{(1)} f_1, f_2) \\ &= L(f_1 - \eta_k^{(1)} f_1, f_2) + L(\eta_k^{(1)} f_1, f_2) \\ &= L(f_1 - \eta_k^{(1)} f_1, f_2 - \eta_k^{(1)} f_2) + L(f_1 - \eta_k^{(1)} f_1, \eta_k^{(1)} f_2) + L(\eta_k^{(1)} f_1, f_2) \\ &= L(\eta_k^{(0)} f_1, \eta_k^{(0)} f_2) + L(f_1, \eta_k^{(1)} f_2) + L(-\eta_k^{(1)} f_1, \eta_k^{(1)} f_2) + L(\eta_k^{(1)} f_1, f_2) \\ &= L_0(f_1, f_2) + L_1(f_1, f_2) + L_2(f_1, f_2), \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} L_0(f_1, f_2) &:= L(\eta_k^{(0)} f_1, \eta_k^{(0)} f_2), \\ L_1(f_1, f_2) &:= L(\eta_k^{(1)} f_1, f_2) + L(f_1, \eta_k^{(1)} f_2), \\ L_2(f_1, f_2) &:= -L(\eta_k^{(1)} f_1, \eta_k^{(1)} f_2). \end{aligned}$$

首先估计 $L_0(f_1, f_2)$. 任意的 $f_1, f_2 \in \mathcal{C}_c^\infty$ 满足 $\int_{\mathbb{R}^n} L(f_1, f_2)(x) dx = 0$, 重复文献 [10, 第 179 页] 中 (3.3) 的证明, 对任意的 $x_0 \in \mathbb{R}^n$, 有

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \psi_{k,x_0}(x) L_0(f_1, f_2)(x) dx \right| \lesssim [\mathcal{M}_A(|f_1|^{s_1})(x_0)]^{\frac{1}{s_1-1}} [\mathcal{M}_A(|f_2|^{s_2})(x_0)]^{\frac{1}{s_2-1}},$$

其中 s_j 是 $(1, p_j)$ 中的某一个值且

$$\mathcal{M}_A(|f_j|)(x_0) := \sup_{k \in \mathbb{Z}} b^{-k} \int_{x_0 + B_k} |f_j(x)| dx, \quad j \in \{1, 2\}.$$

由上不等式估计、Hölder 不等式和各向异性 Hardy-Littlewood 极大函数 $\mathcal{M}_A$ 在 $L_\omega^{p_1/s_1}$ 和 $L_{\omega^{-p_2/p_1}}^{p_2/s_2}$ 上的有界性 (参见文献 [9, 命题 2.6(ii)]), 其中 $\omega \in \mathbb{A}_{p_1/s_1}$, $\omega^{-p_2/p_1} \in \mathbb{A}_{p_2/s_2}$ (参见引理 3.4), 对任意的 $f_1 \in L_\omega^{p_1}$, $f_2 \in L_{\omega^{-p_2/p_1}}^{p_2}$, 有

$$\begin{aligned} \|\mathcal{M}_\psi^0 L_0(f_1, f_2)\|_{L^p} &\lesssim \|[\mathcal{M}_A(|f_1|^{s_1})]^{\frac{1}{s_1}} [\mathcal{M}_A(|f_2|^{s_2})]^{\frac{1}{s_2}}\|_{L^p} \\ &\lesssim \|[\mathcal{M}_A(|f_1|^{s_1})]^{\frac{1}{s_1}}\|_{L_\omega^{p_1}} \|[\mathcal{M}_A(|f_2|^{s_2})]^{\frac{1}{s_2}}\|_{L_{\omega^{-p_2/p_1}}^{p_2}} \\ &\lesssim \|f_1\|_{L_\omega^{p_1}} \|f_2\|_{L_{\omega^{-p_2/p_1}}^{p_2}}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

现在估计 $L_1(f_1, f_2)$. 对任意的 $j \in \{1, 2\}$, $i \in \{1, 2, \dots, I\}$, 设 T_i^j 是如定义 3.1 所示的 Calderón-Zygmund 算子. 对任意的 $f_1 \in L_\omega^{p_1}$, $f_2 \in L_{\omega^{-p_2/p_1}}^{p_2}$ 和 $x_0 \in \mathbb{R}^n$, 定义

$$(T_i^j)_*(f_j)(x_0) := \sup_{k \in \mathbb{Z}} |T_i^j(\eta_k^{(1)} f_j)(x_0)|.$$

由各向异性 Hardy-Littlewood 极大函数 $\mathcal{M}_A$ 在 L_ω^q ($q \in (q(\omega), \infty)$) 上的有界性 (参见文献 [9, 命题 2.6(ii)]), 引理 3.5 和 $(T_i^j)_* f(x_0) \lesssim \mathcal{M}_A f(x_0) + (T_i^j)_* f(x_0)$ (参见文献 [10, 第 177 页]) 可得, $(T_i^j)_*$ 在 L_ω^q 上有界, $q \in (q(\omega), \infty)$. 此外, 对任意的 $x \in \mathbb{R}^n$, 有 $\mathcal{M}_\psi^0 f(x) \lesssim \mathcal{M}_A f(x)$, 可得 $\mathcal{M}_\psi^0 f$ 在 L_ω^q 上也有界, $q \in (q(\omega), \infty)$. 由上结论和文献 [10, (3.2)], 即如下不等式: 对任意的 $x_0 \in \mathbb{R}^n$, 有

$$\begin{aligned} \sup_{k \in \mathbb{Z}} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \psi_{k, x_0}(x) L_1(f_1, f_2)(x) dx \right| &\lesssim \sum_{i=1}^I \mathcal{M}_\psi^0(T_i^2 f_2)(x_0) [\mathcal{M}_A f_1(x_0) + (T_i^1)_* f_1(x_0)] \\ &\quad + \sum_{i=1}^I \mathcal{M}_\psi^0(T_i^1 f_1)(x_0) [\mathcal{M}_A f_2(x_0) + (T_i^2)_* f_2(x_0)], \end{aligned}$$

以及 Hölder 不等式、引理 3.1、 $\omega \in \mathbb{A}_1 \subset \mathbb{A}_{p_1}$ 和 $\omega^{-p_2/p_1} \in \mathbb{A}_{p_2}$ (参见引理 3.4), 对任意的 $f_1 \in L_\omega^{p_1}$, $f_2 \in L_{\omega^{-p_2/p_1}}^{p_2}$, 可得

$$\begin{aligned} \|\mathcal{M}_\psi^0 L_1(f_1, f_2)\|_{L^p} &\lesssim \sum_{i=1}^I \|\mathcal{M}_\psi^0(T_i^2 f_2)[\mathcal{M}_A f_1 + (T_i^1)_* f_1]\|_{L^p} \\ &\quad + \sum_{i=1}^I \|\mathcal{M}_\psi^0(T_i^1 f_1)[\mathcal{M}_A f_2 + (T_i^2)_* f_2]\|_{L^p} \\ &\lesssim \sum_{i=1}^I \|\mathcal{M}_\psi^0(T_i^2 f_2)\|_{L_{\omega^{-p_2/p_1}}^{p_2}} \|\mathcal{M}_A f_1 + (T_i^1)_* f_1\|_{L_\omega^{p_1}} \\ &\quad + \sum_{i=1}^I \|\mathcal{M}_\psi^0(T_i^1 f_1)\|_{L_\omega^{p_1}} \|\mathcal{M}_A f_2 + (T_i^2)_* f_2\|_{L_{\omega^{-p_2/p_1}}^{p_2}} \\ &\lesssim \sum_{i=1}^I \|T_i^2 f_2\|_{L_{\omega^{-p_2/p_1}}^{p_2}} (\|\mathcal{M}_A f_1\|_{L_\omega^{p_1}} + \|(T_i^1)_* f_1\|_{L_\omega^{p_1}}) \\ &\quad + \sum_{i=1}^I \|T_i^1 f_1\|_{L_\omega^{p_1}} (\|\mathcal{M}_A f_2\|_{L_{\omega^{-p_2/p_1}}^{p_2}} + \|(T_i^2)_* f_2\|_{L_{\omega^{-p_2/p_1}}^{p_2}}) \\ &\lesssim \|f_1\|_{L_\omega^{p_1}} \|f_2\|_{L_{\omega^{-p_2/p_1}}^{p_2}}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

最后, 为证定理 3.1(ii), 仍需证 $\|\mathcal{M}_\psi^0 L_2(f_1, f_2)\|_{L^p} \lesssim \|f_1\|_{L_\omega^{p_1}} \|f_2\|_{L_{\omega^{-p_2/p_1}}^{p_2}}$. 因为 L 是一个 J -线性算子, 对任意的 $x_0 \in \mathbb{R}^n$, 有

$$\begin{aligned}
 -L_2(f_1, f_2) &= L(\eta_k^{(1)} f_1, \eta_k^{(1)} f_2) \\
 &= L[(\eta_k^{(1)} f_1)(\cdot) - (\eta_k^{(1)} f_1)(x_0) + (\eta_k^{(1)} f_1)(x_0), (\eta_k^{(1)} f_2)(\cdot)] \\
 &= L[(\eta_k^{(1)} f_1)(\cdot) - (\eta_k^{(1)} f_1)(x_0), (\eta_k^{(1)} f_2)(\cdot)] + L[(\eta_k^{(1)} f_1)(x_0), (\eta_k^{(1)} f_2)(\cdot)] \\
 &= L[(\eta_k^{(1)} f_1)(\cdot) - (\eta_k^{(1)} f_1)(x_0), (\eta_k^{(1)} f_2)(\cdot) - (\eta_k^{(1)} f_2)(x_0) + (\eta_k^{(1)} f_2)(x_0)] \\
 &\quad + L[(\eta_k^{(1)} f_1)(x_0), (\eta_k^{(1)} f_2)(\cdot) - (\eta_k^{(1)} f_2)(x_0) + (\eta_k^{(1)} f_2)(x_0)] \\
 &= L[(\eta_k^{(1)} f_1)(\cdot) - (\eta_k^{(1)} f_1)(x_0), (\eta_k^{(1)} f_2)(\cdot) - (\eta_k^{(1)} f_2)(x_0)] \\
 &\quad + L[(\eta_k^{(1)} f_1)(\cdot) - (\eta_k^{(1)} f_1)(x_0), (\eta_k^{(1)} f_2)(x_0)] \\
 &\quad + L[(\eta_k^{(1)} f_1)(x_0), (\eta_k^{(1)} f_2)(\cdot) - (\eta_k^{(1)} f_2)(x_0)] \\
 &\quad + L[(\eta_k^{(1)} f_1)(x_0), (\eta_k^{(1)} f_2)(x_0)] \\
 &=: L_{21}(f_1, f_2) + L_{22}(f_1, f_2) + L_{23}(f_1, f_2) + L_{24}(f_1, f_2),
 \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
 L_{21}(f_1, f_2) &:= L[(\eta_k^{(1)} f_1)(\cdot) - (\eta_k^{(1)} f_1)(x_0), (\eta_k^{(1)} f_2)(\cdot) - (\eta_k^{(1)} f_2)(x_0)], \\
 L_{22}(f_1, f_2) &:= L[(\eta_k^{(1)} f_1)(\cdot) - (\eta_k^{(1)} f_1)(x_0), (\eta_k^{(1)} f_2)(x_0)], \\
 L_{23}(f_1, f_2) &:= L[(\eta_k^{(1)} f_1)(x_0), (\eta_k^{(1)} f_2)(\cdot) - (\eta_k^{(1)} f_2)(x_0)], \\
 L_{24}(f_1, f_2) &:= L[(\eta_k^{(1)} f_1)(x_0), (\eta_k^{(1)} f_2)(x_0)].
 \end{aligned}$$

由文献 [10, (3.1)], 即

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}, x - x_0 \in B_k} |T_i^j(\eta_k^{(1)} f_j)(x) - T_i^j(\eta_k^{(1)} f_j)(x_0)| \lesssim \mathcal{M}_A f_j(x_0), \quad j \in \{1, 2\}$$

和 $\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) dx \neq 0$, 可得

$$\begin{aligned}
 &\sup_{k \in \mathbb{Z}} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \psi_{k, x_0}(x) L_{22}(\eta_k^{(1)} f_1, \eta_k^{(1)} f_2)(x) dx \right| \\
 &\leq \sum_{i=1}^I \sup_{k \in \mathbb{Z}} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \psi_{k, x_0}(x) [T_i^1(\eta_k^{(1)} f_1)(x) - T_i^1(\eta_k^{(1)} f_1)(x_0)] T_i^2(\eta_k^{(1)} f_2)(x_0) dx \right| \\
 &\lesssim \sum_{i=1}^I \mathcal{M}_A f_1(x_0) (T_i^2)^* f_2(x_0) \sup_{k \in \mathbb{Z}} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \psi_{k, x_0}(x) dx \right| \\
 &\lesssim \sum_{i=1}^I \mathcal{M}_A f_1(x_0) (T_i^2)^* f_2(x_0).
 \end{aligned}$$

类似地, 有

$$\begin{aligned}
 &\sup_{k \in \mathbb{Z}} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \psi_{k, x_0}(x) L_{21}(\eta_k^{(1)} f_1, \eta_k^{(1)} f_2)(x) dx \right| \lesssim \mathcal{M}_A f_1(x_0) \mathcal{M}_A f_2(x_0), \\
 &\sup_{k \in \mathbb{Z}} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \psi_{k, x_0}(x) L_{23}(\eta_k^{(1)} f_1, \eta_k^{(1)} f_2)(x) dx \right| \lesssim \sum_{i=1}^I (T_i^1)^* f_1(x_0) \mathcal{M}_A f_2(x_0),
 \end{aligned}$$

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \psi_{k, x_0}(x) L_{24}(\eta_k^{(1)} f_1, \eta_k^{(1)} f_2)(x) dx \right| \lesssim \sum_{i=1}^I (T_i^1)_* f_1(x_0) (T_i^2)_* f_2(x_0).$$

因此, 由 Hölder 不等式, $\mathcal{M}_A$ 和 $(T_i^j)_*$ 在 $L_\omega^{p_1}$ 和 $L_{\omega^{-p_2/p_1}}^{p_2}$ 上的有界性 (参见引理 3.5), $\omega \in \mathbb{A}_1 \subset \mathbb{A}_{p_1}$, $\omega^{-p_2/p_1} \in \mathbb{A}_{p_2}$, 可得

$$\|\mathcal{M}_\psi^0 L_{2l}(\eta_k^{(1)} f_1, \eta_k^{(1)} f_2)\|_{L^p} \lesssim \|f_1\|_{L_\omega^{p_1}} \|f_2\|_{L_{\omega^{-p_2/p_1}}^{p_2}}, \quad l \in \{1, 2, 3, 4\},$$

进一步, $\|\mathcal{M}_\psi^0 L_2(f_1, f_2)\|_{L^p} \lesssim \|f_1\|_{L_\omega^{p_1}} \|f_2\|_{L_{\omega^{-p_2/p_1}}^{p_2}}$. 由此估计、(3.1) 和 (3.2), (ii) 得证. 定理 3.1 证毕. $\square$

4 BMO_A 和 BMO_A^ω

本节主要证明包含关系: $\text{BMO}_A^\omega \subset \text{BMO}_A$ 和 $\text{BMO}_A^w \subset (H_A^1)^*$.

定义 4.1 设 $\mathcal{B} := \{z + B_k : z \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{Z}\}$ 且 $\omega \in \mathbb{A}_\infty$. 加权各向异性 BMO 函数空间定义为 $\{f \in L_{\text{loc}}^1 : \|f\|_{\text{BMO}_\omega} < \infty\}$, 其中

$$\|f\|_{\text{BMO}_A^\omega} := \sup_{B \in \mathcal{B}} \frac{1}{\omega(B)} \int_B |f(x) - f_B| dx,$$

f_B 表示 f 在 B 上的平均值, 即 $f_B := \frac{1}{|B|} \int_B f(x) dx$. 特别地, 当 $\omega \equiv 1$ 时, $\text{BMO}_A := \text{BMO}_A^1$ 称为各向异性 BMO 函数空间.

引理 4.1 (参见文献 [7, 第 7 和 8 页]) 设 $q \in [1, \infty)$ 且 $\omega \in \mathbb{A}_q$, 则存在正常数 C , 使得对任意的 $k \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R}^n$ 和 $E \subset x + B_k$, 有

$$\frac{1}{C} \frac{|x + B_k|^{1/q}}{|E|^{1/q}} \leq \frac{\omega(x + B_k)}{\omega(E)} \leq C \frac{|x + B_k|^q}{|E|^q}.$$

引理 4.2 设 $\omega \in \mathbb{A}_1$, $x \in \mathbb{R}^n$ 且 $l \in \mathbb{Z}$, 则存在仅与 ω 、扩张矩阵 A 和维数 n 有关的正常数 C , 使得

$$\frac{\omega(x + B_l)}{|x + B_l|} \leq C.$$

证明 设 l_x 是使得 $x \in B_{l_x}$ 成立的最小整数. 下面分 4 种情形证明结论.

(i) 若 $l_x \geq 0$, $l < 0$, 由 (2.1) 可得 $x + B_l \subset B_{l_x} + B_l \subset B_{l_x + \sigma}$, 则由此包含关系、引理 4.1 和 $\omega \in \mathbb{A}_1$, 有

$$\frac{\omega(x + B_l)}{|x + B_l|} \lesssim \frac{\omega(B_{l_x + \sigma})}{|B_{l_x + \sigma}|} \lesssim \frac{b^{l_x + \sigma} \omega(B_0)}{b^{l_x + \sigma} |B_0|} \lesssim 1.$$

(ii) 若 $l_x < 0$, $l \geq 0$, 由 (2.1) 可得 $x + B_l \subset B_{l_x} + B_l \subset B_{l + \sigma}$, 则由此包含关系、引理 4.1 和 $\omega \in \mathbb{A}_1$, 有

$$\frac{\omega(x + B_l)}{|x + B_l|} \lesssim \frac{\omega(B_{l + \sigma})}{|B_{l + \sigma}|} \lesssim \frac{b^{l + \sigma} \omega(B_0)}{b^{l + \sigma} |B_0|} \lesssim 1.$$

(iii) 若 $l_x \leq 0$, $l \leq 0$, 由 (2.1) 得 $x + B_l \subset B_{l_x} + B_l \subset B_\sigma$, 则由此包含关系、引理 4.1 和 $\omega \in \mathbb{A}_1$, 有

$$\frac{\omega(x + B_l)}{|x + B_l|} \lesssim \frac{\omega(B_\sigma)}{|B_\sigma|} \lesssim \frac{b^\sigma \omega(B_0)}{b^\sigma |B_0|} \lesssim 1.$$

(iv) 若 $l_x \geq 0, l \geq 0$, 由 (2.1) 可得 $x + B_l \subset B_{l_x} + B_l \subset B_{l_x+l+\sigma}$, 则由此包含关系、引理 4.1 和 $\omega \in \mathbb{A}_1$, 有

$$\frac{\omega(x + B_l)}{|x + B_l|} \lesssim \frac{\omega(B_{l_x+l+\sigma})}{|B_{l_x+l+\sigma}|} \lesssim \frac{b^{l_x+l+\sigma}\omega(B_0)}{b^{l_x+l+\sigma}|B_0|} \lesssim 1.$$

引理 4.2 证毕. $\square$

定理 4.1 设 $\omega \in \mathbb{A}_1$, 则 $\text{BMO}_A^\omega \subset \text{BMO}_A$.

证明 对任意的 $f \in \text{BMO}_A^\omega$, 我们只需证 $\|f\|_{\text{BMO}_A} \lesssim \|f\|_{\text{BMO}_A^\omega}$. 由引理 4.2, 对任意的扩张球 $B \in \mathcal{B}$, 有

$$\begin{aligned} \frac{1}{|B|} \int_B |f(x) - f_B| dx &= \frac{\omega(B)}{|B|} \frac{1}{\omega(B)} \int_B |f(x) - f_B| dx \\ &\lesssim \frac{1}{\omega(B)} \int_B |f(x) - f_B| dx, \end{aligned}$$

从而可知, $f \in \text{BMO}_A$, 由 f 的任意性进一步可得 $\text{BMO}_A^\omega \subset \text{BMO}_A$. 定理 4.1 证毕. $\square$

注 4.1 在定理 4.1 中, 若 $A = 2\mathbb{I}_{n \times n}$, $\omega(x) = |x|^\alpha$, $\alpha \in (-1, 0]$, 则 $\text{BMO}_A^\omega \subsetneq \text{BMO}_A$. 由定理 4.1 和 $\omega \in \mathbb{A}_1$ 可知, 包含关系成立, 为此证此包含关系为真包含关系, 只需给出一个函数 $f \in \text{BMO}_A$, 但 $f \notin \text{BMO}_A^\omega$. 为简便起见, 在一维情形下给出此函数, 高维情形下类似.

设 $A = 2$, $f(x) = \ln|x|$, 则 $f(x) \in \text{BMO}_A$ (参见文献 [23, 例 7.1.3]). 现还需证 $f(x) \notin \text{BMO}_A^\omega$. 对任意的 $B_r := (-r, r)$, $r = 1, 2, 4, \dots, 2n, \dots$, 有

$$f_{B_r} = \frac{1}{2r} \int_{-r}^r \ln|x| dx = \ln r - 1 = \frac{2r^{1+\alpha}}{1+\alpha}$$

和

$$w(B_r) = \int_{-r}^r |x|^\alpha dx = \frac{2r^{1+\alpha}}{1+\alpha},$$

故

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega(B_r)} \int_{B_r} |f(x) - f_{B_r}| dx &= \frac{1+\alpha}{r^{1+\alpha}} \int_0^r |\ln|x| - \ln r + 1| dx \\ &= \frac{1+\alpha}{r^{1+\alpha}} \left[-\int_0^{r/e} \left(\ln \frac{x}{r} + 1 \right) dx + \int_{r/e}^r \left(\ln \frac{x}{r} + 1 \right) dx \right] \\ &= \frac{2(\alpha+1)}{er^\alpha}. \end{aligned}$$

进一步可得

$$\sup_{B \in \mathcal{B}} \frac{1}{\omega(B)} \int_B |f(x) - f_B| dx \geq \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\omega(B_r)} \int_{B_r} |f(x) - f_{B_r}| dx = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{2(\alpha+1)}{er^\alpha} = \infty,$$

上式蕴含着 $f \notin \text{BMO}_A^\omega$. 故 $\text{BMO}_A^\omega \subsetneq \text{BMO}_A$.

定理 4.2 设 $\omega \in \mathbb{A}_1$, 则有 $\text{BMO}_A^\omega \subset (H_A^1)^*$. 具体地, 对任意的 $\mathbf{b} \in \text{BMO}_A^\omega$, 线性泛函

$$L_{\mathbf{b}}(f) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \mathbf{b}(x) dx, \quad \forall f \in L_0^\infty$$

是 L_0^∞ 上的能唯一延拓到 H_A^1 上的有界线性泛函且 $\{L_{\mathbf{b}} : \mathbf{b} \in \text{BMO}_A^\omega\} \subset (H_A^1)^*$. 此外, 对任意的 $f \in H_A^1$, 存在正常数 C 使得

$$|L_{\mathbf{b}}(f)| \leq C \|\mathbf{b}\|_{\text{BMO}_A^\omega} \|f\|_{H_A^1}.$$

证明 由 $\|L_b\| \lesssim \|b\|_{\text{BMO}_A}$ (参见文献 [24, 引理 2.4(i)]) 和定理 4.1, 可得 $\|L_b\| \lesssim \|b\|_{\text{BMO}_A^\omega}$, 也即如下不等式: 对任意的 $b \in \text{BMO}_A^\omega$ 和 $f \in L_0^\infty$, 有

$$|L_b(f)| \leq C \|b\|_{\text{BMO}_A^\omega} \|f\|_{H_A^1}, \quad (4.1)$$

这蕴含着 L_b 是 L_0^∞ 上的一个有界线性泛函. 再由 L_0^∞ 是 H_A^1 的稠密子空间, 进一步可将 L_b 唯一延拓为 H_A^1 上的有界线性泛函. 事实上, 对任意给定的 $f \in H_A^1$, 存在序列 $f_j \in L_0^\infty$, $j \in \mathbb{N}$, 使得当 $j \rightarrow \infty$ 时, f_j 依 $\|\cdot\|_{H_A^1}$ 范数收敛到 f , 则由 (4.1), 对任意的 $f_j, f_k \in L_0^\infty$ 和 $j, k \in \mathbb{N}$, 有

$$|L_b(f_j) - L_b(f_k)| \lesssim \|b\|_{\text{BMO}_A^\omega} \|f_j - f_k\|_{H_A^1},$$

可得 $\{L_b(f_j)\}_j$ 是 $\mathbb{C}$ 上的 Cauchy 序列. 此外, 对任意的另一组序列 $f'_j \in L_0^\infty$, $j \in \mathbb{N}$, 若满足 f'_j 依 $\|\cdot\|_{H_A^1}$ 范数收敛到 f (当 $j \rightarrow \infty$ 时), 则由 (4.1) 可得

$$|L_b(f_j) - L_b(f'_j)| \lesssim \|b\|_{\text{BMO}_A^\omega} \|f_j - f'_j\|_{H_A^1} \rightarrow 0.$$

设 $L_b(f) := \lim_{j \rightarrow \infty} L_b(f_j)$, 由上面的证明可知, 极限 $L_b(f)$ 与 Cauchy 序列 $\{f_j\}_j$ 的选取无关, 从而可得 L_b 在 H_A^1 上的定义是合理的. 综上所述, 对任意的 $f \in H_A^1$, $|L_b(f)| \lesssim \|b\|_{\text{BMO}_A^\omega} \|f\|_{H_A^1}$, 有 $\text{BMO}_A^\omega \subset (H_A^1)^*$. 定理 4.2 证毕. $\square$

5 应用

作为定理 3.1 和 4.2 的应用, 本节得到一类由各向异性 Calderón-Zygmund 算子和加权各向异性 BMO_A^ω 函数生成的交换子的加权估计.

定理 5.1 设 $\omega \in \mathbb{A}_1$, $q \in (1, \infty)$, $b \in \text{BMO}_A^\omega$ 且 T 是如定义 3.1 所示的各向异性 Calderón-Zygmund 算子, 则对任意的 $f \in L_\omega^q$, 存在正常数 C 使得

$$\|[b, T](f)\|_{L_\omega^q} \leq C \|b\|_{\text{BMO}_A^\omega} \|f\|_{L_\omega^q},$$

其中 $[b, T](f) := bT(f) - T(bf)$.

注 5.1 (i) 当 $\omega \equiv 1$ 时, 定理 5.1 与文献 [10, 定理 1.2] 一致.

(ii) 当 $A = 2I_{n \times n}$ 和 $\omega \equiv 1$ 时, 定理 5.1 与文献 [3, 定理 1] 一致.

现在, 应用定理 3.1 和 4.2 证明定理 5.1.

定理 5.1 的证明 设 T^* 是 T 的共轭算子, 则 T^* 也是一个各向异性 Calderón-Zygmund 算子. 对任意的 $f \in L_\omega^q$ 和 $g \in L_{\omega^{-q'/q}}^{q'}$, 设 2- 线性算子 $L_2(f, g) := fT^*(g) - T(f)g$. 重复定理 3.1 的证明可知, 定理 3.1 关于此 2- 线性算子 L_2 仍成立. 设 $\omega \in \mathbb{A}_1$, $q \in (1, \infty)$ 且 $q' := q/(q-1)$. 由 T^* 的定义得

$$\int_{\mathbb{R}^n} [f(x)T^*(g)(x) - T(f)(x)g(x)]dx = 0. \quad (5.1)$$

因此, 由 (5.1) 和定理 3.1(ii), 对任意的 $f \in L_\omega^q$, $g \in L_{\omega^{-q'/q}}^{q'}$, 有

$$\|fT^*(g) - T(f)g\|_{H_A^1} \lesssim \|f\|_{L_\omega^q} \|g\|_{L_{\omega^{-q'/q}}^{q'}}, \quad (5.2)$$

进一步可知, $fT^*(g) - T(f)g \in H_A^1$, 则由此结论、定理 4.2 和 (5.2), 对任意的 $\mathbf{b} \in \text{BMO}_A^\omega$, 有

$$\begin{aligned} \|[\mathbf{b}, T](f)\|_{L_\omega^q} &= \sup_{\|g\|_{L_{\omega^{-q'/q}}^{q'}} \leq 1} \left| \int_{\mathbb{R}^n} g(x)[\mathbf{b}(x)Tf(x) - T(\mathbf{b}f)(x)]dx \right| \\ &= \sup_{\|g\|_{L_{\omega^{-q'/q}}^{q'}} \leq 1} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{b}(x)[f(x)T^*(g)(x) - Tf(x)g(x)]dx \right| \\ &\lesssim \sup_{\|g\|_{L_{\omega^{-q'/q}}^{q'}} \leq 1} \|\mathbf{b}\|_{\text{BMO}_A^\omega} \|fT^*(g) - T(f)g\|_{H_A^1} \\ &\lesssim \|\mathbf{b}\|_{\text{BMO}_A^\omega} \|f\|_{L_\omega^q}. \end{aligned}$$

定理 5.1 得证. □

致谢 衷心感谢审稿人的审阅和推荐.

参考文献

- 1 Bownik M. Anisotropic Hardy Spaces and Wavelets. Memoirs of the American Mathematical Society, vol. 781. Providence: Amer Math Soc, 2003
- 2 Coifman R R, Grafakos L. Hardy space estimates for multilinear operators, I. Rev Mat Iberoamericana, 1992, 8: 45–67
- 3 Coifman R R, Rochberg R, Weiss G. Factorization theorems for Hardy spaces in several variables. Ann of Math (2), 1976, 103: 611–635
- 4 Fefferman C, Stein E M. H^p spaces of several variables. Acta Math, 1972, 129: 137–193
- 5 Grafakos L. Hardy space estimates for multilinear operators, II. Rev Mat Iberoamericana, 1992, 8: 69–92
- 6 Stein E M. Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals. Princeton: Princeton University Press, 1993
- 7 Strömberg J O, Torchinsky A. Weighted Hardy Spaces. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1381. Berlin: Springer-Verlag, 1989
- 8 Calderón A P, Torchinsky A. Parabolic maximal functions associated with a distribution, II. Adv Math, 1977, 24: 101–171
- 9 Yang D, Bownik M, Li B, et al. Weighted anisotropic Hardy spaces and their applications in boundedness of sublinear operators. Indiana Univ Math J, 2008, 57: 3065–3100
- 10 Ding Y, Lan S. Anisotropic Hardy space estimates for multilinear operators. Adv Math (China), 2009, 38: 168–184
- 11 Wang L D. A multiplier theorem on anisotropic Hardy spaces. Canad Math Bull, 2018, 61: 390–404
- 12 Betancor J J, Damián W. Anisotropic local Hardy spaces. J Fourier Anal Appl, 2010, 16: 658–675
- 13 Liu J, Yang D, Yuan W. Littlewood-Paley characterizations of anisotropic Hardy-Lorentz spaces. Acta Math Sci Ser B Engl Ed, 2018, 38: 1–33
- 14 Li B, Fan X, Yang D. Littlewood-Paley characterizations of anisotropic Hardy spaces of Musielak-Orlicz type. Taiwanese J Math, 2015, 19: 279–314
- 15 Coifman R R, Lions P L, Meyer Y, et al. Compacité par compensation et espaces de Hardy. C R Acad Sci Paris Sér I Math, 1989, 309: 945–949
- 16 Coifman R R, Lions P L, Meyer Y, et al. Compensated compactness and Hardy spaces. J Math Pures Appl (9), 1993, 72: 247–286
- 17 Chiarenza F, Frasca M, Longo P. $W^{2,p}$ -solvability of the Dirichlet problem for nondivergence elliptic equations with VMO coefficients. Trans Amer Math Soc, 1993, 336: 841–853
- 18 Difazio G, Ragusa M A. Interior estimates in Morrey spaces for strong solutions to nondivergence form equations with discontinuous coefficients. J Funct Anal, 1993, 112: 241–256
- 19 Alvarez J. Weighted estimates for commutators of linear operators. Studia Math, 1993, 104: 195–209
- 20 Coifman R R, Weiss G. Analyse Harmonique Non-Commutative sur Certains Espaces Homogènes. Etude de Certaines Intégrales Singulières. Lecture Notes in Mathematics, vol. 242. Berlin-New York: Springer-Verlag, 1971
- 21 Johnson R, Neugebauer C J. Homeomorphisms preserving A_p . Rev Mat Iberoamericana, 1987, 3: 249–273
- 22 Qi C, Zhang H, Li B. New real-variable characterizations of anisotropic weak Hardy spaces of Musielak-Orlicz type. Rocky Mountain J Math, 2018, 48: 607–637

- 23 Grafakos L. Modern Fourier Analysis, 2nd ed. Graduate Texts in Mathematics, vol. 250. New York: Springer, 2009
- 24 Fan X, Li B. Anisotropic tent spaces of Musielak-Orlicz type and their applications. Adv Math (China), 2016, 45: 233–251

Estimates for multilinear operators on anisotropic function spaces and their applications

Xiaoli Qiu, Chunyan Qi, Xiong Liu & Baode Li

Abstract Let A be an anisotropic dilation on $\mathbb{R}^n$ and L a general multilinear operator formed by anisotropic Calderón-Zygmund operators. We obtain the boundedness of L from weighted Lebesgue spaces to the unweighted anisotropic Hardy space. Moreover, for the anisotropic BMO space $\text{BMO}_A(\mathbb{R}^n)$ and the weighted anisotropic BMO space $\text{BMO}_A^w(\mathbb{R}^n)$, we obtain an inclusion relationship: $\text{BMO}_A^w(\mathbb{R}^n) \subset \text{BMO}_A(\mathbb{R}^n)$. As an application, for the commutator $[T, b]$ of the anisotropic Calderón-Zygmund operator T and b in $\text{BMO}_A^w(\mathbb{R}^n)$, we obtain $\|[T, b](f)\|_{L_w^p(\mathbb{R}^n)} \leq C \|b\|_{\text{BMO}_A^w(\mathbb{R}^n)} \|f\|_{L_w^p(\mathbb{R}^n)}$. All these results are still new even in the classical isotropic setting.

Keywords anisotropy, Muckenhoupt weight, Hardy space, multilinear operator, Calderón-Zygmund operator, commutator

MSC(2010) 42B35, 42B20, 74E10

doi: 10.1360/N012019-00006