非交换代数的判别式和自同构群

献给刘绍学教授 90 华诞

王艳华¹, 张坚^{2*}

1. 上海财经大学数学学院, 上海市金融信息技术研究重点实验室, 上海 200433;

2. Department of Mathematics, University of Washington, Seattle 98195, USA

E-mail: yhw@mail.shufe.edu.cn, zhang@math.washington.edu

收稿日期: 2017-12-24; 接受日期: 2018-03-12; 网络出版日期: 2018-10-29; * 通信作者

国家留学基金 (批准号: [2016]3099)、上海市教育委员会科研创新 (批准号: 15ZZ037)、留学回国人员科研启动基金 (第 48 批) 和美国国家自然科学基金 (批准号: DMS-1402863 和 DMS-1700825) 资助项目

摘要 本文总结了近些年代数学家在非交换代数判别式方面的主要工作. 列举了目前得到的一些非交换代数的判别式, 并综述了非交换代数判别式在代数自同构群、同构问题、消去问题、Tits 原理以及 Azumaya 点等方面的应用和结果.

关键词 判别式 代数自同构 仿射 主控元 消去问题 Azumaya 点

MSC (2010) 主题分类 16W20, 11R29

1 引言

判别式 (discriminant) 的早期形式可以追溯到著名数学家 Cayley 在 1848 年的论文 *On the theory of elimination* [1] 和 Sylvester 在 1851 年的论文 *On a remarkable discovery in the theory of canonical forms and of hyperdeterminants* [2] 中的几个特殊的表达式. 线性代数和数论中, 判别式被广泛用于研究多项式的合成以及高次方程的不变量. 此外, 判别式还与 Galois 群、Newton 恒等式、多项式的导子以及多项式的结式等都有着紧密的联系 [3, 4]. 纵观数学历史, 判别式一直以来都是数学研究中的一个重要不变量, 尤其在数论、交换代数和代数几何等领域中都扮演着非常重要的角色.

数学研究中的另外一个重要的不变量是自同构群, 事实上, 每个数学对象在它存在的范畴中都可以定义它的自同构群. 自同构群不仅是对数学对象对称性的一种刻画, 也是原有对象结构的一种本质体现. 本文讨论的自同构群都是指代数 (或环) 的自同构群. 众所周知, 域 $\mathbb{k}$ 上的多项式代数 $\mathbb{k}[x]$ 的自同构均为形如

$$g : x \mapsto ax + b, \quad a \neq 0, \quad a, b \in \mathbb{k}$$

英文引用格式: Wang Y H, Zhang J J. Discriminants of noncommutative algebras and their applications (in Chinese). *Sci Sin Math*, 2018, 48: 1615–1630, doi: 10.1360/N012017-00263

的自同构; $\mathbb{k}[x_1, x_2]$ 的自同构都是可控 (tame) 自同构^[5,6]; 而关于交换多项式代数 $\mathbb{k}[x_1, x_2, x_3]$ 的自同构群问题目前还没有完全解决, 迄今为止, 此方面得到的最好并且最著名的结果是 Shestakov 和 Umirbaev^[7] 证明了 $\mathbb{k}[x_1, x_2, x_3]$ 具有野型 (wild) 自同构. 近些年, 随着非交换代数的发展, 越来越多的人开始关注非交换代数的自同构群, 并取得了重要的结果, 例如, 在系数 q 不是单位根的情形下, 文献 [8–10] 给出了一些量子群和量子 Weyl 代数的自同构; Andruskiewitsch 和 Dumas^[11] 给出了量子群正部分的自同构群的猜想; Bavula 和 Jordan^[12] 研究了广义 Weyl 代数的同构问题和自同构群; Gomez-Torrecillas 和 El Kaoutit^[13] 给出了量子辛空间坐标环的自同构群; Launois 和 Lenagan^[14] 给出了低阶量子矩阵代数的自同构群; Suárez-Alvarez 和 Vivas^[15] 研究了量子广义 Weyl 代数的同构和自同构. 2012 年至 2013 年期间, Yakimov^[16,17] 利用量子环面 (quantum tori) 的正则性成功地解决了著名的 Andruskiewitsch-Dumas 猜想和 Launois-Lenagan 猜想, 并证明了 q 不是单位根的情形下, 量子矩阵代数和量子泛包络代数正部分的自同构群是几乎可解的 (virtually solvable). 鉴于判别式和自同构群在数学研究中的重要性, 若能把上述两个历史悠久的不变量有效地结合起来, 并应用到非交换代数的研究中, 将是一件非常有意义的事情. 基于以上思想, 从 2015 年起, Ceken 等^[18,19] 开始利用非交换代数的判别式研究代数的自同构群. 最近的研究表明判别式在代数自同构群、代数同构问题、消去问题、Tits 原理 (Tits alternative) 以及 Azumaya 轨迹 (Azumaya locus) 等方面有着广泛的应用. 如下列举了近几年非交换代数的判别式在上述各方面的工作: 判别式的计算^[18–25]、自同构问题^[18,19,21,22,25,26]、同构问题^[18,24,27]、消去问题^[20,24,25,28,29]、Tits 原理^[25,27] 和 Azumaya 点^[22,30].

本文共分 6 节, 第 2 节介绍判别式的概念以及目前得到的一些非交换代数的判别式; 第 3 节给出判别式在代数自同构群和代数同构问题方面的应用; 第 4 节给出判别式在消去问题方面的应用; 第 5 节简单地给出判别式与 Azumaya 点之间的关系; 第 6 节为总结.

2 判别式的计算

判别式的定义由来已久, 首先回顾数论中判别式的经典定义. 如果 $f(x)$ 是 $\mathbb{Q}$ 上的 n 次多项式, $x_1, x_2, \dots, x_n$ 是 $f(x)$ 的根, 则 $f(x)$ 的判别式定义为

$$\text{dis}(f(x)) = \prod_{i < j} (x_i - x_j)^2 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i \neq j} (x_i - x_j) \in \mathbb{Q}.$$

如果 F 是 $\mathbb{Q}$ 的有限维 Galois 扩张, 记 $\mathcal{O}_F$ 是 F 的整数环, 并且

$$\mathcal{O}_F = \mathbb{Z}[\alpha] \cong \mathbb{Z}[x]/(f(x)),$$

其中 $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ 是 α 的极小多项式, 则 F 在 $\mathbb{Q}$ 上的判别式 $\text{dis}(F/\mathbb{Q})$ 定义为 $\text{dis}(f(x))$. 易证 $\text{dis}(F/\mathbb{Q}) \in \mathbb{Z}$, 并且 $\text{dis}(F/\mathbb{Q})$ 与 $f(x)$ 和 α 的取法无关.

判别式有多个等价的定义, 下面给出非交换代数判别式的几种形式. 设 $\mathbb{k}$ 是域, A 是 $\mathbb{k}$ -代数, R 是 A 的中心. 定义 A 的迹映射为一个 R -线性映射

$$\text{tr} : A \longrightarrow R,$$

使得对于任意的 $a, b \in A$, 有 $\text{tr}(ab) = \text{tr}(ba)$. 如果 A 是 R 上秩为 n 的自由模, 则 A 的左乘映射可以诱导出代数映射

$$l_m : A \longrightarrow \text{End}_R(A) \longrightarrow M_n(R).$$

设 tr_m 为通常矩阵的迹, 定义 A 的正则迹映射为

$$\text{tr}_{\text{reg}} : A \xrightarrow{l_m} M_n(R) \xrightarrow{\text{tr}_m} R.$$

值得一提的是, 尽管对任意的迹映射都可以给出下文中判别式的定义, 除非特别说明, 本文主要利用正则迹映射, 简记 tr_{reg} 为 tr . 实际上, 上述的中心 R 可以取成 R 的任意中心子代数, 参见文献 [18, 19].

记 $R^\times$ 为 R 中可逆元的集合, 对任意的 $f, g \in R$, $f =_{R^\times} g$ 表示 $f = cg$, 其中 $c \in R^\times$, 集合 Z 的基数记为 $|Z|$. 下面给出非交换代数在其中心或中心子代数 R 上的判别式的定义, 可参见文献 [18, 19, 31–33] 中的相关定义.

定义 2.1 ^[18] 设 A 是一个代数, R 是 A 的中心, s 是正整数,

(1) A 的子集 $Z = \{z_i\}_{i=1}^s$ 的判别式定义为

$$d_s(Z : \text{tr}) = \det(\text{tr}(z_i z_j)_{s \times s}) \in R,$$

这里 $\det$ 表示矩阵的行列式;

(2) A 的 s -判别式理想 $D_s(A, \text{tr})$ 定义为由判别式集 $\{d_s(Z : \text{tr}) \mid Z \subset A, |Z| = s\}$ 在 R 中生成的理想;

(3) 设 A 是 R 上秩为 s 的有限生成自由 R -模, 若 Z 是 A 在 R 上的基, 则 A 在 R 上的判别式定义为

$$d(A/R) =_{R^\times} d_s(Z : \text{tr}).$$

易证, $d(A/R)$ 与基 Z 的选取无关.

设 B 是整环, 元素 $a \in B$ 如果满足 $aB = Ba$, 则称 a 为 B 的正规元 (normal element). 令 $b \in B$, a 是 B 的正规元, 如果存在元素 $x \in B$ 使得 $b = ax$, 则称正规元 a 整除 b . 设集合 $\mathcal{D} := \{b_i\}_{i \in I} \subseteq B$, 如果正规元 a 整除所有的 b_i , 其中 $i \in I$, 则称 a 为 $\mathcal{D}$ 的公因子; 如果正规元 a 是 $\mathcal{D}$ 的公因子, 并且 $\mathcal{D}$ 的任意公因子都整除 a , 则称 a 是 $\mathcal{D}$ 在 B 中的最大公因子, 记为 $\gcd_B \mathcal{D}$. 注意到, 如果有整环 $C \subseteq B$, 使得 $\mathcal{D} \subseteq C \subseteq B$, 则 $\gcd_C \mathcal{D}$ 和 $\gcd_B \mathcal{D}$ 不一定都存在, 即使都存在, 它们也不一定相等. 上述定义可参见文献 [19, 25].

进一步地, 我们有如下定义:

定义 2.2 ^[19] 设 A 是代数, R 是 A 的中心, s 是正整数, $Z = \{z_i\}_{i=1}^s$ 和 $Z' = \{z'_i\}_{i=1}^s$ 是 A 的两个 s -子集,

(1) 子集对 (Z, Z') 的判别式定义为

$$d_s(Z, Z' : \text{tr}) = \det(\text{tr}(z_i z'_j)_{s \times s}) \in R;$$

(2) A 的改良的 s -判别式理想 $MD_s(A : \text{tr})$ 定义为由判别式集

$$\{d_s(Z, Z' : \text{tr}) \mid Z \subset A, Z' \subset A, |Z| = |Z'| = s\}$$

在 R 中生成的理想;

(3) 如果判别式集

$$\{d_s(Z, Z' : \text{tr}) \mid Z \subset A, Z' \subset A, |Z| = |Z'| = s\}$$

在 A 中的最大公因子存在, 则 A 在 R 上的 s - 判别式定义为

$$d_s(A/R) = \gcd_{Z, Z' \subset A} (d_s(Z, Z' : \text{tr})).$$

下面给出一些非交换代数在其中心子代数上的判别式.

由 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 生成、满足关系 $x_i x_j + x_j x_i = 1$ ($i \neq j$) 的代数称为 (-1) - 量子 Weyl 代数, 记为 W_n . 文献 [18] 计算了两个元素生成的 (-1) - 量子 Weyl 代数 $W_2 = k\langle x, y \rangle / (xy + yx - 1)$ 的判别式为 $-2^4(4x^2y^2 - 1)^2$. 另外, 文献 [18] 也指出了 n 为偶数时, W_n 的中心为 $R = \mathbb{k}[x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2]$; n 为奇数时, $\mathbb{k}[x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2]$ 只是包含于 W_n 的中心的一个中心子代数. 在此基础上, Chan 等给出了 W_n 在其中心子代数 $\mathbb{k}[x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2]$ 上的判别式:

定理 2.3 ^[20] 设 $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$, 则 (-1) - 量子 Weyl 代数 W_n 在其中心子代数 $R = \mathbb{k}[x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2]$ 上的判别式为

$$d(W_n/R) =_{\mathbb{k}^\times} \begin{vmatrix} 2x_1^2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2x_2^2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 2x_n^2 \end{vmatrix}^{2^{(n-1)}}.$$

另外, Chan 等也得到了 q - 量子 Weyl 代数的判别式, 具体结论如下:

定理 2.4 ^[20] 令 $n > 2$, $q \in \mathbb{k}^\times$ 是本原 n - 阶单位根. $A_q := \mathbb{k}\langle x, y \rangle / (yx - qxy - 1)$ 为 q - 量子 Weyl 代数, 则 A_q 在其中心 $R = \mathbb{k}[x^n, y^n]$ 上的判别式为

$$d(A_q/R) =_{\mathbb{k}^\times} ((1 - q)^n x^n y^n - 1)^{n(n-1)}.$$

设 p 是正整数, 基于定义 2.1 和 2.2, Chan 等给出了 p - 阶判别式的定义:

定义 2.5 ^[25] 设 s 是正整数, 如果集合

$$\mathcal{D}_{s,p} := \{d_s(Z_1, Z_2)d_s(Z_3, Z_4) \cdots d_s(Z_{2p-1}, Z_{2p}) \mid Z_i \subseteq A, |Z_i| = s, \forall i = 1, \dots, 2p\}$$

在 A 中的最大公因子存在, 则 A 在 R 上秩为 s 的 p - 阶判别式定义为

$$d_s^{[p]}(A/R) = \gcd_A(\mathcal{D}_{s,p}).$$

设 $A = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} A_i$ 是 $\mathbb{Z}$ - 分次代数, v 是正整数, A 的 v - 阶 Veronese 子环定义为 $A^{(v)} := \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} A_{vi}$.

令 $m, n \geq 2$ 是整数, q 是 m - 阶本原单位根, 记 $A := \mathbb{k}_q[x_1, x_2, \dots, x_n]$ 是生成元为 $x_1, \dots, x_n$ 、生成关系为 $x_j x_i = q x_i x_j$ ($1 \leq i < j \leq n$) 的斜多项式代数. 令

$$y_k := q^{-[n/2]k(k+1)/2} (x_1^k x_2^{(m-k)} x_3^k x_4^{(m-k)} \cdots),$$

其中 $0 \leq k \leq m$. 特别地,

$$\begin{aligned} y_0 &= x_2^m x_4^m \cdots x_{2[n/2]}^m, \\ y_m &= (-1)^{[n/2](m+1)} x_1^m x_3^m \cdots x_{2[n/2]-1}^m. \end{aligned}$$

下面的定理给出了斜多项式代数的 Veronese 子环的判别式:

定理 2.6^[25] 设斜多项式代数 A 的 Veronese 子环为 $B := \mathbb{k}_q[x_1, x_2, \dots, x_n]^{(v)}$. 若 $\text{char} \mathbb{k} \nmid m$, 并且 g 为 v 和 m 的最大公因子, 则有如下结论:

(1) 当 n 是奇数时, B 的中心为 $R = \mathbb{k}\langle x_i^m, y_j \rangle \cap \mathbb{k}_q[x_1, x_2, \dots, x_n]^{(v)}$, 且 $\text{rank}(B/R) := w = m^{n-1}$. 若 $v \mid wp(g-1)$, 则 B 在 R 上的 p -阶判别式为

$$d_w^{[p]}(B/R) =_{\mathbb{k}^\times} (x_1 x_2 \cdots x_n)^{wp(g-1)}.$$

(2) 当 n 是偶数时, B 的中心为 $R = \mathbb{k}\langle x_i^m, y_{jm/g} \rangle \cap \mathbb{k}_q[x_1, x_2, \dots, x_n]^{(v)}$, 且

$$\text{rank}(B/R) := w = m^n/g^2.$$

若 $v \mid wp(\frac{m}{g}-1)$, 则 B 在 R 上的 p -阶判别式为

$$d_w^{[p]}(B/R) =_{\mathbb{k}^\times} (x_1 x_2 \cdots x_n)^{wp(\frac{m}{g}-1)}.$$

设 (A, μ_A) 和 (B, μ_B) 是代数, 其乘法分别记为 μ_A 和 μ_B . 设 $\tau: B \otimes A \rightarrow A \otimes B$ 是 $\mathbb{k}$ -线性同态, 对 $\forall a \in A, b \in B$, 满足 $\tau(b \otimes 1_A) = 1_A \otimes b$ 和 $\tau(1_B \otimes a) = a \otimes 1_B$. 令 $\mu_\tau := (\mu_A \otimes \mu_B)(\text{Id}_A \otimes \tau \otimes \text{Id}_B)$. 如果 $(A \otimes B, \mu_\tau)$ 构成一个结合代数, 记 $A \otimes_\tau B := (A \otimes B, \mu_\tau)$, 则称 $A \otimes_\tau B$ 为 A 与 B 的扭张量积 (twisted tensor product). 2016 年, Gaddis 等^[21] 开始研究扭张量积代数的判别式, 给出了一些 Ore 扩张代数和斜群代数的判别式.

定理 2.7^[21] 设 A 是代数, G 是群, M 是 G 的子么半群, e_M 是 M 的单位元, $Z(M)$ 是 M 的中心. 设 $\rho: G \rightarrow \text{Aut}(A)$ 是群同态, 满足 $\text{Im}(\rho|_M) \cap \text{Inn}(A) = \{\text{Id}_A\}$, 且 $H := \ker \rho \cap M \subseteq Z(M)$. 令 $T = A \otimes_\tau \mathbb{k}M$, R 是 T 的中心子代数, 满足如下条件:

(1) A 是 $A \cap R$ 上的自由模, 且 $\text{rank}(A/A \cap R) = n < \infty$;

(2) $R = (A \cap R) \otimes \mathbb{k}H$;

(3) 存在 $\mathbb{k}M$ 在 $\mathbb{k}H$ 上的一组基 $\{m_1 = e_M, m_2, \dots, m_l\}$, 其中 $m_i \in M, i = 1, \dots, l$,

则有

$$d(T/R) =_{R^\times} (d(A/A \cap R))^l (d(\mathbb{k}M/\mathbb{k}H))^n.$$

定理 2.8^[21] 设 A 是代数, $S := A[t; \sigma]$ 是 A 的 Ore 扩张代数, 其中 $\sigma \in \text{Aut}(A)$, σ 的阶为 m , 且对 $1 \leq i < m$, σ^i 不是内自同构. 若 R 是 S 的中心子代数, 记 $B = R \cap A^\sigma$. 如果 A 是 B 上秩为 n 的有限生成自由模, 且 $R = B[t^m]$, 则 S 是 R 上的有限生成自由模, 并且

$$d(S/R) =_{R^\times} (d(A/B))^m (t^{m-1})^{mn}.$$

定理 2.9^[21] 令 A 是一个代数, $Z(A)$ 是 A 的中心, G 是有限群, e_G 是 G 的单位元, G 在 A 上的作用为自同构作用, 并且 G 中非可逆元对应的自同构不是内自同构. 令 $S = A \# G$, 其中

$$A \hookrightarrow S: a \rightarrow a \otimes e_G.$$

如果 A 在其中心子代数 $R \subseteq Z(A)^G := \{a \mid g \cdot a = a, g \in G, a \in Z(A)\}$ 上是有限生成自由模, 则 S 是 R 上的有限生成自由模, 且

$$d(S/R) =_{R^\times} d(A/R)^{|G|}.$$

Hopf 代数作为群代数的推广, 其结构比群结构更为复杂和深刻, 并且群的很多理论可以相应地推广到 Hopf 代数上. 设 $n \geq 2$, λ 是 n -阶本原单位根. n -阶 Taft 代数 $H := H_n(\lambda)$ 是由 g 和 x 生成的 Hopf 代数, 其代数结构为

$$g^n = 1, \quad x^n = 0, \quad xg = \lambda gx,$$

余代数结构为

$$\Delta(g) = g \otimes g, \quad \varepsilon(g) = 1, \quad \Delta(x) = g \otimes x + x \otimes 1, \quad \varepsilon(x) = 0,$$

对极为

$$S(g) = g^{n-1}, \quad S(x) = -g^{n-1}x.$$

若 A 是一个左 H -模代数, 且没有非零的 Hopf 理想可以零化 A , 则称 A 是内忠实的 (inner faithful) H -模代数, 或 H 在 A 上的作用是内忠实的. 记

$$A^H = \{a \mid h \cdot a = \varepsilon(h)a, a \in A, h \in H\}.$$

设 $q \in \mathbb{k}^\times$, Gaddis 等^[22] 指出, H 在量子平面 $\mathbb{k}_q[x, y] = \mathbb{k}\langle x, y \mid yx - qxy \rangle$ 和 q -量子 Weyl 代数 $A_q = \mathbb{k}\langle x, y \mid yx - qxy - 1 \rangle$ 上的某一类作用是内忠实的当且仅当 $|q| \mid |\lambda|$, 其中 $|q|$ 和 $|\lambda|$ 分别为 q 和 λ 的阶. 文献 [22] 也证明了, 如果 $n = |\lambda| = |q| \geq 2$, 则 $A \# H$ 的中心是 $Z(A \# H) = A^H = \mathbb{k}[x^n, y^n]$. 另外, 文献 [22] 还给出了 Taft 代数与量子平面或 q -量子 Weyl 代数的 Smash 积的判别式.

定理 2.10^[22] 若 A 是量子平面 $\mathbb{k}_q[x, y]$ 或 q -量子 Weyl 代数 A_q , H 是 n -阶 Taft 代数. 如果 A 是一个给定的内忠实 H -模代数 (参见文献 [22, 命题 2.1 和注 2.3]), 则 $A \# H$ 在 A^H 上的判别式为

$$d(A \# H / A^H) =_{\mathbb{k}^\times} x^{2n^4(n-1)}.$$

本节的最后来回顾 Yakimov 和他的学生在判别式方面的工作.

设 $\text{char } \mathbb{k} = 0$, $(A, \{-, -\})$ 是 $\mathbb{k}$ 上的 Poisson 代数. 令 $a \in A$, 如果对任意的 $x \in A$, 存在 A 的 Poisson 导子 ∂ , 使得 $\{a, x\} = a\partial(x)$, 则称 a 是 A 的 Poisson 正规元 (Poisson normal element). 既是素元又是 Poisson 正规元的元素, 称为 Poisson 素元. 文献 [23, 24] 指出, a 是 Poisson 正规元当且仅当主理想 (a) 是 Poisson 理想, p 是 Poisson 素元当且仅当主理想 (p) 既是非零素理想又是 Poisson 理想.

令 A 是 $\mathbb{k}[q^{\pm 1}]$ -代数, 对于 $\varepsilon \in \mathbb{k}^\times$, 定义 $A_\varepsilon := A/(q - \varepsilon)A$. 令 $\sigma: A \rightarrow A_\varepsilon$ 为典范投射, A_ε 的中心 $Z(A_\varepsilon)$ 也是一个 Poisson 代数, 其 Poisson 结构为

$$\{\sigma(x_1), \sigma(x_2)\} := \sigma\left(\frac{x_1x_2 - x_2x_1}{q - \varepsilon}\right), \quad x_i \in \sigma^{-1}(Z(A_\varepsilon)).$$

令 C_ε 是中心为 $Z(A_\varepsilon)$ 的 Poisson 子代数, 并且使得 A_ε 是 C_ε 上秩有限的自由模. 设 $\{x_j \mid 1 \leq i \leq n\}$ 为 A_ε 在 C_ε 上的一组基, A_ε 在 C_ε 上的判别式为定义 2.1(3) 中的形式:

$$d(A_\varepsilon / C_\varepsilon) := \det(\text{tr}(x_i x_j)_{n \times n}).$$

定理 2.11^[23] 设 A 是 $\mathbb{k}[q^{\pm 1}]$ -代数, A_ε 是 C_ε 上秩有限的自由模, 则有

(1) $d(A_\varepsilon / C_\varepsilon)$ 是 $(C_\varepsilon, \{-, -\})$ 的 Poisson 正规元.

(2) 若 C_ε 是 A_ε 的唯一因式分解整环 (unique factorization domain, UFD) 或 Noether Poisson 唯一因式分解整环, 则有判别式

$$d(A_\varepsilon / C_\varepsilon) = 0$$

或

$$d(A_\varepsilon/C_\varepsilon) =_{C_\varepsilon^\times} \prod_{i=1}^m p_i,$$

其中 $p_1, \dots, p_m \in C_\varepsilon$ 是 Poisson 素元.

定理 2.11 是一个非常深刻的定理, 其判别式的形式不仅与交换代数判别式的形式非常相似, 而且有效地把 Poisson 素元和判别式结合起来. 定理 2.11 有很多应用, 下面举例说明. 令 $\text{char} \mathbb{k} = 0$, $n > 1$ 为整数, 量子矩阵代数 $A_q[M_n]$ 为由 x_{ij} 生成的 $\mathbb{k}[q^{\pm 1}]$ -代数, 且满足: 对于 $i, j \in [1, n] := \{1, 2, \dots, n\}$ 有如下关系:

$$\begin{aligned} x_{ij}x_{kj} &= qx_{kj}x_{ij}, & i < k, \\ x_{ij}x_{ir} &= qx_{ir}x_{ij}, & j < r, \\ x_{ij}x_{kr} &= x_{kr}x_{ij}, & i < k, \quad j > r, \\ x_{ij}x_{kr} - x_{kr}x_{ij} &= (q - q^{-1})x_{ir}x_{kj}, & i < k, \quad j < r. \end{aligned}$$

设 l 是大于 2 的奇数, $\varepsilon \in \mathbb{k}$ 为 l -阶本原单位根, 定义

$$A_\varepsilon[M_n] := A_q[M_n]/(q - \varepsilon)A_q[M_n], \quad \sigma : A_q[M_n] \rightarrow A_\varepsilon[M_n],$$

则元素 $z_{ij} := \sigma(x_{ij})^l$ 是 $A_\varepsilon[M_n]$ 的中心元, 即 $z_{ij} \in Z(A_\varepsilon[M_n])$. 令 $C_\varepsilon[M_n]$ 是由元素 z_{ij} 生成的中心 $Z(A_\varepsilon[M_n])$ 的子代数, 且有 $C_\varepsilon[M_n] \cong \mathbb{k}[z_{ij}, 1 \leq i, j \leq n]$, 则 $A_\varepsilon[M_n]$ 是 $C_\varepsilon[M_n]$ 上的自由模. 记 $\Delta_{I,J}$ 是矩阵 $(z_{ij})_{n \times n}$ 的余子式^[23], 其中行 $I \subseteq [1, n]$, 列 $J \subseteq [1, n]$.

定理 2.12^[23] 设 $\text{char} \mathbb{k} = 0$, n 为正整数, l 是大于 2 的奇数, $\varepsilon \in \mathbb{k}$ 为 l -阶本原单位根, 则代数 $A_\varepsilon[M_n]$ 在 $C_\varepsilon[M_n]$ 上的判别式为

$$d(A_\varepsilon[M_n]/C_\varepsilon[M_n]) =_{\mathbb{k}^\times} \prod_{k=1}^n \Delta_{[n-k+1, n]; [1, k]}^L \prod_{j=1}^{n-1} \Delta_{[1, j]; [n-j+1, n]}^L,$$

其中 $L := l^{n^2-1}(l-1)$.

3 判别式与自同构群

代数的自同构群是一个非常重要的不变量. 除了几类特殊的代数外, 一般很难计算代数 A 的自同构群 $\text{Aut}(A)$. 在引言中, 我们提到了关于自同构群方面的一些最新工作. 令人惊奇的是, 代数 A 在其中心 R 上的判别式是控制自同构群的一个有效不变量: 如果一个代数在其中心上的判别式是主控的 (dominating), 见定义 3.4, 则我们可以得到这个代数自同构群的完全刻画, 见定理 3.6. 下面将来介绍此方面的一些研究结果.

如果 $\mathbb{k}$ -代数 $A = \mathbb{k} \oplus A_1 \oplus A_2 \oplus \dots$, 其中 A_i 为有限维线性空间, 并且对任意的 $i, j \in \mathbb{N}$, A_i 和 A_j 满足 $A_i A_j \subset A_{i+j}$, 则称 A 为局部有限连通分次代数.

定义 3.1 设 $A = \bigcup_{i \geq 0} F_i A$ 是一个滤子代数, 其相伴分次代数是连通的. 如果自同构 $g \in \text{Aut}(A)$ 满足 $g(F_1 A) \subset F_1 A$, 则称 g 为仿射 (affine) 自同构.

定义 3.2 设 $\{x_1, \dots, x_n\}$ 是 $\mathbb{k}$ -代数 A 的生成元集, $g \in \text{Aut}(A)$, 若存在指标 s , 使得

$$g(x_i) = \begin{cases} x_i, & i \neq s, \\ x_s + f, & i = s, \end{cases} \quad (3.1)$$

其中 f 是由 $x_1, \dots, x_{s-1}, x_{s+1}, \dots, x_n$ 生成的, 则称 g 为初等 (elementary) 自同构.

如果自同构 g 是由仿射自同构和初等自同构生成的, 则称 g 为可控 (tame) 自同构. 关于以上自同构的具体内容可参见文献 [18].

定义 3.3 设 A 是代数, h 是 $A[t]$ 的自同构. 如果存在自同构 $g \in \text{Aut}(A)$, $c \in \mathbb{k}^\times$ 及 A 的中心元 r , 使得

$$h(t) = ct + r, \quad h(x) = g(x) \in A, \quad \forall x \in A,$$

则称 h 为三角自同构.

令 Y 是代数 A 的一个有限维子空间, $F = \{F_n A := (\mathbb{k} + Y)^n \mid n \geq 0\}$ 为 A 的穷举 (exhaustive) 滤子, 即 $\bigcup_n F_n A = A$. 如果相应的分次环 $\text{gr} A$ 是连通的, 且任意 $f \in F_n A \setminus F_{n-1} A$ 对应的分次元为 $\text{gr}(f) = f + F_{n-1} A \in (\text{gr}_F A)_n := F_n A / F_{n-1} A$, 则元素 f 的次数定义为分次元 $\text{gr}(f)$ 的次数, 即 $\deg(f) := \deg(\text{gr}(f))$. 下面给出主控元的定义:

定义 3.4 [18] 设 A 由有限维子空间 $Y = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{k} x_i$ 生成, $1_A \notin Y$, 且 A 相应的分次环

$$\text{gr} A := \bigoplus_{i \geq 1} (\mathbb{k} 1_A \oplus Y)^i / (\mathbb{k} 1_A \oplus Y)^{i-1}$$

是一个整环. 元素 $0 \neq f \in A$ 如果满足以下条件: 任意使得其分次代数 $\text{gr} T = \bigoplus_{i \geq 0} F_i T / F_{i-1} T$ 是连通分次整环的 $\mathbb{N}$ -滤子代数 T , 对任意 $\mathbb{k}$ -模 $T / F_0 T$ 中线性无关的子集 $\{y_1, \dots, y_n\} \subset T$, 存在 f 在自由代数 $\mathbb{k}\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ 中的一个原像 $f(x_1, \dots, x_n)$, 使得

$$f(y_1, \dots, y_n) = 0,$$

或者满足

- (1) $\deg(f(y_1, \dots, y_n)) \geq \deg(f)$;
- (2) 如果存在 i_0 使得 $\deg(y_{i_0}) > 1$, 则有 $\deg(f(y_1, \dots, y_n)) > \deg(f)$,

则称元素 f 为 A 的主控元 (dominating).

为叙述方便, 定义 Af 范畴为结合 $\mathbb{k}$ -代数范畴的一个全子范畴, 并由满足如下条件的代数生成 (参见文献 [18]):

- (1) A 在其中心 R 上是有限生成自由模;
- (2) A 是滤子代数, $\text{gr} A$ 是连通分次整环;
- (3) A 的判别式 $d(A/R)$ 是主控元.

例如, 生成元个数为偶数的 (-1) -量子 Weyl 代数和文献 [26] 中出现的广义量子 Weyl 代数都属于 Af 范畴中的代数.

定理 3.5 [18] 设 A 是 Af 范畴中的代数, 则有

- (1) A 的自同构是仿射自同构.
- (2) A 的多项式扩张 $A[t]$ 的自同构是三角自同构.

进一步, 设域 $\mathbb{k}$ 的特征为 0, 则

(3) A 的局部幂零导子是零导子.

(4) $\text{Aut}(A)$ 是代数群, 且具有如下的正合分解:

$$1 \longrightarrow (\mathbb{k}^\times)^r \longrightarrow \text{Aut}(A) \longrightarrow S \longrightarrow 1, \quad (3.2)$$

其中 $r \geq 0$, S 是有限群.

下面给出几个 Af 范畴中代数的例子. 令 $p, q, \lambda, \mu \in \mathbb{k}^\times$, $R = \mathbb{k}[z]_q[s, t]$ 是由 z 、 s 和 t 生成, 满足关系

$$zs = sz, \quad zt = tz, \quad st = qts$$

的 $\mathbb{k}$ -代数. Tang^[26] 介绍了代数 $A_p(\lambda, \mu, \mathbb{k}_q[s, t])$, 其生成元为 x 、 y 、 s 和 t , 生成关系为

$$\begin{aligned} xy - pyx &= 1, & st &= qts, & sx &= \lambda xs, \\ sy &= \lambda^{-1}ys, & tx &= \mu xt, & ty &= \mu^{-1}yt. \end{aligned}$$

Tang 证明了 $A_p(\lambda, \mu, \mathbb{k}_q[s, t])$ 是 $R = \mathbb{k}[z]_q[s, t]$ 上的广义量子 Weyl 代数, 且当 p 和 q 是单位根时, $A_p(1, 1, \mathbb{k}_q[s, t])$ 属于 Af 范畴, 于是有如下的结论:

定理 3.6^[26] 假设 $p \neq 1$, $q \neq 1$, 则

(1) $A_p(1, 1, \mathbb{k}_q[s, t])$ 的代数自同构是仿射自同构, 并且有

(i) 若 $p \neq -1$, $q \neq -1$, 则 $\text{Aut}(A_p(1, 1, \mathbb{k}_q[s, t])) = (\mathbb{k}^\times)^3$;

(ii) 若 $p = -1$, $q \neq -1$ 或 $p \neq -1$, $q = -1$, 则 $\text{Aut}(A_p(1, 1, \mathbb{k}_q[s, t])) = \mathbb{Z}_2 \ltimes (\mathbb{k}^\times)^3$;

(iii) 若 $p = -1$, $q = -1$, 则 $\text{Aut}(A_p(1, 1, \mathbb{k}_q[s, t])) = \mathbb{Z}_2 \ltimes (\mathbb{Z}_2 \ltimes (\mathbb{k}^\times)^3)$.

(2) 扩张代数 $A_p(1, 1, \mathbb{k}_q[s, t])[w]$ 的自同构是三角自同构. 进一步地, 若 ϕ 是 $A_p(1, 1, \mathbb{k}_q[s, t])[w]$ 的自同构, 则

$$\phi(x) = \phi_0(x), \quad \phi(y) = \phi_0(y), \quad \phi(s) = \phi_0(s), \quad \phi(t) = \phi_0(t), \quad \phi(w) = aw + b,$$

其中 ϕ_0 是 $A_p(1, 1, \mathbb{k}_q[s, t])$ 的自同构, $a \in \mathbb{k}^\times$, b 是 $A_p(1, 1, \mathbb{k}_q[s, t])$ 的某个中心元.

(3) 如果 $\text{char} \mathbb{k} = 0$, 则 $A_p(1, 1, \mathbb{k}_q[s, t])$ 的局部幂零导子为零导子.

另一个 Af 范畴中代数的例子是 (-1) -量子 Weyl 代数 W_n 的一个推广. 令

$$\mathcal{A} = \{a_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq n\}$$

是 $\mathbb{k}$ 中的数集, 定义广义 (-1) -量子 Weyl 代数 $V_n(\mathcal{A})$ 为由 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 生成、满足关系 $x_i x_j + x_j x_i = a_{ij}$ 的代数, 其中 $i < j$. 特别地,

(1) 如果 $a_{ij} = 0$, 则 $V_n(\mathcal{A})$ 是斜多项式代数 $V_n := \mathbb{k}_{-1}[x_1, \dots, x_n]$;

(2) 如果 $a_{ij} = 1$, 则 $V_n(\mathcal{A})$ 是 (-1) -量子 Weyl 代数 W_n .

当 n 是偶数时, $V_n(\mathcal{A})$ 是其中心上有限生成自由代数, 且属于 Af 范畴, 此时 $V_n(\mathcal{A})$ 的自同构是仿射自同构; 当 n 是奇数时, $V_n(\mathcal{A})$ 在其中心上不是有限生成自由代数. 在此基础上, 我们亦得到了关于广义 (-1) -量子 Weyl 代数的自同构群的一个结论^[18, 27].

定理 3.7^[18, 27] 设 $V_n(\mathcal{A})$ 是广义 (-1) -量子 Weyl 代数, 则

(1) 当 n 是偶数时, $V_n(\mathcal{A})$ 是其中心 $R = \mathbb{k}[x_1^2, \dots, x_n^2]$ 上有限生成秩为 2^n 的自由模, 且 $V_n(\mathcal{A})$ 的自同构都是仿射自同构.

(2) 设 n 是大于等于 3 的奇数, 且 $\text{char} \mathbb{k} \nmid (n-1)!$, 则自同构群 $\text{Aut}(V_n(\mathcal{A}))$ 包含由两个生成子生成的自由群, 即 $\text{Aut}(V_n(\mathcal{A}))$ 是包含可数个生成元的自由群.

设 G 是一个群, 如果存在正规可解子群 N 使得 G/N 是有限群, 则称群 G 是几乎可解的 (virtually solvable). 1972 年, Tits 给出了著名的 Tits Alternative (TA) 理论:

TA 理论 ^[34] 一般线性群 $\text{GL}_n(n, \mathbb{C})$ 的子群要么是几乎可解的, 要么是包含一个秩为 2 的自由群的群.

设 Ω 是一簇群, 如果 Ω 中每个群要么是几乎可解群, 要么是包含一个秩为 2 的自由群的群, 则称 Ω 满足 TA 理论.

由定理 3.7 可以得到 $V_n(\mathcal{A})$ 的自同构群满足 TA 理论. 下面的定理给出了广义 (-1) -量子 Weyl 代数同构的准则.

定理 3.8 ^[27] 设 $\text{char} \mathbb{k} \neq 2$, n 是偶数. 令 $\mathcal{A} = \{a_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq n\}$ 和 $\mathcal{A}' = \{a'_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq n\}$ 是 $\mathbb{k}$ 中的数集, 则 $V_n(\mathcal{A}) \cong V_n(\mathcal{A}')$ 当且仅当存在置换 $\sigma \in S_n$ 与非零数 $\lambda_i, i = 1, \dots, n$, 使得对任意的 $1 \leq i < j \leq n$, 有 $a'_{ij} = \lambda_i \lambda_j a_{\sigma(i)\sigma(j)}$.

从定理 3.8 可以得到, 当 $n \geq 4$ 是偶数时, 存在无限多个非同构的广义 (-1) -量子 Weyl 代数 $V_n(\mathcal{A})$. 下面给出更多的关于量子代数自同构群的结论.

定理 3.9 ^[18] 令 $q \in \mathbb{k}^\times$, $A_q = \mathbb{k}\langle x, y \rangle / (yx - qxy - 1)$ 是 q -量子 Weyl 代数. 定义

$$B := A_{q_1} \otimes \cdots \otimes A_{q_m},$$

这里对 $i = 1, \dots, m$, 有 $q_i \in \mathbb{k}^\times \setminus \{1\}$,

(1) 代数 B 的自同构是仿射自同构, $\text{Aut}(B)$ 是代数群且满足如下的正合列:

$$1 \rightarrow (\mathbb{k}^\times)^m \rightarrow \text{Aut}(B) \rightarrow S \rightarrow 1.$$

(2) 扩张代数 $B[t]$ 的自同构是三角自同构.

(3) 如果 $\text{char} \mathbb{k} = 0$, 则 B 的局部幂零导子是零导子.

(4) 特别地, 对任意的 $i \neq j$, 若 $q_i \neq \pm 1$ 且 $q_i \neq q_j^{\pm 1}$, 则 $\text{Aut}(B) = (\mathbb{k}^\times)^m$; 若 $q_i = q \neq \pm 1$, 则 $\text{Aut}(B) = S_m \ltimes (\mathbb{k}^\times)^m$.

设 $\{p_{ij} \in \mathbb{k}^\times \mid 1 \leq i < j \leq n\}$, 若 $i < j$, 令 $p_{ji} = p_{ij}^{-1}$, $p_{ii} = p_{jj} = 1$. 下面的定理刻画了斜多项式环 $\mathbb{k}_{p_{ij}}[x_1, \dots, x_n]$ 的判别式和自同构.

定理 3.10 ^[19] 令 $A = \mathbb{k}_{p_{ij}}[x_1, \dots, x_n]$ 是 PI (polynomial identity) 斜多项式环, R 是 A 的中心, 则下列结论等价:

(1) 判别式 $d_s(A/R)$ 是主控元, 其中 $s = \text{rank}(A/R)$.

(2) A 的自同构是仿射自同构, 并且 $A[t]$ 的自同构是三角自同构.

(3) A 的中心 $R \subset \mathbb{k}\langle x_1^{\alpha_1}, \dots, x_n^{\alpha_n} \rangle$, 其中 $\alpha_1, \dots, \alpha_n \geq 2$.

如果 $\text{char} \mathbb{k} = 0$, 上述条件也等价于

(4) A 的局部幂零导子为零导子.

即使对于不在 Af 范畴中的代数, 判别式对于这些代数的自同构的研究也有帮助.

定理 3.11 ^[19] 令 $A = \mathbb{k}_{p_{ij}}[x_1, \dots, x_n]$ 是斜多项式代数 (不必是 PI 的), 且对任意的 i , x_i 不是 A 的中心元. 令 s_0 是 1 到 n 之间的某个整数, 假设对于 $s \neq s_0$,

$$T_s = \left\{ (d_1, \dots, \widehat{d_s}, \dots, d_n) \in N^{n-1} \mid \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq s}}^n p_{ij}^{d_j} = p_{is}, \forall i \neq s \right\}$$

是有限集, 则 A 的自同构是可控自同构.

Chan 等给出了斜多项式代数的 Veronese 子环的自同构群.

定理 3.12 ^[25] 设 $\text{char} \mathbb{k} \neq 2$, v 是正整数, 且 n 和 v 具有不同的奇偶性. 令 $A = \mathbb{k}_{-1}[x_1, \dots, x_n]^{(v)}$ 为斜多项式代数 $\mathbb{k}_{-1}[x_1, \dots, x_n]$ 的 Veronese 子环, 则有 $\text{Aut}(A) \cong S_n \ltimes (\mathbb{k}^\times)^n$.

定理 3.13 ^[25] 令 v 和 m 是正整数, 且 $m > 2$, q 是 m - 阶单位根, $A = \mathbb{k}_q[x_1, \dots, x_n]^{(v)}$. 若 n 为偶数且 $m \nmid v$ 或 n 为奇数且 $\gcd(m, v) = 1$, 则有

- (1) 如果 q^v 是 1 或 -1 , 则 $\text{Aut}(A) \cong \mathbb{Z}/(n) \ltimes (\mathbb{k}^\times)^n$;
- (2) 如果 $q^v \neq \pm 1$, 则 $\text{Aut}(A) \cong (\mathbb{k}^\times)^n$.

推论 3.14 (1) $\mathcal{C}_2$ 满足 TA 理论;

(2) 若 n 是奇数, 则 $\mathcal{C}_n$ 满足 TA 理论.

另外, Gaddies 等 ^[21] 给出了如下的 Ore 扩张代数的自同构:

定理 3.15 ^[21] 设 $S = \mathbb{k}[x, y][t, \sigma]$ 是 $\mathbb{k}[x, y]$ 的 Ore 扩张代数, 其中 $\sigma \in \text{Aut}(\mathbb{k}[x, y])$, 且

$$\sigma(x) = y, \quad \sigma(y) = x.$$

设 $Z(S)$ 表示 S 的中心, 则

- (1) $d(S/Z(S)) = 16(x - y)^4 t^4$;
- (2) 设 $a, b, c \in \mathbb{k}^\times$, $d \in \mathbb{k}$, 则 $\text{Aut}(S)$ 由下面两种形式的映射组成:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ t \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d \\ d \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ t \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & a & -b \\ a & a & b \\ -c & c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d \\ d \\ 0 \end{pmatrix}.$$

本节最后重述一下自同构方面仍公开的著名问题之一:

问题 3.16 ^[35-37] 当 $n \geq 3$ 时, 如何计算和刻画 $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ 的自同构群?

4 判别式在消去问题中的应用

交换代数中的著名的 Zariski 消去问题是指交换多项式环 $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ 的消去性, 见定义 4.1. 目前, Abhyankar 等 ^[38] 已经证明了 $\mathbb{k}[x]$ 是可消去的; Fujita ^[39] 及 Miyanishi 和 Sugie ^[40] 证明了域 $\mathbb{k}$ 的特征为 0 时, $\mathbb{k}[x_1, x_2]$ 是可消去的; Russell ^[41] 证明了域 $\mathbb{k}$ 的特征大于 0 时, $\mathbb{k}[x_1, x_2]$ 是可消去的. Gupta ^[42, 43] 证明了, 如果域 $\mathbb{k}$ 的特征大于 0 时, $n \geq 3$ 的多项式代数 $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ 是不可消去的. 而域 $\mathbb{k}$ 的特征为 0 时, $n \geq 3$ 的多项式代数 $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ 的消去性仍然是一个公开问题. 交换代数的 Zariski 消去问题与自同构问题、特征问题、线性化问题和 Jacobi 猜想都有关系. 最近的研究表明, 非交换代数的 Zariski 消去问题也与代数自同构问题有关, Bell 和 Zhang 利用非交换代数的判别式给出了可消去代数的刻画. 本节将介绍近几年非交换代数消去问题的一些进展.

定义 4.1 设 A 是一个代数, 如果对任意的代数 B , 由 $A[t] \cong B[t]$ 可得到 $A \cong B$, 则称代数 A 为可消去代数 (cancellative algebra).

一个代数如果是有限生成的, 则称其为仿射代数 (affine algebra). 下文中, Gelfand-Kirillov (GK) 维数的定义可参见文献 [44].

首先, 下面三类非交换代数是可消去的.

定理 4.2^[28] 设 $\mathbb{k}$ 是特征为 0 的代数闭域, A 是 GK 维数为 2 的仿射 $\mathbb{k}$ -代数. 如果 A 不是交换的, 则 A 是可消去的.

定理 4.3^[29] 设 Q 是有限箭图, 则路代数 $\mathbb{k}Q$ 是可消去的.

另外, Abhyankar 等^[38]证明了 GK 维数为 1 的仿射交换整环是可消去的, 下面的定理给出了 GK 维数为 1 的仿射素代数的消去性.

定理 4.4^[29] 设 $\mathbb{k}$ 是代数闭域, 则 GK 维数为 1 的仿射素代数是可消去的.

接下来将介绍判别式与消去问题之间的关系.

定义 4.5^[28] 设 n 是整数, 代数 A 由 $Y = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{k}x_i$ 生成, 元素 $f \in A$, 如果对任意使得 $\text{gr}T := \bigoplus F_i T / F_{i-1} T$ 是一个整环的 $\mathbb{N}$ -滤化代数 T , 对满足如下条件的任意子集 $\{y_1, \dots, y_n\} \subset T$:

(1) $\{y_1, \dots, y_n\}$ 在商空间 $T/\mathbb{k}1_T$ 中是线性无关的;

(2) 至少存在一个 y_i 不在 $F_0 T$ 中,

若存在 f 在自由代数 $\mathbb{k}\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ 中的原像 $f(x_1, \dots, x_n)$, 使得 $f(y_1, \dots, y_n) = 0$, 或者 $f(y_1, \dots, y_n)$ 不属于 $F_0 T$, 则称元素 f 为有效元 (effective element).

事实上, 具体验证一个元素是有效元并不是一个平凡的过程. 目前主控元与有效元之间的关系尚不清楚, 文献 [28, 例 5.6] 证明了一个元素是有效元, 但不能证明它是主控元.

定理 4.6^[28] 设 A 是整环, 且 A 在其仿射中心 R 上是有限生成模. 如果其判别式 $d(A/R)$ 是有效的或主控的, 则 A 是可消去的.

因为 Af 中代数的判别式 $d(A/R)$ 是主控的, 由定理 4.6 知, Af 中的代数都是可消去的.

为了处理正特征时的消去问题, 我们要用到高导子或 Hasse-Schmit 导子的概念^[45]. 设 A 是代数, A 的高导子 (higher derivation) 是指 A 的一系列 $\mathbb{k}$ -线性自同态 $\partial := \{\partial_i\}_{i=0}^{\infty}$, 对任意 $a, b \in A$, $n \geq 0$, ∂ 满足

$$\partial_0 = \text{Id}_A, \quad \partial_n(ab) = \sum_{i=0}^n \partial_i(a) \partial_{n-i}(b).$$

一个高导子 ∂ 如果满足下列条件:

- (1) 对 $\forall a \in A$, 存在 $n \geq 0$, 使得 $i \geq n$ 时, $\partial_i(a) = 0$;
- (2) 映射 $G_{\partial,t} : A[t] \rightarrow A[t]$ 是 $A[t]$ 的代数自同构, 其中

$$a \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} \partial_i(a) t^i, \quad t \mapsto t,$$

则称 ∂ 是局部幂零高导子 (locally nilpotent higher derivation), 局部幂零高导子集合记为 $\text{LND}^H(A)$.

定义 4.7^[28] 设 A 是代数, A 的 Makar-Limanov (ML) 不变量^[46] 定义为

$$\text{ML}(A) = \bigcap_{\delta \in \text{LND}^H(A)} \ker(\delta).$$

如果 $\text{ML}(A) = A$ 或 A 的局部幂零高导子为 0, 则称 A 为 LND^H -刚性的 (rigid).

事实上, 经典的 Makar-Limanov 不变量定义中使用的导子是一般的局部幂零导子, 具体细节参见文献 [28].

定理 4.8^[28] 设 A 是斜多项式环 $\mathbb{k}_{p_{ij}}[x_1, \dots, x_n]$, 其中 p_{ij} ($i, j = 1, \dots, n$) 是单位根, R 是 A 的中心, 则下列条件等价:

- (1) 自同构群 $\text{Aut}(A)$ 是仿射的;
- (2) 判别式 $d_s(A/R)$ 是主控的, 其中 $s = \text{rank}(A/R)$;
- (3) 判别式 $d_s(A/R)$ 是有效的;
- (4) A 是 LND^H -刚性的.

特别地, 若 A 满足上述等价条件中的任一个, 则 A 是可消去的.

定理 4.9 ^[25] 令 v 是正整数, $q \in \mathbb{k}^\times$ 是 m -阶本原单位根, 假设 n 是偶数且 $m \nmid v$, 或 n 是奇数且 $\gcd(m, v) \neq 1$, 则代数 $\mathbb{k}_q[x_1, \dots, x_n]^{(v)}$ 是 LND^H -刚性的和可消去的.

下面进一步给出判别式在消去问题方面中的一些结果.

设 $\text{char} \mathbb{k} = 0$, F 是代数 A 的子集, 令

$$S_w(F) = \{x \in A \mid f = axb, a, b \in A, 0 \neq f \in F\},$$

令 $D_0(F) = F$, 定义

$$D_1(F) = \mathbb{k}\langle S_w(F) \rangle \subset A;$$

对 $n > 2$, 定义

$$D_n(F) = D_1(D_{n-1}(F)),$$

则 A 的 F -因子子代数定义为

$$D(F) = \bigcup_{n \geq 1} D_n(F).$$

如果 $F = \{d(A/Z)\}$, 则称 $D(F)$ 为 A 的判别式-因子子代数, 记 A 的判别式-因子子代数为 $\mathbb{D}(A)$.

定理 4.10 ^[20] 设 $\text{char} \mathbb{k} = 0$, A 是 GK 维数有限的连通分次整环, 并且 A 是其中心上有限生成自由模. 如果 $\mathbb{D}(A) = A$, 则 A 是可消去的.

定义 4.11 ^[29] 设 A 是代数, 如果 A 的每一个 $\mathbb{k}$ -代数满同态 $\eta: A \rightarrow A$ 都是同构, 则称 A 是 Hopf 代数. 对任意的 $n \geq 0$, 如果 $A[t_1, \dots, t_n]$ 是 Hopf 的, 则称 A 是强 Hopf 代数.

文献 [29] 指出, 左 (或右) Noether 代数、有限生成局部有限的 $\mathbb{N}$ -分次代数和 PI 的素仿射代数都是强 Hopf 的.

定理 4.12 ^[29] 如果 A 是强 Hopf 的, 且 A 的中心是 Artin 的, 则 A 是可消去的.

由定理 4.12 可以得到如下的推论:

推论 4.13 如果 A 是左 (或右) Artin 的, 则 A 是可消去的. 特别地, 域 $\mathbb{k}$ 上的有限维代数是可消去的.

本节最后再次阐述一下关于消去的一个公开问题:

问题 4.14 (Zariski 消去问题 ^[35, 47, 48]) 设 $\text{char} \mathbb{k} = 0$, $n \geq 3$ 是整数, 多项式代数 $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ 是可消去的吗?

5 判别式与 Azumaya 点

最近的研究结果表明, 判别式与 Azumaya 点之间也有联系, 从而可以把判别式应用到表示论的研究中. 本节简单回顾 Brown-Yakimov 关于判别式和 Azumaya 轨迹方面的工作.

设 $\mathbb{k}$ 是代数闭域, A 是素 $\mathbb{k}$ -代数, 并且 A 在其仿射中心 R 上是有限生成模, 令 $n = \text{PIdeg}(A) < \infty$. A 的 Azumaya 轨迹定义为

$$\mathcal{A}(A) := \{\mathfrak{m} \in \text{MaxSpec}(R) \mid A/\mathfrak{m}A \cong M_{n \times n}(R/\mathfrak{m})\}.$$

令 I 是 R 的理想, $\mathcal{V}(I)$ 表示 I 在 $\text{MaxSpec}(R)$ 中的零点集. 下面是 Brown 和 Yakimov^[30] 的主要结果的一个简化形式:

定理 5.1^[30] 设 $\mathbb{k}$ 是特征为 0 的代数闭域, A 是 $\mathbb{k}$ 上的仿射素代数, 且 A 是其中心 R 上的有限生成模. 若 R 是正规整环, $\text{PIdeg}(A) = n$, 则

(1) A 的 n^2 -判别式理想的零点集与 A 的改良的 n^2 -判别式理想的零点集以及 A 的 Azumaya 点的补集相同, 即

$$\mathcal{V}(D_{n^2}(A/R, \text{tr})) = \mathcal{V}(MD_{n^2}(A/R, \text{tr})) = \text{MaxSpec}(R) \setminus \mathcal{A}(A);$$

(2) 对所有整数 $l > n^2$, 都有

$$D_l(A/R, \text{tr}) = MD_l(A/R, \text{tr}) = 0.$$

6 总结

判别式作为代数研究中的一个重要不变量, 具有悠久的历史 and 广泛的应用范围^[1-4], 而且, 判别式与 Morse 理论、椭圆曲线、超几何函数 (hyper geometric function) 等都有着紧密的联系^[49]. 判别式在非交换代数中的出现始于除环上的应用^[32], 目前, 非交换代数的判别式已成为研究代数自同构群的一个重要工具. 另外, 其在代数同构问题、消去问题、Tits 原理和 Azumaya 轨迹等问题的研究方面也扮演着重要的角色, 为这些问题的研究带来了新的思想和新的研究方法. 判别式虽然起源于数论和代数学的研究, 但其不仅仅局限于这些领域的研究范畴, 判别式还在微分流形、代数拓扑和代数几何等的研究中有着重要的地位^[50]. 尽管如此, 目前非交换代数判别式理论还有待于进一步的发展和完善, 例如, 很多代数的判别式公式目前还无法得到, 一些代数自同构群还无法具体刻画出来, 判别式的主控性和有效性的更多利用还有待研究, 期待判别式理论可以得到进一步的发展, 并应用到更多的研究领域.

致谢 非常感谢审稿人提出的宝贵意见, 以及秦晓珊、徐晓伟和赵志兵在本文写作过程中的认真阅读和提出的宝贵意见.

参考文献

- 1 Cayley A. On the theory of elimination. Cambridge Dublin Math J, 1848, 3: 116–120; Collected Papers, vol. 1. Cambridge: Cambridge University Press, 1889, 370–374
- 2 Sylvester J J. On a remarkable discovery in the theory of canonical forms and of hyperdeterminants. Philos Magazine, 1851, 2: 391–410
- 3 Ribenboim P. Classical Theory of Algebraic Numbers. New York: Springer-Verlag, 2001
- 4 Morandi P. Field and Galois Theory. New York: Springer-Verlag, 1996
- 5 Jung H W E. Über ganze birationale transformationen der Ebene. J Reine Angew Math, 1942, 184: 161–174
- 6 van der Kulk W. On polynomial rings in two variables. Nieuw Arch Wiskd (5), 1953, 27: 33–41
- 7 Shestakov I, Umirbaev U. The tame and the wild automorphisms of polynomial rings in three variables. J Amer Math Soc, 2004, 179: 197–227
- 8 Alev J, Chamarie M. Derivations et automorphismes de quelques algebras quantiques. Comm Algebra, 1992, 20: 1787–1802

- 9 Alev J, Dumas F. Rigidité des plongements des quotients primitifs minimaux de $Uq(sl(2))$ dans l'algèbre quantique de Weyl-Hayashi. Nagoya Math J, 1996, 143: 119–146
- 10 Alev J, Hodges T J, Velez J D. Fixed rings of the Weyl algebra C . J Algebra, 1990, 130: 83–96
- 11 Andruskiewitsch N, Dumas F. On the automorphisms of $U_q^+(g)$. In: Quantum Groups. IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics, vol. 12. Zurich: Eur Math Soc, 2008, 107–133
- 12 Bavula V V, Jordan D A. Isomorphism problems and groups of automorphisms for generalized Weyl algebras. Trans Amer Math Soc, 2001, 353: 769–794
- 13 Gomez-Torrecillas J, El Kaoutit L. The group of automorphisms of the coordinate ring of quantum symplectic space. Beitrage Algebra Geom, 2002, 43: 597–601
- 14 Launois S, Lenagan T H. Primitive ideals and automorphisms of quantum matrices. Algebr Represent Theory, 2007, 10: 339–365
- 15 Suárez-Alvarez M, Vivas Q. Automorphisms and isomorphisms of quantum generalized Weyl algebras. J Algebra, 2015, 424: 540–552
- 16 Yakimov M. The Launois-Lenagan conjecture. J Algebra, 2013, 392: 1–9
- 17 Yakimov M. Rigidity of quantum tori and the Andruskiewitsch-Dumas conjecture. Selecta Math (NS), 2014, 20: 421–464
- 18 Ceken S, Palmieri J, Wang Y H, et al. The discriminant controls automorphism groups of noncommutative algebras. Adv Math, 2015, 269: 551–584
- 19 Ceken S, Palmieri J, Wang Y H, et al. The discriminant criterion and automorphism groups of quantized algebras. Adv Math, 2016, 286: 754–801
- 20 Chan K, Young A A, Zhang J J. Discriminant formulas and applications. Algebra Number Theory, 2016, 10: 557–596
- 21 Gaddis J, Kirkman E, Frank Moore W. On the discriminant of twisted tensor products. J Algebra, 2017, 477: 29–55
- 22 Gaddis J, Won R, Yee D. Discriminants of Taft algebra smash products and applications. ArXiv:1707.02822, 2017
- 23 Nguyen B, Trampel K, Yakimov M. Noncommutative discriminants via Poisson primes. Adv Math, 2017, 322: 269–307
- 24 Levitt J, Yakimov M. Quantized Weyl algebras at root of unity. ArXiv:1606.02121, 2016
- 25 Chan K, Young A A, Zhang J J. Discriminants and automorphism groups of Veronese subrings of skew polynomial rings. Math Z, 2018, 288: 1395–1420
- 26 Tang X. The automorphism groups for a family of generalized Weyl algebras. J Algebra Appl, 2018, 17: 1850142
- 27 Ceken S, Palmieri J, Wang Y H, et al. Invariant theory for quantum Weyl algebras under finite group action. Proc Sympos Pure Math, 2016, 92: 119–134
- 28 Bell J, Zhang J J. Zariski cancellation problem for noncommutative algebras. Selecta Math (NS), 2017, 23: 1709–1737
- 29 Lezama O, Wang Y H, Zhang J J. Zariski cancellation problem for non-domain noncommutative algebras. Math Z, 2018, 23: 1–22
- 30 Brown K A, Yakimov M. Azumaya loci and discriminant ideal of PI algebras. ArXiv:1702.04305, 2017
- 31 Alaca A, Williams K S. Introductory Algebraic Number Theory. Cambridge: Cambridge University Press, 2004
- 32 Reiner I. Maximal Orders. London Mathematical Society Monographs New Series, vol. 28. Oxford: Oxford University Press, 2003
- 33 Stein W A. Algebraic number theory: A computational approach. [Http://wstein.org/books/ant/ant.pdf](http://wstein.org/books/ant/ant.pdf), 2012
- 34 Tits J. Free subgroups in linear groups. J Algebra, 1972, 20: 250–270
- 35 Karft H. Challenging problems on affine n -space. Séminaire Bourbaki, 1994–1995, exp. n° 802, 295–317; Asterisque, 1996, 237: 295–317
- 36 Bass H. Automorphisms of polynomial rings. In: Abelian Group Theory. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1006. New York: Springer, 1983, 762–771
- 37 Essen A V D. Polynomial Automorphisms and Jacobian Conjecture. Progress in Mathematics, vol. 190. Boston: Birkhäuser, 2000
- 38 Abhyankar S S, Heinzer W, Eakin P. On the uniqueness of the coefficient ring in a polynomial ring. J Algebra, 1972, 23: 310–342
- 39 Fujita T. On Zariski problem. Proc Japan Acad Ser A Math Sci, 1979, 55: 106–110
- 40 Miyanishi M, Sugie T. Affine surfaces containing cylinderlike open sets. J Math Kyoto Univ, 1980, 20: 11–42
- 41 Russell P. On affine-ruled rational surfaces. Math Ann, 1981, 255: 287–302
- 42 Gupta N. On the cancellation problem for the affine space A^3 in characteristic p . Invent Math, 2014, 195: 279–288
- 43 Gupta N. On Zariski's Cancellation problem in positive characteristic. Adv Math, 2014, 264: 296–307
- 44 Krause G R, Lenagan T H. Growth of Algebras and Gelfand-Kirillov Dimension. Graduate Studies in Mathematics, vol. 22. Providence: Amer Math Soc, 1999
- 45 Hass H, Schmit F K. Noch eine Begründung der theorie der höheren differentialquotienten in einem algebraischen

- Funktionenkorper einer unbestimmten. J Reine Angew Math, 1937, 177: 215–237
- 46 Makar-Limanov L. On the hypersurface $x + x^2y + z^2 + t^3 = 0$ in C^4 or a C^3 -like threefold which is not C^3 . Israel J Math, 1996, 96: 419–429
- 47 Gupta N. A survey on Zariski cancellation problem. Indian J Pure Appl Math, 2015, 46: 865–877
- 48 Eakin P, Heinzer W. A cancellation problem for rings. In: Conference on Commutative Algebra. Lecture Notes in Mathematics, vol. 311. Berlin: Springer, 1972, 61–77
- 49 Gelfand I M, Kapranov M M, Zelevinsky A V. Discriminants, Resultants, and Multidimensional Determinants. Boston: Birkhäuser, 2008
- 50 Nicolaescu L. An Invitation to Morse Theory. New York: Springer, 2011

Discriminants of noncommutative algebras and their applications

Yanhua Wang & James J. Zhang

Abstract In this paper, we survey some recent developments on the discriminants of noncommutative algebras and some discriminant formulas. We also give applications of discriminants to automorphism problem, isomorphism problem, cancellation problem, Tits alternative principle and Azumaya locus.

Keywords discriminant, automorphism group, affine, dominating element, cancellation problem, Azumaya locus

MSC(2010) 16W20, 11R29

doi: 10.1360/N012017-00263