双线性 Fourier 乘子在模空间中的正交性

献给王斯雷教授 85 华诞

郭炜超¹, 赵国平², 赵威任^{3*}

1. 广州大学数学与信息科学学院, 广州 510006;

2. 厦门理工学院应用数学学院, 厦门 361024;

3. 北京大学数学科学学院, 北京 100871

E-mail: weichaoguomath@gmail.com, guopingzhaomath@gmail.com, zjzjzwr@126.com

收稿日期: 2017-06-25; 接受日期: 2018-04-26; 网络出版日期: 2018-09-30; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11701112, 11601456, 11671363 和 11771388) 和中国博士后科学基金 (批准号: 2017M610007 和 2017M612628) 资助项目

摘要 本文证明了, 如果一列在模空间一致有界的双线性 Fourier 乘子具有一定的正交性, 则这列双线性算子的和仍然在模空间中有界. 同时, 本文给出了双线性 Fourier 乘子在模空间上有界的等价刻画.

关键词 双线性 Fourier 乘子 模空间 正交性

MSC (2010) 主题分类 42B35

1 引言与预备知识

模空间是由 Feichtinger^[1] 在 1983 年引进的. 起初, 模空间是通过短时 Fourier 变换定义的, 引进的初衷是用来描述一个函数在时频空间的分布情况, 关于模空间的一些研究动机和历史背景参见文献 [2]. 利用短时 Fourier 变换, 我们可以提取函数在局部的时频信息, 而外层的积分作为局部信息的累加则反映出一个函数在时频平面的分布情况. 下面给出短时 Fourier 变换具体的定义, 我们用 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 上的 Schwartz 函数全体, 用 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 表示缓增分布全体. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 上的 Fourier 变换和 Fourier 逆变换分别定义为

$$\mathcal{F}f(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx, \quad \mathcal{F}^{-1}f(x) = \widehat{f}(-x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi)e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi.$$

定义 1.1 设 ϕ 为 Schwartz 函数, 则关于缓增分布 f 的短时 Fourier 变换定义为

$$V_{\phi}f(x, \xi) = \langle f, M_{\xi}T_x\phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\overline{\phi(y-x)}e^{-2\pi i y \cdot \xi} dy, \quad (1.1)$$

其中第二个等号仅对比较好的函数 f (如 Schwartz 函数) 成立.

英文引用格式: Guo W C, Zhao G P, Zhao W R. Orthogonality of the bilinear Fourier multiplier in the modulation spaces (in Chinese). Sci Sin Math, 2018, 48: 1289–1302, doi: 10.1360/N012017-00137

从上述的定义可以看出, 短时 Fourier 变换其实是分布 f 与时频平移后的窗口函数 $M_\xi T_x \phi$ 在时频平面上的复内积. 这里 $T_{x_0} f(x) = f(x - x_0)$ 和 $M_\xi f(x) = e^{2\pi i \xi \cdot x} f(x)$ 分别表示平移算子和模算子, 其中 $x, x_0, \xi \in \mathbb{R}^n$.

短时 Fourier 变换定义的模空间在处理一些整体性比较强的问题时是有好处的, 例如, 在短时 Fourier 变换的意义下可以很容易看出 Fourier 变换导致的时域和频域的相互转换. 关于短时 Fourier 变换的更多性质及应用, 参见文献 [3].

下面用短时 Fourier 变换给出模空间的定义. 记 $\langle \xi \rangle = (1 + |\xi|^2)^{\frac{1}{2}}$.

定义 1.2 令 $0 < p, q \leq \infty, s \in \mathbb{R}$. 给定窗口函数 $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$, 模空间 $M_{p,q}^s$ 定义为所有使得如下范数有限的缓增分布 $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 的全体:

$$\|f\|_{M_{p,q}^s} = \| \|V_\phi f(x, \xi)\|_{L_{x,p}} \|_{L_{\xi,q}^s} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |V_\phi f(x, \xi)|^p dx \right)^{q/p} \langle \xi \rangle^{sq} d\xi \right)^{1/q}, \quad (1.2)$$

其中第二个等号当 $p \neq \infty$ 和 $q \neq \infty$ 时成立. 对于不同的窗口函数 $\phi \in \mathcal{S} \setminus \{0\}$, 如上所定义出来的模空间是等价的.

模空间有许多的等价定义. 其中, 在处理一些容易局部化或正交化的问题时, 离散型的定义是方便的. 下面给出模空间的这个等价定义.

用 Q_k 表示中心在 $k \in \mathbb{Z}^n$ 的单位方体, 于是, $\{Q_k\}_{k \in \mathbb{Z}^n}$ 形成 $\mathbb{R}^n$ 的一个划分. 为了得到 $\mathbb{R}^n$ 上的一个光滑单位分解, 令 $\rho \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\rho: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ 为一个光滑函数, 满足若 $\xi \in [-1/2, 1/2]^n$, 则 $\rho(\xi) = 1$; 若 $\xi \notin [-3/4, 3/4]^n$, 则 $\rho(\xi) = 0$. 记 ρ_k 为 ρ 的一个平移, 定义为

$$\rho_k(\xi) = \rho(\xi - k), \quad k \in \mathbb{Z}^n, \quad (1.3)$$

于是有 $\xi \in Q_k$ 时, $\rho_k(\xi) = 1$, 以及 $\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \rho_k(\xi) \geq 1$ 对任意 $\xi \in \mathbb{R}^n$ 成立. 记

$$\sigma_k(\xi) = \rho_k(\xi) \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}^n} \rho_l(\xi) \right)^{-1}, \quad k \in \mathbb{Z}^n, \quad (1.4)$$

则 $\{\sigma_k\}_{k \in \mathbb{Z}^n}$ 构成 $\mathbb{R}^n$ 上的一个光滑单位分解. 对应的频率投影算子定义为

$$\square_k := \mathcal{F}^{-1} \sigma_k \mathcal{F}, \quad k \in \mathbb{Z}^n. \quad (1.5)$$

下面用如上构造的光滑单位分解给出模空间的离散型定义.

定义 1.3 令 $s \in \mathbb{R}, 0 < p, q \leq \infty$, 定义模空间如下:

$$M_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in \mathcal{S}' : \|f\|_{M_{p,q}^s} := \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \langle k \rangle^{sq} \|\square_k f\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}} < \infty \right\}. \quad (1.6)$$

这个定义与 σ 的选取是无关的, 事实上, 只要 σ 是具有紧支集的光滑函数, 并且满足 $\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \sigma_k = C > 0$, 就都可以导出模空间的等价定义. 为了方便起见, 简记 $M_{p,q}^0$ 为 $M_{p,q}$.

关于模空间和一些二进分解空间的关系, 参见文献 [4–8]. 与二进分解空间不同, 模空间的频率一致分解方式使得模空间具有许多优良的性质. 例如, 模空间有很好的乘积和卷积刻画 (参见文献 [9–11]), 么模乘子在模空间上比 Lebesgue 空间或 Besov 空间有更好的有界性 (参见文献 [12–15]). 正是因为模空间的这些性质, 使得它成为偏微分方程研究中的一个重要的工作空间, 关于偏微分方程方面参见文献 [16–21].

下面回顾一下 Fourier 乘子在模空间的一些性质. 本文用 $A \lesssim B$ 来表示存在一个常数 $C > 0$ 使得 $A \leq CB$. 若 $\tau \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, 则其对应的 (线性) Fourier 乘子算子定义为

$$T_\tau(f)(x) = \mathcal{F}^{-1}(\tau \mathcal{F}f)(x), \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

若对任意 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 有

$$\|T_\tau(f)\|_{M_{p,q}^s} \lesssim \|f\|_{M_{p,q}^s},$$

则称 τ 为 $M_{p,q}^s$ 上的 Fourier 乘子. 我们用 $M_{\mathcal{F}}(M_{p,q}^s(\mathbb{R}^n))$ 表示 $M_{p,q}^s$ 上的 Fourier 乘子全体, 其范数定义为 $\|\tau\|_{M_{\mathcal{F}}(M_{p,q}^s(\mathbb{R}^n))} = \|T_\tau\|_{M_{p,q}^s \rightarrow M_{p,q}^s}$.

由于模空间定义中天然的局部性和正交性, 因此可以用对应的一致分解的 Wiener 混合空间来刻画模空间上的 Fourier 乘子. 首先, 引入一个特殊的 Wiener 混合空间, 用 $W(M_{\mathcal{F}}(M_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)), l^\infty)$ 表示所有满足 $\sigma_k \tau \in M_{\mathcal{F}}(M_{p,q}^s(\mathbb{R}^n))$ 并且满足 $\sup_{k \in \mathbb{Z}^n} \|\sigma_k \tau\|_{M_{\mathcal{F}}(M_{p,q}^s(\mathbb{R}^n))} < \infty$ 的缓增分布全体, 其中

$$\|\tau\|_{W(M_{\mathcal{F}}(M_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)), l^\infty)} \triangleq \sup_{k \in \mathbb{Z}^n} \|\sigma_k \tau\|_{M_{\mathcal{F}}(M_{p,q}^s(\mathbb{R}^n))}.$$

Feichtinger 和 Narimani^[22] 给出了如下关于模空间上 Fourier 乘子的刻画.

命题 1.4 (参见文献 [22, 定理 17(1)]) 令 $1 \leq p, q \leq \infty$, 则

$$M_{\mathcal{F}}(M_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)) = W(M_{\mathcal{F}}(M_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)), l^\infty). \quad (1.7)$$

利用命题 1.4 的思想, 我们可以进一步刻画一些具体的 Fourier 乘子在模空间中的有界性. 例如, 关于分数次积分算子的有界性可以参见文献 [23–25], 关于么模乘子在模空间中的有界性可以参见文献 [14, 15].

如上所述, 模空间自身的正交性在研究 Fourier 乘子的有界性中起到很关键的作用, 本文的主要目的是探索模空间的局部性和正交性在双线性 Fourier 乘子的研究中产生的作用. 下面给出双线性 Fourier 乘子的定义.

对于有界可测函数 $m \in L^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ 和 Schwartz 函数 $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 其对应的双线性 Fourier 乘子算子定义为

$$T_m(f, g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} m(\xi, \eta) \widehat{f}(\xi) \widehat{g}(\eta) e^{2\pi i x(\xi + \eta)} d\xi d\eta, \quad (1.8)$$

其中 m 称为双线性 Fourier 乘子 T_m 的象征 (symbol). 若对任意 $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 有

$$\|T_m(f, g)\|_{M_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f\|_{M_{p_1,q_1}^{s_1}} \cdot \|g\|_{M_{p_2,q_2}^{s_2}},$$

则称 T_m 为 $M_{p_1,q_1}^{s_1}(\mathbb{R}^n) \times M_{p_2,q_2}^{s_2}(\mathbb{R}^n)$ 到 $M_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ 的 (双线性) Fourier 乘子.

我们用 $M_{\mathcal{F}}(M_{p_1,q_1}^{s_1}(\mathbb{R}^n) \times M_{p_2,q_2}^{s_2}(\mathbb{R}^n), M_{p,q}^s(\mathbb{R}^n))$ 来表示所有 $M_{p_1,q_1}^{s_1}(\mathbb{R}^n) \times M_{p_2,q_2}^{s_2}(\mathbb{R}^n)$ 到 $M_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ 的双线性 Fourier 乘子全体, 其范数定义为对应的乘子算子的范数. 用 Wiener 混合空间

$$W(M_{\mathcal{F}}(M_{p_1,q_1}^{s_1}(\mathbb{R}^n) \times M_{p_2,q_2}^{s_2}(\mathbb{R}^n), M_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)), l^\infty)$$

来表示所有满足

$$\sigma_j \sigma_l m \in M_{\mathcal{F}}(M_{p_1,q_1}^{s_1}(\mathbb{R}^n) \times M_{p_2,q_2}^{s_2}(\mathbb{R}^n), M_{p,q}^s(\mathbb{R}^n))$$

并且满足 $\sup_{j,l \in \mathbb{Z}^n} \|\sigma_j \sigma_l m\|_{M_{\mathcal{F}}(M_{p_1,q_1}^{s_1}(\mathbb{R}^n) \times M_{p_2,q_2}^{s_2}(\mathbb{R}^n), M_{p,q}^s(\mathbb{R}^n))} < \infty$ 的有界函数全体. 并且定义

$$\|m\|_{W(M_{\mathcal{F}}(M_{p_1,q_1}^{s_1}(\mathbb{R}^n) \times M_{p_2,q_2}^{s_2}(\mathbb{R}^n), M_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)), l^\infty)} \triangleq \sup_{j,l \in \mathbb{Z}^n} \|\sigma_j \sigma_l \tau\|_{M_{\mathcal{F}}(M_{p_1,q_1}^{s_1}(\mathbb{R}^n) \times M_{p_2,q_2}^{s_2}(\mathbb{R}^n), M_{p,q}^s(\mathbb{R}^n))}.$$

本文的主要定理如下:

定理 1.5 令 $1 \leq p, p_i, q, q_i \leq \infty$, $1 + 1/q \leq 1/q_1 + 1/q_2$, $s, s_i \in \mathbb{R}$, 其中 $i = 1, 2$. 设 $\{m_\mu\}_{\mu \in \Gamma}$ 为一组一致有界的 $M_{p_1,q_1}^{s_1} \times M_{p_2,q_2}^{s_2}$ 到 $M_{p,q}^s$ 的双线性 Fourier 乘子, 即满足

$$\sup_{\mu \in \Gamma} \|T_{m_\mu}\|_{M_{p_1,q_1}^{s_1} \times M_{p_2,q_2}^{s_2} \rightarrow M_{p,q}^s} \lesssim 1,$$

并且满足如下的几乎正交性:

$$\sup_{a \in \mathbb{Z}^{2n}} \left| \left\{ \mu \in \Gamma : \text{supp } m_\mu \cap \left(a + \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]^{2n} \right) \right\} \right| \lesssim 1,$$

则 $m = \sum_{\mu \in \Gamma} m_\mu$ 也是 $M_{p_1,q_1}^{s_1} \times M_{p_2,q_2}^{s_2}$ 到 $M_{p,q}^s$ 的双线性 Fourier 乘子, 且满足

$$\|T_m\|_{M_{p_1,q_1}^{s_1} \times M_{p_2,q_2}^{s_2} \rightarrow M_{p,q}^s} \lesssim \sup_{\mu \in \Gamma} \|T_{m_\mu}\|_{M_{p_1,q_1}^{s_1} \times M_{p_2,q_2}^{s_2} \rightarrow M_{p,q}^s}.$$

定理 1.6 令 $1 \leq p, p_i, q, q_i \leq \infty$ ($i = 1, 2$), $1 + 1/q \leq 1/q_1 + 1/q_2$, 则

$$M_{\mathcal{F}}(M_{p_1,q_1}^{s_1}(\mathbb{R}^n) \times M_{p_2,q_2}^{s_2}(\mathbb{R}^n), M_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)) = W(M_{\mathcal{F}}(M_{p_1,q_1}^{s_1}(\mathbb{R}^n) \times M_{p_2,q_2}^{s_2}(\mathbb{R}^n), M_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)), l^\infty).$$

注 1.7 在线性情形, 模空间与 Besov 空间有许多相似之处. 例如, 线性 Fourier 乘子的刻画可以在更广泛的包含模空间和 Besov 空间的框架下, 即 α 模空间的框架下建立 (参见文献 [15, 定理 3.1]). 然而在双线性情形, 模空间和 Besov 空间则有很大的差异. 事实上, 由于模空间一致分解的特性、两组一致分解的相加保有一致的特性, 并且可以与原来的两组一致分解对应起来, 而二进分解并不具有这样的特点, 在处理双线性时会产生“叠加”, 即同一个频段上的信息可能是由多种不同组合的二进分解叠加产生, 因此, 模空间的研究方法是不适用的.

注 1.8 本文的主要定理和推论在多线性情形中都是成立的, 有兴趣的读者可自行推导.

第 2 节将给出主要定理的证明. 第 3 节给出一些应用. 在下文的证明中, 为了方便起见, 简记 $M_{p,q}^s$ 为 M^s , 简记 $M_{p_i,q_i}^{s_i}$ 为 $M_i^{s_i}$, 其中 $i = 1, 2$. 对于不带位势的空间, 简记 $M_{p,q}$ 为 M , 简记 M_{p_i,q_i} 为 M_i , 其中 $i = 1, 2$.

2 主要定理的证明

定理 1.5 表明, 如果一系列一致的双线性 Fourier 乘子具有一定正交性, 则其求和得到的算子仍然在模空间中有界, 下面给出这个定理的证明.

定理 1.5 的证明 对任意固定的 $j, l \in \mathbb{Z}^n$, 有

$$\begin{aligned} T_m(\square_j f, \square_l g) &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} m(\xi, \eta) \sigma_j(\xi) \widehat{f}(\xi) \sigma_l(\eta) \widehat{g}(\eta) e^{2\pi i x(\xi + \eta)} d\xi d\eta \\ &= \sum_{\mu \in \Gamma} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} m_\mu(\xi, \eta) \sigma_j(\xi) \widehat{f}(\xi) \sigma_l(\eta) \widehat{g}(\eta) e^{2\pi i x(\xi + \eta)} d\xi d\eta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\mu \in \Gamma_{j,l}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} m_{\mu}(\xi, \eta) \sigma_j(\xi) \widehat{f}(\xi) \sigma_l(\eta) \widehat{g}(\eta) e^{2\pi i x(\xi+\eta)} d\xi d\eta \\
&= \sum_{\mu \in \Gamma_{j,l}} T_{m_{\mu}}(\square_j f, \square_l g),
\end{aligned} \tag{2.1}$$

其中

$$\Gamma_{j,l} = \{\mu \in \Gamma : m_{\mu}(\xi, \eta) \sigma_j(\xi) \sigma_l(\eta) \neq 0\}.$$

根据假设可知, $|\Gamma_{j,l}| \lesssim 1$ 对任意 $j, l \in \mathbb{Z}^n$ 成立, 则

$$\begin{aligned}
\langle k \rangle^s \|\square_k T_m(\square_j f, \square_l g)\|_{L^p} &\leq \|T_m(\square_j f, \square_l g)\|_{M^s} = \left\| \sum_{\mu \in \Gamma_{j,l}} T_{m_{\mu}}(\square_j f, \square_l g) \right\|_{M^s} \\
&\leq |\Gamma_{j,l}| \sup_{\mu \in \Gamma} \|T_{m_{\mu}}\|_{M_1^{s_1} \times M_2^{s_2} \rightarrow M^s} \|\square_j f\|_{M_1^{s_1}} \|\square_l g\|_{M_2^{s_2}} \\
&\lesssim \langle j \rangle^{s_1} \langle l \rangle^{s_2} \|\square_j f\|_{L^{p_1}} \|\square_l g\|_{L^{p_2}}.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

根据一致分解的定义, 有

$$\square_k(T_m(f, g)) = \sum_{j, l \in \mathbb{Z}^n} \square_k(T_m(\square_j f, \square_l g)) = \sum_{|h| \leq c(n)} \sum_{j+l=k+h} \square_k(T_m(\square_j f, \square_l g)).$$

于是,

$$\begin{aligned}
\langle k \rangle^s \|\square_k T_m(f, g)\|_{L^p} &= \langle k \rangle^s \left\| \sum_{|h| \leq c(n)} \sum_{j+l=k+h} \square_k(T_m(\square_j f, \square_l g)) \right\|_{L^p} \\
&\leq \sum_{|h| \leq c(n)} \sum_{j+l=k+h} \langle k \rangle^s \|\square_k(T_m(\square_j f, \square_l g))\|_{L^p} \\
&\lesssim \sum_{|h| \leq c(n)} \sum_{j+l=k+h} \langle j \rangle^{s_1} \langle l \rangle^{s_2} \|\square_j f\|_{L^{p_1}} \|\square_l g\|_{L^{p_2}} \\
&= \left\{ \sum_{|h| \leq c(n)} (\{\langle j \rangle^{s_1} \|\square_j f\|_{L^{p_1}}\} * \{\langle l \rangle^{s_2} \|\square_l g\|_{L^{p_2}}\})(k+h) \right\}_k.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

根据模空间的定义, 有

$$\begin{aligned}
\|T_m(f, g)\|_{M^s} &= \|\{\langle k \rangle^s \|\square_k T_m(f, g)\|_{L^p}\}\|_{l^q} \\
&\lesssim \left\| \left\{ \sum_{|h| \leq c(n)} (\{\langle j \rangle^{s_1} \|\square_j f\|_{L^{p_1}}\} * \{\langle l \rangle^{s_2} \|\square_l g\|_{L^{p_2}}\})(k+h) \right\}_k \right\|_{l^q} \\
&\leq \sum_{|h| \leq c(n)} \|\{(\{\langle j \rangle^{s_1} \|\square_j f\|_{L^{p_1}}\} * \{\langle l \rangle^{s_2} \|\square_l g\|_{L^{p_2}}\})(k+h)\}_k\|_{l^q} \\
&\lesssim \|\{(\{\langle j \rangle^{s_1} \|\square_j f\|_{L^{p_1}}\} * \{\langle l \rangle^{s_2} \|\square_l g\|_{L^{p_2}}\})(k)\}_k\|_{l^q}.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

由已知假设, 我们有 $l^{q_1} * l^{q_2} \subset l^q$, 于是,

$$\begin{aligned}
\|T_m(f, g)\|_{M^s} &\lesssim \|\{(\{\langle j \rangle^{s_1} \|\square_j f\|_{L^{p_1}}\} * \{\langle l \rangle^{s_2} \|\square_l g\|_{L^{p_2}}\})(k)\}_k\|_{l^q} \\
&\lesssim \|\{(\{\langle j \rangle^{s_1} \|\square_j f\|_{L^{p_1}}\})_{l^{q_1}} * \{(\{\langle l \rangle^{s_2} \|\square_l g\|_{L^{p_2}}\})(k)\}_k\|_{l^{q_2}}
\end{aligned}$$

$$= \|f\|_{M_1^{s_1}} \|g\|_{M_2^{s_2}}. \quad (2.5)$$

证毕. $\square$

下面给出定理 1.6 的证明, 这个定理表明, 与单线性 Fourier 乘子类似, 双线性 Fourier 乘子也可以由一致分解的 Wiener 混合空间来刻画.

定理 1.6 的证明 设 $m \in M_{\mathcal{F}}(M_1^{s_1} \times M_2^{s_2}, M^s)$, 由 $m_{i,j}$ 的定义, 有

$$T_{m_{j,l}}(f, g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} m(\xi, \eta) \sigma_j(\xi) \widehat{f}(\xi) \sigma_l(\eta) \widehat{g}(\eta) e^{2\pi i x(\xi + \eta)} d\xi d\eta = T_m(\square_j f, \square_l g)(x). \quad (2.6)$$

于是,

$$\begin{aligned} \|T_{m_{j,l}}(f, g)(x)\|_{M^s} &= \|T_m(\square_j f, \square_l g)(x)\|_{M^s} \\ &\lesssim \|m\|_{M_{\mathcal{F}}(M_1^{s_1} \times M_2^{s_2}, M^s)} \|\square_j f\|_{M_1^{s_1}} \|\square_l g\|_{M_2^{s_2}} \\ &\lesssim \|m\|_{M_{\mathcal{F}}(M_1^{s_1} \times M_2^{s_2}, M^s)} \|f\|_{M_1^{s_1}} \|g\|_{M_2^{s_2}}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

注意到 $j, l \in \mathbb{Z}^n$ 的任意性, 我们有

$$\sup_{j, l \in \mathbb{Z}^n} \|m_{j,l}\|_{M_{\mathcal{F}}(M_1^{s_1} \times M_2^{s_2}, M^s)} \lesssim \|m\|_{M_{\mathcal{F}}(M_1^{s_1} \times M_2^{s_2}, M^s)}.$$

于是, $m \in W(M_{\mathcal{F}}(M_1^{s_1}(\mathbb{R}^n) \times M_2^{s_2}(\mathbb{R}^n)), M^s(\mathbb{R}^n)), l^\infty)$, 并且

$$\|m\|_{W(M_{\mathcal{F}}(M_1^{s_1}(\mathbb{R}^n) \times M_2^{s_2}(\mathbb{R}^n)), M^s(\mathbb{R}^n)), l^\infty)} \lesssim \|m\|_{M_{\mathcal{F}}(M_1^{s_1} \times M_2^{s_2}, M^s)}.$$

以上我们证明了 $M_{\mathcal{F}}(M_1^{s_1} \times M_2^{s_2}, M^s) \subset W(M_{\mathcal{F}}(M_1^{s_1}(\mathbb{R}^n) \times M_2^{s_2}(\mathbb{R}^n)), M^s(\mathbb{R}^n)), l^\infty)$.

另一方面, 若 $m \in W(M_{\mathcal{F}}(M_1^{s_1}(\mathbb{R}^n) \times M_2^{s_2}(\mathbb{R}^n)), M^s(\mathbb{R}^n)), l^\infty)$, 则 $m_{j,l}$ 为 $M_{p_1, q_1}^{s_1} \times M_{p_2, q_2}^{s_2}$ 到 $M_{p, q}^s$ 的一组一致 Fourier 乘子, 并且满足定理 1.6 中的正交性条件. 因为 $m = \sum_{i, j \in \mathbb{Z}^n} m_{i,j}$, 根据定理 1.5 的结论, m 也为 $M_{p_1, q_1}^{s_1} \times M_{p_2, q_2}^{s_2}$ 到 $M_{p, q}^s$ 的 Fourier 乘子, 并且

$$\|T_m\|_{M_{p_1, q_1}^{s_1} \times M_{p_2, q_2}^{s_2} \rightarrow M_{p, q}^s} \lesssim \sup_{j, l \in \mathbb{Z}^n} \|T_{m_{j,l}}\|_{M_{p_1, q_1}^{s_1} \times M_{p_2, q_2}^{s_2} \rightarrow M_{p, q}^s}.$$

于是, $m \in M_{\mathcal{F}}(M_1^{s_1} \times M_2^{s_2}, M^s)$, 并且

$$\|m\|_{M_{\mathcal{F}}(M_1^{s_1} \times M_2^{s_2}, M^s)} \lesssim \|m\|_{W(M_{\mathcal{F}}(M_1^{s_1}(\mathbb{R}^n) \times M_2^{s_2}(\mathbb{R}^n)), M^s(\mathbb{R}^n)), l^\infty)}.$$

我们证明了 $W(M_{\mathcal{F}}(M_1^{s_1}(\mathbb{R}^n) \times M_2^{s_2}(\mathbb{R}^n)), M^s(\mathbb{R}^n)), l^\infty) \subset M_{\mathcal{F}}(M_1^{s_1} \times M_2^{s_2}, M^s)$. $\square$

3 一些应用

首先给出一些可以利用 Lebesgue 空间结果直接推导的结论.

推论 3.1 令 $1 \leq p, p_i, q, q_i \leq \infty$, $s, s_i \in \mathbb{R}$ ($i = 1, 2$). 设非零函数 $m \in L^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, 满足

$$T_m : M_{p_1, q_1}^{s_1} \times M_{p_2, q_2}^{s_2} \rightarrow M_{p, q}^s,$$

则 $1/p \leq 1/p_1 + 1/p_2$.

证明 若 $p = \infty$, 则结论自然成立, 因此只考虑 $p < \infty$ 的情形. 记 $m_{j,l} = \sigma_j \sigma_l m$, $j, l \in \mathbb{Z}^n$. 因为 m 非零, 因此总有一个 $m_{j,l}$ 非零, 不妨记这个非零函数为 m_{j_0, l_0} . 利用定理 1.6 并注意到证明 $M_{\mathcal{F}}(M_1^{s_1} \times M_2^{s_2}, M^s) \subset W(M_{\mathcal{F}}(M_1^{s_1}(\mathbb{R}^n) \times M_2^{s_2}(\mathbb{R}^n), M^s(\mathbb{R}^n)), l^\infty)$ 时不需要 $1/q \leq 1/q_1 + 1/q_2$, 我们有 $m_{j_0, l_0} \in M_{\mathcal{F}}(M_1^{s_1} \times M_2^{s_2}, M^s)$. 对 p_1 和 p_2 , 我们总可以找 $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2 < \infty$, 使得 $1/p_1 \leq 1/\tilde{p}_1$, $1/p_2 \leq 1/\tilde{p}_2$. 根据模空间的嵌入关系, 我们有

$$T_{m_{j_0, l_0}} : M_{\tilde{p}_1, q_1}^{s_1} \times M_{\tilde{p}_2, q_2}^{s_2} \rightarrow M_{p, q}^s.$$

注意到 m_{j_0, l_0} 具有紧支集, 我们可以找到一个光滑函数 φ , 使其 Fourier 变换具有紧支集, 并且满足 $m_{j_0, l_0}(\xi, \eta) \hat{\varphi}(\xi) \hat{\varphi}(\eta) = m_{j_0, l_0}(\xi, \eta)$, 这导致

$$\begin{aligned} \|T_{m_{j_0, l_0}}(f, g)\|_{L^p} &\sim \|T_{m_{j_0, l_0}}(\varphi * f, \varphi * g)\|_{L^p} \\ &\sim \|T_{m_{j_0, l_0}}(\varphi * f, \varphi * g)\|_{M^s} \\ &\lesssim \|T_{m_{j_0, l_0}}\|_{M_{\tilde{p}_1, q_1}^{s_1} \times M_{\tilde{p}_2, q_2}^{s_2} \rightarrow M^s} \|\varphi * f\|_{M_{\tilde{p}_1, q_1}^{s_1}} \|\varphi * g\|_{M_{\tilde{p}_2, q_2}^{s_2}} \\ &\sim \|T_{m_{j_0, l_0}}\|_{M_{\tilde{p}_1, q_1}^{s_1} \times M_{\tilde{p}_2, q_2}^{s_2} \rightarrow M^s} \|\varphi * f\|_{L^{\tilde{p}_1}} \|\varphi * g\|_{L^{\tilde{p}_2}} \\ &\lesssim \|T_{m_{j_0, l_0}}\|_{M_{\tilde{p}_1, q_1}^{s_1} \times M_{\tilde{p}_2, q_2}^{s_2} \rightarrow M^s} \|f\|_{L^{\tilde{p}_1}} \|g\|_{L^{\tilde{p}_2}}. \end{aligned}$$

因此, $T_{m_{j_0, l_0}}$ 为 $L^{\tilde{p}_1} \times L^{\tilde{p}_2}$ 到 L^p 的非零有界双线性 Fourier 乘子, 并且 $p, \tilde{p}_1, \tilde{p}_2 \neq 0$. 利用 Lebesgue 空间中对应的结论 (参见文献 [26, 命题 7.3.7]), 得到 $1/p \leq 1/\tilde{p}_1 + 1/\tilde{p}_2$. 保持 $p_1, p_2 \neq 0$ 并令 $\tilde{p}_1 \rightarrow p_1$, $\tilde{p}_2 \rightarrow p_2$, 就得到 $1/p \leq 1/p_1 + 1/p_2$. $\square$

推论 3.2 令 $1 \leq p, p_i < \infty$, $1 \leq q, q_i \leq \infty$ ($i = 1, 2$), $1/p = 1/p_1 + 1/p_2$. 设 $m \in L^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, 满足

$$T_m : M_{p_1, q_1} \times M_{p_2, q_2} \rightarrow M_{p, q},$$

则

$$\|m\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{2n})} \lesssim \|m\|_{M_{\mathcal{F}}(M_{p_1, q_1} \times M_{p_2, q_2}, M_{p, q})}.$$

证明 记 $m_{j,l} = \sigma_j \sigma_l m$, $j, l \in \mathbb{Z}^n$. 利用定理 1.6 并注意到证明

$$M_{\mathcal{F}}(M_1^{s_1} \times M_2^{s_2}, M^s) \subset W(M_{\mathcal{F}}(M_1^{s_1}(\mathbb{R}^n) \times M_2^{s_2}(\mathbb{R}^n), M^s(\mathbb{R}^n)), l^\infty)$$

时不需要 $1/q \leq 1/q_1 + 1/q_2$, 我们推出 $m_{j,l} \in M_{\mathcal{F}}(M_1^{s_1} \times M_2^{s_2}, M^s)$, 并且满足

$$\|m_{j,l}\|_{M_{\mathcal{F}}(M_1^{s_1} \times M_2^{s_2}, M^s)} \lesssim \|m\|_{M_{\mathcal{F}}(M_1^{s_1} \times M_2^{s_2}, M^s)}.$$

选取光滑函数 φ , 使其 Fourier 变换具有紧支集, 并且满足 $m_{j,l}(\xi, \eta) \hat{\varphi}(\xi - j) \hat{\varphi}(\eta - l) = m_{j,l}(\xi, \eta)$. 对任意的 $j, l \in \mathbb{Z}^n$, 有

$$\begin{aligned} \|T_{m_{j,l}}(f, g)\|_{L^p} &\sim \|T_{m_{j,l}}(M_j \varphi * f, M_l \varphi * g)\|_{L^p} \\ &\sim \|T_{m_{j,l}}(M_j \varphi * f, M_l \varphi * g)\|_M \\ &\lesssim \|T_{m_{j,l}}\|_{M_1 \times M_2 \rightarrow M} \|M_j \varphi * f\|_{M_1} \|M_l \varphi * g\|_{M_2} \\ &\sim \|T_{m_{j,l}}\|_{M_1 \times M_2 \rightarrow M^s} \|M_j \varphi * f\|_{L^{p_1}} \|M_l \varphi * g\|_{L^{p_2}} \end{aligned}$$

$$\lesssim \|m\|_{M_{\mathcal{F}}(M_1 \times M_2, M)} \|f\|_{L^{p_1}} \|g\|_{L^{p_2}}.$$

因此, $T_{m_{j,l}}$ 是从 $L^{p_1} \times L^{p_2}$ 到 L^p 的一列有界双线性 Fourier 乘子算子, 并且满足

$$\|T_{m_{j,l}}\|_{L^{p_1} \times L^{p_2} \rightarrow L^p} \lesssim \|m\|_{M_{\mathcal{F}}(M_1 \times M_2, M)}. \quad (3.1)$$

利用 Lebesgue 空间中相应的结论 (参见文献 [26, 命题 7.3.6]), 得到

$$\|m_{j,l}\|_{L^\infty} \lesssim \|T_{m_{j,l}}\|_{L^{p_1} \times L^{p_2} \rightarrow L^p} \lesssim \|m\|_{M_{\mathcal{F}}(M_1 \times M_2, M)}.$$

注意到 $\|m\|_{L^\infty} = \sup_{j,l \in \mathbb{Z}^n} \|m_{j,l}\|_{L^\infty}$, 立即得到 $\|m\|_{L^\infty} \lesssim \|m\|_{M_{\mathcal{F}}(M_1 \times M_2, M)}$. $\square$

下面是一些周期化的结果.

推论 3.3 令 $1 \leq p, p_i, q, q_i \leq \infty$ ($i = 1, 2$), $1 + 1/q \leq 1/q_1 + 1/q_2$. 设 m 为 $M_{p_1, q_1} \times M_{p_2, q_2}$ 到 $M_{p, q}$ 的 Fourier 乘子, 且 m 具有紧支集. 设 $\vec{a} = \{a_{j,l}\}_{j,l \in \mathbb{Z}^n} \in l^\infty(\mathbb{Z}^{2n})$. 记

$$m_{\vec{a}}^\sharp(\xi, \eta) = \sum_{j,l \in \mathbb{Z}^n} a_{j,l} m(\xi - j, \eta - l),$$

则 $m_{\vec{a}}^\sharp$ 仍为 $M_{p_1, q_1} \times M_{p_2, q_2}$ 到 $M_{p, q}$ 的 Fourier 乘子, 且满足

$$\|T_{m_{\vec{a}}^\sharp}\|_{M_{p_1, q_1} \times M_{p_2, q_2} \rightarrow M_{p, q}} \lesssim \|\vec{a}\|_{l^\infty} \|T_m\|_{M_{p_1, q_1} \times M_{p_2, q_2} \rightarrow M_{p, q}}.$$

证明 由 m 具有紧支集, 记 $m_{i,j}(\xi, \eta) = m(\xi - i, \eta - j)$, 则有

$$\sup_{a \in \mathbb{Z}^{2n}} \left| \left\{ l \in \Gamma : \text{supp } m_{j,l} \cap \left(a + \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]^{2n} \right) \neq \emptyset \right\} \right| \lesssim 1.$$

另外, 对任意 $j, l \in \mathbb{Z}^n$, 有

$$\begin{aligned} T_{m_{j,l}}(f, g)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} m(\xi - j, \eta - l) \widehat{f}(\xi) \widehat{g}(\eta) e^{2\pi i x(\xi + \eta)} d\xi d\eta \\ &= e^{2\pi i x(j+l)} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} m(\xi, \eta) \widehat{f}(\xi + j) \widehat{g}(\eta + l) e^{2\pi i x(\xi + \eta)} d\xi d\eta, \\ &= M_{j+l} T_m(M_j f, M_l g). \end{aligned}$$

注意到模空间 M_{p_1, q_1} 、 M_{p_2, q_2} 和 $M_{p, q}$ 的范数都是关于模运算不变的, 因此, 对任意 $j, l \in \mathbb{Z}^n$, 有

$$\|T_{m_{j,l}}\|_{M_{p_1, q_1} \times M_{p_2, q_2} \rightarrow M_{p, q}} \sim \|T_m\|_{M_{p_1, q_1} \times M_{p_2, q_2} \rightarrow M_{p, q}}.$$

利用定理 1.5, 有

$$\begin{aligned} \|T_{m_{\vec{a}}^\sharp}\|_{M_{p_1, q_1} \times M_{p_2, q_2} \rightarrow M_{p, q}} &\lesssim \sup_{j,l \in \mathbb{Z}^n} \|a_{j,l} T_{m_{j,l}}\|_{M_{p_1, q_1} \times M_{p_2, q_2} \rightarrow M_{p, q}} \\ &\sim \|\vec{a}\|_{l^\infty} \|T_m\|_{M_{p_1, q_1} \times M_{p_2, q_2} \rightarrow M_{p, q}}. \end{aligned}$$

证毕. $\square$

事实上, 上述推论中的 $1/q \leq 1/q_1 + 1/q_2$ 是必要的. 加权模空间中的周期延拓要复杂得多. 为此, 我们需要先引入下面的四种指标关系:

$$(\mathcal{A}_1) \begin{cases} s \leq s_1, & s \leq s_2, & 0 \leq s_1 + s_2, \\ 1 + \left(\frac{1}{q} + \frac{s}{n}\right) \vee 0 < \left(\frac{1}{q_1} + \frac{s_1}{n}\right) \vee 0 + \left(\frac{1}{q_2} + \frac{s_2}{n}\right) \vee 0, \\ \frac{1}{q} + \frac{s}{n} \leq \frac{1}{q_1} + \frac{s_1}{n}, & \frac{1}{q} + \frac{s}{n} \leq \frac{1}{q_2} + \frac{s_2}{n}, & 1 \leq \frac{1}{q_1} + \frac{s_1}{n} + \frac{1}{q_2} + \frac{s_2}{n}, \\ (q, s) = (q_1, s_1), & \text{若 } \frac{1}{q} + \frac{s}{n} = \frac{1}{q_1} + \frac{s_1}{n}, \\ (q, s) = (q_2, s_2), & \text{若 } \frac{1}{q} + \frac{s}{n} = \frac{1}{q_2} + \frac{s_2}{n}, \\ (q'_1, -s_1) = (q_2, s_2), & \text{若 } 1 = \frac{1}{q_1} + \frac{s_1}{n} + \frac{1}{q_2} + \frac{s_2}{n}, \end{cases} \quad (3.2)$$

$$(\mathcal{A}_2) \begin{cases} s = s_1 = s_2 = 0, \\ q = q_1, & q_2 = 1 \quad \text{或} \quad q = q_2, & q_1 = 1 \quad \text{或} \quad q = \infty, & \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} = 1, \end{cases} \quad (3.3)$$

$$(\mathcal{A}_3) \begin{cases} s \leq s_1, & s \leq s_2, \\ \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} = 1, & s_1 + s_2 = 0, \\ \frac{1}{q} + \frac{s}{n} < 0 \leq \frac{1}{q_1} + \frac{s_1}{n}, & \frac{1}{q_2} + \frac{s_2}{n}, \end{cases} \quad (3.4)$$

$$(\mathcal{A}_4) \begin{cases} s \leq s_1, & s \leq s_2, & 0 \leq s_1 + s_2, \\ 1 + \frac{1}{q} + \frac{s}{n} = \frac{1}{q_1} + \frac{s_1}{n} + \frac{1}{q_2} + \frac{s_2}{n}, & \frac{1}{q} \leq \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}, \\ \frac{1}{q} + \frac{s}{n} < \frac{1}{q_1} + \frac{s_1}{n}, & \frac{1}{q} + \frac{s}{n} < \frac{1}{q_2} + \frac{s_2}{n}, & \frac{1}{q} + \frac{s}{n} > 0, \\ q \neq \infty, & q_1, q_2 \neq 1, & \text{若 } s = s_1 \quad \text{或} \quad s = s_2. \end{cases} \quad (3.5)$$

上面的关系式中, $a \vee b = \max\{a, b\}$. 对 $1 \leq q \leq \infty$, $s \in \mathbb{R}$, 定义 $l(q, s)$ 为所有使得如下范数有限的 $\mathbb{Z}^n$ 上的函数全体:

$$\|f\|_{l(q,s)} = \begin{cases} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |f(k)|^p \langle k \rangle^{qs} \right)^{1/q}, & q < \infty, \\ \sup_{k \in \mathbb{Z}^n} |f(k)| \langle k \rangle^s, & q = \infty. \end{cases}$$

文献 [9] 给出了如下离散加权 Young 不等式的刻画:

命题 3.4 [9] 设 $1 \leq q, q_1, q_2 \leq \infty$, $s, s_1, s_2 \in \mathbb{R}$, 则

$$l(q_1, s_1) * l(q_2, s_2) \subset l(q, s)$$

成立当且仅当 $(q, s) = (q, q_1, q_2, s, s_1, s_2) \in \bigcup_{i=1}^n \mathcal{A}_i$.

推论 3.5 令 $1 \leq p, p_i, q, q_i \leq \infty$, $s_i \in \mathbb{R}$ ($i = 1, 2$), 设 $m \in L^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ 为具有紧支集的非零函数, m 为 $M_{p_1, q_1}^{s_1} \times M_{p_2, q_2}^{s_2}$ 到 $M_{p, q}^s$ 的 Fourier 乘子. 设 $\vec{a} = \{a_{j, l}\}_{j, l \in \mathbb{Z}^n} \in l^\infty(\mathbb{Z}^{2n})$. 记

$$m_{\vec{a}}^\sharp(\xi, \eta) = \sum_{j, l \in \mathbb{Z}^n} a_{j, l} m(\xi - j, \eta - l).$$

对任意 $\vec{a} = \{a_{j,l}\}_{j,l \in \mathbb{Z}^n} \in L^\infty(\mathbb{Z}^{2n})$, $m_{\vec{a}}^\sharp$ 仍为 $M_{p_1,q_1} \times M_{p_2,q_2}$ 到 $M_{p,q}$ 的 Fourier 乘子的充分必要条件为 $(\mathbf{q}, \mathbf{s}) \in \bigcup_{i=1}^n \mathcal{A}_i$. 进一步, 若 $(\mathbf{q}, \mathbf{s}) \in \bigcup_{i=1}^n \mathcal{A}_i$, 则

$$\|T_{m_{\vec{a}}^\sharp}\|_{M_{p_1,q_1}^{s_1} \times M_{p_2,q_2}^{s_2} \rightarrow M_{p,q}^s} \lesssim \|\vec{a}\|_{l^\infty} \|T_m\|_{M_{p_1,q_1}^{s_1} \times M_{p_2,q_2}^{s_2} \rightarrow M_{p,q}^s}.$$

证明 首先, 假设 $(\mathbf{q}, \mathbf{s}) \in \bigcup_{i=1}^n \mathcal{A}_i$. 注意到 m 具有紧支集, 不妨设 $\text{supp } m \subset [-L, L]^{2n}$. 选取 Fourier 变换具有紧支集的光滑函数 $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 使得 $\widehat{\varphi}(\xi) = 1$, $\xi \in [-L, L]^n$. 于是,

$$T_m(f, g) = T_m(\varphi * f, \varphi * g).$$

我们有

$$\begin{aligned} \|T_m(f, g)\|_{L^p} &\sim \|T_m(\varphi * f, \varphi * g)\|_{L^p} \sim \|T_m(\varphi * f, \varphi * g)\|_{M^s} \\ &\lesssim \|T_m\|_{M_1^{s_1} \times M_2^{s_2} \rightarrow M^s} \|\varphi * f\|_{M_1^{s_1}} \|\varphi * g\|_{M_2^{s_2}} \\ &\sim \|T_m\|_{M_1^{s_1} \times M_2^{s_2} \rightarrow M^s} \|\varphi * f\|_{L^{p_1}} \|\varphi * g\|_{L^{p_2}} \\ &\lesssim \|T_m\|_{M_1^{s_1} \times M_2^{s_2} \rightarrow M^s} \|f\|_{L^{p_1}} \|g\|_{L^{p_2}}. \end{aligned}$$

记 $m_{j,l}(\xi, \eta) = m(\xi - j, \eta - l)$, 因为

$$T_{m_{j,l}}(f, g)(x) = M_{j+l} T_m(M_j f, M_l g),$$

且 L^{p_1} 、 L^{p_2} 和 L^p 的范数都是关于模运算不变的, 因此, 对任意 $j, l \in \mathbb{Z}^n$, 我们仍然有

$$\|T_{m_{j,l}}(f, g)\|_{L^p} \lesssim \|T_m\|_{M_1^{s_1} \times M_2^{s_2} \rightarrow M^s} \|f\|_{L^{p_1}} \|g\|_{L^{p_2}}. \quad (3.6)$$

对任意固定的 $j_0, l_0 \in \mathbb{Z}^n$, 有

$$\begin{aligned} T_{m_{\vec{a}}^\sharp}(\square_{j_0} f, \square_{l_0} g) &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} m_{\vec{a}}^\sharp(\xi, \eta) \sigma_{j_0}(\xi) \widehat{f}(\xi) \sigma_{l_0}(\eta) \widehat{g}(\eta) e^{2\pi i x(\xi + \eta)} d\xi d\eta \\ &= \sum_{i,j \in \mathbb{Z}^n} a_{j,l} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} m_{j,l}(\xi, \eta) \sigma_{j_0}(\xi) \widehat{f}(\xi) \sigma_{l_0}(\eta) \widehat{g}(\eta) e^{2\pi i x(\xi + \eta)} d\xi d\eta \\ &= \sum_{l \in \Gamma_{j_0, l_0}} a_{j,l} T_{m_{j,l}}(\square_{j_0} f, \square_{l_0} g), \end{aligned} \quad (3.7)$$

其中

$$\Gamma_{j_0, l_0} = \{j, l \in \Gamma : m_{j,l}(\xi, \eta) \sigma_{j_0}(\xi) \sigma_{l_0}(\eta) \neq 0\}.$$

因此, $|\Gamma_{j,l}| \lesssim 1$ 对任意 $j, l \in \mathbb{Z}^n$ 成立. 结合 (3.6), 我们推出

$$\begin{aligned} \|T_{m_{\vec{a}}^\sharp}(\square_{j_0} f, \square_{l_0} g)\|_{L^p} &= \left\| \sum_{l \in \Gamma_{j_0, l_0}} a_{j,l} T_{m_{j,l}}(\square_{j_0} f, \square_{l_0} g) \right\|_{L^p} \\ &\lesssim \|\vec{a}\|_{l^\infty} \sum_{l \in \Gamma_{j_0, l_0}} \|T_{m_{j,l}}(\square_{j_0} f, \square_{l_0} g)\|_{L^p} \\ &\lesssim \|\vec{a}\|_{l^\infty} \|T_m\|_{M_1^{s_1} \times M_2^{s_2} \rightarrow M^s} \|\square_{j_0} f\|_{L^{p_1}} \|\square_{l_0} g\|_{L^{p_2}}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

根据一致分解的定义, 有

$$\square_k(T_{m_\alpha^\#}(f, g)) = \sum_{j, l \in \mathbb{Z}^n} \square_k(T_{m_\alpha^\#}(\square_j f, \square_l g)) = \sum_{|h| \leq c(n)} \sum_{j+l=k+h} \square_k(T_{m_\alpha^\#}(\square_j f, \square_l g)).$$

于是,

$$\begin{aligned} \|\square_k T_{m_\alpha^\#}(f, g)\|_{L^p} &= \left\| \sum_{|h| \leq c(n)} \sum_{j+l=k+h} \square_k(T_{m_\alpha^\#}(\square_j f, \square_l g)) \right\|_{L^p} \\ &\leq \sum_{|h| \leq c(n)} \sum_{j+l=k+h} \|\square_k(T_{m_\alpha^\#}(\square_j f, \square_l g))\|_{L^p} \\ &\lesssim \|\vec{a}\|_{l^\infty} \|T_m\|_{M_1^{s_1} \times M_2^{s_2} \rightarrow M^s} \sum_{|h| \leq c(n)} \sum_{j+l=k+h} \|\square_j f\|_{L^{p_1}} \|\square_l g\|_{L^{p_2}} \\ &= \|\vec{a}\|_{l^\infty} \|T_m\|_{M_1^{s_1} \times M_2^{s_2} \rightarrow M^s} \sum_{|h| \leq c(n)} (\{\|\square_j f\|_{L^{p_1}}\} * \{\|\square_l g\|_{L^{p_2}}\})(k+h). \end{aligned} \quad (3.9)$$

根据模空间的定义, 有

$$\begin{aligned} \|T_{m_\alpha^\#}(f, g)\|_{M^s} &= \|\{\|\square_k T_{m_\alpha^\#}(f, g)\|_{L^p}\}_{k \in \mathbb{Z}^n}\|_{l(q, s)} \\ &\lesssim \|\vec{a}\|_{l^\infty} \|T_m\|_{M_1^{s_1} \times M_2^{s_2} \rightarrow M^s} \left\| \left\{ \sum_{|h| \leq c(n)} (\{\|\square_j f\|_{L^{p_1}}\} * \{\|\square_l g\|_{L^{p_2}}\})(k+h) \right\}_k \right\|_{l(q, s)} \\ &\leq \|\vec{a}\|_{l^\infty} \|T_m\|_{M_1^{s_1} \times M_2^{s_2} \rightarrow M^s} \sum_{|h| \leq c(n)} \|\{(\{\|\square_j f\|_{L^{p_1}}\} * \{\|\square_l g\|_{L^{p_2}}\})(k+h)\}_k\|_{l(q, s)} \\ &\lesssim \|\vec{a}\|_{l^\infty} \|T_m\|_{M_1^{s_1} \times M_2^{s_2} \rightarrow M^s} \|\{(\{\|\square_j f\|_{L^{p_1}}\} * \{\|\square_l g\|_{L^{p_2}}\})(k)\}_k\|_{l(q, s)} \\ &\lesssim \|\vec{a}\|_{l^\infty} \|T_m\|_{M_1^{s_1} \times M_2^{s_2} \rightarrow M^s} \|\{\|\square_j f\|_{L^{p_1}}\}\|_{l(q_1, s_1)} \cdot \|\{\|\square_l g\|_{L^{p_2}}\}\|_{l(q_2, s_2)} \\ &\sim \|\vec{a}\|_{l^\infty} \|T_m\|_{M_1^{s_1} \times M_2^{s_2} \rightarrow M^s} \|f\|_{M_1^{s_1}} \|g\|_{M_2^{s_2}}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

其中倒数第二个不等式利用了命题 3.4 和 $l(q_1, s_1) * l(q_2, s_2) \subset l(q, s)$. 于是, $m_\alpha^\# \in M_{\mathcal{F}}(M_1^{s_1} \times M_2^{s_2}, M^s)$, 并且

$$\|T_{m_\alpha^\#}\|_{M_{p_1, q_1}^{s_1} \times M_{p_2, q_2}^{s_2} \rightarrow M_{p, q}^s} \lesssim \|\vec{a}\|_{l^\infty} \|T_m\|_{M_{p_1, q_1}^{s_1} \times M_{p_2, q_2}^{s_2} \rightarrow M_{p, q}^s}.$$

下面来说明 $(q, s) \in \bigcup_{i=1}^n \mathcal{A}_i$ 的必要性. 设 m 为 $M_{p_1, q_1}^{s_1} \times M_{p_2, q_2}^{s_2}$ 到 $M_{p, q}^s$ 的 Fourier 乘子, 如证明开始所述, 不妨设 $\text{supp } m \subset [-L, L]^{2n}$, $L \in \mathbb{N}$, $L \geq 10$. 若 $j, l \in 8L\mathbb{Z}^n$, 则选取 $a_{j, l} = 1$, 其余的 $a_{j, l}$ 均取为 0. 因为 T_m 为非零算子, 所以, 我们可以找到 $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 使得

$$\|T_m(f, g)\|_{M^s} \neq 0. \quad (3.11)$$

再根据 m 具有紧支集的性质, 我们可以进一步选取 f 和 g 使得其 Fourier 变换的支集在 $[-3L/2, 3L/2]$ 上同样满足 (3.11). 选取有限项非零的两列正数列 $\vec{b} = \{b_l\}_{l \in 2L\mathbb{Z}^n}$ 和 $\vec{c} = \{c_l\}_{l \in 2L\mathbb{Z}^n}$, 并记

$$F = \sum_{j \in 8L\mathbb{Z}^n} b_j M_j f, \quad G = \sum_{l \in 8L\mathbb{Z}^n} c_l M_l g,$$

于是,

$$\|F\|_{M_1^{s_1}} = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \langle k \rangle^{s_1 q_1} \|\square_k F\|_{L^{p_1}}^{q_1} \right)^{1/q_1} = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \langle k \rangle^{s_1 q_1} \|\square_k \sum_{j \in 8L\mathbb{Z}^n} b_j M_j f\|_{L^{p_1}}^{q_1} \right)^{1/q_1}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\sum_{j \in 8L\mathbb{Z}^n} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \langle k \rangle^{s_1 q_1} \|\square_k b_j M_j f\|_{L^{p_1}}^{q_1} \right)^{1/q_1} \sim \left(\sum_{j \in 8L\mathbb{Z}^n} \langle j \rangle^{s_1 q_1} b_j \|f\|_{L^{p_1}}^{q_1} \right)^{1/q_1} \\
 &\sim \|f\|_{L^{p_1}} \left(\sum_{j \in 8L\mathbb{Z}^n} \langle j \rangle^{s_1 q_1} b_j \right)^{1/q_1}.
 \end{aligned}$$

同理,

$$\|G\|_{M_1^{s_1}} = \|g\|_{L^{p_1}} \left(\sum_{l \in 8L\mathbb{Z}^n} \langle l \rangle^{s_2 q_2} c_l \right)^{1/q_2}.$$

另一方面,

$$\begin{aligned}
 \|T_{m_a^\sharp}(F, G)\|_{M^s} &= \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \langle k \rangle^{sq} \|\square_k T_{m_a^\sharp}(F, G)\|_{L^p}^q \right)^{1/q} \\
 &\geq \left(\sum_{h \in 8L\mathbb{Z}^n} \sum_{k \in h + [-4L, 4L]^n \cap \mathbb{Z}^n} \langle k \rangle^{sq} \|\square_k T_{m_a^\sharp}(F, G)\|_{L^p}^q \right)^{1/q} \\
 &= \left(\sum_{h \in 8L\mathbb{Z}^n} \sum_{k \in h + [-4L, 4L]^n \cap \mathbb{Z}^n} \langle k \rangle^{sq} \left\| \square_k T_{m_a^\sharp} \left(\sum_{j \in 8L\mathbb{Z}^n} b_j M_j f, \sum_{l \in 4L\mathbb{Z}^n} c_l M_l g \right) \right\|_{L^p}^q \right)^{1/q} \\
 &= \left(\sum_{h \in 8L\mathbb{Z}^n} \sum_{k \in h + [-4L, 4L]^n \cap \mathbb{Z}^n} \langle k \rangle^{sq} \left\| \sum_{j, l \in 8L\mathbb{Z}^n, j+l=h} \square_k T_{m_a^\sharp}(b_j M_j f, c_l M_l g) \right\|_{L^p}^q \right)^{1/q}.
 \end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned}
 &\sum_{j, l \in 8L\mathbb{Z}^n, j+l=h} T_{m_a^\sharp}(b_j M_j f, c_l M_l g) \\
 &= \sum_{j, l \in 8L\mathbb{Z}^n, j+l=h} b_j c_l \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} m_a^\sharp(\xi, \eta) \widehat{f}(\xi - j)(\eta) \widehat{g}(\eta - l) e^{2\pi i x(\xi + \eta)} d\xi d\eta \\
 &= e^{2\pi i(j+l)x} \sum_{j, l \in 8L\mathbb{Z}^n, j+l=h} b_j c_l \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} m_a^\sharp(\xi, \eta) \widehat{f}(\xi)(\eta) \widehat{g}(\eta) e^{2\pi i x(\xi + \eta)} d\xi d\eta \\
 &= e^{2\pi i(j+l)x} \sum_{j, l \in 8L\mathbb{Z}^n, j+l=h} b_j c_l T_{m_a^\sharp}(f, g),
 \end{aligned}$$

其中, 我们利用了 $m_a^\sharp(\xi - j, \eta - l) = m_a^\sharp(\xi, \eta)$, $j, l \in 8L\mathbb{Z}^n$. 于是,

$$\begin{aligned}
 &\sum_{k \in h + [-4L, 4L]^n \cap \mathbb{Z}^n} \langle k \rangle^{sq} \left\| \sum_{j, l \in 8L\mathbb{Z}^n, j+l=h} \square_k T_{m_a^\sharp}(b_j M_j f, c_l M_l g) \right\|_{L^p}^q \\
 &\geq \langle h \rangle^{sq} \left\| \sum_{j, l \in 8L\mathbb{Z}^n, j+l=h} T_{m_a^\sharp}(b_j M_j f, c_l M_l g) \right\|_{L^p}^q \\
 &= \langle h \rangle^{sq} \left(\sum_{j, l \in 8L\mathbb{Z}^n, j+l=h} b_j c_l \right)^q \|T_{m_a^\sharp}(f, g)\|_{L^p}^q.
 \end{aligned}$$

因此,

$$\|T_{m_a^\sharp}(F, G)\|_{M^s} \geq \left(\sum_{h \in 8L\mathbb{Z}^n} \langle h \rangle^{sq} \left(\sum_{j, l \in 8L\mathbb{Z}^n, j+l=h} b_j c_l \right)^q \right)^{1/q} \|T_{m_a^\sharp}(f, g)\|_{L^p}.$$

结合对 $\|F\|_{M_1^{s_1}}$ 和 $\|G\|_{M_2^{s_2}}$ 的估计, 若 $\|T_{m_a^\sharp}(F, G)\|_{M^s} \lesssim \|F\|_{M_1^{s_1}} \|G\|_{M_2^{s_2}}$ 成立, 则

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{h \in 8L\mathbb{Z}^n} \langle h \rangle^{sq} \left(\sum_{j, l \in 8L\mathbb{Z}^n, j+l=h} b_j c_l \right)^q \right)^{1/q} \|T_{m_a^\sharp}(f, g)\|_{L^p} \\ & \lesssim \left(\sum_{j \in 8L\mathbb{Z}^n} \langle j \rangle^{s_1 q_1} b_j \right)^{1/q_1} \|f\|_{L^{p_1}} \left(\sum_{l \in 8L\mathbb{Z}^n} \langle l \rangle^{s_2 q_2} c_l \right)^{1/q_2} \|g\|_{L^{p_1}}, \end{aligned}$$

这导致

$$\left(\sum_{h \in 8L\mathbb{Z}^n} \langle h \rangle^{sq} \left(\sum_{j, l \in 8L\mathbb{Z}^n, j+l=h} b_j c_l \right)^q \right)^{1/q} \lesssim \left(\sum_{j \in 8L\mathbb{Z}^n} \langle j \rangle^{s_1 q_1} b_j \right)^{1/q_1} \left(\sum_{l \in 8L\mathbb{Z}^n} \langle l \rangle^{s_2 q_2} c_l \right)^{1/q_2}.$$

由 $\vec{b}$ 和 $\vec{c}$ 的任意性, 我们实际上得到了 $l(q_1, s_1) * l(q_2, s_2) \subset l(q, s)$. 根据命题 3.4, 就得到 $(q, s) \in \bigcup_{i=1}^n \mathcal{A}_i$. 证毕. $\square$

致谢 非常感谢审稿人给予的宝贵意见.

参考文献

- 1 Feichtinger H G. Modulation spaces on locally compact Abelian groups. Technical Report. Vienna: University of Vienna, 1983
- 2 Feichtinger H G. Modulation spaces: Looking back and ahead. *Sampl Theory Signal Image Process*, 2006, 5: 109–140
- 3 Gröchenig K. Foundations of Time-Frequency Analysis. Boston: Birkhäuser, 2001
- 4 Guo W, Wu H, Zhao G. Inclusion relations between modulation and Triebel-Lizorkin spaces. *Proc Amer Math Soc*, 2017, 145: 4807–4820
- 5 Kobayashi M, Sugimoto M. The inclusion relation between Sobolev and modulation spaces. *J Funct Anal*, 2011, 260: 3189–3208
- 6 Okoudjou K. Embeddings of some classical Banach spaces into modulation spaces. *Proc Amer Math Soc*, 2004, 132: 1639–1647
- 7 Sugimoto M, Tomita N. The dilation property of modulation spaces and their inclusion relation with Besov spaces. *J Funct Anal*, 2007, 248: 79–106
- 8 Zhao G, Gao G, Guo W. Sharp embedding relations between local Hardy and α -modulation spaces. *ArXiv:1609.05280*, 2016
- 9 Guo W, Fan D, Wu H, et al. Sharp weighted convolution inequalities and some applications. *Studia Math*, 2018, 241: 201–239
- 10 Guo W, Chen J, Fan D, et al. Characterization of some properties on weighted modulation spaces. *Michigan Math J*, 2016, in press
- 11 Guo W, Fan D, Wu H, et al. Sharpness of some properties of weighted modulation spaces. *Sci China Math*, 2016, 59: 169–190
- 12 Bényi A, Gröchenig K, Okoudjou K A, et al. Unimodular Fourier multipliers for modulation spaces. *J Funct Anal*, 2007, 246: 366–384
- 13 Chen J, Fan D, Sun L. Asymptotic estimates for unimodular Fourier multipliers on modulation spaces. *Discrete Contin Dyn Syst*, 2012, 32: 467–485
- 14 Miyachi A, Nicola F, Rivetti S, et al. Estimates for unimodular Fourier multipliers on modulation spaces. *Proc Amer Math Soc*, 2009, 137: 3869–3883
- 15 Zhao G, Chen J, Fan D, et al. Sharp estimates of unimodular multipliers on frequency decomposition spaces. *Nonlinear Anal*, 2016, 142: 26–47
- 16 Chen J, Huang Q, Zhu X. Non-integer power estimate in modulation spaces and its applications. *Sci China Math*, 2017, 60: 1443–1460
- 17 Huang Q, Fan D, Chen J. Critical exponent for evolution equations in modulation spaces. *J Math Anal Appl*, 2016, 443: 230–242
- 18 Iwabuchi T, Ogawa T. Ill-posedness for the nonlinear Schrödinger equation with quadratic non-linearity in low dimensions. *Trans Amer Math Soc*, 2015, 367: 2613–2630

- 19 Ru S, Chen J. The Cauchy problem for nonlinear Schrödinger equations in modulation spaces. *Nonlinear Anal Real World Appl*, 2015, 24: 83–97
- 20 Wang B, Hudzik H. The global Cauchy problem for the NLS and NLKG with small rough data. *J Differential Equations*, 2007, 232: 36–73
- 21 Zhao W, Chen J. Global well-posedness for the 2D dissipative quasi-geostrophic equations in modulation spaces. *Math Methods Appl Sci*, 2017, 40: 4246–4258
- 22 Feichtinger H G, Narimani G. Fourier multipliers of classical modulation spaces. *Appl Comput Harmon Anal*, 2006, 21: 349–359
- 23 Wu X, Chen J. Boundedness of fractional integral operators on α -modulation spaces. *Appl Math J Chinese Univ Ser A*, 2014, 29: 339–351
- 24 Zhao G, Fan D, Guo W. Fractional integral operators on α -modulation spaces. *Math Nachr*, 2016, 289: 1288–1300
- 25 Zhong Y, Chen J. Modulation space estimates for the fractional integral operators. *Sci China Math*, 2011, 54: 1479–1489
- 26 Grafakos L. *Modern Fourier Analysis*. New York: Springer, 2009

Orthogonality of the bilinear Fourier multiplier in the modulation spaces

Weichao Guo, Guoping Zhao & Weiren Zhao

Abstract In this paper, we consider the boundedness of the bilinear Fourier multipliers on modulation spaces. We prove that if a family of bilinear Fourier multipliers is bounded and has some orthogonality, the sum of these bilinear Fourier multipliers is also bounded on modulation spaces. As a corollary, we give the necessary and sufficient conditions for the boundedness of bilinear Fourier multipliers.

Keywords bilinear Fourier multipliers, modulation spaces, orthogonality

MSC(2010) 42B35

doi: 10.1360/N012017-00137