对Kerr-Newman-de Sitter黑洞视界处费米子隧穿辐射的修正

杨树政^{1*}, 林恺^{2,3}

1. 西华师范大学物理与空间科学学院, 南充 637002;

2. 中国地质大学(武汉)地球物理与空间信息学院, 地球内部多尺度成像湖北省重点实验室, 武汉 430074;

3. Escola de Engenharia de Lorena, Universidade de Sao Paulo, Lorena, Sao Paulo 12602-810, Brazil

*联系人, E-mail: szyangphys@126.com

收稿日期: 2018-08-31; 接受日期: 2018-09-21; 网络出版日期: 2018-12-10

国家自然科学基金(编号: 11573022, 11805166)资助项目

摘要 通过应用变形的色散关系修正了de Sitter时空中的带电旋转黑洞的费米子隧穿辐射谱. 首先对弯曲时空中的Rarita-Schwinger方程进行了修正, 然后用半经典理论推导出修正的Hamilton-Jacobi方程. 运用这项修正, 对Kerr-Newman-de Sitter黑洞视界处的费米子隧穿辐射特征进行了研究, 其结果表明: 在旋转黑洞时空背景之下, 黑洞霍金温度和黑洞熵的修正都与黑洞视界处的角向参数相关.

关键词 修正费米子方程, 霍金辐射, 费米子隧穿, 修正熵

PACS: 04.62.+v, 04.70.Dy, 11.30.-j

1 引言

尽管经典的黑洞无法向外发射出任何辐射和粒子, 然而霍金在黑洞视界附近引入量子理论之后发现, 黑洞实际上可以通过量子效应向外辐射粒子^[1,2]. 该发现深刻地揭示了量子论、引力论、热力学和统计物理之间深刻的联系. 因此, 对于黑洞霍金辐射的研究很快成为弯曲时空量子场论的热门前沿课题^[3-5]. 我们可以用隧穿的观点来解释霍金辐射: 在黑洞视界内部有大量虚粒子, 这些粒子通过量子隧穿效应穿越视界, 并实化成实粒子, 形成霍金辐射. 利用量子隧穿理论,

Kraus等人^[6-14]提出了隧穿辐射理论来计算黑洞的霍金温度和黑洞熵. 在隧穿辐射理论之后半经典的Hamilton-Jacobi方法被提出, 这一方法的提出大大促进了黑洞隧穿理论的研究进展^[15,16]. 随后, Kerner和Mann^[17,18]首先开始使用半经典的方法研究Dirac场的量子隧穿辐射, 他们使用自旋向上和自旋向下的方式将场方程分解为两组分别研究, 最后得到了黑洞的Dirac粒子隧穿辐射的隧穿率和黑洞温度. 接着, 人们用隧穿理论的方法研究了各种黑洞的霍金辐射^[19-24]. 我们则在2009年提出一个新的方法研究黑洞的Dirac粒子隧穿辐射^[25-27], 首先使用半经典近似理论把Dirac

引用格式: 杨树政, 林恺. 对Kerr-Newman-de Sitter黑洞视界处费米子隧穿辐射的修正. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2019, 49: 019503
Yang S Z, Lin K. Modified fermions tunneling radiation from Kerr-Newman-de Sitter black hole (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, 2019, 49: 019503, doi: [10.1360/SSPMA2018-00307](https://doi.org/10.1360/SSPMA2018-00307)

方程化简为一个较为简单的矩阵方程, 利用Gamma矩阵的对易关系得到了弯曲时空的Hamilton-Jacobi方程, 并利用这一半经典方程推导了黑洞的Dirac费米子的霍金辐射. 这一结果说明Hamilton-Jacobi方程可以被顺利地运用于费米子隧穿理论的研究中, 这一理论的发展有效地简化了费米子隧穿理论的研究, 同时达到了量子隧穿辐射理论的统一. 另一方面, 洛伦兹色散关系一直被认为是现代物理学的基本关系, 今天的广义相对论和量子场论都似乎建立在这个关系基础之上. 然而, 量子引力理论的研究暗示, 洛伦兹关系有可能在高能领域中被修正. 尽管人们还没能成功建立起一套高能领域下的色散关系理论, 但是人们普遍认为这个修正项的量级是普朗克尺度.

在弦论和量子引力理论的研究中, 人们提出一种色散关系^[28-36]:

$$p_0^2 = \mathbf{p}^2 + m^2 - (Lp_0)^\alpha \mathbf{p}^2. \quad (1)$$

在自然单位制中, 这里的 p_0 和 $\mathbf{p}$ 分别是粒子的能量和动量, m 是粒子的静止质量, 而 L 是普朗克尺度的量级的一个常数. 这个关系中, $\alpha=1$ 在Liouville-string模型中被提及. 近来, Kruglov^[37]考虑了 $\alpha=2$ 的情况, 并进一步得到了修正的Dirac方程:

$$\left(\bar{\gamma}^\mu \partial_\mu + \frac{m}{\hbar} - iL \bar{\gamma}^i \partial_i \bar{\gamma}^i \partial_i \right) \psi = 0, \quad (2)$$

式中, $\bar{\gamma}^\mu$ 是平直时空的Gamma矩阵. 而 i 和 μ 分别表示空间和时空坐标. 我们在文献[38]中将式(2)推广到弯曲时空, 并得到了修正的Hamilton-Jacobi方程. 然后, 我们用这一方程求解了球对称黑洞的Dirac隧穿辐射, 得到了修正的霍金温度和黑洞熵.

本文的目的是把以上工作推广到一般的费米子隧穿情况, 并且在旋转时空中研究黑洞的费米子隧穿辐射特征. 结果证明, 这一量子修正将导致旋转黑洞的温度和黑洞熵也依赖于角向参数, 这是更切合实际的研究工作, 这意味着在量子尺度下, 黑洞霍金辐射不仅仅是径向的性质, 而且也与角向性质等因素密切相关. 这有助于人们对黑洞物理的深入研究. 本文的内容安排如下: 第2节, 我们构造修正的Rarita-Schwinger方程, 并利用半经典近似得到修正的一般情况下的费米子Hamilton-Jacobi方程. 第3节, 我们研究Kerr-Newman-de Sitter黑洞时空背景下, 修正的费米子隧穿辐

射, 并计算出黑洞辐射的隧穿率和霍金温度. 第4节包含一些结论, 并对第3节中的计算结果进行深入讨论.

2 弯曲时空中修正的Rarita-Schwinger方程以及修正的费米子Hamilton-Jacobi方程

如前所述, Kruglov^[37]提出了修正的Dirac方程(2), 这个方程包含一个普朗克尺度的修正项. 我们知道, 更一般的费米子方程由Rarita和Schwinger^[39]提出, 被称为Rarita-Schwinger方程, 其具体形式为

$$\left(\bar{\gamma}^\mu \partial_\mu + \frac{m}{\hbar} \right) \psi_{\alpha_1 \dots \alpha_k} = 0, \quad (3)$$

且满足条件:

$$\bar{\gamma}^\mu \psi_{\mu \alpha_2 \dots \alpha_k} = \partial_\mu \psi^{\mu}_{\alpha_2 \dots \alpha_k} = \psi^{\mu}_{\mu \alpha_3 \dots \alpha_k} = 0. \quad (4)$$

上述公式是半整数费米子在平直时空满足的量子方程. 其中当费米子波函数 $\psi_{\alpha_1 \dots \alpha_k} = \psi$ 时(即 $k=0$), 上式退回到自旋为1/2的Dirac方程, 且后面满足的3个条件自动消失; 而当 $k=1$ 时, 上式描述了自旋为3/2的费米子, 且最后一个条件自动消失; 当粒子的静止质量 m 为0时, 自旋为3/2的费米子则描述了超对称和超引力理论中的Gravitino粒子, 这是一种和引力子相伴的费米子, 对这种粒子的研究有助于促进量子引力理论的发展.

当我们把Rarita-Schwinger方程推广到弯曲时空时, 不考虑其他耦合的情况下, 上述方程被改写为

$$\left(\gamma^\mu D_\mu + \frac{m}{\hbar} \right) \psi_{\alpha_1 \dots \alpha_k} = 0, \quad (5)$$

且满足条件:

$$\gamma^\mu \psi_{\mu \alpha_2 \dots \alpha_k} = D_\mu \psi^{\mu}_{\alpha_2 \dots \alpha_k} = \psi^{\mu}_{\mu \alpha_3 \dots \alpha_k} = 0. \quad (6)$$

这里 γ^μ 是弯曲时空中的Gamma矩阵, 其满足弯曲时空中的对易关系是

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} I, \quad (7)$$

式中, I 是单位矩阵. 另一方面 D_μ 被定义为

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + \Omega_\mu + \frac{i}{\hbar} e A_\mu, \quad (8)$$

式中, Ω_μ 是弯曲时空中的旋联络, 在平直时空中, 这一项将自动消失. Gibbons^[40]给出了3/2自旋情况的弯曲时空Rarita-Schwinger方程. 实际上, 除了上述条件之

外, 在弯曲时空中, 弯曲时空费米子方程还需要满足一些恒等式, 但是由于本文着重用半经典近似理论研究黑洞视界附近的黑洞热力学, 因此不对这些恒等式细节进行更多讨论.

现在, 根据量子尺度上修正的色散关系式(1), 我们依然选择 $\alpha=2$, 因此可以把平直时空中的Rarita-Schwinger方程改写为

$$\left(\gamma^\mu \partial_\mu + \frac{m}{\hbar} - \sigma \hbar \gamma^i \partial_i \gamma^j \partial_j \right) \psi_{\alpha_1 \dots \alpha_k} = 0. \quad (9)$$

由于是量子尺度上的小修正, 我们假设耦合常数 $\sigma \ll 1$, 因此 $\sigma \hbar \gamma^i \partial_i \gamma^j \partial_j$ 是一个非常小的项. 于是相应的弯曲时空中的Rarita-Schwinger方程也将被改写为

$$\left(\gamma^\mu D_\mu + \frac{m}{\hbar} - \sigma \hbar \gamma^i D_i \gamma^j D_j \right) \psi_{\alpha_1 \dots \alpha_k} = 0. \quad (10)$$

为了计算黑洞视界处的费米子隧穿辐射, 我们可以重写费米子波函数为

$$\psi_{\alpha_1 \dots \alpha_k} = \xi_{\alpha_1 \dots \alpha_k} e^{\frac{i}{\hbar} S}, \quad (11)$$

其中,

$$\partial_\phi S = j, \quad \partial_r S = -\omega, \quad (12)$$

式中, j 和 ω 是辐射粒子的角动量参数和辐射能量参数. 因此, 把上述关系代入式(10), 把 $\hbar$ 视为小量, 并且只保留到最低阶, 即可得到

$$i \gamma^\mu (\partial_\mu S + e A_\mu) \xi_{\alpha_1 \dots \alpha_k} + m \xi_{\alpha_1 \dots \alpha_k} - \sigma \gamma^i (\omega - e A_i) \gamma^j (\partial_j S + e A_j) \xi_{\alpha_1 \dots \alpha_k} = 0. \quad (13)$$

这里需要考虑到

$$\gamma^\mu (\partial_\mu S + e A_\mu) = -\gamma^i (\omega - e A_i) + \gamma^j (\partial_j S + e A_j). \quad (14)$$

于是, 式(13)可以进一步简写为

$$\Gamma^\mu (\partial_\mu S + e A_\mu) \xi_{\alpha_1 \dots \alpha_k} + M_D \xi_{\alpha_1 \dots \alpha_k} = 0. \quad (15)$$

这里,

$$\begin{aligned} \Gamma^\mu &= \gamma^\mu + i\sigma(\omega - e A_i) \gamma^i \gamma^\mu, \\ M_D &= m - \sigma g^{\mu\nu} (\omega - e A_i)^2. \end{aligned} \quad (16)$$

现在我们可以用 $\Gamma^\nu (\partial_\nu S + e A_\nu)$ 左乘于方程(15), 于是得到:

$$\begin{aligned} &\Gamma^\nu (\partial_\nu S + e A_\nu) \Gamma^\mu (\partial_\mu S + e A_\mu) \xi_{\alpha_1 \dots \alpha_k} \\ &+ M_D \Gamma^\nu (\partial_\nu S + e A_\nu) \xi_{\alpha_1 \dots \alpha_k} = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

再次利用式(15)对上式左边第二项变形, 因此可以得到

$$\Gamma^\nu \Gamma^\mu (\partial_\mu S + e A_\mu) (\partial_\nu S + e A_\nu) \xi_{\alpha_1 \dots \alpha_k} + M_D^2 = 0, \quad (18)$$

这里,

$$\Gamma^\nu \Gamma^\mu = \gamma^\nu \gamma^\mu + 2i\sigma(\omega - e A_i) g^{\mu\nu} \gamma^\nu + O(\sigma^2). \quad (19)$$

从方程(18)中可以发现其中的下标 μ 和 ν 是可以互换的, 因此我们把式(18)中的下标 μ 和 ν 进行互换, 并与式(18)相加再除以2可以得到

$$\begin{aligned} &\left\{ \frac{\gamma^\nu \gamma^\mu + \gamma^\mu \gamma^\nu}{2} (\partial_\mu S + e A_\mu) (\partial_\nu S + e A_\nu) + m^2 \right. \\ &\quad \left. - 2\sigma m g^{\mu\nu} (\omega - e A_i)^2 \right. \\ &\quad \left. + 2i\sigma(\omega - e A_i) g^{i\beta} (\partial_\beta S + e A_\beta) \gamma^\mu (\partial_\mu S + e A_\mu) \right\} \\ &\quad \times \xi_{\alpha_1 \dots \alpha_k} + O(\sigma^2) = \left\{ g^{\mu\nu} (\partial_\mu S + e A_\mu) \right. \\ &\quad \times (\partial_\nu S + e A_\nu) + m^2 - 2\sigma m g^{\mu\nu} (\omega - e A_i)^2 \\ &\quad \left. + [2i\sigma(\omega - e A_i) g^{i\beta} (\partial_\beta S + e A_\beta)] \right. \\ &\quad \left. \times \gamma^\mu (\partial_\mu S + e A_\mu) \right\} \xi_{\alpha_1 \dots \alpha_k} + O(\sigma^2) = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

于是上式可以简写为

$$i\sigma \gamma^\mu (\partial_\mu S + e A_\mu) \xi_{\alpha_1 \dots \alpha_k} + M_\xi \xi_{\alpha_1 \dots \alpha_k} = 0, \quad (21)$$

这里,

$$M_\xi = \frac{g^{\mu\nu} (\partial_\mu S + e A_\mu) (\partial_\nu S + e A_\nu) + m^2 - 2\sigma m g^{\mu\nu} (\omega - e A_i)^2}{2(\omega - e A_i) g^{i\beta} (\partial_\beta S + e A_\beta)}. \quad (22)$$

再次运用上面的技巧, 在方程(21)两边左乘 $-i\sigma \gamma^\nu (\partial_\nu S + e A_\nu)$, 并对换 μ 和 ν , 并再与式(21)相加, 然后除以2, 于是我们得到

$$\left\{ \sigma^2 g^{\mu\nu} (\partial_\mu S + e A_\mu) (\partial_\nu S + e A_\nu) + M_\xi^2 \right\} \xi_{\alpha_1 \dots \alpha_k} = 0. \quad (23)$$

所以, 上面这个矩阵方程其实是一个本征矩阵, 因此存在非平凡解的条件是其矩阵对应的行列式之值为0, 即

$$\sigma^2 g^{\mu\nu} (\partial_\mu S + eA_\mu) (\partial_\nu S + eA_\nu) + M_\xi^2 = 0. \quad (24)$$

省略 $O(\sigma^3)$ 的项, 于是由以上方程我们得到修正的Hamilton-Jacobi方程为

$$g^{\mu\nu} (\partial_\mu S + eA_\mu) (\partial_\nu S + eA_\nu) + m^2 - 2\sigma m g^{\mu\nu} (\omega - eA_t) = 0. \quad (25)$$

上式是从修正的Rarita-Schwinger方程推导而来. 但是, 我们发现以上结果并不受具体自旋的影响, 任何费米子在半经典近似下, 都可以导出这个结果. 另一方面, 我们在文献[38]中已经证明, 玻色子修正的Hamilton-Jacobi方程与费米子修正的结果是不一样的, 因此上式正是费米子修正的Hamilton-Jacobi方程. 对于这样一个重要方程的重要性, 我们将通过研究Kerr-Newman-de Sitter黑洞的费米子隧穿辐射和黑洞事件视界附近的热力学性质来说明其黑洞弯曲时空事件视界处的隧穿辐射及其相关修正.

3 Kerr-Newman-de Sitter黑洞时空事件视界处的隧穿辐射及其修正

根据黑洞无毛定律, 3+1维时空中的黑洞只能显示3个特征, 即黑洞的质量、电荷、角动量. 球形的黑洞在具备上面3个特征之后, 可以由Kerr-Newman黑洞描述, 而当我们考虑宇宙常数之后, 无穷远处的时空将存在3种情况, 即渐近平直时空(宇宙常数为零)、渐近Anti-de Sitter时空(宇宙常数为负)和渐近de Sitter时空(宇宙常数为正). 我们这里研究渐近de Sitter时空中的旋转带电黑洞(即Kerr-Newman-de Sitter黑洞)事件视界处的热力学性质.

首先, 我们知道Kerr-Newman-de Sitter黑洞的时空线元是

$$ds^2 = -\frac{\Delta_r^2}{\rho^2} \left(dt - \frac{a}{\Xi} \sin^2 \theta d\phi \right)^2 + \frac{\rho^2}{\Delta_r^2} dr^2 + \frac{\rho^2}{\Delta_\theta} d\theta^2 + \frac{\Delta_\theta \sin^2 \theta}{\rho^2} \left(a dt - \frac{r^2 + a^2}{\Xi} d\phi \right)^2. \quad (26)$$

而电磁势则满足

$$A_t = -\frac{Qr}{\rho^2}, A_\phi = \frac{Qr}{\rho^2 \Xi} a \sin^2 \theta, A_r = A_\theta = 0, \quad (27)$$

其中,

$$\begin{aligned} \Delta_r^2 &= (r^2 + a^2) \left(1 + \frac{r^2}{\ell^2} \right) - 2Mr + Q^2, \\ \rho^2 &= r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \\ \Xi &= 1 + \frac{a^2}{\ell^2}, \\ \Delta_\theta &= 1 + \frac{a^2}{\ell^2} \cos^2 \theta, \end{aligned} \quad (28)$$

式中, M , Q 和 a 分别是黑洞的质量、电荷和角动量参数, 而 ℓ 则是宇宙常数的逆, 表征de Sitter时空的宇宙尺度. 因此上述Kerr-Newman-de Sitter黑洞的逆变度规是

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \frac{a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2 \Delta_\theta} - \frac{r^2 + a^2}{\rho^2 \Delta_r^2} & 0 & 0 & \frac{\Xi a(r^2 + a^2)}{\rho^2 \Delta_r^2} - \frac{\Xi a}{\rho^2 \Delta_\theta} \\ 0 & \frac{\Delta_r^2}{\rho^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\Delta_\theta}{\rho^2} & 0 \\ \frac{\Xi a(r^2 + a^2)}{\rho^2 \Delta_r^2} - \frac{\Xi a}{\rho^2 \Delta_\theta} & 0 & 0 & \frac{\Xi^2}{\rho^2 \Delta_\theta \sin^2 \theta} - \frac{\Xi^2 a^2}{\rho^2 \Delta_r^2} \end{bmatrix}. \quad (29)$$

在黑洞视界 r_h 处, 我们有 $\Delta_r(r_h) = 0$, 对于Kerr-Newman-de Sitter时空, 存在3个视界, 即外视界 r_0 、内视界 r_i 和宇宙视界 r_c . 三个视界的尺度满足关系 $r_c > r_0 > r_i$, 观测者处于外视界和宇宙视界之间. 当内视界和外视界趋于相等时, 黑洞变成极端黑洞, 其视界处的表面温度趋于0, 这意味着黑洞的电荷和角动量不能继续增大, 否则内视界大于外视界会导致奇点外露, 这种情况是被宇宙监督原理所排斥的. 这里我们设 $b = r_i/r_0$, 因此我们又可以根据该时空的3个视界, 找到黑洞的3个特征量与视界之间的相关性:

$$\begin{aligned} a^2 &= \ell^2 - r_c^2 - (1+b)r_i r_0 - (1+b+b^2)r_0^2, \\ M &= \frac{(1+b)r_0(r_c + r_0)(r_c + br_0)}{2\ell^2}, \\ Q^2 &= \frac{br_i r_0^2(r_c + r_0 + br_0)}{\ell^2} - a^2. \end{aligned} \quad (30)$$

本文研究Kerr-Newman-de Sitter黑洞时空的视界的热力学性质. 在旋转时空中, 我们得到修正的Hamilton-Jacobi方程(25)成为如下的方程:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{\Delta_r^2} \left\{ (r^2 + a^2)(\omega - eA_t) + \Xi a(j + eA_\phi) \right\}^2 \\
 & + \Delta_r^2 \partial_r^2 S + r^2 m^2 + \frac{2\sigma m(r^2 + a^2)^2}{\Delta_r^2} (\omega - eA_t)^2 \\
 & + \frac{1}{\Delta_\theta} \left\{ a(\omega - eA_t) \sin\theta + \frac{\Xi}{\sin\theta} (j + eA_\phi) \right\}^2 \\
 & + \Delta_\theta \partial_\theta^2 S + a^2 m^2 \cos^2\theta - \frac{2\sigma m a^2 \sin^2\theta}{\Delta_\theta} (\omega - eA_t)^2 = 0. \quad (31)
 \end{aligned}$$

在事件视界 r_0 附近, 考虑到 $\Delta_r(r_0) = 0$, 上式第二行的项将变成小项而可以被忽略掉. 于是, 我们代入电磁势式(27), 并考虑到 $\sigma \ll 1$ 的条件, 即可以在其黑洞事件视界处得到

$$\partial_r S = \pm \frac{\omega - e\Phi_0 - j\Omega_0}{(1 + \sigma m \Theta^2) f(r)}, \quad (32)$$

其中,

$$\begin{aligned}
 f(r) &= \frac{A_r^2}{r^2 + a^2}, \quad \Theta = \frac{\omega - e\Psi_0}{\omega - e\Phi_0 - j\Omega_0}, \\
 \Omega_0 &= \frac{-a\Xi}{r_0^2 + a^2}, \quad \Phi_0 = \frac{-Qr_0}{r_0^2 + a^2}, \\
 \Psi_0 &= \frac{-Qr_0}{r_0^2 + a^2 \cos^2\theta}. \quad (33)
 \end{aligned}$$

而式(33)中的正负号分别对应着出射解和入射解. 因此, 我们把视界位置视为一个奇点, 然后用留数定理从事件视界内到事件视界外进行积分, 于是在事件视界处得到

$$S_\pm = \pm i\pi(1 - \sigma m \Theta^2) \frac{\omega - e\Phi_0 - j\Omega_0}{f'(r)} \Big|_{r=r_0} + S_Y, \quad (34)$$

其中, 在事件视界处 S_Y 是径向积分以外的项, 它的形式并不重要, 因为我们将在计算隧穿率的时候把此项消掉.

根据黑洞的隧穿率理论, 我们得到隧穿率为

$$\begin{aligned}
 \Gamma &= \exp\left(-\frac{2}{\hbar}(\text{Im}S_+ - \text{Im}S_-)\right) \\
 &= \exp\left(-\frac{\omega - e\Phi_0 - j\Omega_0}{T_H}\right), \quad (35)
 \end{aligned}$$

其中, 霍金温度是

$$T_H = \hbar(1 + \sigma m \Theta^2) \frac{f'(r)}{4\pi} \Big|_{r=r_0} \equiv (1 + \sigma m \Theta^2) T_0. \quad (36)$$

这里的 T_0 是未修正的Kerr-Newman-de Sitter黑洞事件视界处的霍金温度, 而修正后的霍金温度 T_H 则与 $\sigma m \Theta^2$ 相关. 注意到 Θ 不但决定于事件视界的位置, 也决定于 θ 的值. 但是当 $a=0$ 时, Θ 不再依赖于 θ 的值. 这说明, 在静态黑洞时空中修正后的霍金温度 T_H 依然只与视界的径向位置有关, 但是在旋转黑洞时空中, 修正后的霍金温度将是角度参数 θ 的函数.

实际上, Kerr-Newman-de Sitter时空还存在一个de Sitter宇宙视界 r_c 同样满足 $\Delta_r(r_c) = 0$ 条件, 因此在宇宙视界处, 并考虑到 $\sigma \ll 1$ 的条件, 我们同样可以得到一个类似于式(32)的结果, 只是其中的电势和旋转势以及修正项需要取宇宙视界 r_c 处的值. 与事件视界不同, 观测者处于宇宙视界以内, 且经典的de Sitter宇宙视界处只有出射解, 而没有入射解. 类似地, 考虑到量子效应, de Sitter宇宙视界内表面同样会产生霍金隧穿辐射. 我们可以用与事件视界处隧穿辐射相似的研究方法来对宇宙视界内表面的霍金隧穿辐射进行研究, 从而得到类似的结果.

4 结论

本文把Kruglov^[37]提出的修正的Dirac方程推广到修正的描述一般费米子的Rarita-Schwinger方程的情况, 并在半经典理论中得到了修正的Hamilton-Jacobi方程. 我们的结论表明, 所有自旋为半整数费米子, 在半经典近似中, 都满足同样的Hamilton-Jacobi方程及其修正形式. 我们用这一修正的Hamilton-Jacobi方程研究了Kerr-Newman-de Sitter黑洞的隧穿辐射, 并得到了这一黑洞背景下的霍金温度和费米子隧穿率. 有趣的是, 当研究的时空背景是旋转黑洞时空时, 我们发现黑洞事件视界表面的霍金温度不再只依赖于事件视界 r_0 的值, 同时也依赖于角度参量 θ , 这一效应导致修正后的霍金辐射不再只是黑洞径向的性质, 而且也与黑洞的角向性质相关.

黑洞热力学中另一个重要的物理量是黑洞的熵, 修正的霍金温度同样会带来黑洞熵的修正. 根据黑洞热力学, 我们知道

$$dM = TdS + VdJ + UdQ, \quad (37)$$

其中, V 和 U 分别是黑洞的旋转势和电磁势, 因此, 在事件视界 r_0 处的未修正的黑洞熵满足

$$dS_0 = \frac{dM - VdJ + UdQ}{T_0}. \quad (38)$$

根据式(36), 在忽略掉 $O(\sigma^2)$ 项后, 我们得到修正后事件视界 r_0 处的黑洞熵为

$$\begin{aligned} S_H &= \int dS_H = \int \frac{dM - VdJ + UdQ}{T_H} \\ &= \int (1 - \sigma m \Theta^2) dS_0 \\ &= S_0 - \int m \sigma \Theta^2 dS_0. \end{aligned} \quad (39)$$

这意味着在事件视界 r_0 处, 修正后的黑洞熵与黑洞视界表面积之比不再是个常数, 当考虑到量子尺度上的极微小的修正之后, 黑洞熵可能与黑洞坐标的角

向参数有关系.

在本文的研究中, 我们假设修正后的色散关系中的参数满足 $\alpha=2$ 的条件. 在更一般的情况下, 这个条件应该被去掉, 那么关于更一般的修正Rarita-Schwinger方程及其所描述的费米子的性质的研究将是个很有趣的课题. 另一方面, 我们只研究了费米子粒子的修正方程, 而玻色子的动力学方程及其修正同样是个很有意义的课题, 我们将在未来的工作中进行深入研究. 到目前为止, 这些修正的理论都还只是基于有效理论, 尚缺乏实验和自洽的完整理论的支持. 我们未来的工作将集中在寻找完整理论并试图最终确定修正项的所有系数和关系.

参考文献

- Hawking S W. Black hole explosions? *Nature*, 1974, 248: 30–31
- Hawking S W. Particle creation by black holes. *Commun Math Phys*, 1975, 43: 199–220
- Robinson S P, Wilczek F. Relationship between Hawking radiation and gravitational anomalies. *Phys Rev Lett*, 2005, 95: 011303
- Damour T, Ruffini R. Black-hole evaporation in the Klein-Sauter-Heisenberg-Euler formalism. *Phys Rev D*, 1976, 14: 332–334
- Sannan S. Heuristic derivation of the probability distributions of particles emitted by a black hole. *Gen Relat Gravit*, 1988, 20: 239–246
- Kraus P, Wilczek F. Self-interaction correction to black hole radiance. *Nucl Phys B*, 1995, 433: 403–420
- Parikh M K, Wilczek F. Hawking radiation as tunneling. *Phys Rev Lett*, 2000, 85: 5042–5045
- Hemming S, Keski-Vakkuri E. Hawking radiation from AdS black holes. *Phys Rev D*, 2001, 64: 044006
- Jiang Q Q, Wu S Q, Cai X. Hawking radiation from dilatonic black holes via anomalies. *Phys Rev D*, 2007, 75: 064029
- Iso S, Umetsu H, Wilczek F. Anomalies, Hawking radiations, and regularity in rotating black holes. *Phys Rev D*, 2006, 74: 044017
- Medved A J M. Radiation via tunneling from a de Sitter cosmological horizon. *Phys Rev D*, 2002, 66: 124009
- Parikh M K. Energy conservation and Hawking radiation. In: *The Tenth Marcel Grossmann Meeting*. Singapore: World Scientific, 2006. 1585–1590
- Zhang J, Zhao Z. Charged particles' tunnelling from the Kerr-Newman black hole. *Phys Lett B*, 2006, 638: 110–113
- Akhmedov E T, Akhmedova V, Singleton D. Hawking temperature in the tunneling picture. *Phys Lett B*, 2006, 642: 124–128
- Srinivasan K, Padmanabhan T. Particle production and complex path analysis. *Phys Rev D*, 1999, 60: 024007
- Shankaranarayanan S, Padmanabhan T, Srinivasan K. Hawking radiation in different coordinate settings: Complex paths approach. *Class Quantum Grav*, 2002, 19: 2671–2687
- Kerner R, Mann R B. Fermions tunnelling from black holes. *Class Quantum Grav*, 2008, 25: 095014, arXiv: 0710.0612
- Kerner R, Mann R B. Charged fermions tunnelling from Kerr-Newman black holes. *Phys Lett B*, 2008, 665: 277–283, arXiv: 0803.2246
- Li R, Ren J R, Wei S W. Hawking radiation of Dirac particles via tunneling from the Kerr black hole. *Class Quantum Grav*, 2008, 25: 125016, arXiv: 0803.1410
- Chen D Y, Jiang Q Q, Zu X T. Fermions tunnelling from the charged dilatonic black holes. *Class Quantum Grav*, 2008, 25: 205022, arXiv: 0803.3248
- Di Criscienzo R, Vanzo L. Fermion tunneling from dynamical horizons. *Europhys Lett*, 2008, 82: 60001, arXiv: 0803.0435
- Li H L, Yang S Z, Zhou T J, et al. Fermion tunneling from a Vaidya black hole. *Europhys Lett*, 2008, 84: 20003
- Jiang Q Q. Fermions tunnelling from GHS and non-extremal D1–D5 black holes. *Phys Lett B*, 2008, 666: 517–521
- Lin K, Yang S Z. Quantum tunneling from apparent horizon of rainbow-FRW universe. *Int J Theor Phys*, 2009, 48: 2061–2067
- Lin K, Yang S Z. Fermion tunneling from higher-dimensional black holes. *Phys Rev D*, 2009, 79: 064035

- 26 Lin K, Yang S Z. Fermions tunneling of higher-dimensional Kerr-Anti-de Sitter black hole with one rotational parameter. *Phys Lett B*, 2009, 674: 127–130
- 27 Lin K, Yang S Z. A simpler method for researching fermions tunneling from black holes. *Chin Phys B*, 2011, 20: 110403
- 28 Amelino-Camelia G, Ahluwalia D V. Relativity in spacetimes with short-distance structure governed by an observer-independent (Planckian) length scale. *Int J Mod Phys D*, 2002, 11: 35–59
- 29 Amelino-Camelia G. Phenomenology of Planck-scale Lorentz-symmetry test theories. *New J Phys*, 2004, 6: 188
- 30 Magueijo J, Smolin L. Lorentz invariance with an invariant energy scale. *Phys Rev Lett*, 2002, 88: 190403
- 31 Magueijo J, Smolin L. Generalized Lorentz invariance with an invariant energy scale. *Phys Rev D*, 2003, 67: 044017
- 32 Ellis J, Mavromatos N E, Nanopoulos D V. String theory modifies quantum mechanics. *Phys Lett B*, 1992, 293: 37–48
- 33 Ellis J, Mavromatos N E, Nanopoulos D V. A microscopic Liouville arrow of time. *Chaos Solitons Fractals*, 1999, 10: 345–363
- 34 Ellis J R, Mavromatos N E, Sakharov A S. Synchrotron radiation from the Crab Nebula discriminates between models of space-time foam. *Astropart Phys*, 2004, 20: 669–682
- 35 Kruglov S I. Modified wave equation for spinless particles and its solutions in an external magnetic field. *Mod Phys Lett A*, 2013, 28: 1350014, arXiv: [1207.6573](#)
- 36 Jacobson T, Liberati S, Mattingly D. Erratum: A strong astrophysical constraint on the violation of special relativity by quantum gravity. *Nature*, 2003, 424: 1019–1021
- 37 Kruglov S I. Modified Dirac equation with Lorentz invariance violation and its solutions for particles in an external magnetic field. *Phys Lett B*, 2012, 718: 228–231, arXiv: [1210.0509](#)
- 38 Yang S Z, Lin K, Li J, et al. Lorentz invariance violation and modified hawking fermions tunneling radiation. *Adv High Energy Phys*, 2016, 2016: 1–7
- 39 Rarita W, Schwinger J. On a theory of particles with half-integral spin. *Phys Rev*, 1941, 60: 61
- 40 Gibbons G W. A note on the Rarita-Schwinger equation in a gravitational background. *J Phys A-Math Gen*, 1976, 9: 145–148

Modified fermions tunneling radiation from Kerr-Newman-de Sitter black hole

YANG ShuZheng^{1*} & LIN Kai^{2,3}

¹ Department of Astronomy, China West Normal University, Nanchong 637002, China;

² Hubei Subsurface Multi-scale Imaging Key Laboratory, Institute of Geophysics and Geomatics, China University of Geosciences, Wuhan 430074, China;

³ Escola de Engenharia de Lorena, Universidade de Sao Paulo, Lorena, Sao Paulo 12602-810, Brazil

By using the deformed dispersion relation, we study the modified fermions tunneling for rotating charged black hole in de Sitter spacetime. Firstly, the Rarita-Schwinger equation is modified in the gravitational background, and then the deformed Hamilton-Jacobi equation is derived by a semi-classical approximation method. It is shown that the form of the correctional Hamilton-Jacobi equation does not depend on the spin of the fermions field in the semi-classical approximation, and its correctional term is given by $-2\sigma mg''(\omega - eA_t)^2$. Using the correction, we also investigate the fermion tunneling radiation for Kerr-Newman-de Sitter black hole spacetime, and the results show that the correctional temperature and entropy depend on the angular parameters of the horizon of the rotating black hole background.

modified fermions equation, Hawking radiation, fermions tunneling, correctional entropy

PACS: 04.62.+v, 04.70.Dy, 11.30.-j

doi: [10.1360/SSPMA2018-00307](#)