周期扰动下的尖分支

任景莉^{1*}, 李雪平²

1. 郑州大学数学与统计学院, 郑州 450001;

2. 郑州轻工业大学数学与信息科学学院, 郑州 450002

E-mail: renjl@zzu.edu.cn, lixueping@zzuli.edu.cn

收稿日期: 2018-07-25; 接受日期: 2019-01-16; 网络出版日期: 2019-05-07; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11771407) 和郑州轻工业大学博士基金 (批准号: 13501050022) 资助项目

摘要 本文研究周期扰动对一个发生余维 2 尖分支的系统的影 响, 应用 Lyapunov-Schmidt 方法, 将周期扰动系统的周期解问题化为一个分支函数的零点问题. 研究发现, 在扰动幅度很小时, 系统产生周期解的折分支和尖分支, 与无扰动系统的平衡点分支相对应; 并且新的分支偏离于原分支的程度与扰动幅度和扰动函数紧密相关. 同时, 为了进一步说明这些理论结果, 本文还利用数值分支方法给出几个范例系统的分支分析.

关键词 周期扰动 尖分支 分支图

MSC (2010) 主题分类 37G15, 34C23

1 引言

在过去的几十年间, 学者们对动力系统分支问题进行了广泛的研究, 已经有了相对完善的理论体系 (参见文献 [1–3]). 大多数这方面的研究都假设系统处在一个不随时间变化的环境中, 即研究对象是自治系统. 而现实中环境是会随时间发生变化的. 例如, 在生物系统中, 几乎所有种群的生存环境都会随着季节发生周期性的变化, 而它们的行为也会受到这种周期性变化的环境的强烈影响. 例如, 随季节变化的环境温度会影响微生物的繁殖率、动物的出生率、候鸟的迁徙和疾病的爆发; 周期性变化的光照强度通过对植物光合作用的调节影响食草动物的生存; 等等. 自然地, 这种周期性变化对系统的影响就有了重要的研究意义. 反映到动力系统中, 我们关注参数随时间发生周期变化的非自治系统, 即周期扰动系统.

关于周期扰动系统, 已经有一些优秀的工作. 1980 年, Rosenblat 和 Cohen^[4] 研究了发生跨临界分支和音叉分支的系统的周期扰动, 发现在周期扰动的影响下常数解变成了周期解, 并且系统在分支点的某邻域中可能无解. 随后几年, 学者们集中考虑了周期扰动 Hopf 分支的情形 (参见文献 [5–11]), 研究了发生 Hopf 分支的系统中由周期扰动引起的各种现象. 除了这些理论结果, 随着计算机技术和新

英文引用格式: Ren J L, Li X P. Periodic perturbation of a cusp bifurcation (in Chinese). Sci Sin Math, 2020, 50: 269–286, doi: 10.1360/SCM-2018-0520

方法的发展, 学者们应用数值分支分析研究了一些周期扰动系统的分支问题. 20 世纪 90 年代以来, 文献 [12–15] 研究了发生 Hopf 分支的捕食系统中周期扰动的影响, 发现了当无扰动系统的极限环的周期是扰动周期的一或二倍, 即出现共振情形时, 它附近的数值结果与文献 [5–9] 中的周期扰动 Hopf 分支理论完美吻合; 远离这些共振, 系统会出现倍周期分支等新的现象. 在此基础上, 文献 [16–18] 研究了一个更为复杂的捕食系统和一个材料形变模型的周期扰动, 讨论了不同的周期扰动机制, 包括单个参数周期变化, 不同参数分别变化, 甚至两个参数同时且不同步周期变化.

以上结果研究的是无扰动系统余维 1 分支附近周期扰动的影响, 如果系统本身发生更高余维的分支, 周期扰动又会产生怎样的影响呢? 为了回答这个问题, 我们将在本文中研究一个发生余维 2 尖分支的系统的周期扰动, 探讨周期扰动尖分支系统解的存在性和分支问题.

不失一般性, 本文考虑一维系统

$$\dot{x} = a + bx - x^3 + \varepsilon(g(t) + xh(t)) = f(x) + \varepsilon(g(t) + xh(t)). \quad (1.1)$$

g 和 h 是关于 t 的周期函数, 周期为 $T > 0$, ε 的绝对值表示周期扰动的幅度. 当 $\varepsilon = 0$ 时, (1.1) 化为尖分支的拓扑规范形之一 (参见文献 [2]), 它的分支图如图 1 所示. 它有 1 到 3 个平衡点, 在 (a, b) 平面的曲线 F 上发生平衡点的折分支, F 是曲线

$$\Gamma: \begin{cases} a + bx - x^3 = 0, \\ b - 3x^2 = 0 \end{cases}$$

在参数平面的投影, 消去 x 可得 $F = \{(a, b) : 27a^2 - 4b^3 = 0\}$. F 的两个分支 F_1 和 F_2 在尖点 $(0, 0)$ 处相切, F 将参数平面分成两个区域, 在区域 ① 中, (1.1) ($\varepsilon = 0$) 有 3 个平衡点、两个稳定和一个不稳定; 在区域 ② 中, (1.1) ($\varepsilon = 0$) 有唯一一个稳定平衡点. 穿过 F_1 或 F_2 (除原点之外), 发生平衡点的折分支. 从区域 ① 到 ② 穿过 F_1 , 右边的稳定平衡点与不稳定平衡点相遇而后两者都消失; 从区域 ① 到 ② 穿过 F_2 , 左边的稳定平衡点与不稳定平衡点相遇后消失. 若从区域 ① 内部趋于尖点, 则三个平衡点合并成 (1.1) ($\varepsilon = 0$) 右端的三重根.

本文探讨周期扰动项对系统 (1.1) 的影响. 第 2 节利用 Lyapunov-Schmidt 方法和渐近展开法, 给出扰动幅度较小时, 周期扰动系统的解和分支情形; 第 3 节分析几个例子, 给出周期解的分支图, 并且将结果与无扰动系统进行对比.

图 1 尖点附近的分支图

2 扰动系统的解

令 $\mathcal{X} = \{x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x(t+T) = x(t)\}; \forall x \in \mathcal{X}, \|x\| = \sup_t |x(t)|$. 符号 $\mathcal{X}_P$ 表示连续投影算子 $P: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ 的值域 $\mathcal{R}(P)$. $\mathcal{N}(A)$ 表示 $\mathcal{X}$ 上的线性算子 A 的零空间. 算子 $A, N: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ 定义为

$$Ax = \dot{x}, \quad Nx = a + bx - x^3 + \varepsilon(g(t) + xh(t)).$$

U 和 E 是 $\mathcal{X}$ 上的投影

$$(Ux)(t) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt, \quad (Ex)(t) = x(t) - \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt.$$

因此,

$$\mathcal{N}(A) = \mathcal{X}_U, \quad \mathcal{R}(A) = \mathcal{X}_E.$$

将 x 分解为

$$x = q + y, \quad q \in \mathcal{X}_U, \quad y \in \mathcal{X}_{I-U}.$$

则 (1.1) 在 $\mathcal{X}$ 上有解等价于

$$A(q+y) - EN(q+y) = 0, \quad (2.1a)$$

$$(I-E)N(q+y) = 0, \quad (2.1b)$$

即

$$\dot{y} = a + bx - x^3 + \varepsilon(g(t) + xh(t)) - G(x, \varepsilon), \quad (2.2a)$$

$$G(x, \varepsilon) = 0, \quad (2.2b)$$

其中

$$G(x, \varepsilon) = \frac{1}{T} \int_0^T [a + bx - x^3 + \varepsilon(g(t) + xh(t))] dt.$$

记 $f(x) = 0$ 的任一个实根为 α . 由隐函数定理可知, 在 $(x, \varepsilon) = (\alpha, 0)$ 的邻域内, 由 (2.2a) 确定唯一的 $y = y(q, \varepsilon)$. 将 $y = y(q, \varepsilon)$ 代入 (2.2b) 得

$$F(q, \varepsilon) = G(q + y(q, \varepsilon), \varepsilon) = 0.$$

因此, 由 Lyapunov-Schmidt 方法^[1], 我们将系统 (1.1) 的周期解问题转化为求解 $F(q, \varepsilon)$ 的零点问题. 下面给出详细的求解过程.

在 $(x, \varepsilon) = (\alpha, 0)$ 的邻域内, 令

$$x(t, a, b, \varepsilon) = \alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n x_n(t, a, b), \quad (2.3)$$

则

$$q = \alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n C_n, \quad C_n = \frac{1}{T} \int_0^T x_n(t, a, b) dt. \quad (2.4)$$

将 (2.3) 和 (2.4) 代入 (2.2b), 比较 ε 同次幂的系数可得

$$(b - 3\alpha^2)C_1 + \langle g(t) + \alpha h(t) \rangle = 0, \quad (2.5)$$

$$(b - 3\alpha^2)C_2 + \langle -3\alpha x_1^2 + x_1 h \rangle = 0, \quad (2.6)$$

$$(b - 3\alpha^2)C_3 + \langle -6\alpha x_1 x_2 - x_1^3 + x_2 h \rangle = 0, \quad (2.7)$$

$\dots,$

其中 $\langle \cdot \rangle$ 表示函数在一个周期上的平均值.

远离 $27a^2 - 4b^3 = 0$ ($b - 3\alpha^2 = 0$), 对每一个 $i = 1, 2, 3, \dots$, 都有唯一的 C_i . 也就是说, 方程 (1.1) 的周期解的个数与 $f(x) = 0$ 的零点 α 的个数相同. 在 $27a^2 - 4b^3 = 0$ 附近, 我们分为扰动函数有零平均和非零平均两种情形讨论系统的解和分支问题.

2.1 扰动函数有零平均

本小节考虑周期扰动函数 $g(t)$ 和 $h(t)$ 在一个周期 T 上的平均值为 0 的情形, 即假设

$$\langle g(t) \rangle = \langle h(t) \rangle = 0. \quad (2.8)$$

情形 1 $27a^2 - 4b^3 = 0, b \neq 0$.

记 $\beta = -\frac{3a}{2b}$. 当 $27a^2 - 4b^3 = 0, b \neq 0$ 时, 在 $27a^2 - 4b^3 = 0$ 附近, 令

$$b - 3\beta^2 = b - \frac{27a^2}{4b^2} = v\varepsilon^2, \quad (2.9)$$

其中 v 是与 ε 无关的参数. 当 $v > 0$ 时, $f(x) = 0$ 有三个实根

$$\alpha^{(1)} = \beta + \frac{\sqrt{v}}{3}\varepsilon + \frac{4v}{27\beta}\varepsilon^2 + \frac{4v\sqrt{v}}{243\beta^2}\varepsilon^3 + O(\varepsilon^4),$$

$$\alpha^{(2)} = \beta - \frac{\sqrt{v}}{3}\varepsilon + \frac{4v}{27\beta}\varepsilon^2 - \frac{4v\sqrt{v}}{243\beta^2}\varepsilon^3 + O(\varepsilon^4),$$

$$\alpha^{(3)} = -2\beta - \frac{8v}{27\beta}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^4);$$

当 $v < 0$, 它有唯一实根

$$\alpha^{(3)} = -2\beta - \frac{8v}{27\beta}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^4).$$

当 $\alpha = \alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}$ 时, (2.3) 可重写为

$$x(t, a, b, \varepsilon) = \beta + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n x_n(t, a, b), \quad (2.10)$$

其中, 新的 x_n 的均值仍记为 C_n . 将 (2.10) 代入 (2.2), 比较 ε 同次幂的系数可得

$$\dot{x}_1 = g(t) + \beta h(t), \quad (2.11)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{3}\beta v - 3\beta x_1^2 + h x_1 - \left\langle \frac{1}{3}\beta v - 3\beta x_1^2 + h x_1 \right\rangle, \quad (2.12)$$

$$\dot{x}_3 = v x_1 - 6\beta x_1 x_2 + h x_2 - x_1^3 - \langle v x_1 - 6\beta x_1 x_2 + h x_2 - x_1^3 \rangle, \quad (2.13)$$

$$\left\langle \frac{1}{3}\beta v - 3\beta x_1^2 + hx_1 \right\rangle = 0, \quad (2.14)$$

$$\langle vx_1 - 6\beta x_1 x_2 + hx_2 - x_1^3 \rangle = 0, \quad (2.15)$$

...

(2.11) 有 T - 周期解

$$x_1(t, a, b) = C_1 + \xi_1(t) + \beta\eta_1(t) = C_1 + \lambda_1(t, \beta), \quad (2.16)$$

$\xi_1(t)$ 、 $\eta_1(t)$ 和 $\lambda_1(t, \beta)$ 是有零平均值的 T - 周期函数, $\dot{\xi}_1(t) = g(t)$, $\dot{\eta}_1(t) = h(t)$. 将 (2.16) 代入 (2.12) 和 (2.14) 得

$$\dot{x}_2 = -6\beta C_1 \lambda_1 + hC_1 + h\lambda_1 - 3\beta \lambda_1^2 + \langle 3\beta \lambda_1^2 - h\lambda_1 \rangle, \quad (2.17)$$

$$3\beta C_1^2 - \frac{1}{3}\beta v + p_1 = 0, \quad p_1 = \langle 3\beta \lambda_1^2 - h\lambda_1 \rangle. \quad (2.18)$$

(1) 若 $v > \frac{3p_1}{\beta}$, 则 (2.18) 有两个不等实根

$$C_1^{(1)}, C_1^{(2)} = \pm \frac{\sqrt{\beta^2 v - 3\beta p_1}}{3\beta}. \quad (2.19)$$

(2.11) 的解为

$$x_1^{(1)} = C_1^{(1)} + \lambda_1, \quad x_1^{(2)} = C_1^{(2)} + \lambda_1. \quad (2.20)$$

相应地, 如果 (2.18) 成立, (2.17) 有两个解

$$x_2^{(1)} = C_2^{(1)} + \xi_2^{(1)}, \quad x_2^{(2)} = C_2^{(2)} + \xi_2^{(2)}, \quad (2.21)$$

其中 $\xi_2^{(1)}$ 和 $\xi_2^{(2)}$ 是平均值为 0 的 T - 周期函数.

将 (2.16) 和 (2.21) 代入 (2.15) 得

$$6\beta C_1 C_2 - C_1(v - C_1^2) + 3C_1 \langle \lambda_1^2(t, \beta) \rangle - p_2 = 0. \quad (2.22)$$

为方便起见, 我们省略了 C_1 和 C_2 的上标, 且

$$p_2 = \langle -6\beta \lambda_1 \xi_2 + h\xi_2 - \lambda_1^3 \rangle. \quad (2.23)$$

由 (2.19) 和 (2.22), 可得

$$C_2^{(1)} = \frac{4v}{27\beta} + \frac{p_1}{18\beta^2} - \frac{\langle \lambda_1^2 \rangle}{2\beta} + \frac{p_2^{(1)}}{2\sqrt{\beta^2 v - 3\beta p_1}}, \quad (2.24a)$$

$$C_2^{(2)} = \frac{4v}{27\beta} + \frac{p_1}{18\beta^2} - \frac{\langle \lambda_1^2 \rangle}{2\beta} - \frac{p_2^{(2)}}{2\sqrt{\beta^2 v - 3\beta p_1}}. \quad (2.24b)$$

C_i ($i \geq 3$) 可以由以上类似的过程得到. 所以, 当 $v > \frac{3p_1}{\beta}$ 时,

$$q^{(i)}(t, a, b, \varepsilon) = \beta + \varepsilon C_1^{(i)} + \varepsilon^2 C_2^{(i)} + O(\varepsilon^3), \quad i = 1, 2. \quad (2.25)$$

(2) $v \leq \frac{3p_1}{\beta}$. 当 $v < \frac{3p_1}{\beta}$ 时, 方程 (2.18) 没有实根. 结合 (2.9) 可知, 当 $b - \frac{27a^2}{4b^2} < -\frac{2bp_1}{a}\varepsilon^2$ 时, 与 $\alpha = \alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}$ 对应的扰动解不存在; 然而, 不等式 $b - \frac{27a^2}{4b^2} < -\frac{2bp_1}{a}\varepsilon^2$ 只是描述这个解不存在性的一阶近似, 下面给出这个条件的更高阶近似.

当 $v \rightarrow \frac{3p_1}{\beta}$ 时, 导数 dC_1/dv 和常数 C_2 变成无界的, 这与解曲线的转点对应, 如图 2 所示. 解 (2.25) 在 $v = \frac{3p_1}{\beta}$ 的小邻域内无效. 我们用以下方法, 构造临近 $v = \frac{3p_1}{\beta}$ 处的有效解:

$$\begin{aligned} q^{(1)} &= \beta + \varepsilon C_1^{(1)} + \varepsilon^2 C_2^{(1)} + O(\varepsilon^3) \\ &= \beta + \varepsilon \frac{\sqrt{\beta^2 v - 3\beta p_1}}{3\beta} + \varepsilon^2 \left(\frac{4v}{27\beta} + \frac{p_1}{18\beta^2} - \frac{\langle \xi_1^2 \rangle}{2\beta} + \frac{p_2^{(1)}}{2\sqrt{\beta^2 v - 3\beta p_1}} \right) + O(\varepsilon^3) \\ &= \beta + \frac{\varepsilon}{3\beta} \sqrt{\beta^2 v - 3\beta p_1 + 3\beta p_2^{(1)}\varepsilon} + \varepsilon^2 \left(\frac{4v}{27\beta} + \frac{p_1}{18\beta^2} - \frac{\langle \xi_1^2 \rangle}{2\beta} \right) + O(\varepsilon^3). \end{aligned} \quad (2.26)$$

同样地,

$$q^{(2)} = \beta - \frac{\varepsilon}{3\beta} \sqrt{\beta^2 v - 3\beta p_1 + 3\beta p_2^{(1)}\varepsilon} + \varepsilon^2 \left(\frac{4v}{27\beta} + \frac{p_1}{18\beta^2} - \frac{\langle \xi_1^2 \rangle}{2\beta} \right) + O(\varepsilon^3). \quad (2.27)$$

这些展开都是有界的, 且当 $v = \frac{3p_1}{\beta}$ 时, $p_2^{(1)} = p_2^{(2)} = p_2$. 解曲线转点的更高阶的近似可以由以下式子给出:

$$v_c = \frac{3p_1}{\beta} - \frac{3p_2}{\beta}\varepsilon + O(\varepsilon^2), \quad (2.28)$$

或

$$27a^2 - 4b^3 = \frac{8b^3 p_1}{a}\varepsilon^2 - \frac{8b^3 p_2}{a}\varepsilon^3 + O(\varepsilon^4). \quad (2.29)$$

当 $\alpha = \alpha^{(3)}$ 时, (2.3) 可写为

$$x(t, a, b, \varepsilon) = -2\beta + \sum_{n=1}^{\infty} x_n(t, a, b). \quad (2.30)$$

将 (2.30) 代入 (2.2), 比较 ε 同次幂的系数, 可得

图 2 系统 (3.1) 在 $b = 1, \varepsilon = 0.8$ 时的分支图. F_1 和 F_2 是两个转点 (折分支)

$$\dot{x}_1 = -9\beta^2 x_1 + g(t) - 2\beta h(t) - \langle -9\beta^2 x_1 + g(t) - 2\beta h(t) \rangle, \quad (2.31)$$

$$\langle -9\beta^2 x_1 + g(t) - 2\beta h(t) \rangle = 0, \quad (2.32)$$

$$\dot{x}_2 = -9\beta^2 x_2 - \frac{8\beta v}{3} + 6\beta x_1^2 + x_1 h - \left\langle -9\beta^2 x_2 - \frac{8\beta v}{3} + 6\beta x_1^2 + x_1 h \right\rangle, \quad (2.33)$$

$$\left\langle -9\beta^2 x_2 - \frac{8\beta v}{3} + 6\beta x_1^2 + x_1 h \right\rangle = 0, \quad (2.34)$$

由 (2.32) 可得, $C_1 = 0$. 也就是说, $x_1(t, a, b)$ 在一个周期 T 上的平均值为 $\langle x_1(t, a, b) \rangle = 0$. 将 $x_1(t, a, b)$ 代入 (2.34) 得

$$C_2 = \frac{-8v + 3p_3}{27\beta^2}, \quad p_3 = \langle 6\beta x_1^2 + x_1 h \rangle. \quad (2.35)$$

因此,

$$q^{(3)} = -2\beta + \frac{-8v + 3p_3}{27\beta^2} \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3). \quad (2.36)$$

情形 2 $a = b = 0$.

在这种情形下, 我们分不同情形讨论扰动方程的解.

(1) $h(t) \equiv 0$, $\langle g \rangle = 0$. 在 $a = b = 0$ 附近, 令

$$a = v_1 \varepsilon^3, \quad b = v_2 \varepsilon^2. \quad (2.37)$$

$f(x) = 0$ 的零点为 $\alpha^{(i)} = O(\varepsilon)$, $i = 1, 2, 3$. 因此, 我们可以将 (2.3) 重写为

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n x_n. \quad (2.38)$$

将 (2.38) 代入 (2.2), 可得展开式的前几个方程为

$$\dot{x}_1 = g(t), \quad (2.39)$$

$$\dot{x}_2 = 0, \quad (2.40)$$

$$\dot{x}_3 = v_1 + v_2 x_1 - x_1^3 - \langle v_1 + v_2 x_1 - x_1^3 \rangle, \quad (2.41)$$

$$\langle v_1 + v_2 x_1 - x_1^3 \rangle = 0, \quad (2.42)$$

$$\dot{x}_4 = v_2 x_2 - 3x_1^2 x_2 - \langle v_2 x_2 - 3x_1^2 x_2 \rangle, \quad (2.43)$$

$$\langle v_2 x_2 - 3x_1^2 x_2 \rangle = 0. \quad (2.44)$$

(2.39) 和 (2.40) 的解为

$$x_1(t) = C_1 + \xi_1(t), \quad x_2(t) = C_2, \quad (2.45)$$

其中 $\xi_1(t)$ 与 (2.16) 中的相同. 将 (2.45) 代入 (2.42) 得

$$C_1^3 - cC_1 + d = 0, \quad (2.46)$$

其中

$$c = v_2 - 3\langle \xi_1^2 \rangle, \quad d = \langle \xi_1^3 \rangle - v_1. \quad (2.47)$$

当 $\frac{d^2}{4} - \frac{c^3}{27} > 0$, 即

$$\frac{v_1^2}{4} - \frac{v_2^3}{27} + \frac{\langle \xi_1^3 \rangle^2 - 2\langle \xi_1^3 \rangle v_1}{4} - \frac{27\langle \xi_1^2 \rangle^2 v_2 - 9\langle \xi_1^2 \rangle v_2^2 - 27\langle \xi_1^2 \rangle^3}{27} > 0 \quad (2.48)$$

或

$$v_2 < 3\langle \xi_1^2 \rangle + 3\left(\frac{|v_1 - \langle \xi_1^3 \rangle|}{2}\right)^{2/3} \quad (2.49)$$

时, (2.46) 有唯一实根 $C_{1+}^{(1)}$; 反之, 当不等式反向时, 它有三个实根 $C_{1-}^{(i)}$, $i = 1, 2, 3$. 也就是说, 当

$$\frac{a^2}{4} - \frac{b^3}{27} + \frac{\langle \xi_1^3 \rangle^2 \varepsilon^6 - 2\langle \xi_1^3 \rangle a \varepsilon^3}{4} - \frac{27\langle \xi_1^2 \rangle^2 b \varepsilon^4 - 9\langle \xi_1^2 \rangle b^2 \varepsilon^2 - 27\langle \xi_1^2 \rangle^3 \varepsilon^6}{27} = 0, \quad (2.50)$$

$$a \neq \langle \xi_1^3 \rangle \varepsilon^3$$

或

$$b = 3\langle \xi_1^2 \rangle \varepsilon^2 + 3\left(\frac{|a - \langle \xi_1^3 \rangle \varepsilon^3|}{2}\right)^{2/3}, \quad (2.51)$$

$$a \neq \langle \xi_1^3 \rangle \varepsilon^3$$

时, 方程 (2.46) 的解 C_1 发生折分支. 当

$$a = \langle \xi_1^3 \rangle \varepsilon^3, \quad b = 3\langle \xi_1^2 \rangle \varepsilon^2 \quad (2.52)$$

时, 发生尖分支.

与情形 1 中相同, 不等式 (2.48)、(2.49) 和等式 (2.50)–(2.52) 都只是 (1.1) 的周期解的分支的第一次近似. 详细说来, 将 (2.45) 代入 (2.44) 得

$$(c - 3C_1^2)C_2 = 0. \quad (2.53)$$

若 (2.50) ((2.51)) 或 (2.52) 成立, 则 C_2 的表达式 (2.53) 失效. 为了给出有效的表达式, 我们需要对 c 和 d 在 $\frac{d^2}{4} - \frac{c^3}{27} = 0$ 附近进一步展开, 就像我们对 a 和 b 做的那样. 这里不再给出详细过程.

(2) $\langle g \rangle = \langle h \rangle = 0$ 且 $g(t) \neq 0$, $h(t) \neq 0$. 令

$$a = v_1 \varepsilon^2, \quad b = v_2 \varepsilon^{4/3}. \quad (2.54)$$

$f(x) = 0$ 的零点为 $\alpha^{(i)} = O(\varepsilon^{\frac{2}{3}})$, $i = 1, 2, 3$. (2.3) 可重写作

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{\frac{n+1}{3}} x_n. \quad (2.55)$$

将 (2.55) 代入 (2.2) 得

$$\dot{x}_1 = 0, \quad (2.56)$$

$$\dot{x}_2 = g(t), \quad (2.57)$$

$$\dot{x}_3 = 0, \quad (2.58)$$

$$\dot{x}_4 = hx_1 - \langle hx_1 \rangle, \quad (2.59)$$

$$\langle hx_1 \rangle = 0, \quad (2.60)$$

$$\dot{x}_5 = v_1 - x_1^3 + v_2x_1 + x_2h - \langle v_1 - x_1^3 + v_2x_1 + x_2h \rangle, \quad (2.61)$$

$$\langle v_1 - x_1^3 + v_2x_1 + x_2h \rangle = 0, \quad (2.62)$$

$$\dot{x}_6 = v_2x_2 - 3x_1^2x_2 + hx_3 - \langle v_2x_2 - 3x_1^2x_2 + hx_3 \rangle, \quad (2.63)$$

$$\langle v_2x_2 - 3x_1^2x_2 + hx_3 \rangle = 0. \quad (2.64)$$

因此,

$$x_1(t) = C_1, \quad x_2(t) = C_2 + \xi_1(t), \quad (2.65)$$

其中 $\xi_1(t)$ 与 (2.45) 中的相同. 将 (2.65) 代入 (2.62) 得

$$C_1^3 - v_2C_1 - v_1 - \langle h\xi_1 \rangle = 0. \quad (2.66)$$

经过与前一情形下类似的分析, 我们得到分支条件的第一次近似. 折分支发生在

$$b = 3 \left(\frac{|a + \langle h\xi_1 \rangle \varepsilon^2|}{2} \right)^{2/3}, \quad (2.67)$$

$$a \neq -\langle h\xi_1 \rangle \varepsilon^2;$$

尖分支发生在

$$a = -\langle h\xi_1 \rangle \varepsilon^2, \quad b = 0. \quad (2.68)$$

如图 3 所示. 图 3(a) 给出了 $\langle x \rangle$ 随 a 和 b 的变化; 图 3(b) 是 3(a) 在 a - b 平面的投影, 其中 $t_1^{(1)}$ 和 $t_2^{(1)}$ 是折分支曲线, 它们在 $(a, b) = (0, 0)$ 附近的尖点相切. 关于 $g(t)$ 和 $h(t)$, 可能还有一些其他的情形, 我们不再详细讨论, 因为它们跟前面考虑的情形没有本质区别.

图 3 系统 (3.1) 的分支图 $\varepsilon = 0.8$. (a) 给出了 $\langle x \rangle$ 随 a 和 b 的变化; (b) 是 (a) 在 a - b 平面的投影, $t_1^{(1)}$ 和 $t_2^{(1)}$ 是折分支曲线, 它们在尖点处相切

2.2 扰动函数有非零平均

本小节考虑条件 (2.8) 不成立的情形, 即 $g(t)$ 和 $h(t)$ 有非零平均值. 方便起见, 我们用 $\gamma_1 + g(t)$ 和 $\gamma_2 + h(t)$ 代替 $g(t)$ 和 $h(t)$, 假设新的 $g(t)$ 和 $h(t)$ 仍有零平均.

情形 1 $27a^2 - 4b^3 = 0, b \neq 0$.

在 $b - 3\beta^2 = 0$ 附近, 令

$$b - 3\beta^2 = b - \frac{27a^2}{4b^2} = v\varepsilon. \quad (2.69)$$

当 $v > 0$ 时, $f(x) = 0$ 的三个实根为

$$\begin{aligned} \alpha^{(1)} &= \beta + \frac{\sqrt{v}}{3}\varepsilon^{\frac{1}{2}} + \frac{4v}{27\beta}\varepsilon + \frac{4v\sqrt{v}}{243\beta^2}\varepsilon^{\frac{3}{2}} + O(\varepsilon^2), \\ \alpha^{(2)} &= \beta - \frac{\sqrt{v}}{3}\varepsilon^{\frac{1}{2}} + \frac{4v}{27\beta}\varepsilon - \frac{4v\sqrt{v}}{243\beta^2}\varepsilon^{\frac{3}{2}} + O(\varepsilon^2), \\ \alpha^{(3)} &= -2\beta - \frac{8v}{27\beta}\varepsilon + O(\varepsilon^2); \end{aligned}$$

当 $v < 0$ 时, 它有唯一实根 $\alpha^{(3)} = -2\beta - \frac{8v}{27\beta}\varepsilon + O(\varepsilon^2)$. 当 $\alpha = \alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}$ 时, 将 (2.3) 重写为

$$x(t, a, b, \varepsilon) = \beta + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{\frac{n}{2}} x_n(t, a, b). \quad (2.70)$$

代入 (2.2), 比较 ε 同次幂的系数得

$$\dot{x}_1 = 0, \quad (2.71)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{3}\beta v - 3\beta x_1^2 + \gamma_1 + g + \beta(\gamma_2 + h) - \left\langle \frac{1}{3}\beta v - 3\beta x_1^2 + \gamma_1 + g + \beta(\gamma_2 + h) \right\rangle, \quad (2.72)$$

$$\left\langle \frac{1}{3}\beta v - 3\beta x_1^2 + \gamma_1 + g + \beta(\gamma_2 + h) \right\rangle = 0, \quad (2.73)$$

$$\dot{x}_3 = vx_1 - 6\beta x_1 x_2 - x_1^3 + (\gamma_2 + h)x_1 - \langle vx_1 - 6\beta x_1 x_2 - x_1^3 + (\gamma_2 + h)x_1 \rangle, \quad (2.74)$$

$$\langle vx_1 - 6\beta x_1 x_2 - x_1^3 + (\gamma_2 + h)x_1 \rangle = 0, \quad (2.75)$$

...

(2.71) 的解为

$$x_1 = C_1. \quad (2.76)$$

所以, (2.72) 和 (2.73) 可化为

$$\dot{x}_2 = g + \beta h, \quad (2.77)$$

$$\frac{1}{3}\beta v - 3\beta C_1^2 + \gamma_1 + \beta\gamma_2 = 0. \quad (2.78)$$

(2.77) 的解为

$$x_2 = C_2 + \lambda_1, \quad (2.79)$$

其中 λ_1 与 (2.16) 中的相同. 将 (2.76) 和 (2.79) 代入 (2.75) 得

$$C_1(v - 6\beta C_2 - C_1^2 + \gamma_2) = 0. \quad (2.80)$$

若

$$\beta^2 v + 3\beta\gamma_1 + 3\beta^2\gamma_2 > 0, \quad (2.81)$$

则 (2.78) 有两个不等实根

$$C_1^{(1)} = \frac{\sqrt{\beta^2 v + 3\beta\gamma_1 + 3\beta^2\gamma_2}}{3\beta}, \quad C_1^{(2)} = -\frac{\sqrt{\beta^2 v + 3\beta\gamma_1 + 3\beta^2\gamma_2}}{3\beta}; \quad (2.82)$$

(2.80) 的解为

$$C_2 = \left(\frac{4v}{27\beta} + \frac{-\gamma_1 + 2\beta\gamma_2}{18\beta^2} \right) \frac{\sqrt{\beta^2 v + 3\beta\gamma_1 + 3\beta^2\gamma_2}}{\sqrt{\beta^2 v + 3\beta\gamma_1 + 3\beta^2\gamma_2}}. \quad (2.83)$$

因此,

$$q^{(1)} = \beta + \varepsilon^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\sqrt{\beta^2 v + 3\beta\gamma_1 + 3\beta^2\gamma_2}}{3\beta} \right) + \varepsilon \left(\frac{4v}{27\beta} + \frac{-\gamma_1 + 2\beta\gamma_2}{18\beta^2} \right) + O(\varepsilon^{\frac{3}{2}}), \quad (2.84)$$

$$q^{(2)} = \beta - \varepsilon^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\sqrt{\beta^2 v + 3\beta\gamma_1 + 3\beta^2\gamma_2}}{3\beta} \right) + \varepsilon \left(\frac{4v}{27\beta} + \frac{-\gamma_1 + 2\beta\gamma_2}{18\beta^2} \right) + O(\varepsilon^{\frac{3}{2}}). \quad (2.85)$$

若

$$\beta^2 v + 3\beta\gamma_1 + 3\beta^2\gamma_2 < 0, \quad (2.86)$$

则 (2.78) 无实根. 若 $\beta^2 v + 3\beta\gamma_1 + 3\beta^2\gamma_2 = 0$, 则 C_2 的表达式 (2.83) 将失效. 为了给出有效的表达式, $\beta^2 v + 3\beta\gamma_1 + 3\beta^2\gamma_2 \rightarrow 0$, 需要 v 的进一步展开. 此时, (1.1) 的周期解的折分支的第一次近似为

$$v = -3\gamma_2 - \frac{3\gamma_1}{\beta}, \quad (2.87)$$

或者

$$27a^2 - 4b^3 = \left(12b^2\gamma_2 - \frac{8b^3}{a}\gamma_1 \right) \varepsilon. \quad (2.88)$$

当 $\alpha = \alpha^{(3)}$ 时, 经过类似的计算可得

$$q^{(3)} = -2\beta + \left(-\frac{8v}{27\beta^2} + \frac{\gamma_1}{9\beta^2} - \frac{2\gamma_2}{9\beta} \right) \varepsilon + O(\varepsilon^{3/2}). \quad (2.89)$$

情形 2 $a = 0, b = 0$.

当 $a \rightarrow 0, b \rightarrow 0, \gamma_1 \neq 0$ 时, 令

$$a = v_1 \varepsilon, \quad b = v_2 \varepsilon^{\frac{2}{3}}. \quad (2.90)$$

$f(x) = 0$ 的任一个实根为 $\alpha = O(\varepsilon^{\frac{1}{3}})$. 因此, (2.3) 可重写为

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{\frac{n}{3}} x_n. \quad (2.91)$$

经计算, $x_1 = C_1$, $x_2 = C_2$, 并且 C_1 和 C_2 可由

$$C_1^3 - v_2 C_1 - (v_1 + \gamma_1) = 0, \quad (2.92)$$

$$C_2(v_2 - 3C_1^2) + \gamma_2 C_1 = 0 \quad (2.93)$$

得到. 若 $v_2 > 3(|v_1 + \gamma_1|/2)^{2/3}$, (2.92) 有三个实根; 反之, 若不等式反向, 它有一个实根. 折分支的第一次近似为 $v_2 = 3(|v_1 + \gamma_1|/2)^{2/3}$, $v_1 \neq -\gamma_1$, 尖分支为 $v_2 = 0$, $v_1 = -\gamma_1$.

2.3 解的稳定性

考虑扰动周期解的稳定性. 令 x 表示系统 (1.1) 的任一个解, 为了确定 x 的稳定性, 我们分析线性化稳定性方程

$$\dot{u} = (b - 3x^2 + \varepsilon h)u. \quad (2.94)$$

解的稳定性由

$$\sigma = b - 3\langle x^2 \rangle + \varepsilon \langle h \rangle \quad (2.95)$$

的符号确定. 解是稳定的 (不稳定的), 如果 $\sigma < 0$ ($\sigma > 0$).

对于平均值为 (2.26) 或 (2.27) 的解, 我们有

$$\langle x^2 \rangle = \beta^2 + 2\beta C_1 \varepsilon + O(\varepsilon^2). \quad (2.96)$$

因此,

$$\sigma = b - 3\beta^2 - 6\beta C_1 \varepsilon + O(\varepsilon^2) = -6\beta C_1 \varepsilon + O(\varepsilon^2). \quad (2.97)$$

由 (2.19) 得

$$\sigma = \mp 2\varepsilon \sqrt{\beta^2 v - 3\beta p_1} + O(\varepsilon^2). \quad (2.98)$$

ε 较小时, 若 $v > 3p_1/\beta$, 平均值为 (2.26) 的解是稳定的, 平均值为 (2.27) 的解是不稳定的. 类似地, 对于平均值为 (2.36) 的解,

$$\sigma = -9\beta^2 + \left(v - 3\langle x_1^2 \rangle + \frac{-32v + 12p_3}{9\beta} \right) \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3).$$

因此, ε 较小时, 平均值为 (2.36) 的解是稳定的.

在扰动函数有非零平均值时, 若 $\beta^2 v + 3\beta\gamma_1 + 3\beta^2\gamma_2 > 0$, 平均值为 (2.84)、(2.85)、(2.89) 的解分别是稳定的、不稳定的、稳定的, 因为

$$\begin{aligned} \sigma^{(1)} &= -2\sqrt{\beta^2 v + 3\beta\gamma_1 + 3\beta^2\gamma_2} \varepsilon^{\frac{1}{2}} + O(\varepsilon), \\ \sigma^{(2)} &= 2\sqrt{\beta^2 v + 3\beta\gamma_1 + 3\beta^2\gamma_2} \varepsilon^{\frac{1}{2}} + O(\varepsilon), \\ \sigma^{(3)} &= -9\beta^2 + \left(v + \gamma_2 - \frac{32v}{9\beta} + \frac{4\gamma_1}{3\beta} - \frac{8\gamma_2}{3} \right) \varepsilon + O(\varepsilon^{\frac{3}{2}}). \end{aligned}$$

综上, 方程 (1.1) 的周期解、稳定性和分支情形可以总结如下.

定理 2.1 当 $\langle g(t) \rangle = \langle h(t) \rangle = 0$ 时, 系统 (1.1) 有一到三个周期解.

(1) 在 $27a^2 - 4b^3 = 0$ ($b \neq 0$) 附近, 折分支发生在 $27a^2 - 4b^3 = \frac{8b^3 p_1}{a} \varepsilon^2 - \frac{8b^3 p_2}{a} \varepsilon^3 + O(\varepsilon^4)$. 若 $27a^2 - 4b^3 < \frac{8b^3 p_1}{a} \varepsilon^2 - \frac{8b^3 p_2}{a} \varepsilon^3 + O(\varepsilon^4)$, 系统 (1.1) 有三个周期解, 稳定的 $x^{(1)}$ 、不稳定的 $x^{(2)}$ 、稳定的 $x^{(3)}$, 它们的平均值分别为

$$\begin{aligned} q^{(1)} &= \beta + \frac{\varepsilon}{3\beta} \sqrt{\beta^2 v - 3\beta p_1 + 3\beta p_2^{(1)}} \varepsilon + \varepsilon^2 \left(\frac{4v}{27\beta} + \frac{p_1}{18\beta^2} - \frac{\langle \xi_1^2 \rangle}{2\beta} \right) + O(\varepsilon^3), \\ q^{(2)} &= \beta - \frac{\varepsilon}{3\beta} \sqrt{\beta^2 v - 3\beta p_1 + 3\beta p_2^{(1)}} \varepsilon + \varepsilon^2 \left(\frac{4v}{27\beta} + \frac{p_1}{18\beta^2} - \frac{\langle \xi_1^2 \rangle}{2\beta} \right) + O(\varepsilon^3), \\ q^{(3)} &= -2\beta + \frac{-8v + 3p_3}{27\beta^2} \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

若 $27a^2 - 4b^3 > \frac{8b^3 p_1}{a} \varepsilon^2 - \frac{8b^3 p_2}{a} \varepsilon^3 + O(\varepsilon^4)$, 系统 (1.1) 有唯一稳定周期解 $x^{(3)}$, 平均值为

$$q^{(3)} = -2\beta + \frac{-8v + 3p_3}{27\beta^2} \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3).$$

(2) 在 $(a, b) = (0, 0)$ 附近, 当 $h(t) \equiv 0$, $\langle g \rangle = 0$ 时, 折分支的一次近似为

$$b = 3\langle \xi_1^2 \rangle \varepsilon^2 + 3 \left(\frac{|a - \langle \xi_1^3 \rangle \varepsilon^3|}{2} \right)^{2/3}, \quad a \neq \langle \xi_1^3 \rangle \varepsilon^3,$$

尖点的一次近似为 $a = \langle \xi_1^3 \rangle \varepsilon^3$, $b = 3\langle \xi_1^2 \rangle \varepsilon^2$. 若 $b > 3\langle \xi_1^2 \rangle \varepsilon^2 + 3(|a - \langle \xi_1^3 \rangle \varepsilon^3|/2)^{2/3}$, 系统 (1.1) 有三个周期解; 若此不等式反向, 有唯一解. 当 $\langle g \rangle = \langle h \rangle = 0$ 且 $g(t) \neq 0$, $h(t) \neq 0$ 时, 折分支和尖点的一次近似分别为 $b = 3(|a + \langle h \xi_1 \rangle \varepsilon^2|/2)^{2/3}$ ($a \neq -\langle h \xi_1 \rangle \varepsilon^2$) 和 $a = -\langle h \xi_1 \rangle \varepsilon^2$, $b = 0$. 若 $b > 3(|a + \langle h \xi_1 \rangle \varepsilon^2|/2)^{2/3}$, 系统 (1.1) 有三个周期解; 若 $b < 3(|a + \langle h \xi_1 \rangle \varepsilon^2|/2)^{2/3}$, 系统 (1.1) 有唯一周期解.

定理 2.2 用 $\gamma_1 + g(t)$ 和 $\gamma_2 + h(t)$ 代替 $g(t)$ 和 $h(t)$, 新的 $g(t)$ 和 $h(t)$ 仍有零平均值.

(1) 在 $27a^2 - 4b^3 = 0$ ($b \neq 0$) 附近, 折分支的一次近似为

$$27a^2 - 4b^3 = \left(12b^2 \gamma_2 - \frac{8b^3}{a} \gamma_1 \right) \varepsilon.$$

若 $27a^2 - 4b^3 < (12b^2 \gamma_2 - \frac{8b^3}{a} \gamma_1) \varepsilon$, 系统 (1.1) 有三个周期解, 稳定的 $x^{(1)}$ 、不稳定的 $x^{(2)}$ 、稳定的 $x^{(3)}$, 平均值为

$$\begin{aligned} q^{(1)} &= \beta + \varepsilon^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\sqrt{\beta^2 v + 3\beta \gamma_1 + 3\beta^2 \gamma_2}}{3\beta} \right) + \varepsilon \left(\frac{4v}{27\beta} + \frac{-\gamma_1 + 2\beta \gamma_2}{18\beta^2} \right) + O(\varepsilon^{\frac{3}{2}}), \\ q^{(2)} &= \beta - \varepsilon^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\sqrt{\beta^2 v + 3\beta \gamma_1 + 3\beta^2 \gamma_2}}{3\beta} \right) + \varepsilon \left(\frac{4v}{27\beta} + \frac{-\gamma_1 + 2\beta \gamma_2}{18\beta^2} \right) + O(\varepsilon^{\frac{3}{2}}), \\ q^{(3)} &= -2\beta + \left(-\frac{8v}{27\beta^2} + \frac{\gamma_1}{9\beta^2} - \frac{2\gamma_2}{9\beta} \right) \varepsilon + O(\varepsilon^{3/2}). \end{aligned}$$

若 $27a^2 - 4b^3 > (12b^2 \gamma_2 - \frac{8b^3}{a} \gamma_1) \varepsilon$, 系统 (1.1) 有唯一周期解, 平均值为

$$q^{(3)} = -2\beta + \left(-\frac{8v}{27\beta^2} + \frac{\gamma_1}{9\beta^2} - \frac{2\gamma_2}{9\beta} \right) \varepsilon + O(\varepsilon^{3/2}).$$

(2) 在 $(a, b) = (0, 0)$ 附近, 当 $\gamma_1 \neq 0$ 时, 折分支的一次近似为 $b = 3(|a + \gamma_1 \varepsilon|/2)^{2/3}$, $a \neq -\gamma_1 \varepsilon$. 尖点的一次近似为 $a = -\gamma_1 \varepsilon$, $b = 0$. 若 $b > 3(|a + \gamma_1 \varepsilon|/2)^{2/3}$, 系统 (1.1) 有三个周期解; 若 $b < 3(|a + \gamma_1 \varepsilon|/2)^{2/3}$, 系统 (1.1) 有唯一解.

3 范例分析与结果讨论

本节给出几个例子来说明周期扰动尖分支系统的解和分支情形. 首先, 考虑系统

$$\dot{x} = a + bx - x^3 + \varepsilon(\sin 2\pi t + x \cos 2\pi t), \quad (3.1)$$

即 (1.1) 中 $g(t) = \sin 2\pi t$ 和 $h(t) = \cos 2\pi t$ 时的情形. 显然, $\langle g(t) \rangle = \langle h(t) \rangle = 0$. 为了研究系统 (3.1), 我们在这个非自治系统上加上一对方程, 将它转化成一个高维的自治系统

$$\dot{x} = a + bx - x^3 + \varepsilon(v + xw), \quad (3.2a)$$

$$\dot{v} = v + 2\pi w - v(v^2 + w^2), \quad (3.2b)$$

$$\dot{w} = -2\pi v + w - w(v^2 + w^2). \quad (3.2c)$$

这样原无扰动系统的平衡解 $x = x^*$ 就对应于系统 (3.2) 在 $\varepsilon = 0$ 时的周期解 $(x^*, \sin 2\pi t, \cos 2\pi t)$. 我们就可以研究, 这个周期解是否能够延拓到 $\varepsilon \neq 0$ 时; 原平衡解的分支能否延拓为 $\varepsilon \neq 0$ 时周期解的分支. 利用 Poincaré 映射 $\mathcal{P}: (x(0), v(0), w(0)) \mapsto (x(1), v(1), w(1))$ 将系统 (3.2) 离散化. 映射 $\mathcal{P}$ 的第 k 次迭代的不动点对应于系统 (3.2) 的周期为 k 的次调和解, 因此可以用映射 $\mathcal{P}$ 来分析系统 (3.2) 的周期解的分支情形. 由这一原理, 我们用 AUTO^[19] 即可得到系统 (3.2) 的分支图, 如图 4-6 所示.

图 4 (a) 是 (3.2) 在 $\varepsilon = 0.8$ 时的分支图; (b) 给出了 ε 取不同值时 (3.2) 的分支曲线; (c) 给出了 $b = 1$ 时, $\bar{x}$ 随参数 a 的变化. 蓝色曲线代表系统 (3.1) 在 $\varepsilon = 0$ 时的分支, 黑色和红色曲线分别是系统 (3.2) 在 $\varepsilon = 0.8$ 和 $\varepsilon = 2.15$ 时的分支, 实线 (虚线) 表示解是稳定的 (不稳定的)

图 5 系统 (3.2) 的分支曲线. (a) $b = 1$; (b) $a = 0.1$ 图 6 ε 取不同值时, 系统 (3.2) 的分支图: 实线 (虚线) 表示解是稳定的 (不稳定的). (a) $a = 0.1, b = 1$; (b) $a = 1, b = 1$; (c) $a = 0.1, b = 0.2$

首先, 给定 ε , 将 a 和 b 作为分支参数, 分支图如图 4(a). 注意到图 4(a) 中的分支图在图 3(b) 中出现过, 这里为了给出它的详细分析并且与其他分支图比较, 我们把它再一次列了出来. 在图 4 的区域 ① 中, 系统 (3.2) 有三个周期解, 两个稳定的、一个不稳定的; 区域 ② 中, 有唯一的一个稳定周期解. 穿过 $t_1^{(1)}$ 或 $t_2^{(1)}$ 上除原点外的点, 系统发生非退化的折分支. 从区域 ① 到 ② 穿过 $t_1^{(1)}$, 右边的稳定周期解和不稳定周期解碰撞成为一个后消失. 穿过 $t_2^{(1)}$, 左边的稳定周期解与不稳定的周期解碰撞消失. 如果从区域 ① 的内部靠近尖点, 所有的三个周期解融合为一个.

为了将扰动系统与无扰动系统作比较, 我们给出图 4(b) 和 4(c), 其中, 蓝线代表系统 (3.1) 在 $\varepsilon = 0$

时的分支曲线; 黑线和红线分别是系统 (3.2) 在 $\varepsilon = 0.8$ 和 $\varepsilon = 2.15$ 时的分支. 由图 4(b), 周期扰动后的系统仍然有折分支和尖分支, 即周期解的折分支和尖分支, 分支点相较于无扰动系统, 有一些偏离; 并且由图 4(b)、4(c) 和系统 (3.2) 关于 $\varepsilon = 0$ 的对称性可知, ε 的绝对值越大, 偏离的越多. 另外, 由图 4(c), 我们也可以看到扰动解的稳定性特征, 这与第 2.3 小节中的理论结果一致.

其次, 给定 b 或 a , 以 a 和 ε 或 b 和 ε 为分支参数, 分别给出分支图 5(a) 和 5(b), 可以看到图关于 $\varepsilon = 0$ 对称. 图 5(a) 中, 系统 (3.2) 在区域 ① 中, 有三个周期解, 两个稳定、一个不稳定; 区域 ② 中, 只有一个稳定解. 穿过 $t_1^{(1)}$ 或 $t_2^{(1)}$ 上除尖点外的点, 系统发生非退化的折分支. 从区域 ① 到 ② 穿过 $t_1^{(1)}$, 下面的稳定周期解和不稳定周期解碰撞成为一个后消失; 穿过 $t_2^{(1)}$, 上面的稳定周期解与不稳定解碰撞消失. 如果从区域 ① 的内部靠近尖点, 所有的三个周期解融合为一个. 图 5(b) 中, 系统 (3.2) 在区域 ① 中, 有三个周期解, 两个稳定、一个不稳定; 区域 ② 中, 只有一个稳定解. 穿过 $t_1^{(1)}$ 、 $t_2^{(1)}$ 、 $t_3^{(1)}$ 上除尖点外的点, 系统发生非退化的折分支. 从区域 ① 到 ② 穿过 $t_1^{(1)}$, 右边的稳定周期解和不稳定周期解碰撞成为一个后消失. 穿过 $t_2^{(1)}$, 左边的稳定周期解与不稳定解碰撞消失. 穿过 $t_3^{(1)}$, 上面的稳定周期解与不稳定的周期解碰撞消失. 如果从区域 ① 的内部靠近尖点, 所有的三个周期解融合为一个.

此外, 为了呈现扰动解在 ε 取不同值时的特征, 我们给出了图 6. 给定 $a = 0.1$, $b = 1$, 系统 (3.2) 随着 ε 的变化, 发生两个对称的折分支, 如图 6(a); 当 $a = 1$, $b = 1$ 或 $a = 0.1$, $b = 0.2$ 时, 随 ε 的变化, 系统发生 4 个折分支, 如图 6(b) 和 6(c), 其中, 实线代表稳定解, 虚线代表不稳定解.

类似地, 我们分析了另外两个系统

$$\dot{x} = a + bx - x^3 + \varepsilon(\sin 2\pi t + x \sin 2\pi t), \quad (3.3)$$

$$\dot{x} = a + bx - x^3 + \varepsilon(\sin 2\pi t + x \sin 4\pi t), \quad (3.4)$$

分支图如图 7 和 8 所示. 我们看到系统 (3.3) 的解和分支情形与 (3.1) 没有本质的区别. 由图 8, 由于

图 7 系统 (3.3) 的分支图. (a) $\varepsilon = 0.8$; (b) $b = 1$; (c) $a = 0.1$

$h(t)$ 的不同, 系统 (3.4) 在 (ε, a) 和 (ε, b) 平面的分支图关于 $\varepsilon = 0$ 不再对称; 当给定 $a = 0.1$, ε 和 b 变化时的分支图 8(c) 中没有尖点存在.

另外, 为了比较不同的扰动函数 $g(t)$ 和 $h(t)$ 对系统分支的影响, 我们将图 4(a)、7(a)、8(a) 中的分支图一起放在图 9 中. 可以看到, 像扰动幅度的影响一样, 不同的扰动函数导致了周期解的分支不同程度地偏离无扰动系统的平衡解的分支.

本文考虑了周期扰动对系统 (1.1) 的影响. 总的来说, 无扰动系统的平衡点转化为扰动系统的周期解. 在周期扰动的影响下, 系统产生了周期解的折分支和尖分支; 周期解的分支偏离于原平衡点分支的程度与扰动幅度和扰动函数有着紧密的联系.

图 8 系统 (3.4) 的分支图. (a) $\varepsilon = 0.8$; (b) $b = 1$; (c) $a = 0.1$

图 9 $\varepsilon = 0.8$ 时, 三个范例系统的对比: 黑色曲线代表系统 (3.1) 的分支, 紫色曲线是系统 (3.3) 的分支曲线, 橙色曲线是系统 (3.4) 的分支曲线

致谢 作者对匿名评审专家的帮助性建议表示感谢.

参考文献

- 1 Chow S N, Hale J K. *Methods of Bifurcation Theory*, 1st ed. New York: Springer-Verlag, 1982
- 2 Kuznetsov Y A. *Elements of Applied Bifurcation Theory*, 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 1998
- 3 Liu Z H, Yuan R. Zero-Hopf bifurcation for an infection-age structured epidemic model with a nonlinear incidence rate. *Sci China Math*, 2017, 60: 1371–1398
- 4 Rosenblat S, Cohen D S. Periodically perturbed bifurcation—I. Simple bifurcation. *Stud Appl Math*, 1980, 63: 1–23
- 5 Rosenblat S, Cohen D S. Periodically perturbed bifurcation. II. Hopf bifurcation. *Stud Appl Math*, 1981, 64: 143–175
- 6 Bajaj A K. Resonant parametric perturbations of the Hopf bifurcation. *J Math Anal Appl*, 1986, 115: 214–224
- 7 Gambaudo J M. Perturbation of a Hopf bifurcation by an external time-periodic forcing. *J Differential Equations*, 1985, 57: 172–199
- 8 Kath W L. Resonance in periodically perturbed Hopf bifurcation. *Stud Appl Math*, 1981, 65: 95–112
- 9 Namachchivaya N S, Ariaratnam S T. Periodically perturbed Hopf bifurcation. *SIAM J Appl Math*, 1987, 47: 15–39
- 10 Zhang Y Y, Golubitsky M. Periodically forced Hopf bifurcation. *SIAM J Appl Dyn Syst*, 2011, 10: 1272–1306
- 11 Wiser J, Golubitsky M. Bifurcations in forced response curves. *SIAM J Appl Dyn Syst*, 2015, 14: 2013–2029
- 12 Kuznetsov Y A, Muratori S, Rinaldi S. Bifurcations and chaos in a periodic predator-prey model. *Internat J Bifur Chaos*, 1992, 2: 117–128
- 13 Rinaldi S, Muratori S, Kuznetsov Y A. Multiple attractors, catastrophes and chaos in seasonally perturbed predator-prey communities. *Bull Math Biol*, 1993, 55: 15–35
- 14 Gragnani A, Rinaldi S. A universal bifurcation diagram for seasonally perturbed predator-prey models. *Bull Math Biol*, 1995, 57: 701–712
- 15 Taylor R A, Sherratt J A, White A. Seasonal forcing and multi-year cycles in interacting populations: Lessons from a predator-prey model. *J Math Biol*, 2013, 67: 1741–1764
- 16 Ren J L, Li X P. Bifurcations in a seasonally forced predator-prey model with generalized Holling type IV functional response. *Internat J Bifur Chaos*, 2016, 26: 1650203
- 17 Li X P, Ren J L, Campbell S A, et al. How seasonal forcing influences the complexity of a predator-prey system. *Discrete Contin Dyn Syst Ser B*, 2018, 23: 785–807
- 18 Tao Y W, Li X P, Ren J L. A repeated yielding model under periodic perturbation. *Nonlinear Dynam*, 2018, 94: 2511–2525
- 19 Doedel E J, Oldeman B E. AUTO-07P: Continuation and bifurcation software for ordinary differential equations. [Http://cmvl.cs.concordia.ca/auto](http://cmvl.cs.concordia.ca/auto), 2012

Periodic perturbation of a cusp bifurcation

Jingli Ren & Xueping Li

Abstract In this paper, the effect of periodic perturbation is considered on a system which undergoes a cusp bifurcation. By the Lyapunov-Schmidt method, the problem of determining periodic solutions of the periodically perturbed system is reduced to finding zeros of a scalar-valued bifurcation function. It is found that, the periodically perturbed system has fold and cusp bifurcations of periodic solutions, corresponding to bifurcations of the steady-state solutions in the unperturbed system, and the deviation degree of the new bifurcations from the original ones is closely related to the magnitude of perturbation and the perturbation functions. By using the numerical bifurcation analysis, several example systems are discussed to illustrate the theoretical results.

Keywords periodic perturbation, cusp bifurcation, bifurcation diagram

MSC(2010) 37G15, 34C23

doi: 10.1360/SCM-2018-0520