论文

高斯脉冲冷却机械振子

陈志心, 林青*

华侨大学厦门校区信息科学与工程学院, 福建省光传输与变换重点实验室, 厦门 361021

*联系人, E-mail: qlin@hqu.edu.cn

收稿日期: 2019-09-27; 接受日期: 2019-11-07; 网络出版日期: 2020-01-14

国家自然科学基金(编号: 11574093, 11404117)、福建省自然科学基金(编号: 2017J01004)和华侨大学中青年科技支持计划(编号: ZQN-PY113)资助项目

摘要 光力学系统常被用来实现机械振子的基态冷却, 进而实现宏观量子态制备. 如何获得更好的冷却效果是光力冷却的核心问题. 然而理论证明, 采用单束连续光来驱动机械振子存在冷却极限, 即无法通过提高驱动强度或振子频率来获得更低的冷却比率, 因而需要发展新的动力学理论. 我们探讨采用高斯脉冲来驱动机械振子, 这一光力学系统在绝大多数情况下不存在稳态, 无法使用常用的线性化展开来处理. 我们采用新的线性化方法获得有效哈密顿量, 由此可以获得光力学系统的动力学演化, 进而直接得到系统热声子数的变化. 通过详细分析脉冲波形、脉冲强度以及脉冲宽度对热声子数演化的影响, 证明选择合适的驱动强度、脉冲宽度, 机械振子可以被单个脉冲冷却到基态, 并通过多个脉冲来保持在基态. 甚至利用脉冲波形中驱动强度的增、减, 可以延缓压缩效应对光力系统造成的加热. 由此可以突破单束连续驱动的冷却极限, 甚至通过强、短高斯脉冲可以将冷却极限降低 $1/2$, 展现出脉冲驱动冷却光力学系统的优势.

关键词 光力学系统, 基态冷却, 高斯脉冲**PACS:** 42.50.Wk, 42.50.Lc, 07.10.Cm

1 引言

量子力学与经典物理之间存在显著的差异. 一般而言, 微观体系遵循量子力学规则, 而过渡到宏观世界, 又是由经典物理规则统治. 那么量子力学与经典物理之间是否存在一个边界^[1-3]? 这个问题的答案尚未可知. 人们寄希望于制备宏观量子态来检验这一边界存在与否. 近年来, 光力学系统(Optomechanical System)被广泛用来实现宏观量子态的制备^[4]. 在这一物理系统中, 通过驱动光

的辐射压力, 推动光腔的一面可移动腔镜, 使得腔模(即光子)和机械模(即声子)之间产生相互作用. 如果驱动光的频率(ω_l)低于腔的共振频率(ω_c), 并且失谐量($\Delta = \omega_c - \omega_l$)与机械振子的共振频率(ω_m)一致时, 那么通过驱动光的作用可以使得振子的热声子数(n_m)降低, 也就实现了机械振子的冷却. 当机械振子被冷却到平均热声子数低于1(这种冷却被称为基态冷却)时, 机械振子将进入量子区域, 处于量子态, 因而基态冷却是实现宏观量子态制备的先决条

引用格式: 陈志心, 林青. 高斯脉冲冷却机械振子. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2020, 50: 034213Chen Z X, Lin Q. Cooling the mechanical resonator by Gaussian pulses (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, 2020, 50: 034213, doi: [10.1360/SSPMA-2019-0339](https://doi.org/10.1360/SSPMA-2019-0339)

件. 目前, 光力学系统的基态冷却已经在诸多的理论^[15-18]和实验^[19-32]上得到了验证.

大多数光力学冷却系统都是采用连续光来驱动, 这样让光持续地与机械振子产生相互作用, 以保持系统处于冷却状态. 通常而言, 如果要提高冷却比率 $(n_{m,f}/n_{th}) \times (\kappa/\gamma_m)$ (最终声子数 $n_{m,f}$ 与环境声子数 n_{th} 比例, 和腔耗散率 κ 与振子耗散率 γ_m 比例的乘积), 那么需要增强驱动光的驱动强度. 然而理论显示, 单纯地增强驱动光的强度未必能够提高冷却比率. 对于给定的振子共振频率, 驱动光达到一定强度后, 再增大驱动强度, 反而会降低冷却比率. 其原因是冷却需要的是光子(腔模)与声子(振子模式)之间的交换效应(Beamsplitter Effect), 即哈密顿量中含有 $\hat{a}\hat{b}^\dagger$ 和 $\hat{a}^\dagger\hat{b}$ 的作用项带来的结果, 它促进了光子和声子的交换, 从而降低了振子的声子数, 达到冷却的效果. 但是光力系统中, 还存在光子与声子之间的压缩效应(Squeezing Effect), 即哈密顿量中含有 $\hat{a}^\dagger\hat{b}^\dagger$ 和 $\hat{a}\hat{b}$ 的作用项带来的结果, 它会产生大量的光子和声子, 从而使得振子被显著加热. 需要指出的是, 这里的压缩效应和压缩光力学系统(采用压缩光驱动, 可以增强光力耦合强度^[33]、提高基态冷却效果^[34]或压缩腔内量子噪声^[35]等)不同. 压缩光力学系统中强调的是光场的压缩效应, 而上述的压缩效应是光子和声子之间的直接相互作用. 因而, 通常在研究光力学系统冷却时, 要很好地实现冷却, 需要增强交换效应, 抑制压缩效应. 一般而言, 在红失谐共振的条件下, 即 $\Delta = \omega_m$ 时, 压缩效应将被抑制, 而交换效应起主要作用, 因而光力系统被冷却. 但是驱动强度达到一定程度后, 压缩效应也逐渐产生影响, 压缩效应与交换效应相互竞争的结果, 使得系统不会被进一步冷却, 因而连续驱动存在冷却极限, $(n_{m,f}/n_{th}) \times (\kappa/\gamma_m) = 1 (\gamma_m \ll \kappa)$ ^[18].

那么是否可以突破这一冷却极限? 实际上通过两个腔以及两个驱动冷却同一振子, 可以突破上述冷却极限^[36]. 另外, 还可以用脉冲光来替代连续光, 通过设置一定的脉冲强度、持续时间和时间间隔, 也可以突破上述冷却极限^[37]. 脉冲驱动下的光力学系统演化, 与红失谐驱动的光力学系统演化, 最大的差别是可能不存在稳态, 那么基于稳态假定的标准线性化方法将失效. 此前, Hofer等人^[38]提出利用脉

冲驱动来实现光力学纠缠的制备. 随后, 基于该理论, Vanner等人^[39,40]在实验上验证了通过脉冲驱动实现光力学量子态的制备. 此外, 也有多项研究探讨了如何利用啁啾脉冲(Chirped Pulse)等来实现光力学系统的冷却^[41-44]. 这些脉冲的特点就是驱动强度在一个 $1/\kappa$ 的时间尺度上, 变化缓慢, 也就是这些脉冲有着平滑的头、尾. 因此, 仍然可以假设稳态的存在, 采用近似的标准线性化方法来处理. 然而, 如果使用的脉冲是诸如方波、三角波等这样不平滑, 存在突变边界的脉冲, 或者强、短高斯脉冲(短时间内驱动强度变化很快), 那么显然不存在任何的稳态. 为了处理方波的问题, 我们此前采用了新的线性化方法, 给出了光力学系统在方波脉冲驱动下, 系统的演化, 以及如何利用方波脉冲来冷却机械振子. 并且证明, 选择合适的脉冲强度、持续时间和时间间隔可以突破连续光驱动的冷却极限^[37]. 这一工作仅探讨了方波脉冲, 而在此, 我们将研究如何利用高斯脉冲来实现机械振子的冷却, 并探讨驱动波形对于冷却的优缺点.

2 系统哈密顿量和演化方程

我们将研究高斯波形的脉冲来驱动光力学系统, 高斯波形可如下表示:

$$E(t) = E e^{-(t-T_0)^2/\sigma^2}, \quad (1)$$

其中 E 是高斯波振幅, 2σ 是脉冲宽度, T_0 是波包中心时刻, 在此选择 $T_0 = 2\sigma$. 如图1所示, 以脉冲来驱动的光力学系统, 其哈密顿量(Hamiltonian)可如下表示($\hbar = 1$):

$$H(t) = H_S(t) + H_{OM} + H_{SR}, \quad (2)$$

其中第一项为腔模、机械模自由演化的哈密顿量以及外部驱动的作用, 具体如下:

$$H_S(t) = \omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_m \hat{b}^\dagger \hat{b} + i[\hat{a}^\dagger E(t) e^{-i\omega_f t} - \hat{a} E^*(t) e^{i\omega_f t}]. \quad (3)$$

第二项是腔模与机械模之间耦合相互作用项, 具体为

$$H_{OM} = -g_m \hat{a}^\dagger \hat{a} (\hat{b} + \hat{b}^\dagger), \quad (4)$$

图 1 (网络版彩图) 高斯脉冲冷却机械振子模型. 输入驱动为红失谐($\Delta = \omega_m$)高斯脉冲, 同时机械振子与周围环境存在热交换, 初始声子数 n_m 与环境声子数 n_{th} 一致

Figure 1 (Color online) The cooling of the mechanical resonator by Gaussian pulses. The red-detuned Gaussian pulses with $\Delta = \omega_m$ are used as drive, and the mechanical resonator is coupled to the reservoir with the initial phonon number n_m same to the thermal phonon number n_{th} .

其中 g_m 是单光子耦合强度. 第三项是腔模、机械模与环境之间的耦合, 也就是环境的噪声作用, 其哈密顿量如下:

$$H_{SR}(t) = i\sqrt{2\kappa}\{\hat{a}^\dagger \hat{\xi}_c(t) - \hat{a} \hat{\xi}_c^\dagger(t)\} + i\sqrt{2\gamma_m}\{\hat{b}^\dagger \hat{\xi}_m(t) - \hat{b} \hat{\xi}_m^\dagger(t)\}. \quad (5)$$

这里的噪声假定为白噪声, 即相应的随机朗之万噪声算子满足如下的关系:

$$\begin{aligned} \langle \hat{\xi}_c^\dagger(t) \hat{\xi}_c(\tau) \rangle_R &= n_c \delta(t - \tau), \\ \langle \hat{\xi}_m^\dagger(t) \hat{\xi}_m(\tau) \rangle_R &= n_m \delta(t - \tau), \end{aligned} \quad (6)$$

其中 $n_c = 1/(e^{\hbar\omega_c/k_B T} - 1) \approx 0$, $n_m = 1/(e^{\hbar\omega_m/k_B T} - 1)$. 因为初始时刻, 机械振子与周围环境处于热平衡, 因此机械振子初始声子数 n_m 与环境声子数 n_{th} 一致, 即 $n_m = n_{th}$.

因为系统哈密顿量 $H(t)$ 含时, 因此系统的演化将表示为如下时序的形式^[45]:

$$U(t) = \mathcal{T} \exp \left\{ -i \int_0^t d\tau \hat{H}(\tau) \right\}. \quad (7)$$

由于系统哈密顿量包含非线性项, 而目前量子非线性方程还没有找到合适的解法, 因此上述演化算子无法展开成解析的形式. 在标准线性化的方法中, 人们是将腔模算符 $\hat{a}$ 展开成平均值 α 和涨落 $\delta\hat{a}$ 之和, 即 $\hat{a} \rightarrow \alpha + \delta\hat{a}$, 由此可将上述算子线性化^[4]. 然而, 大多数脉冲(方波、三角波、强短高斯脉冲)驱动时, 并不存在稳态, 因此无法采用这样的标准线性化方

法来研究高斯脉冲冷却. 在此, 我们将采用新的动力学方法^[18]来研究这一问题. 这一方法不依赖于稳态, 可以处理任意波形、任意失谐量的驱动, 因而可以用于研究光力学纠缠、动力学冷却^[46-52]等. 此外还需要指出的是, 新的线性化方法的一大优势, 就是可以直接得到系统声子数从初始状态开始的详细动力学演化过程. 理论证明最终声子数与动力学过程(冷却快慢, 即声子数下降快慢)密切相关^[18]. 因而详细的动力学过程可以让我们更清楚地了解冷却效果, 而这一点也是基于稳态的线性化方法不易获得的.

我们首先将(7)式的演化算符进行如下的分解:

$$U(t) = \mathcal{T} \exp \left\{ -i \int_0^t d\tau H_S(\tau) \right\} \times \mathcal{T} \exp \left\{ -i \int_0^t d\tau [H_1(\tau) + H_2(\tau)] \right\}, \quad (8)$$

其中

$$\begin{aligned} H_1(\tau) &= \mathcal{T} \exp \left\{ i \int_0^\tau dt' H_S(t') \right\} H_{OM} \\ &\quad \times \mathcal{T} \exp \left\{ -i \int_0^\tau dt' H_S(t') \right\}, \\ H_2(\tau) &= \mathcal{T} \exp \left\{ i \int_0^\tau dt' H_S(t') \right\} H_{SR}(\tau) \\ &\quad \times \mathcal{T} \exp \left\{ -i \int_0^\tau dt' H_S(t') \right\}. \end{aligned} \quad (9)$$

$H_1(\tau)$ 和 $H_2(\tau)$ 的具体形式可以通过以下算符 $\hat{a}$, $\hat{b}$ 的变换来得到:

$$\begin{aligned} &\mathcal{T} \exp \left\{ i \int_0^t d\tau \hat{H}_S(\tau) \right\} \hat{a} \mathcal{T} \exp \left\{ -i \int_0^t d\tau \hat{H}_S(\tau) \right\} \\ &= e^{-i\omega_c t} (\hat{a} + f(t)), \\ &\mathcal{T} \exp \left\{ i \int_0^t d\tau \hat{H}_S(\tau) \right\} \hat{b} \mathcal{T} \exp \left\{ -i \int_0^t d\tau \hat{H}_S(\tau) \right\} \\ &= e^{-i\omega_m t} \hat{b}, \end{aligned} \quad (10)$$

这里算符 $\hat{a}$ 在变换后增加了一个由驱动波形决定的平移项 $f(t) = \int_0^t d\tau E(\tau) e^{i\Delta\tau}$, 而算符 $\hat{b}$ 只是多了一个相位. 那么我们可以得到 $H_1(\tau)$ 和 $H_2(\tau)$ 的具体形式:

$$H_1(\tau) = -g_m [\hat{a}^\dagger \hat{a} + f(\tau) \hat{a}^\dagger + f^*(\tau) \hat{a} + |f(\tau)|^2]$$

$$\begin{aligned}
 & \times (e^{-i\omega_m\tau}\hat{b} + e^{i\omega_m\tau}\hat{b}^\dagger), \\
 H_2(\tau) = & i\sqrt{2\kappa}\{e^{i\omega_c\tau}(\hat{a}^\dagger + f^*(\tau))\hat{\xi}_c(\tau) \\
 & - e^{-i\omega_c\tau}(\hat{a} + f(\tau))\hat{\xi}_c^\dagger(\tau)\} \\
 & + i\sqrt{2\gamma_m}(e^{i\omega_m\tau}\hat{b}^\dagger\hat{\xi}_m(\tau) - e^{-i\omega_m\tau}\hat{b}\hat{\xi}_m^\dagger(\tau)). \quad (11)
 \end{aligned}$$

$H_1(\tau)$ 中第一项 $-g_m\hat{a}^\dagger\hat{a}(e^{-i\omega_m\tau}\hat{b} + e^{i\omega_m\tau}\hat{b}^\dagger)$ 是非线性项,但不含有和驱动有关的项,而其他线性项均包含和驱动有关的项 $f(\tau)$. 在我们研究的光力学系统中,单光子耦合强度很小,例如 $g_m/\kappa = 10^{-4}$,振子频率较大,例如 $\omega_m/\kappa = 100$,因而 $g_m/\omega_m \ll 1$. 同时驱动强度 E/κ 相对较大,一般都在 10^5 以上,因而非线性项比之线性项要小很多,那么这一非线性项就可以忽略不计. 由此我们可以得到如下的有效哈密顿量:

$$\begin{aligned}
 H_{\text{eff}}(\tau) = & -g_m[f(\tau)\hat{a}^\dagger + f^*(\tau)\hat{a} + |f(\tau)|^2] \\
 & \times (e^{-i\omega_m\tau}\hat{b} + e^{i\omega_m\tau}\hat{b}^\dagger) \\
 & + i\sqrt{2\kappa}\{e^{i\omega_c\tau}(\hat{a}^\dagger + f^*(\tau))\hat{\xi}_c(\tau) \\
 & - e^{-i\omega_c\tau}(\hat{a} + f(\tau))\hat{\xi}_c^\dagger(\tau)\} \\
 & + i\sqrt{2\gamma_m}(e^{i\omega_m\tau}\hat{b}^\dagger\hat{\xi}_m(\tau) - e^{-i\omega_m\tau}\hat{b}\hat{\xi}_m^\dagger(\tau)). \quad (12)
 \end{aligned}$$

根据这一有效哈密顿量,可以获得如下的线性动力学微分方程:

$$\begin{aligned}
 \dot{\hat{a}} = & -\kappa\hat{a} + i g_m f(t)(e^{-i\omega_m t}\hat{b} + e^{i\omega_m t}\hat{b}^\dagger) - \kappa f(t) \\
 & + \sqrt{2\kappa}e^{i\omega_c t}\hat{\xi}_c(t), \\
 \dot{\hat{b}} = & -\gamma_m\hat{b} + i g_m e^{i\omega_m t}[f(t)\hat{a}^\dagger + f^*(t)\hat{a}] + i g_m e^{i\omega_m t}|f(t)|^2 \\
 & + \sqrt{2\gamma_m}e^{i\omega_m t}\hat{\xi}_m(t), \quad (13)
 \end{aligned}$$

上述的线性化过程是合理的,至少在较短的演化时间内,通过完全经典非线性方程获得的系统物理量,例如振子位移 X_m ,和通过上述线性动力学方程获得的结果基本完全吻合^[37]. 那么在这样的演化时间内,线性化得到的结果是值得信赖的,特别是我们所考虑的脉冲冷却. 由于脉冲持续时间通常很短,并且短于合理的演化时间,因而在脉冲作用时间内,系统的演化将由上述线性微分方程决定. 根据上述的线性方程可以获得系统算符的演化,那么冷却过程可以直接通过如下的热声子数变化来研究:

$$n_m(t) = \langle \delta\hat{b}^\dagger(t)\delta\hat{b}(t) \rangle$$

$$\begin{aligned}
 & = \langle (\hat{b}^\dagger(t) - \langle \hat{b}^\dagger(t) \rangle)(\hat{b}(t) - \langle \hat{b}(t) \rangle) \rangle \\
 & = \langle \hat{b}^\dagger\hat{b}(t) \rangle - \langle \hat{b}^\dagger(t) \rangle \langle \hat{b}(t) \rangle, \quad (14)
 \end{aligned}$$

并不需要通过噪声谱来间接获得,可以很灵活地从冷却的动力学过程来研究脉冲波形、持续时间、强度等对冷却效果的影响,从而更好地选择合适的条件获得最优的冷却效果.

3 单个高斯脉冲

我们首先研究用单个高斯脉冲来冷却机械振子,高斯脉冲波形如(1)式所示. 从波形来看,方波脉冲的强度是突变的,从0突然增大到强度 E ,然后又突然降低到0;而高斯脉冲有一个缓慢增大,然后又缓慢降低的过程. 波形的不同会导致冷却过程的不同,进而导致冷却结果的不同. 我们首先考虑用不同强度的单个高斯脉冲来冷却机械振子,如图2所示. 这里初始声子 $n_m = 100$,脉宽固定为 $2\sigma = \kappa t_0 = 6$. 可以看到,当驱动强度较小时(图2(a)),机械振子不能被很好地冷却至基态(最终 $n_{m,f} \sim 15$). 随着驱动强度增大到 $E/\kappa = 10^6$ (图2(b)),机械振子会被冷却到基态($n_m < 1$),但由于高斯脉冲的驱动强度经过顶峰后会下降,因此振子的热声子数也随之上升,使得振子无法保持在基态. 继续增大驱动强度到 $E/\kappa = 3 \times 10^6$ (图2(c)),振子会被迅速冷却,但由于此时驱动强度较大,那么光力系统的压缩效应也相应增强,因此会出现振子热声子数的振荡,经过几次振荡后,振子会被冷却到较低的声子数(最低值接近0.1). 当然,随着高斯脉冲逐渐消失,由于环境热噪声的作用,振子的热声子数也随之增长,但在 $\kappa t < 12$ 的范围内,机械振子仍然被很好地保持在基态. 最后,再将驱动强度增大到 $E/\kappa = 10^7$ (图2(d)),机械振子也是迅速被冷却,而且驱动强度更大后,出现了更多的振荡,展现出压缩效应与交换效应之间的剧烈竞争. 此时振子被冷却的最低声子数也接近0.1,与 $E/\kappa = 3 \times 10^6$ 的最低值相差无几. 这也显示出一定的冷却极限,即通过增大驱动强度已经不能使机械振子被进一步冷却了. 与单个方波脉冲冷却相比,同样存在一定的冷却极限. 不过不同的是,方波脉冲随着驱动强度的增大,压缩效应会被明显加

图 2 单个不同强度的高斯脉冲冷却机械振子. 初始声子 $n_m = 100$, 脉宽固定为 $2\sigma = \kappa t_0 = 6$, 随着驱动强度的增大, 机械振子可以被冷却到基态以下. (a) $E/\kappa = 5 \times 10^5$; (b) $E/\kappa = 10^6$; (c) $E/\kappa = 3 \times 10^6$; (d) $E/\kappa = 10^7$; 其他参数 $g_m/\kappa = 10^{-4}$, $\omega_m/\kappa = 100$, $\gamma_m/\kappa = 10^{-3}$

Figure 2 Cooling the mechanical resonator by a single Gaussian pulse with different intensities. The initial phonon number is $n_m = 100$, and the duration of Gaussian pulse is $2\sigma = \kappa t_0 = 6$. The mechanical resonator can be cooled down to the ground state by the increasing of drive intensity. (a) $E/\kappa = 5 \times 10^5$; (b) $E/\kappa = 10^6$; (c) $E/\kappa = 3 \times 10^6$; (d) $E/\kappa = 10^7$. The system parameters are $g_m/\kappa = 10^{-4}$, $\omega_m/\kappa = 100$, $\gamma_m/\kappa = 10^{-3}$.

强, 因而出现的

热声子数振荡尤为激烈, 甚至使得热声子数大范围振荡, 振子不能被有效冷却^[37]. 究其原因, 是方波脉冲一直保持很高的驱动强度, 而高斯脉冲波形中驱动强度有先增强后减弱的特点, 使得脉冲不会被持续保持很高的驱动强度, 有利于抑制压缩效应. 所以可以看到即使驱动强度达到 $E/\kappa = 10^7$, 振子的热声子数振荡幅度也不会太大, 可以使得振子很好地保持在基态, 甚至最低值已经接近连续驱动冷却的理论极限 $n_{m,f} = 0.1$ ^[18]. 正是利用这一优点, 我们稍后将证明, 与方波脉冲相比, 通过多个高斯脉冲可以更加有效地突破连续驱动冷却的理论极限.

上面的讨论中, 脉宽固定, 而实际上脉宽的大小对于冷却效果的影响也很大, 因此我们也讨论一下不同脉宽的高斯脉冲在冷却机械振子的过程中, 会产生什么样的差异, 如图3所示. 这里驱动强度固定为 $E/\kappa = 5 \times 10^6$, 相对较强. 当脉宽 $2\sigma = \kappa t_0 = 1$ 较小时(图3(a)), 由于脉冲作用时间太短, 虽然振子被迅速冷却到基态, 但脉冲强度一减弱, 振子热声子数又迅速上升, 最后当 $\kappa t = 2$ 时, 热声子数已高于10.

如果延长脉宽到 $2\sigma = \kappa t_0 = 2$ 时(图3(b)), 热声子数可以被降到接近0.1, 虽然也存在热声子数随驱动强度减弱而上升, 但当 $\kappa t = 4$ 时, 热声子数仍低于2. 继续增大脉宽到 $2\sigma = \kappa t_0 = 4$ 时(图3(c)), 机械振子可以被冷却到接近0.1, 还可以在 $\kappa t = 8$ 时, 热声子数低于1, 也就是保持在基态. 最后当脉宽增大到 $2\sigma = \kappa t_0 = 6$ 时(图3(d)), 机械振子也可以在较长时间内 $\kappa t < 12$, 保持在基态.

4 多个高斯脉冲

需要指出的是, 上述对于脉宽的讨论是针对单个脉冲而言的. 而对于多个脉冲持续作用, 即使单个脉冲不能很好地实现基态冷却, 但是多个脉冲不断地作用, 也能够很好地实现基态冷却, 并且有可能短脉冲的持续作用能够将热声子数降得更低, 甚至突破连续驱动的冷却极限. 因此, 我们将研究用多个高斯脉冲来冷却机械振子, 如图4所示.

多个高斯脉冲波形可以如下表示:

$$E(t) = \sum_j E e^{-(t-jT_0)^2/\sigma^2}, \quad (15)$$

图 3 单个不同脉宽的高斯脉冲冷却机械振子. 驱动强度固定为 $E/\kappa = 5 \times 10^6$, 随着脉宽的增大, 机械振子可以被冷却到基态, 并在基态保持一段时间. 其他参数与图2一致. (a) $\kappa t_0 = 1$; (b) $\kappa t_0 = 2$; (c) $\kappa t_0 = 4$; (d) $\kappa t_0 = 6$

Figure 3 Cooling the mechanical resonator by a single Gaussian pulse with different durations. The drive intensity is fixed as $E/\kappa = 5 \times 10^6$. With the increasing of the duration, the mechanical resonator can be cooled down to the ground state and preserved for a current time. The other parameters are the same to those in Figure 2. (a) $\kappa t_0 = 1$; (b) $\kappa t_0 = 2$; (c) $\kappa t_0 = 4$; (d) $\kappa t_0 = 6$.

图4中多个脉冲的脉宽很短, 固定为 $2\sigma = \kappa t_0 = 1$, 并且 j 为奇数. 通过改变脉冲的驱动强度, 来研究不同情况下的冷却效果. 首先, 选择一个驱动强度较弱的脉冲, $E/\kappa = 2 \times 10^6$, 根据文献[18]的结果, 连续驱动的光力学系统能够达到的最低冷却值为 $n_{m,f} = 0.1$ (图4中红色虚线所示). 如果仅使用一个高斯脉冲, 那么无法将机械振子的热声子数降到1以下, 也就是无法完成基态冷却. 但是加入第二个脉冲后, 机械振子会在第一个脉冲冷却的基础上, 进一步冷却, 使得机械振子的热声子数降到1以下, 甚至多个脉冲持续作用的结果可以使得机械振子的热声子数在0.1–0.3之间振荡, 很好地使得机械振子保持在基态, 也就意味着即使是脉冲驱动, 也可以很好地实现基态冷却.

增大驱动强度到 $E/\kappa = 5 \times 10^6$, 从图4(b)中可以看到, 在最初的三个脉冲作用过程中, 系统的热声子数不断振荡, 其最低值接近冷却极限 $n_{m,f} = 0.1$, 而第四个脉冲开始, 热声子数已经可以降到0.1以下了. 随后系统的热声子数在0.1附近上下平稳振荡, 其最低值在0.06附近, 而这显然也突破了连续驱动的最终冷却极限. 根据文献[18]的结果, 0.1这一极限是连

续驱动光力学系统能够达到的最低极限, 即使无限增大驱动强度、增大机械振子共振频率, 也无法突破这一极限. 但显然多个脉冲驱动可以突破这一极限, 显示出脉冲驱动冷却的优越性.

继续增大驱动强度至 $E/\kappa = 8 \times 10^6$ (图4(c)) 和 $E/\kappa = 2 \times 10^7$ (图4(d)), 可以看到经过3–4个脉冲作用后, 机械振子的热声子数也可以突破连续驱动的冷却极限, 并在0.1这一极限上下振荡, 最低值可以到0.05或者0.06. 从图4的4个小图也可以看到, 随着驱动强度的增大, 机械振子的热声子数振荡变得更加激烈. 这就是之前讨论的, 随着驱动强度的增大, 加热的压缩效应随之增强, 与冷却的交换效应之间的竞争随着驱动强度的增大而变得更加激烈. 这造成了即使是脉冲驱动, 也存在一个冷却极限. 从图4(c)和(d)可以看到, 强度增大后, 机械振子的最低热声子数反而增大了, 因此无法通过增大驱动强度来降低可以获得的最低冷却值, 也就是仍然存在一个极限, 不过这一极限要低于连续驱动的极限.

5 冷却极限

为了更清楚地了解脉冲冷却的极限, 我们

图 4 (网络版彩图)多个不同强度的高斯脉冲冷却机械振子. 选择短脉冲宽度 $2\sigma = \kappa t_0 = 1$, 多个脉冲作用下, 机械振子可以被冷却到基态以下, 并在脉冲作用时间内, 保持在基态. 特别是驱动强度较大时, 可以突破连续驱动的冷却极限(红色虚线). (a) $E/\kappa = 2 \times 10^6$; (b) $E/\kappa = 5 \times 10^6$; (c) $E/\kappa = 8 \times 10^6$; (d) $E/\kappa = 2 \times 10^7$; 其他参数与图2一致

Figure 4 (Color online) Cooling the mechanical resonator by multiple Gaussian pulses with different intensities. The duration is short as $2\sigma = \kappa t_0 = 1$. After applied multiple Gaussian pulses, the mechanical resonator can be well cooled down to the ground state and preserved during the period when the pulses are applied. If the drive intensity is large enough, the cooling limit (red dashed line) of single continuous-wave drive can be broken. (a) $E/\kappa = 2 \times 10^6$; (b) $E/\kappa = 5 \times 10^6$; (c) $E/\kappa = 8 \times 10^6$; (d) $E/\kappa = 2 \times 10^7$; the other parameters are the same to those in Figure 2.

针对不同的振子频率, 给出了不同脉宽的冷却比率 $(n_{m,f}/n_{th}) \times (\kappa/\gamma_m)$ 与有效驱动强度 $(E/\kappa) \times (g_m/\omega_m)$ 之间的关系, 如图5所示. 图中粉红色虚线(标注为continuous)为连续驱动的理论冷却极限, $(n_{m,f}/n_{th}) \times (\kappa/\gamma_m) = 1$. 由于脉冲冷却后的热声子数并不稳定, 一直在反复振荡, 因而图中冷却后的热声子数 $n_{m,f}$ 是选择稳定振荡后的最低值, 以此来探讨冷却极限.

当振子频率相对较小时, 例如图5(a)中 $\omega_m/\kappa = 20$, 利用脉冲冷却也可以在较小的有效驱动下, 突破连续驱动的冷却极限. 例如选择脉宽 $2\sigma = \kappa t_0 = 2$, 在有效驱动 $(E/\kappa) \times (g_m/\omega_m) = 2$ 下, 或者选择脉宽 $2\sigma = \kappa t_0 = 1$ 或3, 在有效驱动 $(E/\kappa) \times (g_m/\omega_m) = 3$ 下, 都可以突破连续驱动的冷却极限. 随着驱动强度的增大, 脉宽较小的驱动, 例如 $2\sigma = \kappa t_0 = 1$ 的冷却效果很快下降; 但脉宽较大的驱动, 例如 $2\sigma = \kappa t_0 = 2$ 或3的冷却效果可以相对保持平稳. 不过不管如何增大驱动强度, 冷却比

率也不会继续下降, 也就是存在一定的极限, 大致在 $(n_{m,f}/n_{th}) \times (\kappa/\gamma_m) \sim 0.75$. 当振子频率较大时, 例如如图5(b)中 $\omega_m/\kappa = 100$, 冷却比率相比而言会降得更低, 这也吻合之前的结论^[18,37]. 此时脉宽较小的驱动 $2\sigma = \kappa t_0 = 1$ 的冷却效果最好, 最低值甚至低于连续驱动冷却极限的1/2. 并且冷却极限与有效驱动强度之间还呈现一种有规律的振荡, 显示复杂的光子与声子之间的相互作用. 此外, 与图5(a)比较可以发现, 振子频率较大时, 冷却比率可以在较长的有效驱动强度范围内(图中小于20), 保持冷却比率处于很低的水平, 而不像频率较小时, 有效驱动的增大反而使得冷却效果明显降低. 从这里的对比也可以看到, 如果继续增大振子频率, 例如 $\omega_m/\kappa = 1000$, 那么冷却比率将进一步下降. 之所以振子频率的增加可以降低冷却比率, 是因为这里振子耗散率固定 $\gamma_m/\kappa = 10^{-3}$. 那么随着振子频率的增大, 相应的振子品质因数 $Q = \omega_m/\gamma_m$ 也将增大, 这样系统本身就可以更好地抑制热噪声的影响, 由此冷却比率也就

图 5 (网络版彩图)冷却比率 $(n_{m,f}/n_{th}) \times (\kappa/\gamma_m)$ 与有效驱动强度 $(E/\kappa) \times (g_m/\omega_m)$ 之间的关系, 这里 $\gamma_m/\kappa = 10^{-3}$. (a) 振子频率较小时, 不同脉冲宽度的高斯脉冲都可以突破连续驱动的冷却极限(粉红色虚线). 最低冷却比率可以到0.75. (b) 振子频率较大时, 不同脉冲宽度的高斯脉冲可以以更明显地突破连续驱动冷却极限, 此时最低冷却比率可以到0.5

Figure 5 (Color online) The relations between the cooling rate $(n_{m,f}/n_{th}) \times (\kappa/\gamma_m)$ and the effective drive intensity $(E/\kappa) \times (g_m/\omega_m)$ with $\gamma_m/\kappa = 10^{-3}$. (a) When the mechanical frequency is small, the cooling limit (pink dashed line) of single continuous drive can be broken by the multiple Gaussian pulses with different durations. The minimum cooling rate is about 0.75. (b) When the mechanical frequency is large, the cooling limit of single continuous drive can be broken evidently by the multiple Gaussian pulses with different durations. The minimum cooling rate is about 0.5.

得到了明显的提高. 然而冷却比率的下降终究是有极限的, 因为即使如何增大振子品质因数, 系统中的压缩效应总会随着驱动强度的增大而增大, 一旦达到与交换效应持平, 这必然会导致振子不可能被进一步冷却, 也就达到了新的冷却极限. 当然这一脉冲驱动冷却的极限显然要低于连续驱动的极限, 因可以说脉冲冷却的效果要优于连续驱动, 至少可以提高2倍的冷却效果.

6 讨论和结论

利用光力学相互作用来冷却机械振子的关键是增强光子和声子之间的交换效应, 同时还要抑制相应的压缩效应. 在使用连续驱动来冷却机械振子时, 驱动持续不断地与机械振子产生相互作用. 那么为了提高冷却效率, 需要增强驱动的强度, 而驱动强度的增强不仅使得交换相互作用增强, 同时压缩效应也在增强. 这两种效应随驱动强度的增强而增强的比率不同, 当驱动强度增大到一定程度(这一程度和系统参量, 例如振子频率、 Q 值等有关)时, 压缩效应的增强比率会超过交换效应, 这样就造成了机械振子不可能被进一步冷却, 也就是存在冷却极限.

在此, 我们证明了利用脉冲冷却可以突破连续驱动的冷却极限. 究其原因是脉冲驱动间歇地与机

械振子产生相互作用. 此时, 在脉冲间隙, 由于环境的耗散, 振子声子数虽然会缓慢上升, 但是也打断了交换效应与压缩效应的作用. 从单个脉冲的冷却过程来看, 特别是短脉宽驱动, 如图4(a)和(b)所示, 振子声子数在驱动作用下迅速下降, 但随后又开始明显上升. 这种振荡意味着交换效应和压缩效应的作用并不同步. 先是交换效应起主要作用, 然后压缩效应开始增强, 超过交换效应后, 又使得声子数上升. 选择一个合适的脉冲宽度, 尽量使得在有驱动作用过程中, 交换效应起主要作用, 而在压缩效应将开始增强时, 又自然去掉驱动, 这样可以做到更好地冷却, 这也是脉冲冷却可以突破连续驱动冷却极限的根本所在.

最后, 我们还验证了不同的脉冲波形对于冷却有着不同的效果. 此前的研究显示, 方波脉冲也可以突破连续驱动的冷却极限^[37]. 从波形上来说, 方波的驱动强度存在突变, 而且在持续时间内, 强度是不变的, 这一点实际上和连续驱动是一致的, 而脉冲驱动强度缓慢变化, 这样大部分脉冲持续时间内, 驱动强度不会很大. 这样即使是强高斯脉冲, 那么其驱动强度很大的时间也很短, 如此也不会引起太过剧烈的压缩效应. 因而相比方波脉冲冷却^[37]来说, 机械振子的声子数能够降得更低, 甚至可以2 倍于连续驱动的冷却极限, 显示出高斯脉冲冷却的优势.

参考文献

- 1 Zurek W H. Decoherence, einselection, and the quantum origins of the classical. *Rev Mod Phys*, 2003, 75: 715–775
- 2 Leggett A J, Garg A. Quantum mechanics versus macroscopic realism: Is the flux there when nobody looks? *Phys Rev Lett*, 1985, 54: 857–860
- 3 Leggett A J. Testing the limits of quantum mechanics: Motivation, state of play, prospects. *J Phys-Condens Matter*, 2002, 14: R415–R451
- 4 Aspelmeyer M, Kippenberg T J, Marquardt F. Cavity optomechanics. *Rev Mod Phys*, 2014, 86: 1391–1452
- 5 Wilson-Rae I, Nooshi N, Zwerger W, et al. Theory of ground state cooling of a mechanical oscillator using dynamical backaction. *Phys Rev Lett*, 2007, 99: 093901
- 6 Marquardt F, Chen J P, Clerk A A, et al. Quantum theory of cavity-assisted sideband cooling of mechanical motion. *Phys Rev Lett*, 2007, 99: 093902
- 7 Marquardt F, Clerk A A, Girvin S M. Quantum theory of optomechanical cooling. *J Modern Opt*, 2008, 55: 3329–3338
- 8 Genes C, Vitali D, Tombesi P, et al. Ground-state cooling of a micromechanical oscillator: Comparing cold damping and cavity-assisted cooling schemes. *Phys Rev A*, 2008, 77: 033804
- 9 Dantan A, Genes C, Vitali D, et al. Self-cooling of a movable mirror to the ground state using radiation pressure. *Phys Rev A*, 2008, 77: 011804
- 10 Dobrindt J M, Wilson-Rae I, Kippenberg T J. Parametric normal-mode splitting in cavity optomechanics. *Phys Rev Lett*, 2008, 101: 263602
- 11 Wilson-Rae I, Nooshi N, Dobrindt J, et al. Cavity-assisted backaction cooling of mechanical resonators. *New J Phys*, 2008, 10: 095007
- 12 Rabl P, Genes C, Hammerer K, et al. Phase-noise induced limitations on cooling and coherent evolution in optomechanical systems. *Phys Rev A*, 2009, 80: 063819
- 13 Li Y, Wu L A, Wang Z D. Fast ground-state cooling of mechanical resonators with time-dependent optical cavities. *Phys Rev A*, 2011, 83: 043804
- 14 Li Y, Wu L A, Wang Y D, et al. Nondeterministic ultrafast ground-state cooling of a mechanical resonator. *Phys Rev B*, 2011, 84: 094502
- 15 Wang X, Vinjanampathy S, Strauch F W, et al. Ultraefficient cooling of resonators: Beating sideband cooling with quantum control. *Phys Rev Lett*, 2011, 107: 177204
- 16 Liu Y C, Xiao Y F, Luan X, et al. Dynamic dissipative cooling of a mechanical resonator in strong coupling optomechanics. *Phys Rev Lett*, 2013, 110: 153606
- 17 Liu Y C, Hu Y W, Wong C W, et al. Review of cavity optomechanical cooling. *Chin Phys B*, 2013, 22: 114213
- 18 He B, Yang L, Lin Q, et al. Radiation pressure cooling as a quantum dynamical process. *Phys Rev Lett*, 2017, 118: 233604
- 19 Teufel J D, Harlow J W, Regal C A, et al. Dynamical backaction of microwave fields on a nanomechanical oscillator. *Phys Rev Lett*, 2008, 101: 197203
- 20 Gröblacher S, Hertzberg J B, Vanner M R, et al. Demonstration of an ultracold micro-optomechanical oscillator in a cryogenic cavity. *Nat Phys*, 2009, 5: 485–488
- 21 Schliesser A, Arcizet O, Rivière R, et al. Resolved-sideband cooling and position measurement of a micromechanical oscillator close to the Heisenberg uncertainty limit. *Nat Phys*, 2009, 5: 509–514
- 22 Park Y S, Wang H. Resolved-sideband and cryogenic cooling of an optomechanical resonator. *Nat Phys*, 2009, 5: 489–493
- 23 O’Connell A D, Hofheinz M, Ansmann M, et al. Quantum ground state and single-phonon control of a mechanical resonator. *Nature*, 2010, 464: 697–703
- 24 Rocheleau T, Ndukum T, Macklin C, et al. Preparation and detection of a mechanical resonator near the ground state of motion. *Nature*, 2010, 463: 72–75
- 25 Rivière R, Deléglise S, Weis S, et al. Optomechanical sideband cooling of a micromechanical oscillator close to the quantum ground state. *Phys Rev A*, 2011, 83: 063835
- 26 Teufel J D, Donner T, Li D, et al. Sideband cooling of micromechanical motion to the quantum ground state. *Nature*, 2011, 475: 359–363
- 27 Chan J, Alegre T P M, Safavi-Naeini A H, et al. Laser cooling of a nanomechanical oscillator into its quantum ground state. *Nature*, 2011, 478: 89–92
- 28 Schleier-Smith M H, Leroux I D, Zhang H, et al. Optomechanical cavity cooling of an atomic ensemble. *Phys Rev Lett*, 2011, 107: 143005
- 29 Verhagen E, Deléglise S, Weis S, et al. Quantum-coherent coupling of a mechanical oscillator to an optical cavity mode. *Nature*, 2012, 482: 63–67
- 30 Safavi-Naeini A H, Chan J, Hill J T, et al. Observation of quantum motion of a nanomechanical resonator. *Phys Rev Lett*, 2012, 108: 033602
- 31 Peterson R W, Purdy T P, Kampel N S, et al. Laser Cooling of a Micromechanical Membrane to the Quantum Backaction Limit. *Phys Rev Lett*, 2016, 116: 063601
- 32 Clark J B, Lecocq F, Simmonds R W, et al. Sideband cooling beyond the quantum backaction limit with squeezed light. *Nature*, 2017, 541: 191–195
- 33 Lü X Y, Wu Y, Johansson J R, et al. Squeezed optomechanics with phase-matched amplification and dissipation. *Phys Rev Lett*, 2015, 114:

093602

- 34 Gan J H, Liu Y C, Lu C, et al. Intracavity-squeezed optomechanical cooling. [Laser Photonics Rev](#), 2019, 20: 1900120
- 35 Zhao W, Zhang S D, Miranowicz A, et al. Weak-force sensing with squeezed optomechanics. [Sci China-Phys Mech Astron](#), 2020, 63: 224211
- 36 Wang C, Lin Q, He B. Breaking the optomechanical cooling limit by two drive fields on a membrane-in-the-middle system. [Phys Rev A](#), 2019, 99: 023829
- 37 Lin Q, He B. Optomechanical entanglement under pulse drive. [Opt Express](#), 2015, 23: 24497
- 38 Hofer S G, Wiecek W, Aspelmeyer M, et al. Quantum entanglement and teleportation in pulsed cavity optomechanics. [Phys Rev A](#), 2011, 84: 052327
- 39 Vanner M R, Pikovski I, Cole G D, et al. Pulsed quantum optomechanics. [Proc Natl Acad Sci USA](#), 2011, 108: 16182–16187
- 40 Vanner M R, Hofer J, Cole G D, et al. Cooling-by-measurement and mechanical state tomography via pulsed optomechanics. [Nat Commun](#), 2013, 4: 2295
- 41 Liao J Q, Law C K. Cooling of a mirror in cavity optomechanics with a chirped pulse. [Phys Rev A](#), 2011, 84: 053838
- 42 Machnes S, Cerrillo J, Aspelmeyer M, et al. Pulsed laser cooling for cavity optomechanical resonators. [Phys Rev Lett](#), 2012, 108: 153601
- 43 Meenehan S M, Cohen J D, MacCabe G S, et al. Pulsed excitation dynamics of an optomechanical crystal resonator near its quantum ground state of motion. [Phys Rev X](#), 2015, 5: 041002
- 44 Zheng Q, Yao Y, Li Y. Optimal quantum parameter estimation in a pulsed quantum optomechanical system. [Phys Rev A](#), 2016, 93: 013848
- 45 Gardiner C W, Zoller P. Quantum Noise. 2nd ed. Berlin, Heidelberg: Springer Verlag, 2000. 131-143
- 46 He B. Quantum optomechanics beyond linearization. [Phys Rev A](#), 2012, 85: 063820
- 47 Lin Q, He B, Ghobadi R, et al. Fully quantum approach to optomechanical entanglement. [Phys Rev A](#), 2014, 90: 022309
- 48 He B, Sharypov A V, Sheng J, et al. Two-photon dynamics in coherent Rydberg atomic ensemble. [Phys Rev Lett](#), 2014, 112: 133606
- 49 He B, Yan S B, Wang J, et al. Quantum noise effects with Kerr-nonlinearity enhancement in coupled gain-loss waveguides. [Phys Rev A](#), 2015, 91: 053832
- 50 He B, Yang L, Xiao M. Dynamical phonon laser in coupled active-passive microresonators. [Phys Rev A](#), 2016, 94: 031802
- 51 Chen Z X, Lin Q, He B, et al. Entanglement dynamics in double-cavity optomechanical systems. [Opt Express](#), 2017, 25: 17237
- 52 Lin Q, He B, Xiao M. Mass sensing by detecting the quadrature of a coupled light field. [Phys Rev A](#), 2017, 96: 043812

Cooling the mechanical resonator by Gaussian pulses

CHEN ZhiXin & LIN Qing*

*Fujian Key Laboratory of Light Propagation and Transformation, College of Information Science and Engineering, Huaqiao University,
Xiamen 361021, China*

The optomechanical system has been widely used to realize the quantum ground state cooling of mechanical resonator, which is the way to create macroscopic quantum state. How to get the better cooling effect is evidently the central point. However, it has been demonstrated that there is a cooling limit if using only one single continuous-wave pump to drive the mechanical resonator, i.e., the cooling rate cannot be decreased by increasing the drive intensity or the mechanical frequency, so that the new dynamics should be developed. Here we present an approach to cool the mechanical resonator by the Gaussian pulses. For the pulsed optomechanical system, the common steady-state expansion approach is not available, since no steady state can be found in most cases. We use the new linearized approach to get the effective Hamiltonian and the dynamical evolution of the optomechanical system, with which the thermal phonon number of the mechanical resonator can be achieved directly. After investigating how the pulse profile, drive intensity and pulse duration affect the evolution of thermal phonon number in details, we show that the mechanical resonator can be well cooled down to the ground state by a single pulse, and can be well preserved by the multiple pulses, with the appreciated drive intensity, duration. Moreover, the character of drive intensity increasing and decreasing of the pulse profile, enables one to delay the squeezing effect which results in the heating of the mechanical resonator. As a result, the cooling limit of single continuous-wave driven optomechanical system can be broken by the pulsed optomechanical system. Even the half of the cooling limit of the continuous optomechanical system can be achieved by the short and strong Gaussian pulses, which is the main advantage of the ground state cooling by pulse drives.

optomechanical system, ground state cooling, Gaussian pulse

PACS: 42.50.Wk, 42.50.Lc, 07.10.Cm

doi: [10.1360/SSPMA-2019-0339](https://doi.org/10.1360/SSPMA-2019-0339)