广义流传递过程的广义耗散最小化

夏少军^{1,2}, 陈林根^{1,2*}

1. 武汉工程大学热科学与动力工程研究所, 武汉 430205;

2. 武汉工程大学机电工程学院, 武汉 430205

* E-mail: lingenchen@hotmail.com; lgchenna@yahoo.com

收稿日期: 2018-07-01; 接受日期: 2018-09-19; 网络版发表日期: 2019-04-02

国家自然科学基金(批准号: 51576207, 51606218)、湖北省自然科学基金(批准号: 2018CFB708)和海军工程大学自主立项科研项目(批准号: 20161504)资助

摘要 广义热力学优化理论研究的重要内容之一是追求优化结果的普适性. 本文首先在回顾现有文献关于传热、传质、电容器充电、经济贸易过程等不可逆过程动态优化研究工作的基础上, 基于广义热力学优化理论的研究思路, 通过定义广义势、广义力、广义流、广义势容、广义耗散、广义耗散力等物理量, 建立了一类广义流传递过程的广义热力学物理模型, 形成了相应的动态优化问题, 即在广义流守恒方程约束下求解广义流传递过程广义耗散最小化. 然后, 分别应用欧拉-拉格朗日方程和平均最优控制理论导出了普适的优化结果即最优性条件, 并基于普适的优化结果得到了一些新结论. 接着, 进一步讨论了上述研究结果和结论在换热过程、等温节流、单向等温传质、双向等温传质、等温结晶过程、电容器充电过程、经济贸易过程等特例中的应用. 最后, 提出了不可逆过程“广义热力学动态优化”的研究思想. 本文的研究结果丰富和完善了广义热力学优化理论.

关键词 广义流传递过程, 广义耗散最小化, 传热传质, 电容器充电, 经济贸易, 最优控制, 广义热力学优化

1 引言

确定给定优化目标下的最优过程路径是有限时间热力学或熵产生最小化理论的研究热点问题之一^[1-28]. 大量学者研究了给定传热量条件下换热过程不同优化目标时流体温度最优路径, 如表1和2所示, 所取优化目标包括熵产生最小^[29-54]、焓损失最小^[49,50]、热量积耗散最小^[55-60], 考虑的热阻模型主要有牛顿传热 $[q\propto\Delta(T)]$ 、线性唯象传热 $[q\propto\Delta(T^{-1})]$ 、广义辐射传热 $[q\propto\Delta(T^n)]$ 以及一类包括广义辐射和广义对流 $[q\propto\Delta(T^m)]$ 的

普适传热 $\{q\propto[\Delta(T^n)]^m\}$ 规律, 所采用的优化方法包括经典变分法、欧拉-拉格朗日方程法、平均最优控制理论^[14-18,22,25,26,61], 得到的主要结论有: (1) 当以熵产生最小为目标且传热系数为定值时, 牛顿传热规律下热、冷流体温度之比为定值(或可表述为流体温度差与流体平均温度之比为定值), 线性唯象传热规律下热、冷流体温度倒数之差为定值, 其他传热规律下优化结果与牛顿、线性唯象传热规律下结果存在显著不同; (2) 当以焓耗散最小为目标且传热系数为定值时, 广义对流传热规律下热、冷流体温度之差为定值(或可表述

引用格式: 夏少军, 陈林根. 广义流传递过程的广义耗散最小化. 中国科学: 技术科学, 2019, 49: 501-517

Xia S J, Chen L G. Generalized dissipation minimization for generalized flow transfer processes (in Chinese). Sci Sin Tech, 2019, 49: 501-517, doi: 10.1360/N092018-00219

表 1 给定传热量条件下换热过程熵产生最小最优路径研究现状

年份	研究者	主要工作与结论
1979	Bejan ^[29]	研究了热绝缘过程的熵产生最小化, 结果表明过程熵产生最小时媒介之间温差与平均温度之比为定值, 即 $\Delta T/T = \text{const}$
1980	Salamon等人 ^[30]	研究了一类牛顿传热规律 $[q \propto \Delta(T)]$ 下给定循环周期时内可逆热机熵产生最小化, 结果表明对于任意的有限时间线性过程, 最小熵产生时的熵产生率为定值
1987	Tondeur和Kvaalen ^[31]	在线性流-力关系和Onsager倒易关系均成立的经典非平衡热力学框架内, 应用变分法以熵产生最小为目标对传输面积和传输负荷均给定的传输或分离装置进行了优化, 结果表明过程总熵产生最小时的局部熵产生率在空间或时间变量均匀分布并保持为定值, 由此建立了用于过程优化的“熵产生均分原理”
1992	Andresen和Gordon ^[33]	应用欧拉-拉格朗日方程研究了牛顿传热规律下给定传热量的换热过程熵产生最小化, 结果表明牛顿传热过程下热、冷流体温度之比为定值
1992	Andresen和Gordon ^[34]	应用欧拉-拉格朗日方程研究了广义辐射传热规律 $[q \propto \Delta(T^n)]$ (n 为与传热规律相关的指数, $n=-1, 1, 4$ 分别代表线性唯象、牛顿和辐射传热规律)下给定传热量的换热过程熵产生最小化, 结果表明热、冷流体温度的 n 次方之差与热流体温度的 $(n+1)/2$ 次幂两者之比为定值, 最小熵产生时的熵产生率为定值的结论仅在牛顿和线性唯象规律下成立, 在其他非线性传热规律下不成立
1995	Spirkl和Ries ^[35]	应用变分法研究了给定有限时间内系统在给定初态和末态间变化过程熵产生最小化, 导出了多状态变量一般情形下系统最优过程所服从的精确微分方程, 结果表明对于线性情形, 例如进行的无限缓慢或者Onsager系数与热力学流无关的非平衡过程, 过程熵产生最小时熵产生率为定值; 对于非线性情形, 例如辐射传热, 最优过程下熵产生率一般不是定值
1995	Ratkje等人 ^[36]	在文献[31]的基础上, 针对分离二元混合物的非绝热蒸馏塔, 在线性流-力关系成立而传输系数随温度和组分浓度变化的条件下, 以总熵产生率最小为目标进行了优化, 结果表明最优分离过程的驱动力为定值, 由此建立了用于过程优化的“驱动力均分原理”
1996	Sauar等人 ^[37]	针对热量、质量、电量耦合传输过程, 在传输过程由独立的驱动力描述和系统自身满足吉布斯-杜亥姆方程的假设条件下, 应用不可逆热力学和柯西-拉格朗日优化方法, 对“驱动力均分原理”给予了证明, 这一原理反映了能量耗散与传输面积的最佳折中方案, 并讨论了这一原理在实际问题中的应用
1997	Xu ^[38]	对驱动力均分原理提出了质疑, 指出文献[36,37]的假设——“熵产生率正比于驱动力的平方”在很多重要的化学过程(复杂化学反应、紊流、薄膜传质等)下不成立, 同时目标函数应修正为固定投资下回收最大化
1997	Sauar等人 ^[39]	对文献[38]的质疑给出了解释, 指出线性唯象定律仅在近平衡态下成立(简单化学反应和薄膜传质), 驱动力均分原理对应于经济学最大也仅在过程总输出和系统的尺寸均给定的条件下才成立
1999	Bedeaux等人 ^[40]	应用变分法研究了给定总流量条件下一般过程熵产生最小化, 结果表明最小熵产生时的局部熵产生率对局部流量的偏导数均匀分布保持为定值, 并讨论了其与熵产生均分、驱动力均分之间的联系与区别
1999	Kjelstrup等人 ^[41] , Kjelstrup和Island ^[42]	研究了给定产率条件下化学反应器熵产生最小时驱动力分布规律, 结果表明过程熵产生最小时局部熵产生率对局部反应速率的导数为定值, 并将其转化为更为贴近实际的优化准则, 即当反应焓为定值时, 工作温度的倒数应与平衡温度的倒数保持平行
2000	Haug-Warberg ^[43]	对文献[36,37]中驱动力均分原理也提出了质疑, 用牛顿和线性唯象传热规律的混合传热的换热器优化例子说明熵产生均分原理要优于驱动力均分原理
2000	Kjelstrup等人 ^[44]	对文献[43]中驱动力均分原理劣于熵产生均分原理的结论给出了解释, 指出Haug-Warberg ^[43] 没有考虑非平衡热力学中热力学流与热力学力之间的一一对应关系
2001	Nummedal和Kjelstrup ^[45]	研究了换热过程熵产生最小化, 结果表明当热力学力与热力学流取不同物理量时, 对应于过程总熵产生率最小时的热力学力恒为定值, 即熵产生最优解与驱动力均分原理相一致
2002	Johannessen等人 ^[47]	在文献[45]的基础上, 进一步研究表明对应于过程总熵产生率最小时的局部熵产生率为定值, 这一结论与传热系数的取值无关, 同时熵产生均分原理要略优于驱动力均分原理, 虽然两者的差别相当小
2002	Tsirlin和Kazakov ^[46]	研究了牛顿传热规律下给定传热量换热器和线性传质规律下单向等温传质过程熵产生最小化, 结果表明换热器热、冷流体温度之比为定值, 等温传质过程关键组分传质流率为定值

(续表1)

年份	研究者	主要工作与结论
2003	Balkan ^[48]	研究表明牛顿传热规律下换热过程熵产生均分原理与高、低温度侧温度之比为定值的换热策略相一致, 提出用温差均匀分布原理作为使熵产生达到最小的简便原理
2004	Badescu ^[49]	选择高温侧热库为参考环境, 应用欧拉-拉格朗日方程法和数值优化方法研究了牛顿传热规律下给定传热量的换热过程损失最小化, 结果表明同等条件下逆流式换热器要比顺流式换热器更优
2004	Badescu ^[50]	选择高温侧热库为参考环境, 应用欧拉-拉格朗日方程法研究了广义辐射传热规律下给定传热量的换热过程损失最小化, 结果表明热流率一定的换热策略要优于热库温度一定的换热策略, 牛顿传热规律下各种换热策略的差别要大于辐射传热规律下的优化结果, 其差别随着传热量的增大而增大; 最优解是以无量纲形式表示的, 更具实用性
2008	夏少军等人 ^[63] 和陈林根等人 ^[64]	应用欧拉-拉格朗日方程法研究了普适传热规律 $\{[q\alpha\Delta(T^n)]^m\}$ 下给定传热量的换热过程熵产生最小化, 结果表明热、冷流体温度的 n 次方之差与热流体温度的 $(n+1)/(m+1)$ 次幂两者之比为定值, 最小熵产生时的熵产生率为定值的结论不仅在牛顿和线性唯象规律下成立, 而且在一类 $\{[q\alpha\Delta(T^{-1})]^m\}$ 传热规律下均成立
2009	夏少军等人 ^[65]	应用欧拉-拉格朗日方程法研究了普适传热规律 $\{[q\alpha\Delta(T^n)]^m\}$ 下给定传热量的换热过程损失最小化, 结果表明对应于最小损失时的损失率为定值在广义对流传热规律 $q\alpha(\Delta T)^n$ 时均成立的一般结论
2010	毕月虹等人 ^[51]	建立气体水合物蓄冷和释冷过程的热力学优化模型, 在给定总蓄冷量条件下, 以熵产生最小为目标导出了其显热传热阶段的最优温度构型和气体水合物相变阶段的相变率最优构型, 结果表明显热传热阶段的工质温度与外界流体温度之比以及相变阶段相变速率均为定值
2014	Thiel等人 ^[52]	澄清了取决于传输过程的有限温差平均驱动力的不可逆性和取决于该驱动力在空间/时间上非均匀分布均方差的不可逆性之间的区别, 通过定义一个新的无量纲量——均分因子量化了与驱动力分布方差相关的不可逆性, 该均分因子与热力学第二定律相联系. 等价因子可用于在系统的平均输出和尺寸均维持不变的条件下降低驱动力分布方差从而提高系统的第二定律效率. 当系统的第二定律效率和均分因子均较低时, 以均分为原理重新设计系统将大有裨益. 讨论了其在电容器充电、建筑取暖、水处理系统的应用
2015	Austbo和Gundersen ^[53]	较为详细地回顾了传热过程的驱动力均分原理相关研究, 将温度差均分、温度差与热流体温度比值均分、温度倒数之差均分、温度差与热流体温度比值平方均分等4种传热策略进行了比较, 结果表明温度差与热流体温度比值均分是最优的, 换热器面积的最优利用对于工作在环境温度以上的传热过程不重要, 而工作在环境温度以下的传热过程, 当驱动力均匀分配时可以得到有效节省
2017	Sieniutycz等人 ^[54]	对于给定传热量和恒定传热系统的换热系统, 导出了系统熵产生最小时传热面积和接触温度的分布规律. 对于典型的换热系统, 熵产生可表示为流体的温度, 将系统的实际熵产生与其最小值相比较可以对系统的热力学可行性和效率做出合理估计

为传热流率为定值), 与温差场均匀性原理^[62]相一致, 线性唯象传热规律下热、冷流体温度之比为定值, 其他传热规律下优化结果与广义对流、线性唯象传热规律下结果存在显著不同; (3) 熵产生最小和焓耗散最小两种优化目标下的优化结果是不同的, 熵产生最小表示一定约束条件下热功转换能力损耗最小, 焓耗散最小表示一定约束条件下热量传递能力损耗最小, 无论是以熵产生最小还是以焓耗散最小为优化目标, 热流率一定的传热策略总是要优于流体温度一定的传热策略; (4) 熵产生均分原理和驱动力均分原理均可以作为熵产生最小最优传热策略的近似, 两者孰优孰劣还与系统具体工质类型及过程热阻模型有关.

对于传热过程动态优化的有限时间热力学研究方法和思路还可进一步拓展到传质过程动态优化. Tsirlin等人^[70]在给定传质量条件下, 研究了普适传质规律下单向等温传质过程和线性传质规律 $[g\alpha\Delta(\mu)]$ 下等温等摩尔双向传质过程熵产生最小化, 并在传热量和传质量均给定条件下, 研究了线性传热传质规律下非等温传质过程的熵产生最小化. Mironova^[71]在给定传质量条件下, 研究了普适传质规律下等温结晶过程熵产生最小化. Tsirlin等人^[72]研究了给定传输通量下一类包括传热、等温传质、等温节流、等温结晶、机械摩擦、化学反应等热力学过程的熵产生最小化, 导出了优化问题的最优性条件. Leskov和Tsirlin^[73]在给定传

表 2 给定传热量条件下换热过程熵耗散最小最优路径研究现状

年份	研究者	主要工作与结论
1996	过增元等人 ^[62]	通过观察顺流、逆流和叉流式换热器冷、热流体温度分布, 唯象提出了优化换热器热性能的温度差均匀性原理——在传热单元数和热容量流比一定时, 换热器的温差场越均匀, 其效能越高
2008	柳雄斌等人 ^[66]	将过增元等人 ^[67,68] 提出的焓和焓分析方法拓展到换热器中, 提出了基于熵耗散的换热器热阻和换热器热阻因子的定义, 建立了基于这一热阻的换热器分析方法, 讨论了传热单元数和热容量流比对换热器热阻的影响
2008	宋伟明等人 ^[55]	利用熵耗散极值原理对两股流和三股一维换热器的传热过程进行优化, 证明对给定参数的流体进行加热或冷却时, 不管是换热量一定时寻求熵耗散最小, 还是熵耗散一定时寻求换热量最大, 都应使冷、热流体的温差场完全均匀, 从而理论上初步证明了温差场均匀性原理 ^[62] 的正确性
2009	夏少军等人 ^[69]	应用欧拉-拉格朗日方程法研究了牛顿传热规律下给定传热量的换热过程熵耗散最小化, 结果表明过程热、冷流体温度之差为定值, 与温差场均匀性原理 ^[62] 相一致, 并将优化结果与熵产生最小下优化结果进行了比较
2010	郭江峰等人 ^[56]	建立了熵耗散均匀分布原理: 在给定热负荷和换热面积条件下, 当局部熵耗散率在换热器中均匀分布时, 总的熵耗散率取得最小值. 并且证明了当传热系数不固定时, 熵耗散均匀分布所得出的总熵耗散率小于温差均匀分布所得出的总熵耗散率, 而有效度大于温差均匀分布的结果. 如果假设传热系数固定, 则熵耗散均匀分布等价于冷热流体的温差均匀分布
2010	郭江峰等人 ^[57]	在换热量和换热面积给定的条件下, 当传热系数不固定时, 对熵耗散均匀分布原理、温差均匀分布原理和热流密度均匀分布原理的优化结果进行对比, 结果表明, 温差均匀分布原理与熵耗散均匀分布原理所得结果的误差很小, 且远小于热流密度均匀分布原理与熵耗散均匀分布原理所得结果的误差
2010	夏少军等人 ^[59]	应用欧拉-拉格朗日方程法研究了广义辐射传热规律 $[q \propto \Delta(T^n)]$ 下给定传热量的换热过程熵耗散最小化, 结果表明热、冷流体温度的 n 次幂之差与热流体温度的 $(n-1)/2$ 次幂两者之比为定值, 并将优化结果与熵产生最小、热流率一定、热流体温度一定的传热策略进行了比较
2016	夏少军等人 ^[60]	应用欧拉-拉格朗日方程法研究了普适传热规律 $\{[q \propto \Delta(T^n)]^m\}$ 下给定传热量的换热过程熵耗散最小化, 结果表明热、冷流体温度的 n 次方之差与热流体温度的 $(n-1)/(m+1)$ 次幂两者之比为定值, 并将优化结果与熵产生最小、热流率一定、热流体温度一定的传热策略进行了比较

质量和流体组分条件下, 研究了薄膜分离过程的熵产生最小化, 得到了近理想气体和近理想溶液的压力和薄膜接触面积最佳变化规律. 夏少军等人^[74~78]将有限时间热力学和质量熵耗散极值原理相结合, 研究了给定传质量条件下单向等温传质^[74,75]、等温节流^[76]、等温结晶^[77]、等温等摩尔双向传质^[78]过程的质量熵耗散最小化. 毕月虹等人^[79]和夏少军等人^[80]在给定传质量条件下, 研究了线性传质规律下气体水合物结晶过程^[79]和普适传质规律下等温结晶过程^[80]熵产生最小化. 陈林根等人^[81]研究了中空纤维膜接触器脱出酸化海水中 CO_2 过程, 在壳程通过酸化海水, 管程采用 N_2 和 CO_2 混合气体吹扫条件下, 以熵产率最小对传质过程进行了优化, 结果表明过程熵产生最小时传质通量的平方与气相二氧化碳摩尔分数成正比, 并将优化结果与化学势差一定及管程采用 N_2 吹扫传质策略进行了比较.

有限时间热力学理论的研究对象实质上主要是以温度为驱动力、熵为位移和以化学势为驱动力、质量

为位移的传统热力学过程和系统. 1998年, 陈林根等人^[20,82,83]将热力学优化的研究思想和Radcenenco的广义热力学理论^[84]相结合, 提出把对传热过程和热机的有限时间热力学分析方法和思路拓广到自然界和工程界中各种存在广义势差和广义位移的非传统热力过程和系统, 广泛采用内可逆模型以突出分析主要不可逆性, 建立起相关设计优化理论, 即“广义热力学优化理论”^[25,26,85]. 单从“广义热力学优化理论”这一名词的表面含义来看, 它所覆盖的领域是相当广泛的. 凡是涉及物理量传递与转换的过程和系统均是广义热力学优化理论的研究对象. 已有学者将传统热力过程与循环的有限时间热力学研究思路拓广到流体流动做功过程^[83,86~88]、电容器充电过程^[89~96]、电池做功过程^[97~102]、经济贸易过程和系统^[103~113]等一系列非传统热力过程和循环的性能优化中, 对于这些具体学科研究对象的优化细节和研究结果还可参考本文作者近期出版的专著^[25]. 然而上述研究均仅限于具体的研究对象, 没有系统地讨论这些研究对象与传统热力研究

对象之间的区别与联系,也就无法从个别的研究结论中获得具有一般意义上普适的研究结果.与前述大量研究工作重点对于各类学科中具体研究对象个性的优化研究不同,本文将着重对上述各类过程优化问题进行总结与归纳,抽出共性,突出本质,基于广义热力学优化理论的研究思路,建立其广义流传递过程物理模型,形成相应的动态优化问题,寻求其统一的优化方法,得到普适的优化结果.

2 物理模型

图1为广义流传递过程模型.通过将传热过程、等温传质过程、电容器充电过程和经济贸易过程进行对比可发现一些共性,如表3所示:每种传递过程都存在对应的强度量广义势 X ,由于广义势差 ΔX 的存在形成了广义力 F ,在广义力 F 的作用下驱动相应的广义流 J 传递,在广义流传递过程中不可避免地要克服广义流阻 $R=F/J$,单位广义势 X 的增加导致系统广义流总量 Q 的变化称为该系统的广义势容 $C_X=dQ/dX$,每种广义流传递过程均服从广义传输规律 $J_1(X_1, X_2)$,且满足:(1)当 $X_1>X_2$ 时,有 $J_1(X_1, X_2)>0$;(2)当 $X_1<X_2$ 时,有 $J_1(X_1, X_2)<0$;(3)当 $X_1=X_2$ 时,有 $J_1(X_1, X_2)=0$.在各种传递过程中广义流是守恒的,即

$$\frac{dQ_2}{dt} = C_{X_2} \frac{dX_2}{dt} = J_1(X_1, X_2). \quad (1)$$

式(1)在传热过程中对应于能量守恒定律;在等温传质过程中对应于质量守恒定律;在导电过程中对应于电荷守恒定律;在经济贸易过程中对应于商品守恒定律. C_X 表示广义势容 C 为广义势 X 的函数,具体体现为:传热过程中流体的热容 C 随温度 T 变化;等温传质过程中混合物质容 C 随浓度 c 变化(或化学势容 C_μ 随化学势 μ 变

化);电容器充电过程中电容 C 随电势 U 变化;贸易过程中经济库经济容量 C 随价格 P 变化等.广义流传递过程是在有限时间 τ 内发生的,并且过程的广义流传递总量 Q_2 一定,即

$$\int_0^\tau J_1(X_1, X_2) dt = \int_{X_{20}}^{X_{2\tau}} C_{X_2} dX_2 = Q_2. \quad (2)$$

在广义流传递过程中,广义势库1的广义势 X_1 是完全可控的,广义势库2初态与末态的广义势均为已知量,分别为 $X_2(0)=X_{20}$ 和 $X_2(\tau)=X_{2\tau}$.广义流传递过程的广义耗散 ΔD 为

$$\Delta D = \int_0^\tau J_1 \cdot f_1(X_1, X_2) dt, \quad (3)$$

式中, $f_1(X_1, X_2)$ 为广义耗散力,由广义耗散目标函数和传递过程的广义流率共同确定,定义为广义耗散率与广义流率之商,其为广义势 X_1 和 X_2 的函数.

3 优化结果

现在的问题为在广义流传递总量 Q_2 一定下使广义耗散 ΔD 最小化.式(1)~(3)分别为优化问题的约束条件、边界条件和目标函数,本节将结论以定理的形式给出,其严格的数学证明见本文附录.

定理: 在微分方程式(1)的约束下,式(3)中的 ΔD 取最小值的最优性条件为

$$J_1^2 \frac{\partial f_1}{\partial X_1} / \frac{\partial J_1}{\partial X_1} = \text{const}, \quad (4)$$

且该最优性条件与广义势容 C_{X_2} 无关.

定义 $\phi(x)$ 和 $\psi(x)$ 为仅依赖于自变量 x 的单值函数,基于上述定理,可得如下推论.

推论1: 广义流传递过程最小广义耗散时广义流率 J_1 为定值的最优性条件为

$$\frac{\partial f_1}{\partial X_1} / \frac{\partial J_1}{\partial X_1} = \phi(J_1). \quad (5)$$

证明: 将式(5)代入式(4)得

$$J_1^2 \cdot \phi(J_1) = \text{const}. \quad (6)$$

式(6)为关于广义流率 J_1 的代数方程,显然有 $J_1=\text{const}$ 成立,故推论1得证.

推论2: 令 $\sigma_D=dD/dt$,广义流传递过程最小广义耗散时局部广义耗散率 dD/dt 保持为定值的最优性条件为

图1 广义流传递过程模型

表 3 各种流动过程间物理量一一对比关系(标量情形)

广义流传递过程	热力学和传热传质学		电学	经济学
	传热过程	等温传质过程	电容器充电过程	经济贸易过程
广义势: X	温度: T	化学势: μ ; 浓度: c ; 压力: p	电势: U	价格: P
广义力: $F=\Delta(X)$	温度差: ΔT ; 温度的四次方之差: $\Delta(T^4)$; 温度的倒数之差: $\Delta(T^{-1})$	化学势差: $\Delta(\mu)$; 浓度差: Δc ; 压力差: Δp	电压: $V=U_1-U_2$	价格差: ΔP
广义流: Q	传热量: Q_h	传质量: G	导电量: Q_e	商品数量: N
广义流率: $J = \frac{dQ}{dt}$	热流率: $q = \frac{dQ_h}{dt}$	质流率: $g = \frac{dG}{dt}$	电流率: $I = \frac{dQ_e}{dt}$	商品流率: $n = \frac{dN}{dt}$
广义泛化流: D	焓流: $S=Q/T$; 焓流: $E=QT$; 流: $Ex=Q(1-T_0/T)$	焓流: $S=G\mu/T$; 积流: $E=Gc$ 或 $E=Gp$	电功流: $E=UI$	资本流: $S=NP$
广义流阻: $R=F/J$	热阻: $R=\Delta T/q$; $R=\Delta(T^{-1})/q$; $R=\Delta(T^{-4})/q$	质阻: $R=\Delta(\mu/T)/q$; $R=(\Delta c)/g$; $R=(\Delta p)/g$	电阻: $R=V/I$	商品流阻: $R=(\Delta P)/n$
广义势导率 $k=1/R$	热导率 k	质导率 k	电导率 $\rho=1/R$	商品传输系数 α
广义势容: $C_x = \frac{dQ}{dX}$	热容: $C_T = \frac{dQ_h}{dT}$	化学势容: $C_\mu = \frac{dG}{d\mu}$	电容: $C_e = \frac{dQ_e}{dU}$	经济容量: $C_p = \frac{dN}{dP}$
广义传输规律: $J(X_1, X_2)$	Fourier热传导定律: $q=-\lambda\Delta T$; 牛顿对流规律: $q=k\Delta T$; 线性唯象传热规律: $q=k\Delta(T^{-1})$; Dulong-Petit传热规律: $q=k(\Delta T)^{5/4}$; 辐射传热规律: $q=k\Delta(T^4)$; 广义对流传热规律: $q=k(\Delta T)^n$; 广义辐射传热规律: $q=k\Delta(T^n)$; 普适传热规律: $q=k\Delta(T^m)$; 复合传热规律: $q = k_1(\Delta T)^m + k_2\Delta(T^4)$	线性传质规律: $g=h\Delta(\mu/T)$; 菲克扩散传质规律: $g=h\Delta(c)$; 或 $g=h\Delta(\exp(\mu/RT))$; Darcy渗透传质规律: $g=h\Delta(p)$; 基于伯努利方程的平方根 节流传质规律: $g=h(\Delta p)^{1/2}$; 广义节流传质规律: $g=h(\Delta p)^m$	欧姆定律: $I=V/R$; “差函数”形式电流传输规律: $I=\gamma(U_1-U_2)$; “函数差”形式电流传输规律: $I=\gamma(U_1)-\gamma(U_2)$	线性传输规律: $n=\alpha(P_1-P_2)$; 考虑供需价格弹性的普适 传输规律: $n = \alpha(P_1^m - P_2^m)$
广义耗散: $\Delta D = \int_0^t J \cdot f(X_1, X_2)dt$	熵产生: $\Delta S = \int_0^t [q \cdot \Delta(1/T)]dt$; 损失: $Ex_t = \int_0^t T \cdot [q \cdot \Delta(1/T)]dt$; 焓耗散: $\Delta E_h = \int_0^t [q \cdot (\Delta T)]dt$	熵产生: $\Delta S = \int_0^t [g \cdot \Delta(\mu/T)]dt$; 积耗散: $\Delta E_m = \int_0^t [g \cdot \gamma(c_1, c_2)]dt$	焦耳热耗散: $E_R = \int_0^t I^2 R dt$	资本耗散: $\Delta S = \int_0^t [n \cdot \Delta(P)]dt$

$$J_1 \cdot \left(\frac{\partial \sigma_D}{\partial X_1} \right) / \left(\frac{\partial J_1}{\partial X_1} \right) = \phi(\sigma_D). \quad (7)$$

证明: 将 $f_1=\sigma_D/J_1$ 代入式(4)得

$$-\sigma_D + J_1 \cdot \left(\frac{\partial \sigma_D}{\partial X_1} \right) / \left(\frac{\partial J_1}{\partial X_1} \right) = \text{const}. \quad (8)$$

将式(7)代入式(8)得

$$\phi(\sigma_D) - \sigma_D = \text{const}. \quad (9)$$

式(9)为关于 σ_D 的代数方程, 显然有 $\sigma_D=\text{const}$ 成立, 故推论2得证.

推论3: 当广义流率 J_1 与广义耗散力 f_1 满足关系

$J_1=\phi(f_1)$ 时, 广义流传递过程最小广义耗散时的广义耗散力 f_1 、广义流率 J_1 和局部广义耗散率 dD/dt 均为定值, 若进一步有广义力 $F_1=\psi(f_1)$, 则广义力 F_1 也为定值.

证明: 当 $J_1=\phi(f_1)$ 时, 将其代入式(4)得

$$\left(\frac{d\phi}{df_1}\right)/\phi^2 = \text{const.} \quad (10)$$

显然式(10)为关于广义耗散力 f_1 的代数方程, 必然有 $f_1=\text{const}$, 进一步得广义流率 $J_1=\phi(f_1)=\text{const}$, 广义耗散率 $dD/dt=J_1 \cdot f_1=f_1 \cdot \phi(f_1)=\text{const}$, 广义力 $F_1=\psi(f_1)=\text{const}$. 故推论3得证.

推论4: 若广义流率 J_1 与广义力 F_1 间满足关系式 $J_1 = \phi(X_2) \cdot F_1^m$, 并且广义耗散力 f_1 与广义力 F_1 间满足关系式 $F_1=\psi(X_1) \cdot F_1$, 那么该广义流传递过程最小广义耗散时局部广义耗散率 dD/dt 保持为定值.

证明: 将 $J_1 = \phi(X_2) \cdot F_1^m$ 和 $F_1=\psi(X_2) \cdot F_1$ 代入式(4)得

$$\begin{aligned} J_1^2 \frac{\partial f_1}{\partial X_1} / \frac{\partial J_1}{\partial X_1} &= \frac{\phi(X_2) \cdot \psi(X_2) \cdot F_1^{m+1}}{m} \\ &= \frac{J_1 \cdot f_1}{m} = \frac{1}{m} \cdot \frac{dD}{dt} = \text{const.} \end{aligned} \quad (11)$$

由式(11)可见推论4得证.

推论5: 若广义流率 J_1 可写为形式 $J_1=k_1 X_2 \cdot \phi(X_1/X_2)$, 并且广义耗散力 $f_1=\Delta(X^{-1})$, 则对应于过程广义耗散最小时的广义势之比为定值即 $X_1/X_2=\text{const}$, 此时的局部广义耗散率也为定值即 $dD/dt=\text{const}$.

证明: 将 $J_1=k_1 X_2 \cdot \phi(X_1/X_2)$ 和 $f_1=\Delta(X^{-1})$ 代入式(4)得

$$J_1^2 \frac{\partial f_1}{\partial X_1} / \frac{\partial J_1}{\partial X_1} = k_1 \left(\frac{X_2}{X_1} \right)^2 \left[\phi \left(\frac{X_1}{X_2} \right) \right]^2 = \text{const.} \quad (12)$$

式(12)为关于广义势之比 X_1/X_2 的代数方程, 易得 $X_1/X_2=\text{const}$, 进一步有局部广义耗散率为 $dD/dt=k_1 \cdot \phi(X_1/X_2) \cdot (1-X_2/X_1)=\text{const}$, 故推论5得证.

上述推导过程是基于广义势 X_1 为控制变量推导的, 若优化问题变为以广义势 X_2 为控制变量, 那么只需将各公式中的 X_1 替换为 X_2 即可.

4 应用

4.1 传热过程优化

4.1.1 熵产生最小

考虑文献[33,34,45~50,59,60,63~65,69]中的换热器传热过程模型, 如图2所示, 热流体温度 T_1 完全可控,

图2 换热器传热过程模型

冷流体的热容和温度分别为 C_2 和 T_2 , 流体间热流率为 $q_1(T_1, T_2)$. 广义势分别为 $X_1=T_1$ 和 $X_2=T_2$, 广义流率为 $J_1(X_1, X_2)=q_1(T_1, T_2)$, 广义流守恒方程为

$$C_2 dT_2 / dt = q_1. \quad (13)$$

当以熵产生最小为优化目标时, 广义耗散力为 $f_1(T_1, T_2)=1/T_2-1/T_1$, 式(4)变为

$$\frac{q_1^2}{T_1^2} / \left(\frac{\partial q_1}{\partial T_1} \right) = \text{const.} \quad (14)$$

式(14)为传热过程熵产生最小化时的最优性条件.

将 $q_1(T_1, T_2) = k_1(T_1^n - T_2^n)^m$ 代入式(14)得

$$(T_1^n - T_2^n) / T_1^{(n+1)/(m+1)} = \text{const.} \quad (15)$$

式(15)为文献[63,64]普适传热规律 $[q \propto (\Delta(T^n))^m]$ 下传热过程熵产生最小化的研究结果, 可见此时热、冷流体温度的 n 次幂之差与热流体温度的 $(n+1)/(m+1)$ 次幂之比为定值. 将热、冷流体温度最优关系式(15)和能量方程式(13)相结合, 可进一步求出热流体温度随时间或位置变化规律的解析解或数值解. 在工程上, 可以通过调节流体的热容流率或分段布置不同温度的点热源来实现热流体连续的最优温度分布. 将 $[q \propto \Delta(T)]$ 和 $[q \propto (\Delta(T^{-1}))^m]$ 代入式(7)显然成立, 这表明对应于传热过程熵产生最小化时局部熵产率为定值不仅在牛顿传热规律 $[q \propto \Delta(T)]$ 下成立, 而且在 $[q \propto (\Delta(T^{-1}))^m]$ 传热规律下均成立, 此即为文献[63,64]得到的研究结论.

在线性不可逆热力学中, 热流率 q 以温度倒数之差 f 为驱动力 F , 若热流率 q 仅为驱动力 f 的函数即 $q=\Phi(f)$, 由推论3可知传热过程驱动力 F 、热流率 q 和局部熵产率 dS/dt 均保持为定值, 此时传热过程最小熵产生最优传热策略等价于热流均分原理^[31]、驱动力均分原

理^[31,36,37,45]和熵产生均分原理^[31]. 牛顿传热规律的表达式为 $q_1=k\Delta(T)$, 在线性不可逆热力学中, 传热流率 q_1 通常写为 $q_1=\alpha_q\Delta(T^{-1})$, 其中 α_q 称为线性唯象传热系数, 对比 q_1 和 q_1' 得 $\alpha_q=kT_1^2$, 此时 q_1' 可写为

$$q_1'=kT_2 \cdot \frac{T_1}{T_2} \left(\frac{T_1}{T_2} - 1 \right) = kT_2 \cdot \phi(T_1/T_2). \quad (16)$$

由推论5可知, 此时对应于熵产生最小时温度比为定值即 $T_1/T_2=\text{const}$, 局部熵产率也为定值 $dS/dt=\text{const}$, 而此时驱动力 $\Delta(T^{-1})$ 并不为定值, 即熵产生均分原理优于驱动力均分原理^[47]. 类似地, 同样可证明当线性唯象传热系数 $\alpha_q=kT_1T_2$ 和 $\alpha_q=kT_2^2$ 时, 该结论同样成立.

将 $q_1=k_c(T_1-T_2)^m+k_r(T_1^4-T_2^4)$ 代入式(14)得

$$\frac{[k_c(T_1-T_2)^m+k_r(T_1^4-T_2^4)]^2}{T_1^2[mk_c(T_1-T_2)^{m-1}+4k_rT_1^3]} = \text{const}. \quad (17)$$

式(17)为对流-辐射复合传热规律 $\{q \propto [(\Delta T)^m + \Delta(T^4)]\}$ 下传热过程熵产生最小时的热、冷流体温度最佳关系.

4.1.2 熵损失最小

当以熵损失最小为优化目标时, 熵损失的计算与参考环境温度的选取有关.

若以热流体温度 T_1 为参考环境温度, 广义耗散力为 $f_1(T_1, T_2)=T_1/T_2-1$, 式(4)变为

$$\frac{q_1^2}{T_2} / \frac{\partial q_1}{\partial T_1} = \text{const}. \quad (18)$$

式(18)为以热流体温度为参考环境温度下传热过程熵损失最小时的最优性条件.

将 $q_1(T_1, T_2)=k_1(T_1^n-T_2^n)^m$ 代入式(18)得

$$(T_1^n-T_2^n)^{m+1} / (T_2T_1^{n-1}) = \text{const}. \quad (19)$$

式(19)为文献[65]普适传热规律 $[q \propto (\Delta(T^n))^m]$ 以热流体温度为参考环境温度下传热过程熵损失最小时的最优性条件. 对于以熵损失最小为目标, 若广义力为 $F_1=T_1-T_2$, 则广义耗散力为 $f_1=F_1/T_2$, 由推论4可知, $q_1=\phi(T_2) \cdot (T_1-T_2)^m$ 传热规律下传热过程熵损失最小时的局部熵损失率为常数, 这是对文献[65]研究结论的一个拓展.

若以冷流体温度 T_2 为参考环境温度, 广义耗散力变为 $f_1(T_1, T_2)=1-T_2/T_1$, 式(4)变为

$$\frac{q_1^2 T_2}{T_1^2} / \left(\frac{\partial q_1}{\partial T_1} \right) = \text{const}. \quad (20)$$

式(20)为以冷流体温度为参考环境温度下传热过程熵损失最小时的最优性条件.

将 $q_1(T_1, T_2)=k(T_1^n-T_2^n)^m$ 代入式(20)得

$$(T_1^n-T_2^n)^{m+1} T_2 / T_1^{n+1} = \text{const}. \quad (21)$$

式(21)为普适传热规律 $[q \propto (\Delta(T^n))^m]$ 以冷流体温度为参考环境温度下传热过程熵损失最小时的最优性条件.

对于以熵损失最小为目标, 若广义力为 $F_1=(T_2^{-1}-T_1^{-1})$, 则广义耗散力为 $f_1(T_1, T_2)=F_1 \cdot T_2$. 由推论4可知, 此时 $q_1=\phi(T_2) \cdot (T_2^{-1}-T_1^{-1})^m$ 传热规律下传热过程熵损失最小时的局部熵损失率为定值. 显然, 对应于传热过程熵损失最小时的局部熵损失率为定值的结论在线性唯象传热规律 $[q \propto \Delta(T^{-1})]$ 下成立, 但在牛顿传热规律 $[q \propto \Delta(T)]$ 下不成立.

4.1.3 热量熵耗散最小

当以热量熵耗散最小为优化目标时, 广义耗散力为 $f_1(T_1, T_2)=T_1-T_2$, 式(4)变为

$$q_1^2 / \frac{\partial q_1}{\partial T_1} = \text{const}. \quad (22)$$

式(22)为传热过程熵耗散最小时的最优性条件.

将 $q_1(T_1, T_2)=k_1(T_1^n-T_2^n)^m$ 代入式(22)得

$$(T_1^n-T_2^n) / T_1^{(n-1)/m+1} = \text{const}. \quad (23)$$

式(23)为文献[60]普适传热规律 $[q \propto (\Delta(T^n))^m]$ 下传热过程熵耗散最小化时的研究结果, 可见此时热、冷流体温度的 n 次幂之差与热流体温度的 $(n-1)/(m+1)$ 次幂之比为定值. 由推论3可知, 对一类差函数形式的传热规律 $q_1=\phi(T_1-T_2)$, 传热过程最小熵耗散时的温度差 T_1-T_2 、热流率 q 和局部熵耗散率 dE/dt 均保持为常数, 与温差场均匀性原理^[62]相一致, 这是对文献[60]研究结论的一个拓展.

将 $q_1=k_c(T_1-T_2)^m+k_r(T_1^4-T_2^4)$ 代入式(22)得

$$\frac{k_c(T_1-T_2)^m+k_r(T_1^4-T_2^4)}{\sqrt{mk_c(T_1-T_2)^{m-1}+4k_rT_1^3}} = \text{const}. \quad (24)$$

式(24)为对流-辐射复合传热规律 $\{q \propto [(\Delta T)^m + \Delta(T^4)]\}$ 下传热过程熵耗散最小时的热、冷流体温度最佳关系.

4.2 等温节流过程优化

4.2.1 熵产生最小

考虑文献[72,76]的等温节流过程, 如图3所示, 截面1-1和2-2为在距孔口较远的地方, 流体处于平衡状态, 等温气体膨胀过程压力由 p_1 降低到 p_2 , 膨胀过程的质量流率为 $g(p_1, p_2)$, 广义势分别为 $X_1=p_1$ 和 $X_2=p_2$, 广义流率为 $J_1(X_1, X_2)=g(p_1, p_2)$, 广义流守恒方程为

$$\dot{p}_1 = -\frac{RT}{V_1}g(p_1, p_2), p_1(0) = p_{10}, \quad (25)$$

式中, V_1 为离开气体离开腔室的总体积, 为定值.

当以熵产生最小为优化目标时, 广义耗散力为 $f_1(p_1, p_2)=R\ln(p_1/p_2)$, 选低压侧压力 p_2 为控制变量, 式(4)变为

$$\frac{g^2}{p_2} / \frac{\partial g}{\partial p_2} = \text{const}. \quad (26)$$

式(26)为文献[72]中等温节流过程熵产生最小时的最优性条件. 当节流过程服从 $[q\propto(\Delta p)^m]$ 传质规律, 式(26)变为

$$(p_1 - p_2)^{m+1} / p_2 = \text{const}. \quad (27)$$

由式(27)可见, 此时过程高、低压侧压力差的 $m+1$ 次幂与低压侧压力之比为定值. 当节流过程服从线性传质规律 $[g\propto\Delta u]$ 时, 考虑 $\mu=\mu_0+RT\ln(p)$, 将其代入式(26)得

$$p_1 / p_2 = \text{const}. \quad (28)$$

此时过程高、低压侧压力之比为定值.

图3 等温节流过程模型

4.2.2 质量积耗散最小

当以质量积耗散最小为优化目标时, 广义耗散力为 $f_1(p_1, p_2)=p_1-p_2$, 式(4)变为

$$g^2 / \frac{\partial g}{\partial p_2} = \text{const}. \quad (29)$$

式(29)为文献[76]等温节流过程积耗散最小时的最优性条件. 当节流过程服从 $[q\propto(\Delta p)^m]$ 传质规律, 式(29)变为

$$p_1 - p_2 = \text{const}. \quad (30)$$

由式(30)可见, 此时过程高、低压侧压力之差为定值. 当节流过程服从线性传质规律 $[g\propto\Delta u]$ 时, 考虑 $\mu=\mu_0+RT\ln(p)$, 将其代入式(29)得

$$p_2 [\ln(p_1 / p_2)]^2 = \text{const}. \quad (31)$$

此时过程质量流率的平方与低压侧压力的乘积为定值.

4.3 单向等温传质过程优化

4.3.1 熵产生最小

考虑文献[46,70,72,74,75]的单向等温传质过程, 如图4所示, 高低浓度侧均为二元混合物, 其中参与传质的组分称为关键组分, 其余组分统称为惰性成分, 混合物接触面仅允许关键组分通过. c_1 和 c_2 ($c_1 > c_2$) 分别为两侧混合物中关键组分的浓度, m_1 和 m_2 分别为两侧混合物中的关键组分的摩尔流率, M_1 和 M_2 分别为高低浓度侧混合物的总摩尔流率. l 为传质设备的总长度, 过程传质流率为 g_1 , 满足关系式 $g_1 = -dm_1/dx = dm_2/dx$. 广义势分别为 $X_1=c_1$ 和 $X_2=c_2$, 广义流率为 $J_1(X_1, X_2)=g_1(c_1, c_2)$, 广义流守恒方程为

$$\frac{dc_2}{dx} = \frac{g_1(c_1, c_2)(1-c_2)^2}{\tilde{m}_2}, \quad (32)$$

式中, $\tilde{m}_2$ 为低浓度侧惰性成分的摩尔流率.

图4 单向等温传质过程模型

当以熵产生最小为优化目标时, 广义耗散力为 $f_1(X_1, X_2) = R \ln(c_1/c_2)$, 选浓度 c_1 为控制变量, 式(4)可变为

$$\frac{g_1^2}{c_1} / \frac{\partial g_1}{\partial c_1} = \text{const.} \quad (33)$$

式(33)为文献[46,70,72]单向等温传质过程熵产生最小时的最优性条件. 当传质过程服从线性传质规律 $[g \propto \Delta(\mu)]$ 时, 式(33)变为

$$c_1/c_2 = \text{const.} \quad (34)$$

此时过程高低浓度侧关键组分浓度之比为定值. 当传质过程服从菲克扩散传质规律 $[g \propto \Delta(c)]$ 时, 式(33)变为

$$(c_1 - c_2)^2 / c_1 = \text{const.} \quad (35)$$

此时过程高低浓度侧关键组分浓度差的平方与高浓度侧关键组分浓度之比为定值.

4.3.2 质量积耗散最小

当以传质过程质量积耗散最小为优化目标时, 由文献[74,75]可知广义耗散力为 $f_1(X_1, X_2) = (c_1 - c_2) \cdot [1 - (c_1 + c_2)/2]$, 选浓度 c_1 为控制变量, 式(4)变为

$$g_1^2(1 - c_1) / \frac{\partial g_1}{\partial c_1} = \text{const.} \quad (36)$$

式(36)为文献[75]单向等温传质过程积耗散最小时的最优性条件. 当传质过程服从线性传质规律 $[g \propto \Delta(\mu)]$ 时, 式(36)变为

$$c_1(1 - c_1)[\ln(c_1/c_2)]^2 = \text{const.} \quad (37)$$

由式(37)可知, 此时过程传质流率的平方、高浓度侧关键组分浓度、高浓度侧惰性组分浓度三者之积为定值. 当传质过程服从菲克扩散传质规律 $[g \propto \Delta(c)]$ 时, 式(36)变为

$$(1 - c_1)(c_1 - c_2)^2 = \text{const.} \quad (38)$$

由式(38)可知, 此时过程传质流率的平方与高浓度侧惰性组分浓度两者之积为定值.

4.4 等摩尔双向等温传质过程优化

4.4.1 熵产生最小

考虑文献[70,78]中等摩尔双向等温传质过程, 如图5所示, 过程两侧流体仅由参与质量传递的组分1和组分2组成的二元混合物, 根据组分1浓度的高低, 流体1称为高浓度混合物, 流体2称为低浓度混合物. c_1 和

图5 等摩尔双向等温传质过程模型

$c_2(c_1 > c_2)$ 分别为高、低浓度侧混合物中组分1的浓度, m_1 和 m_2 分别为两侧混合物中的组分1的摩尔流率, M_1 和 M_2 分别为两侧混合物的总摩尔流率. l 为传质设备的总长度, 传质流率为 g , 满足关系式 $g = -dm_1/dx = dm_2/dx$. 广义势分别为 $X_1 = c_1$ 和 $X_2 = c_2$, 广义流率为 $J_1(X_1, X_2) = g(c_1, c_2)$, 广义流守恒方程为

$$M_1 dc_1/dx = -g(c_1, c_2). \quad (39)$$

当以熵产生最小为优化目标, 由文献[70]可知, 对应的广义耗散力为 $f_1(X_1, X_2) = R \ln\{c_1(1 - c_2)/[c_2(1 - c_1)]\}$, 选 c_2 为控制变量, 式(4)可变为

$$\frac{g^2}{c_2(c_2 - 1)} / \frac{\partial g}{\partial c_2} = \text{const.} \quad (40)$$

式(40)为等摩尔双向等温传质过程熵产生最小时的最优性条件. 若传质过程服从扩散传质规律 $[g \propto \Delta(c)]$, 将 $g = k(c_1 - c_2)$ 代入式(40)得

$$\frac{(c_1 - c_2)^2}{c_2(1 - c_2)} = \text{const.} \quad (41)$$

式(41)为扩散传质规律下等摩尔双向等温传质过程最小熵产生时的最优性条件.

4.4.2 质量积耗散最小

当以传质过程质量积耗散最小为优化目标时, 由文献[78]可知, 广义耗散力为 $f_1(X_1, X_2) = 2(c_1 - c_2)$, 同样选 c_2 为控制变量, 式(4)可变为

$$g^2 / \frac{\partial g}{\partial c_2} = \text{const.} \quad (42)$$

式(42)为等摩尔双向等温传质过程积耗散最小时的最优性条件. 若传质过程服从扩散传质规律 $[g \propto \Delta(c)]$, 将 $g = k(c_1 - c_2)$ 代入式(42)得

$$c_1 - c_2 = \text{const.} \quad (43)$$

由式(43)可知, 此时过程两侧相同组分的浓度之差为

定值^[60].

4.5 等温结晶过程优化

4.5.1 熵产生最小

考虑文献[71,72,77,79,80]中的等温结晶过程, 广义势分别为 $X_1=c_1$ 和 $X_2=c_{eq}$, 广义流率为 $J_1(X_1, X_2)=g(M^{2/3}, c_1, c_{eq})$, 广义流守恒方程为

$$dM/dt = g(M^{2/3}, c_1, c_{eq}), M(0) = M_0, M(\tau) = \bar{M}, \quad (44)$$

式中, τ 为结晶过程的总时间, $g(M^{2/3}, c_1, c_{eq})$ 为结晶过程传质流率, 其为传质面积 $F_\Sigma(M^{2/3})$ 、关键组分实际浓度 c_1 和平衡浓度 c_{eq} 的函数.

当以熵产生最小为优化目标时, 广义耗散力为 $f_1(X_1, X_2)=R\ln(c_1/c_{eq})$, 式(4)变为

$$\frac{g^2(M^{2/3}, c_1, c_{eq})}{c_1} / \frac{\partial g}{\partial c_1} = \text{const}. \quad (45)$$

式(45)为文献[71,72,80]结晶过程熵产生最小化时的最优性条件. 若结晶过程服从线性传质规律 $[g \propto \Delta(\mu)]$, 将其代入式(45)可得

$$M^{2/3}[\ln(c_1/c_{eq})]^2 = \text{const}. \quad (46)$$

式(46)即为线性传质规律下等温结晶过程最小熵产生时的最优性条件^[71,72,80]. 若结晶过程服从菲克扩散传质规律 $[g \propto \Delta(c)]$, 将其代入式(45)可得

$$M^{2/3}(c_1 - c_{eq})^2 / c_1 = \text{const}. \quad (47)$$

式(47)即为扩散传质规律下等温结晶过程最小熵产生时的最优性条件^[71,72,80].

4.5.2 质量积耗散最小

当以传质过程质量积耗散最小为优化目标时, 由文献[77]可知, 广义耗散力变为 $f_1(X_1, X_2)=c_1 - c_{eq}$, 式(4)可变为

$$g^2(M^{2/3}, c_1, c_{eq}) / \frac{\partial g}{\partial c_1} = \text{const}. \quad (48)$$

式(48)为结晶过程积耗散最小化时的最优性条件. 若结晶过程服从线性传质规律 $[g \propto \Delta(\mu)]$, 将其代入式(48)可得

$$M^{2/3}[\ln(c_1/c_{eq})]^2 c_1 = \text{const}. \quad (49)$$

式(49)即为线性传质规律下等温结晶过程积耗散最小

时的最优性条件. 若结晶过程服从菲克扩散传质规律 $[g \propto \Delta(c)]$, 将其代入式(48)可得

$$M^{2/3}(c_1 - c_{eq})^2 = \text{const}. \quad (50)$$

式(50)即为扩散传质规律下等温结晶过程积耗散最小时的最优性条件^[77].

4.6 电容器充电过程优化

考虑文献[89~91,94,96,114~116]中简单RC电路电容器充电过程, 如图6所示, 电源电压 $V_S(t)$ 为完全可控变量, 因此可以随意改变其随时间变化的最优路径, 充电过程的总时间 τ 为有限值, 优化问题的边界条件为 $V_C(0)=0$ 和 $V_C(\tau)=V_H$. 广义势分别为 $X_1=V_S$ 和 $X_2=V_C$, 广义流率为 $J_1(X_1, X_2)=I(V_S, V_C)$, 广义流守恒方程为

$$C(V_C) \frac{dV_C}{dt} = I(V_S, V_C). \quad (51)$$

以充电过程的焦耳热耗散最小为目标, 根据文献[96]可知, 广义耗散力为 $f_1(X_1, X_2)=V_S - V_C$, 式(4)变为

$$I^2(V_S, V_C) / \frac{\partial I}{\partial V_S} = \text{const}. \quad (52)$$

式(52)为RC电路焦耳热耗散最小时的最优性条件. 若电阻器的电阻 R 为定值, 电流服从常见的欧姆定律 $I=(V_S - V_R)/R$, 将其代入式(52)可得

$$V_S - V_R = \text{const}. \quad (53)$$

除了常见的欧姆定律外, 电流 I 可以为其电压 $V_R=V_S - V_C$ 的非线性函数即 $I=\phi(V_R)$ ^[92,93], 式中函数 $\phi(V_R)$ 满足约束条件: (1) $\phi(0)=0$; (2) 对于所有的自变量 $V_R \neq 0$,

图6 简单的RC电路模型

$V_R^* \phi(V_R) > 0$ 恒成立; (3) $d\phi/dV_R > 0$. 一个典型的 $\phi(V_R)$ 例子为^[92,93]

$$\phi(V_R) = \phi_0 \left[\exp\left(\frac{V_R}{V_{T1}}\right) - 1 \right], \quad (54)$$

式中, ϕ_0 和 V_{T1} 均为常数, 此函数为描述通过二极管电流变化规律的 Shockley 模型, 参数 V_{T1} 为热电压, 仅与负载的物理参数有关. 由式(54)可见, 电流为电压差的函数, 文献^[92,93]称式(54)为“差函数(function of difference)”电流传输规律. 将式(54)代入式(52)得

$$\exp\left(\frac{V_S - V_C}{V_{T1}}\right) / \left[\exp\left(\frac{V_S - V_C}{V_{T1}}\right) - 1 \right]^2 = \frac{I_0 V_{T1}}{\lambda} = \text{const.} \quad (55)$$

式(55)是关于 $\exp[(V_S - V_C)/V_{T1}]$ 的代数方程, 因此 $\exp[(V_S - V_C)/V_{T1}] = \text{const.}$, 进一步得 $V_S - V_C = \text{const.}$ 由此可

$$\frac{\left\{ \ln^2 \left[1 + \exp\left(\frac{V_S - V_{Th}}{V_{T2}}\right) \right] - \ln^2 \left[1 + \exp\left(\frac{V_C - V_{Th}}{V_{T2}}\right) \right] \right\}^2 \left[1 + \exp\left(\frac{V_S - V_{Th}}{V_0}\right) \right]}{\ln \left[1 + \exp\left(\frac{V_S - V_{Th}}{V_{T2}}\right) \right] \exp\left(\frac{V_S - V_{Th}}{V_{T2}}\right)} = \text{const.} \quad (57)$$

式(57)为文献^[93]的研究结果.

4.7 经济贸易过程优化

考虑文献^[103,106~109,111~113]中企业与生产商间的贸易过程, 如图7所示, 贸易过程的总时间 τ 和总商品交换量 $\Delta N_2 = N_2(\tau) - N_2(0)$ 均给定, 贸易过程商品流率为 $n_1(P_1, P_2)$. 对于该商品贸易过程, 广义势分别为 $X_1 = P_1$ 和 $X_2 = P_2$, 广义流率为 $J_1(X_1, X_2) = n_1(P_1, P_2)$, 广义流守恒方程为

$$\frac{dN_2}{dt} = -n_1(P_1, P_2). \quad (58)$$

由文献^[103,106~109,111~113]可知, 广义耗散力为 $f_1(X_1, X_2) = P_1 - P_2$, 式(4)可变为

图7 简单贸易过程模型

见, 对于所有的“差函数”形式电流传输函数, 均可导出焦耳热耗散最小时电源电压和电容器电压之差为常数, 此即为文献^[92,93]的研究结果.

若电流传输服从一类“函数差”形式的电流传输规律 $I = \psi(V_S) - \psi(V_R)$, 同样地, 函数 $\psi(V_i) (i=S, C)$ 满足条件 $d\psi/dV_i > 0$. 因为此时电流为关于电压 V_S 和 V_C 的函数之差, 文献^[92,93]称之为“函数差(difference of function)”电流传输规律. 一个典型的 $\psi(V)$ 例子为^[92,93]

$$\psi(V) = \psi_0 \ln^2 \left[1 + \exp\left(\frac{V - V_{Th}}{V_{T2}}\right) \right], \quad (56)$$

式中, ψ_0 , V_{T2} 和 V_{Th} 均为常数. 这个函数描述的是通过晶体管电流变化规律的 Enz-Krummenacher-Vittoz 模型^[92,93], 参数 V_{T2} 与热电压相关, 参数 V_{Th} 与三极管的临界电压和应用触发电压相关. 将式(56)代入式(52)得

$$n_1^2 / \frac{\partial n_1}{\partial P_1} = \text{const.} \quad (59)$$

式(59)为简单贸易过程资本耗散最小时的最优性条件.

若商品贸易过程服从一类普适传输规律 $[n \propto \Delta(P^m)]$ ^[108], m 为商品供需价格弹性相关的幂指数, 将 $n_1 = \alpha_1(P_1^m - P_2^m)$ 代入式(59)得

$$(P_1^m - P_2^m) / P_1^{(m-1)/2} = \text{const.} \quad (60)$$

式(60)为普适传输规律 $[n \propto \Delta(P^m)]$ 下贸易过程资本耗散最小时的研究结果^[108], 此时贸易过程资本耗散最小时商品流率与企业商品价格的 $(m-1)/2$ 次幂之比为常数.

5 结论

本文在较为全面回顾前人和本文作者前期研究工作的基础上, 基于广义热力学优化理论的研究思路, 建立了一类广义流传递过程的广义热力学物理模型, 形成了相应的动态优化问题, 分别应用欧拉-拉格朗日方程和平均最优控制理论获得了普适的优化结果, 基于普适的优化结果得到了一些新推论, 进一步讨论了这

些研究结果在换热过程、等温节流、单向等温传质、双向等温传质、等温结晶过程、电容器充电过程、经济贸易过程中的应用. 结果表明: 在给定广义流量条件下, 广义流传递过程广义耗散最小时的最优性条件为本文式(4)所示, 且该最优性条件与广义势容无关; 广义流传递过程最小广义耗散时广义流率为定值的最优性条件为本文式(5)所示; 广义流传递过程最小广义耗散时局部广义耗散率保持为定值的最优性条件为本文式(7)所示; 当广义流率为广义耗散力单值函数时, 广义流传递过程最小广义耗散时的广义耗散力、广义流率和局部广义耗散率均为定值, 若进一步有广义力为广义耗散力的单值函数, 则广义力也为定值; 本文得

到的结果具有相当大的包容性, 已有研究中关于换热过程、等温节流、单向等温传质、双向等温传质、等温结晶过程、电容器充电过程、经济贸易过程的相关动态优化结果均为本文研究结果的特例. 本文的研究表明, 基于广义热力学优化理论, 可以将热力学、传热传质学、电学、化学和经济学等多学科研究对象进行统一处理, 抽出共性, 突出本质, 建立统一的广义热力学物理模型, 形成统一的动态优化问题, 采用统一的优化方法, 获得具有一般意义上普适性的优化结果, 得到各种广义热力学过程优化新准则, 建立统一的设计优化理论体系, 这种统一的优化研究思路即为不可逆过程“广义热力学动态优化”^[25]的研究思想.

补充材料

本文的补充材料见网络版 techcn.scichina.com. 补充材料为作者提供的原始数据, 作者对其学术质量和内容负责.

参考文献

- Andresen B, Berry R S, Nitzan A, et al. Thermodynamics in finite time. I. The step-Carnot cycle. *Phys Rev A*, 1977, 15: 2086–2093
- Hoffmann K H, Burzler J M, Schubert S. Endoreversible thermodynamics. *J Non-Equilib Thermodyn*, 1997, 22: 311–355
- Chen L G, Wu C, Sun F R. Finite time thermodynamic optimization or entropy generation minimization of energy systems. *J Non-Equilib Thermodyn*, 1999, 24: 327–359
- Hoffmann K H, Burzler J, Fischer A, et al. Optimal process paths for endoreversible systems. *J Non-Equilib Thermodyn*, 2003, 28: 233–268
- Andresen B. Current trends in finite-time thermodynamics. *Angew Chem Int Ed*, 2011, 50: 2690–2704
- 李俊, 陈林根, 戈延林, 等. 正反向两源热力循环有限时间热力学性能优化的研究进展. *物理学报*, 2013, 62: 130501
- Hoffmann K H, Andresen B, Salamon P. Finite-time thermodynamics tools to analyze dissipative processes. In: Dinner A R, ed. *Proceedings of the 240 Conference: Science's Great Challenges, Advances in Chemical Physics, Volume 157*. Hoboken: Wiley, 2015. 57–67
- Chen L G, Meng F K, Sun F R. Thermodynamic analyses and optimization for thermoelectric devices: The state of the arts. *Sci China Tech Sci*, 2016, 59: 442–455
- Ge Y L, Chen L G, Sun F R. Progress in finite time thermodynamic studies for internal combustion engine cycles. *Entropy*, 2016, 18: 139
- Sieniutycz S, Tsirlin A. Finding limiting possibilities of thermodynamic systems by optimization. *Phil Trans R Soc A*, 2017, 375: 20160219
- Bejan A. *Entropy Generation Through Heat and Fluid Flow*. New York: Wiley, 1982
- Andresen B. *Finite-Time Thermodynamics*. Physics Laboratory II, University of Copenhagen, 1983
- Bejan A. *Entropy Generation Minimization*. Boca Raton: CRC Press, 1996
- Tsirlin A M. *Methods of Averaging Optimization and Their Application*. Moscow: Physical and Mathematical Literature Publishing Company, 1997
- Berry R S, Kazakov V A, Sieniutycz S, et al. *Thermodynamic Optimization of Finite Time Processes*. Chichester: Wiley, 1999
- Mironova V A, Amelkin S A, Tsirlin A M. *Mathematical Methods of Finite Time Thermodynamics*. Moscow: Khimia, 2000
- Tsirlin A M. *Optimization Methods in Thermodynamics and Microeconomics*. Moscow: Nauka, 2002
- Tsirlin A M. *Irreversible Estimates of Limiting Possibilities of Thermodynamic and Microeconomic Systems*. Moscow: Nauka, 2003
- Chen L G, Sun F R. *Advances in Finite Time Thermodynamics: Analysis and Optimization*. New York: Nova Science Publishers, 2004
- 陈林根. 不可逆过程和循环的有限时间热力学分析. 北京: 高等教育出版社, 2005
- 吴锋, 陈林根, 孙丰瑞, 等. 斯特林机的有限时间热力学优化. 北京: 化学工业出版社, 2008

- 22 Tsirlin A M. Optimization for Thermodynamic and Economic Systems. Moscow: Nauka, 2011
- 23 Sieniutycz S, Jezowski J. Energy Optimization in Process Systems and Fuel Cells. Oxford: Elsevier, 2013
- 24 Sieniutycz S. Thermodynamic Approaches in Engineering Systems. Oxford: Elsevier, 2016
- 25 陈林根, 夏少军. 不可逆过程的广义热力学动态优化. 北京: 科学出版社, 2017
- 26 陈林根, 夏少军. 不可逆循环的广义热力学动态优化——热力与化学理论循环. 北京: 科学出版社, 2018
- 27 陈林根, 夏少军. 不可逆循环的广义热力学动态优化——工程热力装置与广义机循环. 北京: 科学出版社, 2018
- 28 毕月红, 陈林根. 空气热泵性能有限时间热力学优化. 北京: 科学出版社, 2017
- 29 Bejan A. A general variational principle for thermal insulation system design. *Int J Heat Mass Transfer*, 1979, 22: 219–228
- 30 Salamon P, Nitzan A, Andresen B, et al. Minimum entropy production and the optimization of heat engines. *Phys Rev A*, 1980, 21: 2115–2129
- 31 Tondeur D, Kvaalen E. Equipartition of entropy production. An optimality criterion for transfer and separation processes. *Ind Eng Chem Res*, 1987, 26: 50–56
- 32 Linetskii S B, Tsirlin A M. Evaluating thermodynamic efficiency and optimizing heat exchangers. *Thermal Eng*, 1988, 35: 593–597
- 33 Andresen B, Gordon J M. Optimal heating and cooling strategies for heat exchanger design. *J Appl Phys*, 1992, 71: 76–79
- 34 Andresen B, Gordon J M. Optimal paths for minimizing entropy generation in a common class of finite-time heating and cooling processes. *Int J Heat Fluid Flow*, 1992, 13: 294–299
- 35 Spirkel W, Ries H. Optimal finite-time endoreversible processes. *Phys Rev E*, 1995, 52: 3485–3489
- 36 Ratkje S K, Sauar E, Hansen E M, et al. Analysis of entropy production rates for design of distillation columns. *Ind Eng Chem Res*, 1995, 34: 3001–3007
- 37 Sauar E, Kjelstrup Ratkje S, Lien K M. Equipartition of forces: A new principle for process design and optimization. *Ind Eng Chem Res*, 1996, 35: 4147–4153
- 38 Xu J. Comments on “Equipartition of forces: A new principle for process design and optimization”. *Ind Eng Chem Res*, 1997, 36: 5040–5044
- 39 Sauar E, Kjelstrup S, Lien K M. Rebuttal to comments on “Equipartition of forces: A new principle for process design and optimization”. *Ind Eng Chem Res*, 1997, 36: 5045–5046
- 40 Bedeaux D, Standaert F, Hemmes K, et al. Optimization of processes by equipartition. *J Non-Equilib Thermodyn*, 1999, 24: 242–259
- 41 Kjelstrup S, Sauar E, Bedeaux D, et al. The driving force distribution for minimum lost work in chemical reactors close to and far from equilibrium. 1. Theory. *Ind Eng Chem Res*, 1999, 38: 3046–3050
- 42 Kjelstrup S, Island T V. The driving force distribution for minimum lost work in a chemical reactor close to and far from equilibrium. 2. Oxidation of SO₂. *Ind Eng Chem Res*, 1999, 38: 3051–3055
- 43 Haug-Warberg T. Comments on “Equipartition of forces: A new principle for process design and optimization”. *Ind Eng Chem Res*, 2000, 39: 4431–4433
- 44 Kjelstrup S, Bedeaux D, Sauar E. Minimum entropy production by equipartition of forces in irreversible thermodynamics. *Ind Eng Chem Res*, 2000, 39: 4434–4436
- 45 Nummedal L, Kjelstrup S. Equipartition of forces as a lower bound on the entropy production in heat exchange. *Int J Heat Mass Transfer*, 2001, 44: 2827–2833
- 46 Tsirlin A M, Kazakov V. Realizability areas for thermodynamic systems with given productivity. *J Non-Equilib Thermodyn*, 2002, 27: 91–103
- 47 Johannessen E, Nummedal L, Kjelstrup S. Minimizing the entropy production in heat exchange. *Int J Heat Mass Transfer*, 2002, 45: 2649–2654
- 48 Balkan F. Comparison of entropy minimization principles in heat exchange and a short-cut principle: EoTD. *Int J Energy Res*, 2003, 27: 1003–1014
- 49 Badescu V. Optimal strategies for steady state heat exchanger operation. *J Phys D-Appl Phys*, 2004, 37: 2298–2304
- 50 Badescu V. Optimal paths for minimizing lost available work during usual finite-time heat transfer processes. *J Non-Equilib Thermodyn*, 2004, 29: 53–73
- 51 Bi Y H, Guo T W, Zhang L, et al. Entropy generation minimization for charging and discharging processes in a gas-hydrate cool storage system. *Appl Energy*, 2010, 87: 1149–1157
- 52 Thiel G P, McGovern R K, Zubair S M, et al. Thermodynamic equipartition for increased second law efficiency. *Appl Energy*, 2014, 118: 292–299
- 53 Austbø B, Gundersen T. Optimal distribution of temperature driving forces in low-temperature heat transfer. *AIChE J*, 2015, 61: 2447–2455

- 54 Sieniutycz S, Tsirlin A M, Akhremenkov A A. Minimal dissipation conditions of heat exchange systems. *Int J Heat Mass Transfer*, 2017, 110: 539–544
- 55 宋伟明, 孟继安, 梁新刚, 等. 一维换热器中温差场均匀性原则的证明. *化工学报*, 2008, 59: 2460–2464
- 56 郭江峰, 许明田, 程林. 换热器设计中的火积耗散均匀性原则. *中国科学: 技术科学*, 2010, 40: 671–676
- 57 郭江峰, 许明田, 程林. 换热量和换热面积给定时的火积耗散最小原则. *科学通报*, 2010, 55: 3146–4141
- 58 Xia S J, Chen L G, Sun F R. Optimization for entransy dissipation minimization in heat exchanger. *Sci Bull*, 2009, 54: 3587–3595
- 59 Xia S J, Chen L G, Sun F R. Optimal paths for minimizing entransy dissipation during heat transfer processes with generalized radiative heat transfer law. *Appl Math Model*, 2010, 34: 2242–2255
- 60 Xia S J, Chen L G, Xie Z H, et al. Entransy dissipation minimization for generalized heat exchange processes. *Sci China Tech Sci*, 2016, 59: 1507–1516
- 61 Tsirlin A M. *Optimal Cycles and Cycle Regimes*. Moscow: Energomizdat, 1985
- 62 过增元, 李志信, 周森泉. 换热器中的温差场均匀性原则. *中国科学E辑: 技术科学*, 1996, 26: 25–31
- 63 夏少军, 陈林根, 孙丰瑞. 传热规律下换热过程最小熵产生优化. *热科学与技术*, 2008, 7: 226–230
- 64 Chen L G, Xia S J, Sun F R. Optimal paths for minimizing entropy generation during heat transfer processes with a generalized heat transfer law. *J Appl Phys*, 2009, 105: 044907
- 65 Xia S J, Chen L G, Sun F R. Optimal paths for minimizing lost available work during heat transfer processes with a generalized heat transfer law. *Braz J Phys*, 2009, 39: 99–106
- 66 柳雄斌, 过增元, 孟继安. 换热器中的熵耗散与热阻分析. *自然科学进展*, 2008, 18: 1186–1190
- 67 过增元, 梁新刚, 朱宏晔. 焓——描述物体传递热量能力的物理量. *自然科学进展*, 2006, 16: 1288–1296
- 68 Guo Z Y, Zhu H Y, Liang X G. Entransy—A physical quantity describing heat transfer ability. *Int J Heat Mass Transfer*, 2007, 50: 2545–2556
- 69 夏少军, 陈林根, 孙丰瑞. 换热器熵耗散最小优化. *科学通报*, 2009, 54: 2240–2246
- 70 Tsirlin A M, Kazakov V A, Berry R S. Finite-time thermodynamics: Limiting performance of rectification and minimal entropy production in mass transfer. *J Phys Chem*, 1994, 98: 3330–3336
- 71 Mironova V A. Thermodynamic optimization of a crystallization process. *Russ Chem Ind*, 1994, 26: 77–81
- 72 Tsirlin A M, Mironova V A, Amelkin S A, et al. Finite-time thermodynamics: Conditions of minimal dissipation for thermodynamic process with given rate. *Phys Rev E*, 1998, 58: 215–223
- 73 Leskov E E, Tsirlin A M. Optimization of membrane separations. *Theor Found Chem Eng*, 2007, 41: 467–474
- 74 夏少军, 陈林根, 孙丰瑞. 一类单向等温传质过程熵耗散最小化. *中国科学: 技术科学*, 2011, 41: 515–524
- 75 Xia S J, Chen L G, Sun F R. Entransy dissipation minimization for one-way isothermal mass transfer processes with a generalized mass transfer law. *Sci Iranica*, 2012, 19: 1616–1625
- 76 夏少军, 陈林根, 戈延林, 等. 等温节流过程熵耗散最小化. *物理学报*, 2013, 62: 180202
- 77 夏少军, 陈林根, 孙丰瑞. 扩散传质定律结晶过程熵耗散最小化. *机械工程学报*, 2013, 49: 175–182
- 78 Xia S J, Chen L G, Sun F R. Optimization of equimolar reverse constant-temperature mass-diffusion process for minimum entransy dissipation. *Sci China Tech Sci*, 2016, 59: 1867–1873
- 79 Bi Y H, Chen J, Miao Z. Thermodynamic optimization for dissociation process of gas hydrates. *Energy*, 2016, 106: 270–276
- 80 Chen L G, Xia S J, Sun F R. Entropy generation minimization for isothermal crystallization processes with a generalized mass diffusion law. *Int J Heat Mass Transfer*, 2018, 116: 1–8
- 81 Chen L G, Wang C, Xia S J, et al. Thermodynamic analyses and optimizations of extraction process of CO₂ from acidic seawater by using hollow fiber membrane contactor. *Int J Heat Mass Transfer*, 2018, 124: 1310–1320
- 82 陈林根, 孙丰瑞, Wu C. 有限时间热力学理论和应用的发展现状. *物理学进展*, 1998, 18: 395–422
- 83 Chen L G, Bi Y H, Wu C. The influence of nonlinear flow resistance relations on the power and efficiency from fluid flow. *J Phys D-Appl Phys*, 1999, 32: 1346–1349
- 84 Radcenco V. *Generalized Thermodynamics*. Bucharest: Editura Tehnica, 1994
- 85 Chen L G, Feng H J, Xie Z H. Generalized thermodynamic optimization for iron and steel production processes: Theoretical exploration and application cases. *Entropy*, 2017, 18: 353
- 86 Bejan A. Maximum power from fluid flow. *Int J Heat Mass Transfer*, 1996, 39: 1175–1181

- 87 Hu W Q, Chen J. General performance characteristics and optimum criteria of an irreversible fluid flow system. *J Phys D-Appl Phys*, 2006, 39: 993–997
- 88 Bejan A, Almerbati A, Lorente S. Economies of scale: The physics basis. *J Appl Phys*, 2017, 121: 044907
- 89 Patra P, Fussell D S. On efficient adiabatic design of MOS circuits. *Phys Comp*, 1996, 96: 1–11
- 90 Paul S. Optimal charging capacitor. In: European Conference on Circuit Theory and Design. Budapest, 1997. 918–922
- 91 Desoete B, De Vos A. Optimal charging of capacitors. In: Trullemans A, Spars J, eds. Proceedings of the 8th International Workshop Patmos. Lyngby, 1998. 335–344
- 92 De Vos A, Desoete B. Optimal thermodynamic processes in finite time. In: Wu C, Chen L G, Chen J C. Recent Advances in Finite-Time Thermodynamics. New York: Nova Science Publishing, 1999. 249–272
- 93 De Vos A, Desoete B. Equipartition principles in finite-time thermodynamics. *J Non-Equilib Thermodyn*, 2000, 25: 1–13
- 94 Paul S, Schlaffer A M, Nossek J A. Optimal charging of capacitors. *IEEE Trans Circuits Syst I*, 2000, 47: 1009–1016
- 95 Chen J C. Optimization on the charging process of a capacitor. *Int J Electron*, 2001, 88: 145–151
- 96 Xia S J, Chen L G. Theoretical and experimental investigation of optimal capacitor charging process in RC circuit. *Eur Phys J Plus*, 2017, 132: 235
- 97 Bejan A, Dan N. Maximum work from an electric battery model. *Energy*, 1997, 22: 93–102
- 98 Chen J, Zhou Y. Minimum Joule heating dissipated in the charging process of a rechargeable battery. *Energy*, 2001, 26: 607–617
- 99 施哲强, 陈金灿. 电池在最大输出功时的负载匹配和放电时间选择. 厦门大学学报(自然科学版), 2001, 40: 868–872
- 100 Yan Z. A note on maximum work from an electric battery model. *Energy*, 2002, 27: 197–201
- 101 Shi Z Q, Chen J C, Wu C. Maximum work output of an electric battery and its load matching. *Energy Convers Manage*, 2002, 43: 241–247
- 102 Chen J C, Shi Z Q, Chen X. The maximum work output of an electric battery in a given time. *Renew Energy*, 2002, 27: 189–196
- 103 Tsirlin A M. Optimal control of resource exchange in economic systems. *Autom Remote Control*, 1995, 56: 401–408
- 104 De Vos A. Endoreversible thermodynamics versus economics. *Energy Convers Manage*, 1999, 40: 1009–1019
- 105 Martínás K. About irreversibility in economics. *Open Syst Inf Dyn*, 2000, 7: 349–364
- 106 Tsirlin A M, Kazakov V A. Optimal processes in irreversible thermodynamics and microeconomics. *Interdis Descrip Complex Syst*, 2004, 2: 29–42
- 107 Tsirlin A M. Irreversible microeconomics: Optimal processes and equilibrium in closed systems. *Autom Remote Control*, 2008, 69: 1201–1215
- 108 Xia S J, Chen L G, Sun F R. Optimization for capital dissipation minimization in a common of resource exchange processes. *Math Comput Model*, 2011, 54: 632–648
- 109 Chen Y R. Maximum profit configurations of commercial engines. *Entropy*, 2011, 13: 1137–1151
- 110 Xia S J, Chen L G. Capital dissipation minimization for a class of complex irreversible resource exchange processes. *Eur Phys J Plus*, 2017, 132: 201
- 111 Amel'kin S A, Martínás K, Tsirlin A M. Optimal control for irreversible processes in thermodynamics and microeconomics. *Autom Remote Control*, 2002, 63: 519–539
- 112 Amelkin S A. Limiting possibilities of resource exchange process in complex open microeconomic system. *Interdis Descrip Complex Syst*, 2004, 2: 43–52
- 113 Tsirlin A M, Kazakov V. Optimal processes in irreversible microeconomics. *Interdis Descrip Complex Syst*, 2006, 4: 102–123
- 114 Elgerd O. Control Systems Theory. New York: McGraw-Hill, 1967. 446–456
- 115 Athas W C, Svensson L J, Koller J G, et al. Low-power digital systems based on adiabatic-switching principles. *IEEE Trans VLSI Syst*, 1994, 2: 398–407
- 116 Mita K, Boufaïda M. Ideal capacitor circuits and energy conservation. *Am J Phys*, 1999, 67: 737–739

Generalized dissipation minimization for generalized flow transfer processes

XIA ShaoJun^{1,2} & CHEN LinGen^{1,2}

¹ Institute of Thermal Science and Power Engineering, Wuhan Institute of Technology, Wuhan 430205, China;

² School of Mechanical & Electrical Engineering, Wuhan Institute of Technology, Wuhan 430205, China

One of the important research contents of generalized thermodynamic optimization theory is to pursue universality of optimization results. Firstly, on the basis of summarizing and inducing the research contents of dynamic optimizations for various irreversible transport processes, including heat transfer, mass transfer, capacitor charging, and resource exchange, this paper defines some physical quantities including generalized potential, generalized force, generalized flow, generalized potential capacity, generalized dissipation, generalized dissipation force, and further establishes a generalized thermodynamic physical model of a class of generalized flow transfer processes based on generalized thermodynamic optimization theory. The corresponding dynamic optimization problem is formulated. Secondly, the universal optimization result, i.e. the optimality condition as shown in this paper, is obtained by using Euler-Lagrangian method and averaged optimal control theory, respectively. Some new conclusions are obtained based on these universal results. Thirdly, those new results and conclusions are further applied to some special examples, including heat transfer, isothermal throttling, one-way isothermal mass transfer, two-way isothermal equimolar mass transfer, isothermal crystallization, capacitor charging, economic trade processes and so on. Finally, the research idea of “generalized thermodynamic dynamic-optimization” is put forward. The results in this paper enriches and consummates the generalized thermodynamic optimization theory.

generalized flow transfer process, generalized dissipation minimization, heat and mass transfer, capacitor charging, economic trade, optimal control, generalized thermodynamic optimization

doi: [10.1360/N092018-00219](https://doi.org/10.1360/N092018-00219)