局部平稳时间序列时变单指标变系数模型及统计推断

李涛, 胡建华*, 尤进红, 刘亮元

上海财经大学统计与管理学院, 上海 200433

E-mail: li.tao@mail.shufe.edu.cn, hu.jianhua@mail.shufe.edu.cn, johnyou07@163.com, liulystat@163.com

收稿日期: 2018-05-22; 接受日期: 2019-07-04; 网络出版日期: 2019-11-29; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11571218, 11571219, 11071154 和 91546202) 资助项目

摘要 本文基于局部平稳时间序列数据的特征提出一个新的半参数模型—时变单指标变系数模型. 本文采用二步估计的思想给出模型中参数和非参数系数函数的估计方法, 并研究这些估计量的渐近性质, 包括相合性和渐近正态性. 进一步, 为了判别模型中的连接函数是否具有时变性质, 本文提出一种假设检验方法, 构造相应的检验统计量并证明它的渐近性质. 最后, 通过模拟和实例展示本文所提估计和检验方法是有效和切实可行的.

关键词 局部平稳 单指标变系数模型 两步估计 张量 B 样条 核估计

MSC (2010) 主题分类 62G08, 62J02

1 引言

在很多应用领域中, 如金融、经济、声学、流行病学和神经科学, 时间序列的数据中存在着非线性的特征. 因此, 作为经典线性模型的重要推广, Hastie 和 Tibshirani^[1] 提出的变系数模型, 由于其灵活性和可解释性被广泛地应用于实际数据分析中. 但是作为一种非参数模型, 当模型中的参数变量维数过大时, 变系数模型的效率会变得很低, 这就是著名的“维数灾难”问题; 而单指标模型, 作为半参数模型, 被证实可以有效地处理“维数灾难”问题 (参见文献 [2–7] 等). 当然, 单指标模型也有其自身的局限性, 例如, 它不能刻画变量的可加性. 因此, Xia 和 Li^[4] 将“单指标”的思想应用于变系数模型, 提出了单指标变系数模型 (single-index coefficient regression model), 其形式如下:

$$y = \mathbf{x}^\top \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{z}^\top \boldsymbol{\theta}) + \varepsilon, \quad (1.1)$$

其中 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_p)^\top$, $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_q)^\top$, $\boldsymbol{\theta}$ 为 q -维未知参数, 且 $\|\boldsymbol{\theta}\| = 1$, $\theta_1 > 0$, $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)^\top$ 为 p -维未知的系数函数向量, “ $\top$ ”表示矩阵的转置.

英文引用格式: Li T, Hu J H, You J H, et al. Statistical inference of time-varying single-index coefficient models for locally stationary time series (in Chinese). Sci Sin Math, 2020, 50: 1609–1630, doi: 10.1360/N012018-00137

显然, 当 $p = 1$ 且 $\mathbf{x} = 1$ 时, 模型 (1.1) 退化为单指标模型 (single-index model), 关于单指标模型的估计及理论的研究已有大量的文献, 可参见文献 [2, 3, 6–11]. 当 $q = 1$ 且 $\boldsymbol{\theta} = 1$ 时, 模型 (1.1) 退化为变系数模型 (varying-coefficient model), 关于变系数模型的估计及理论的研究可参见文献 [1, 12–14]. 此外, 若 $\mathbf{x} = (1, \mathbf{z}^\top)^\top$, 则模型 (1.1) 退化为自适应变系数模型, 关于自适应变系数模型的研究可参见文献 [15, 16]. 更多关于单指标系数回归模型的估计方法、理论及应用, 可参见文献 [4, 17, 18] 等.

在经典的时间序列分析中, 无论是线性模型, 如 ARMA 模型 (autoregressive moving average model), 还是非线性模型, 如单指标变系数模型 (1.1)、变系数自回归模型 (functional-coefficient autoregressive model) [19] 和平滑转移自回归模型 (smooth transition autoregressive model) [20] 等, 均是建立在时间序列数据满足 (严格) 平稳条件这一基本假设上. 然而, 在现实中, 大量来自金融、流行病学和天文学等领域的数据显示了数据的不平稳性, 例如, 2000 年至 2014 年间纳斯达克综合指数日波动数, 1700 年至 1994 年间 Wolf 太阳黑子数 [19, 21]. 图 1 展示了这两个数据集的原始数据和去趋势后的数据的时序图. 从图中可以看出, 这些原始数据明显有一定的时间趋势, 从而不是平稳的, 且 KPSS (Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin) 平稳性检验亦验证它们均不是平稳的. 用平滑的方法我们可以估计时间趋势, 发现趋势均不为常数. 因此, 面对现实中大量的非平稳数据, 我们需要给出研究非平稳数据的方法.

因此, 在经典的时间序列分析中, 对于包含趋势、季节因子和其他非平稳的因子的原始数据, 通常需要通过一些预处理, 例如, 差分、数据变换等手段达到平稳性要求后再进行建模. 例如, 一个 ARIMA (autoregressive integrated moving average) 过程要经过差分后得到一个平稳的 ARMA 过程. 再如, 文献 [4, 12, 19, 21] 在对 1700 年至 1994 年间 Wolf 太阳黑子数的研究中, 均是將不平稳的原始数据经过变换 $2(\sqrt{1 + \text{第 } 1699 + t \text{ 年太阳黑子数}} + 1)$ 得到平稳数据后再进行建模. 然而, 基于变换后的数据建

图 1 (网络版彩图) (a) 和 (b) 2000 年至 2014 年间纳斯达克综合指数日波动数; (c) 和 (d) 1700 年至 1994 年间 Wolf 太阳黑子数; (a) 和 (c) 为原始数据; (b) 和 (d) 为相应的去趋势后的数据. 光滑的曲线为时间趋势

立的模型对原始数据的关系变化是难以刻画的. 因此, 对于包含趋势、季节因子和其他非平稳的因子的时间数据, 对原始数据直接建模在有些场合下更有意义. 局部平稳时间序列建模正是弥补了这一方面的不足. 局部平稳时间序列分析可以直接对具有趋势项和相关性随时间变化的, 以及方差随时间变化的数据进行建模. 例如, 对 ARIMA 过程直接建模而不需要进行差分处理. 再如, 2000 年至 2014 年间纳斯达克综合指数日波动数, 以及 1700 年至 1994 年间 Wolf 太阳黑子数经检验均满足局部平稳条件, 从而可以对原始数据直接进行建模.

作为研究非平稳行为的一种方法, Dahlhaus^[22] 首先提出了局部平稳的概念, 给出了基于时变谱形式的局部平稳过程的定义, 并且研究了相关的统计理论性质. 之后, Vogt^[23] 从统计角度给出了更容易理解的局部平稳过程定义, 具体如下:

定义 1.1 称一个 d 维过程 $\{z_{t,T}\}$ 是局部平稳的, 如果对于每个单位化的时间点 $s \in [0, 1]$, 其存在一个对应的过程 $\{z_t(s)\}$, 且 $\{z_t(s)\}$ 有如下两个特点:

- (i) $\{z_t(s)\}$ 是严格平稳的, 且密度函数为 $f_{z_t(s)}$;
- (ii) $\|z_{t,T} - z_t(s)\| \leq (|t/T - s| + 1/T)V_{t,T}(s)$ 几乎处处成立, 其中 $V_{t,T}(s)$ 是一个正的随机变量过程, 满足 $E(V_{t,T}(s))^\rho < C$, $\rho > 0$ 和 $C < \infty$ 与 s, t 和 T 独立, 这里 $\|\cdot\|$ 表示在 $\mathbb{R}^d$ 上的任意范数.

直观上来说, 局部平稳过程在任意时间点附近接近于一个平稳过程, 但是其二阶特征随着时间渐近变化. 与建立在 (严) 平稳假设基础之上的经典时间序列模型相比, 局部平稳时间序列模型可以更好地描述数据的非平稳特征. 正是基于这一优势, 近年来, 局部平稳时间序列模型的研究得到了越来越多的学者的重视. Van Bellegem 和 Dahlhaus^[24] 研究了时变自回归模型 (time-varying autoregressive model, TVAR(p)). Pei 等^[25] 研究了面板数据上的时变非参数固定效应模型. Vogt^[23] 研究了局部平稳条件下的时变完全非参数模型, 其包含了大量的非线性时间序列模型, 如时变非参数自回归模型. 由以上文献不难看出, 局部平稳时间序列模型通常会涉及随时间变化的系数函数, 因此在理论方法以及数值分析时更倾向于非参数的方法.

与经典时间序列分析相同, 文献 [23] 中时变的完全非参数模型很容易出现“维数灾难”问题. 为了解决非平稳问题和完全非参数模型可能出现的“维数灾难”问题, 本文提出了局部平稳条件下的单指标变系数回归模型, 称为时变单指标变系数模型 (time-varying single-index coefficient model), 其形式为

$$y_{t,T} = \mathbf{x}_{t,T}^\top \alpha\left(\frac{t}{T}, \mathbf{z}_{t,T}^\top \boldsymbol{\theta}\right) + \varepsilon_{t,T}, \quad t = 1, \dots, T, \quad (1.2)$$

其中变量 $(y_{t,T}, \mathbf{x}_{t,T}, \mathbf{z}_{t,T})$ 均为局部平稳的, 且未知的函数向量 $\alpha(\cdot, \cdot)$ 可以随时间而变化. 此外, 鉴于模型识别性问题, 假定 $\|\boldsymbol{\theta}\| = 1$ 且向量 $\boldsymbol{\theta}$ 的第一个非零元为正数.

本文深入研究局部平稳条件下的时变单指标变系数模型 (1.2) 的统计推断问题. 首先, 采用两步估计方法对模型中的未知参数 $\boldsymbol{\theta}$ 和非参数函数系数 $\alpha(\cdot, \cdot)$ 进行估计, 证明估计的渐近正态性质. 其次, 对于模型 (1.2) 中的函数系数向量 $\alpha(\cdot, \cdot)$ 是否与时间因素有关进行假设检验, 构造检验统计量, 提出一种假设检验方法并证明检验统计量的渐近分布. 最后, 通过模拟和实例研究本文所提出的估计和检验方法在有限样本下的表现.

2 模型估计

设 $\{(y_{t,T}, \mathbf{x}_{t,T}, \mathbf{z}_{t,T}), t = 1, 2, \dots, T\}$ 为满足模型 (1.2) 的原始数据. 本节采用两步估计方法^[5, 26], 对模型 (1.2) 中未知参数 $\boldsymbol{\theta}$ 和非参数函数系数 $\alpha(s, u)$ 进行估计. 在第一步中, 我们将采用截面最小二

乘估计 (profile least-squared estimation, PLS) 方法, 其中对非参函数部分的估计, 通常采用核估计方法^[5,7] 或样条估计方法. 由于核估计方法在待估函数过多时计算量过大, 使得它主要被应用在低维的情形. 而样条估计在计算上比核估计更快^[27-29]. 因此, 本文将采用张量 B 样条的方法估计非参向量函数. 众所周知, 样条估计的渐近分布是很难得到的, 从而无法进行统计推断. 为了克服这个问题, 我们给出第二步估计: 基于第一步得到的关于 θ 的 PLS 估计, 我们用局部线性的方法来估计非参函数向量 $\alpha(s, u)$.

第一步: PLS 估计 与文献 [28] 类似, 模型可识别条件下的参数空间定义为

$$\Theta = \{\theta = (\theta_1, \dots, \theta_q)^\top : \|\theta\| = 1, \theta_1 > 0\},$$

此参数空间可以变换为一个紧子空间

$$\Theta_{-1} = \{(\sqrt{1 - \|\theta_{-1}\|_2^2}, \theta_2, \dots, \theta_q) : \|\theta_{-1}\|^2 < 1\},$$

其中 $\theta_{-1} = (\theta_2, \dots, \theta_q)^\top$. 变换的 Jacobi 矩阵为

$$J = \frac{\partial \theta}{\partial \theta_{-1}} = \begin{pmatrix} -\frac{\theta_{-1}^\top}{\sqrt{1 - \|\theta_{-1}\|_2^2}} \\ I_{q-1} \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

令 $t_T = t/T$, $u_{t,T}(\theta) = z_{t,T}^\top \theta$. 设 $u_{t,T}(\theta)$ 值域为紧集 $[a, b]$, 不失一般性, 设 $[a, b] = [0, 1]$. 对于给定的 θ , 利用三次张量 B 样条的方法来估计非参函数向量 $\alpha(s, u)$. 为方便起见, 假设对每个回归变量有 M_T 个内节点, 且在区间 $[0, 1]$ 上等距划分. 令 $N_T = M_T + k$, 其中 $k = 4$. $\alpha(s, u)$ 中所有元素 $\alpha_l(s, u)$ ($l = 1, \dots, p$) 均为相同变量的函数, 因此具有相同的基向量, 记 $\mathcal{B}(s, u) = (B_{ij}(s, u) : 1 \leq i, j \leq N_T)^\top$, 其中 $B_{ij}(s, u) = B_i(s)B_j(u)$. 从而, 二元函数 $\alpha_l(s, u)$ 的三次张量 B 样条表示为

$$\alpha_l((s, u); \theta) = \sum_{i=1}^{N_T} \sum_{j=1}^{N_T} B_{ij}(s, u) \beta_{ij,l}(\theta) \triangleq \mathcal{B}^\top(s, u) \beta_l(\theta), \quad l = 1, 2, \dots, p.$$

令 $\beta(\theta) = (\beta_1^\top(\theta), \dots, \beta_p^\top(\theta))^\top$, 则 $\beta(\theta)$ 的最小二乘估计为

$$\hat{\beta}(\theta) = \arg \min_{\beta \in \mathbb{R}^{pN_T^2}} \sum_{t=1}^T \left(y_{t,T} - \sum_{l=1}^p x_{tl,T} \mathcal{B}^\top(t_T, u_{t,T}(\theta)) \beta_l \right)^2 = (\mathbb{B}^\top \mathbb{B})^{-1} \mathbb{B}^\top \mathbf{y}_T, \quad (2.2)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbb{B} &= (\mathbf{B}_1(\theta), \dots, \mathbf{B}_T(\theta))^\top, \\ \mathbf{B}_t(\theta) &= (x_{t1,T} \mathcal{B}^\top(t_T, u_{t,T}(\theta)), \dots, x_{tp,T} \mathcal{B}^\top(t_T, u_{t,T}(\theta)))^\top, \\ \mathbf{y}_T &= (y_{1,T}, \dots, y_{T,T})^\top. \end{aligned}$$

因此, 对于给定的 θ , 函数向量 $\alpha(s, u)$ 的估计为

$$\hat{\alpha}_{\text{PLS}}((s, u); \theta) = (\mathcal{B}^\top(s, u) \hat{\beta}_1(\theta), \dots, \mathcal{B}^\top(s, u) \hat{\beta}_p(\theta))^\top = (I_p \otimes \mathcal{B}^\top(s, u)) \hat{\beta}(\theta). \quad (2.3)$$

通过最小化平方损失函数可以得到 θ_{-1} 的截面最小二乘估计

$$\hat{\theta}_{-1} = \arg \min_{\theta_{-1} \in \Theta_{-1}} \sum_{t=1}^T (y_{t,T} - \mathbf{x}_{t,T}^\top \hat{\alpha}_{\text{PLS}}((t_T, z_{t,T}^\top \theta); \theta))^2.$$

故经变换后我们得到 θ 的截面最小二乘估计 $\hat{\theta} = (\sqrt{1 - \|\hat{\theta}_{-1}\|^2}, \hat{\theta}_{-1})^\top$.

第二步: 局部线性核估计 基于第一步的截面最小二乘估计 $\hat{\theta}$, 用局部线性回归方法^[30] 估计 $\alpha(s, u)$. 记 $\hat{u}_{t,T} = \mathbf{z}_{t,T}^\top \hat{\theta}$. 对于任意点 (s, u) , 定义加权平方损失函数

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_T(\lambda) &= \sum_{t=1}^T \left[y_{t,T} - \sum_{j=1}^p x_{tj} \{ \lambda_{0j} + \lambda_{1j}(t_T - s) + \lambda_{2j}(\hat{u}_{t,T} - u) \} \right]^2 K_{h_T}(t_T - s) K_{h_T}(\hat{u}_{t,T} - u) \\ &\triangleq \sum_{t=1}^T (y_{t,T} - \mathbf{w}_{t,T}^\top \lambda)^2 K_{h_T}(t_T - s) K_{h_T}(\hat{u}_{t,T} - u) \\ &\triangleq (\mathbf{y}_T - \mathbf{W}_T \lambda)^\top \mathbf{K}_T (\mathbf{y}_T - \mathbf{W}_T \lambda),\end{aligned}\quad (2.4)$$

其中 $\lambda = (\lambda_0^\top, \lambda_1^\top, \lambda_2^\top)^\top$, $\lambda_i^\top = (\lambda_{i1}, \dots, \lambda_{ip})^\top$, $i = 0, 1, 2$; $\mathbf{W}_T = (\mathbf{w}_{1,T}, \dots, \mathbf{w}_{T,T})^\top$, $\mathbf{w}_{t,T} = (\mathbf{x}_{t,T}^\top, (t_T - s)\mathbf{x}_{t,T}^\top, (\hat{u}_{t,T} - u)\mathbf{x}_{t,T}^\top)^\top$, $t = 1, \dots, T$; $\mathbf{K}_T = \text{diag}(K_{h_T}(1/T - s)K_{h_T}(\hat{u}_{1,T} - u), \dots, K_{h_T}(1 - s)K_{h_T}(\hat{u}_{T,T} - u))$, $K_{h_T}(\cdot) = h_T^{-1}K(\cdot/h_T)$, $K(\cdot)$ 为核函数, h_T 为窗宽. 为方便起见, 假定两个核函数的窗宽是相等的, 但我们的结果对不同的窗宽也同样适用.

将加权平方损失函数 (2.4) 对 λ 进行极小化, 即可得到 λ 的估计, 经整理后为

$$\hat{\lambda}_{\text{LLk}}((s, u); \hat{\theta}) = \arg \min_{\lambda} \mathcal{L}_T(\lambda) = (\mathbf{W}_T^\top \mathbf{K}_T \mathbf{W}_T)^{-1} \mathbf{W}_T^\top \mathbf{K}_T \mathbf{y}_T \triangleq \mathbf{H}_T^{-1} \mathbf{S}_T^{-1} \mathbf{Q}_T,$$

其中 $\mathbf{H}_T$ 为 $3p$ 阶对角矩阵, 其中前 p 个对角元素均为 1, 其余的对角元素为 h_T , 即 $\mathbf{H}_T = \text{diag}((1, \dots, 1)_p, (h_T, \dots, h_T)_{2p})$,

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}_T &= \mathbf{Q}_T((s, u); \hat{\theta}) = \begin{pmatrix} Q_{00}(s, u) \\ Q_{10}(s, u) \\ Q_{01}(s, u) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_T = \mathbf{S}_T((s, u); \hat{\theta}) = \begin{pmatrix} S_{00}(s, u) & S_{10}(s, u) & S_{01}(s, u) \\ S_{10}(s, u) & S_{20}(s, u) & S_{11}(s, u) \\ S_{01}(s, u) & S_{11}(s, u) & S_{02}(s, u) \end{pmatrix}, \\ S_{mn}(s, u) &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbf{x}_{t,T} \mathbf{x}_{t,T}^\top \left(\frac{t_T - s}{h_T} \right)^m \left(\frac{\hat{u}_{t,T} - u}{h_T} \right)^n K_{h_T}(t_T - s) K_{h_T}(\hat{u}_{t,T} - u), \quad m, n = 0, 1, 2, \\ Q_{l,v}(s, u) &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbf{x}_{t,T} y_{t,T} \left(\frac{t_T - s}{h_T} \right)^l \left(\frac{\hat{u}_{t,T} - u}{h_T} \right)^v K_{h_T}(t_T - s) K_{h_T}(\hat{u}_{t,T} - u), \quad l, v = 0, 1.\end{aligned}$$

由此可知, 函数 $\alpha(s, u)$ 的局部线性核估计为

$$\hat{\alpha}_{\text{LLk}}((s, u); \hat{\theta}) = \hat{\lambda}_0^\top((s, u); \hat{\theta}).$$

3 估计的渐近性质

本节将研究参数向量 θ 的截面最小二乘估计和非参数函数 $\alpha(s, u)$ 的估计的渐近性质. 若无特别说明, 本文均以 C 表示不同的常数. 另外, 我们需要如下符号:

$$\begin{aligned}\kappa_j &= \int_{-\infty}^{\infty} u^j K(u) du, \quad \nu_j = \int_{-\infty}^{\infty} u^j K^2(u) du, \\ \sigma^2(t_T, \mathbf{x}_{t,T}, u_{t,T}) &= \text{E}(\epsilon_{t,T}^2 \mid \mathbf{x}_{t,T}, u_{t,T}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Omega_1(s, \mathbf{z}) &= E(\mathbf{x}_{t,T} \mathbf{x}_{t,T}^\top \mid t_T = s, \mathbf{z}_{t,T} = \mathbf{z}), \\
\Omega_1^*(s, \mathbf{z}) &= E(\sigma^2(t_T, \mathbf{x}_{t,T}, \mathbf{z}_{t,T}) \mathbf{x}_{t,T} \mathbf{x}_{t,T}^\top \mid t_T = s, \mathbf{z}_{t,T} = \mathbf{z}), \\
\Omega(s, u) &= E(\mathbf{x}_{t,T} \mathbf{x}_{t,T}^\top \mid t_T = s, u_{t,T}(\boldsymbol{\theta}) = u), \\
\Omega^*(s, u) &= E(\sigma^2(t_T, \mathbf{x}_{t,T}, \mathbf{z}_{t,T}) \mathbf{x}_{t,T} \mathbf{x}_{t,T}^\top \mid t_T = s, u_{t,T}(\boldsymbol{\theta}) = u), \\
\Omega_2(s, u) &= E(\boldsymbol{\alpha}^{(2)}(t_T, u_{t,T}(\boldsymbol{\theta}))^\top \Omega_1(t_T, \mathbf{z}_{t,T}) \boldsymbol{\alpha}^{(2)}(t_T, u_{t,T}(\boldsymbol{\theta})) \mathbf{z}_{t,T} \mathbf{z}_{t,T}^\top \mid t_T = s, u_{t,T}(\boldsymbol{\theta}) = u), \\
\Omega_2^*(s, u) &= E((\boldsymbol{\alpha}^{(2)}(t_T, u_{t,T}(\boldsymbol{\theta})))^\top \Omega_1^*(t_T, \mathbf{z}_{t,T}) \boldsymbol{\alpha}^{(2)}(t_T, u_{t,T}(\boldsymbol{\theta})) \mathbf{z}_{t,T} \mathbf{z}_{t,T}^\top \mid t_T = s, u_{t,T}(\boldsymbol{\theta}) = u).
\end{aligned}$$

令 $\mathbf{J}_i$ 为第 i 个元素为 1、其他元素均为 0 的 p 维向量. 令 $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_{1,T}, \dots, \varepsilon_{T,T})^\top$, $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_T)^\top$, 其中 $m_t = \mathbf{x}_{t,T}^\top \boldsymbol{\alpha}(t_T, \mathbf{z}_{t,T}^\top \boldsymbol{\theta})$.

对于任意二元函数 φ 和 ψ , 定义

$$\begin{aligned}
\langle \varphi, \psi \rangle_{\boldsymbol{\theta}} &= \int_0^1 \int_0^1 \varphi(s, u) \psi(s, u) f_{\boldsymbol{\theta}}(s, u) ds du, \\
\langle \varphi(s_t, u_t), \psi(s_t, u_t) \rangle_{T, \boldsymbol{\theta}} &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \varphi(s_t, u_t(\boldsymbol{\theta})) \psi(s_t, u_t(\boldsymbol{\theta})), \\
\|\varphi\|_{\boldsymbol{\theta}}^2 &= \int_0^1 \int_0^1 \varphi^2(s, u) f_{\boldsymbol{\theta}}(s, u) ds du, \quad \|\varphi\|_{T, \boldsymbol{\theta}}^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \varphi^2(s_t, u_t(\boldsymbol{\theta})),
\end{aligned}$$

并记

$$\begin{aligned}
V(\boldsymbol{\theta}) &= (\langle B_{ij}, B_{i'j'} \rangle_{\boldsymbol{\theta}})_{1 \leq i, j, i', j' \leq N_T} = \iint \mathcal{B}(s, u) \mathcal{B}^\top(s, u) f_{\boldsymbol{\theta}}(s, u) ds du, \\
V_T(\boldsymbol{\theta}) &= \frac{1}{T} \mathbb{B}^\top \mathbb{B} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbf{B}_t(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{B}_t^\top(\boldsymbol{\theta}).
\end{aligned}$$

为证明估计的渐近性质, 作如下的假设:

(A1) 过程 $\{(\mathbf{z}_{t,T}, \mathbf{x}_{t,T})\}$ 是局部平稳的.

(A2) 记变量 $u_t(s) = (\mathbf{z}_t(s))^\top \boldsymbol{\theta}$. 变量 $(u_t(s), \mathbf{x}_t(s))$ 的密度函数 $f(s, u, \mathbf{x}) := f_{u_t(s), \mathbf{x}_t(s)}(u, \mathbf{x})$ 关于 s 和 u 是光滑的. 特别地, $f(s, u, \mathbf{x})$ 关于 s 和 u 是可偏导的. $f^{(1)}(s, u, \mathbf{x}) := \frac{\partial}{\partial s} f(s, u, \mathbf{x})$ 和 $f^{(2)}(s, u, \mathbf{x}) := \frac{\partial}{\partial u} f(s, u, \mathbf{x})$ 是连续的. 同样地, 对边际密度函数 $f(s, u) = f_{u_t(s)}(u)$ 亦有相同的性质, 且 $\inf f(s, u) > 0$.

(A3) 存在 C , 使得 $E(|x_{ti,T} x_{tj,T}|^4) < C$, $i, j = 1, \dots, p$.

(A4) 三角阵列 $\{(\mathbf{z}_{t,T}, \mathbf{x}_{t,T}, \varepsilon_{t,T})\}$ 是 α -混合的, 且混合 (mixing) 系数 α 满足: 存在 $A < \infty, \gamma > 7$, 使得 $\alpha(k) \leq Ak^{-\gamma}$.

(A5) 令变量 $u_{t,T}(\boldsymbol{\theta})$ 和 $(u_{t,T}(\boldsymbol{\theta}), u_{t+l,T}(\boldsymbol{\theta}))$ 的密度函数分别为 $f_{u_{t,T}}(u)$ 和 $f_{u_{t,T}, u_{t+l,T}}(u, u')$. 对于任意集合 $S \subset R$, 存在一个常数 $C = C(S)$ 使得 $\sup_{t,T} \sup_{u \in S} f_{u_{t,T}}(u) \leq C$. 对于 $i, j = 1, \dots, p$, 有

$$\sup_{t,T} \sup_{u \in S} E(|x_{ti,T} x_{tj,T}|^4 \mid u_{t,T} = u) f_{u_{t,T}}(u) \leq C.$$

进一步地, 存在常数 $l^* < \infty$, 使得对所有 $l \geq l^*$, $i, j = 1, \dots, p$, 有

$$\sup_{t,T} \sup_{(u, u') \in S} E(|x_{ti,T} x_{tj,T} x_{(t+l)T} x_{(t+l)j,T}| \mid u_{t,T} = u, u_{t+l,T} = u') f_{u_{t,T}, u_{t+l,T}}(u, u') \leq C.$$

(A6) $\alpha(s, u)$ 是二阶连续可导的, 其一阶导数记为

$$\alpha^{(1)}(s, u) = \frac{\partial \alpha(s, u)}{\partial s}, \quad \alpha^{(2)}(s, u) = \frac{\partial \alpha(s, u)}{\partial u},$$

二阶导数分别记为

$$\alpha^{(11)}(s, u) = \frac{\partial^2 \alpha(s, u)}{\partial s^2}, \quad \alpha^{(22)}(s, u) = \frac{\partial^2 \alpha(s, u)}{\partial u^2}, \quad \alpha^{(12)}(s, u) = \frac{\partial^2 \alpha(s, u)}{\partial s \partial u}.$$

(A7) 核函数 K 关于 0 是对称的, 有紧集而且也是有界的, 即对所有的 $|v| > C$ ($C < \infty$), 有 $K(v) = 0$. 进一步地, K 是 Lipschitz 的, 即对任意 $v, v' \in \mathbb{R}$, 有 $|K(v) - K(v')| \leq L|v - v'|$, 其中 $L < \infty$.

(A8) 令 $\sigma^2(t_T, \mathbf{x}_{t,T}, u_{t,T})$ 为连续的. 为简便证明, 令 $\varepsilon_{t,T} = \sigma(t_T, \mathbf{x}_{t,T}, \mathbf{z}_{t,T})\epsilon_t$, 其中 $\{\epsilon_t, t = 1, \dots, T\}$ 独立同分布, 且 $E(|\epsilon_t|^2) = 1$; 存在 $\delta > 0$, 使得 $E(|\epsilon_t|^{8+\delta}) < \infty$. 对于一切 $j \leq t$, $\{\epsilon_t\}$ 与 $\{\mathbf{x}_{j,T}, \mathbf{z}_{j,T}\}$ 独立.

(A9) $\alpha_j \in \mathcal{F}_4$, $j = 1, \dots, p$, 其中 $\mathcal{F}_\nu$ 定义为一个二元函数空间, 此空间中的函数 $h(t_1, t_2) \in \mathcal{F}_\nu$ 定义在平面 $[0, 1]^2$ 上, 使得其偏导数 $D^{(k_1, k_2)}h = \partial^{k_1+k_2}h/\partial^{k_1}t_1\partial^{k_2}t_2$ 是连续的且满足 γ 阶 Lipschitz 条件, 即对于任意 $\mathbf{T}, \mathbf{S} \in [0, 1]^2$ 和 $k_1 + k_2 \leq \nu - \gamma$, $\gamma \in (0, 1)$, 存在有限的常数 C 使得

$$|D^{(k_1, k_2)}(\mathbf{T}) - D^{(k_1, k_2)}(\mathbf{S})| \leq C\|\mathbf{T} - \mathbf{S}\|^\gamma.$$

(A10) $\Omega_2(s, u)$ 是正定的且满足二元函数的 Lipschitz 连续.

(A11) $\Omega_2^*(s, u)$ 是正定的且满足二元函数的 Lipschitz 连续.

(A12) $\Omega^*(s, u)$ 是正定的且满足二元函数的 Lipschitz 连续.

(A13) $\Omega(s, u)$ 是正定的且满足二元函数的 Lipschitz 连续.

注 3.1 (A1) 是本文的基本假设, 这一假设在经济金融数据建模是合理的; (A2) 和 (A3) 是局部平稳领域非参半建模的常规条件, 其中 (A2) 中的假设 $\inf f(s, u) > 0$ 是证明局部线性核估计渐近正态性的常规条件用以保证渐近方差存在, 参见文献 [30]; (A4) 是时间序列的混合条件, 这一假设是合理的且也是为了简化证明; (A6) 是非参函数光滑性的条件; (A7) 和 (A8) 仅为简化证明, 该条件可以弱化; (A9) 为张量 B 样条的常规条件, 参见文献 [31]; (A10)–(A13) 为保证估计的渐近方差的有限性.

下面将在上述假设之下讨论参数向量 $\boldsymbol{\theta}$ 的截面最小二乘估计和非参数函数 $\alpha(s, u)$ 估计的渐近性质. 首先, 定理 3.1 给出了函数向量 $\alpha(s, u)$ 的张量 B 样条估计的收敛速度. 定理 3.2 给出了截面最小二乘估计 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{-1}$ 的渐近正态性. 而定理 3.3 则给出了局部线性估计的渐近正态性. 为证明这些定理, 我们从介绍以下引理开始.

引理 3.1 若假设 (A6) 成立, 则对于函数 $\alpha_i(s, u) \in \mathcal{F}_4$, $i = 1, \dots, p$, 存在常数 C 使得

$$\sup_{(s, u) \in [0, 1]^2} |\alpha_i(s, u) - \mathcal{B}^\top(s, u)\boldsymbol{\beta}_i| \leq CM_T^{-4},$$

其中 $\boldsymbol{\beta}_i$ 为依赖于 $\alpha_i(s, u)$ 的 N_T^2 维向量.

证明 此引理为多元样条理论的一般结果, 具体证明过程可参见文献 [31, 引理 6.1]. □

引理 3.2 若假设 (A1)、(A2)、(A4)、(A6) 和 (A7) 成立, 且 $T^{1/12} \ll M_T \ll T^{1/10}(\log T)^{-1/5}$, 则

$$\sup_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta} |\langle B_{ij}(t_T, u_{t,T}(\boldsymbol{\theta})), B_{i'j'}(t_T, u_{t,T}(\boldsymbol{\theta})) \rangle_{T, \boldsymbol{\theta}} - \langle B_{ij}, B_{i'j'} \rangle_{\boldsymbol{\theta}}| = O_p\left(\frac{\log T}{\sqrt{TM_T^2}} + \frac{1}{T^r M_T}\right).$$

证明 记 $u_t(s) = (\mathbf{z}_t(s))^\top \boldsymbol{\theta}$. 由文献 [28, 引理 A.2] 可知,

$$\sup_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta} |\langle B_{ij}(t_T, u_t(t_T)), B_{i'j'}(t_T, u_t(t_T)) \rangle_{T, \boldsymbol{\theta}} - \mathbb{E}(\langle B_{ij}(t_T, u_t(t_T)), B_{i'j'}(t_T, u_t(t_T)) \rangle)| = O_p\left(\frac{\log T}{\sqrt{T}M_T^2}\right).$$

此外,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}(\langle B_{ij}(t_T, u_t(t_T)), B_{i'j'}(t_T, u_t(t_T)) \rangle) \\ &= \mathbb{E}(\langle B_{ij}(t_T, u_{t,T}(\boldsymbol{\theta})), B_{i'j'}(t_T, u_{t,T}(\boldsymbol{\theta})) \rangle) + O(T^{-r}M_T^{-1}) \\ &= \int \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T B_i(t_T) B_j(u) B_{i'}(t_T) B_{j'}(u) f(t_T, u) du + O(T^{-r}M_T^{-1}) \\ &= \iint B_i(s) B_j(u) B_{i'}(s) B_{j'}(u) f(s, u) duds + O(T^{-r}M_T^{-1}) \\ &= \langle B_{ij}, B_{i'j'} \rangle_{\boldsymbol{\theta}} + O(T^{-r}M_T^{-1}). \end{aligned}$$

证毕. $\square$

引理 3.3 若假设 (A2) 成立, 则存在常数 $0 < c < C < +\infty$, 使得对任意 $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ 和充分大的 T , 下列不等式成立:

$$\begin{aligned} cM_T^{-2} \|\boldsymbol{\beta}\|^2 &\leq \boldsymbol{\beta}^\top V(\boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{\beta} \leq CM_T^{-2} \|\boldsymbol{\beta}\|^2, \\ CM_T^2 \|\boldsymbol{\beta}\|^2 &\leq \boldsymbol{\beta}^\top V(\boldsymbol{\theta})^{-1} \boldsymbol{\beta} \leq cM_T^2 \|\boldsymbol{\beta}\|^2. \end{aligned}$$

进一步地, 有

$$\|V(\boldsymbol{\theta})^{-1}\|_\infty \leq CM_T^2.$$

证明 具体证明过程可参见文献 [28, 引理 A.1]. $\square$

引理 3.4 若假设 (A1)、(A2)、(A4)、(A6) 和 (A7) 成立, 且 $T^{1/12} \ll M_T \ll T^{1/10}(\log T)^{-1/5}$, 则

$$\sup_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta} \sup_{\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma^{(2)}} \left| \frac{\langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle_{T, \boldsymbol{\theta}} - \langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle_{\boldsymbol{\theta}}}{\|\gamma_1\|_{\boldsymbol{\theta}} \cdot \|\gamma_2\|_{\boldsymbol{\theta}}} \right| = O\left(\frac{\log TM_T}{\sqrt{T}} + \frac{M_T}{T^r}\right), \quad \text{a.s.}, \quad (3.1)$$

其中 $\Gamma^{(2)}$ 为 $[0, 1]^2$ 上的三次张量样条函数空间.

证明 不失一般性, 设

$$\gamma_1 = \mathcal{B}^\top(s, u) \mathbf{a} = \sum_{i,j=1}^{N_T} a_{ij} B_{ij}(s, u), \quad \gamma_2 = \mathcal{B}(s, u)^\top \mathbf{b} = \sum_{i,j=1}^{N_T} b_{ij} B_{ij}(s, u),$$

则

$$\begin{aligned} \langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle_{T, \boldsymbol{\theta}} &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left\{ \left(\sum_{i,j=1}^{N_T} a_{ij} B_{ij}(t_T, u_{t,T}(\boldsymbol{\theta})) \right) \left(\sum_{i',j'=1}^{N_T} b_{i'j'} B_{i'j'}(t_T, u_{t,T}(\boldsymbol{\theta})) \right) \right\} \\ &= \sum_{i,j=1}^{N_T} \sum_{i',j'=1}^{N_T} a_{ij} b_{i'j'} \langle B_{ij}(t_T, u_{t,T}(\boldsymbol{\theta})), B_{i'j'}(t_T, u_{t,T}(\boldsymbol{\theta})) \rangle_{T, \boldsymbol{\theta}}, \end{aligned}$$

$$\langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle_{\boldsymbol{\theta}} = \sum_{i,j=1}^{N_T} \sum_{i',j'=1}^{N_T} a_{ij} b_{i'j'} \langle B_{ij}, B_{i'j'} \rangle_{\boldsymbol{\theta}},$$

并且,

$$\|\gamma_1\|_{\boldsymbol{\theta}}^2 = \left\| \sum_{i,j=1}^{N_T} a_{ij} B_{ij}(s, u) \right\|_{\boldsymbol{\theta}}^2 = \mathbf{a}^\top V(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{a}, \quad \|\gamma_2\|_{\boldsymbol{\theta}}^2 = \left\| \sum_{i,j=1}^{N_T} b_{ij} B_{ij}(s, u) \right\|_{\boldsymbol{\theta}}^2 = \mathbf{b}^\top V(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{b}.$$

由引理 3.3 可知,

$$\|\gamma_1\|_{\boldsymbol{\theta}}^2 \geq cM_T^{-2} \|\mathbf{a}\|^2, \quad \|\gamma_2\|_{\boldsymbol{\theta}}^2 \geq cM_T^{-2} \|\mathbf{b}\|^2.$$

所以,

$$\begin{aligned} & \sup_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta} \sup_{\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma^{(2)}} \left| \frac{\langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle_{T, \boldsymbol{\theta}} - \langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle_{\boldsymbol{\theta}}}{\|\gamma_1\|_{\boldsymbol{\theta}} \|\gamma_2\|_{\boldsymbol{\theta}}} \right| \\ & \leq \frac{\|\mathbf{a}\|_{\infty} \|\mathbf{b}\|_{\infty}}{cM_T^{-2} \|\mathbf{a}\|_2 \|\mathbf{b}\|_2} \sup_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta} |\langle B_{ij}(t_T, u_{t,T}(\boldsymbol{\theta})), B_{i'j'}(t_T, u_{t,T}(\boldsymbol{\theta})) \rangle_{T, \boldsymbol{\theta}} - \langle B_{ij}, B_{i'j'} \rangle_{\boldsymbol{\theta}}|. \end{aligned}$$

由引理 3.2, (3.1) 得证. $\square$

引理 3.5 若假设 (A1)、(A2)、(A4) 和 (A6)–(A8) 成立, 令 $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_{1,T}, \dots, \varepsilon_{T,T})^\top$, 则

$$\sup_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta} \|T^{-1} \mathbb{B}^\top\|_{\infty} = O(M_T^{-2}), \quad \text{a.s.}, \quad (3.2)$$

$$\sup_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta} \|T^{-1} \mathbb{B}^\top \boldsymbol{\varepsilon}\|_{\infty} = O\left(\frac{\log T}{\sqrt{TM_T^2}} + \frac{1}{T^r M_T}\right), \quad \text{a.s.} \quad (3.3)$$

证明 由引理 3.3 和 3.4 可得证. $\square$

引理 3.6 若假设 (A1)、(A2)、(A4) 和 (A6)–(A8) 成立, 且 $T^{1/12} \ll M_T \ll T^{1/10}(\log T)^{-1/5}$, 则

$$\sup_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta} \sup_{(s,u) \in [0,1]^2} |\hat{\alpha}_{i,\text{PLS}}(s, u; \boldsymbol{\theta}) - \alpha_i(s, u)| = O\left(M_T^{-4} + T^{-r} M_T + \frac{M_T \log T}{\sqrt{T}}\right), \quad \text{a.s.}$$

证明 由引理 3.1 可知,

$$\sup_{(s,u) \in [0,1]^2} |\alpha_i(s, u) - \mathcal{B}(s, u)^\top \boldsymbol{\beta}_i| = O(M_T^{-4}).$$

令 $\mathbf{m}_{t,T} = \mathbf{x}_{t,T}^\top \boldsymbol{\alpha}(\frac{t}{T}, \mathbf{z}_{t,T}^\top \boldsymbol{\theta})$, 则

$$\|\mathbf{m}_{t,T} - \mathbb{B} \boldsymbol{\beta}\| = O(M_T^{-4}).$$

又由于 $\hat{\alpha}_{i,\text{PLS}}(s, \mu) = \mathbf{1}_i^\top (I_p \otimes \mathcal{B}^\top(s, \mu)) \hat{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{\theta})$, 所以,

$$\begin{aligned} & |\hat{\alpha}_{i,\text{PLS}}(s, u; \boldsymbol{\theta}) - \alpha_i(s, u)| \\ & \leq |\hat{\alpha}_{i,\text{PLS}}(s, u; \boldsymbol{\theta}) - \mathcal{B}^\top(s, u) \boldsymbol{\beta}_i| + |\mathcal{B}^\top(s, u) \boldsymbol{\beta}_i - \alpha_i(s, u)| \\ & = |\mathbf{1}_i^\top (I_p \otimes \mathcal{B}^\top(s, \mu)) (\hat{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{\theta}) - \boldsymbol{\beta})| + O(M_T^{-4}) \\ & \leq |\mathbf{1}_i^\top (I_p \otimes \mathcal{B}^\top(s, \mu)) (\mathbb{B}^\top \mathbb{B})^{-1} \mathbb{B}^\top (\mathbf{y}_{t,T} - \mathbb{B} \boldsymbol{\beta})| + O(M_T^{-4}) \\ & \leq |\mathbf{1}_i^\top (I_p \otimes \mathcal{B}^\top(s, \mu)) (\mathbb{B}^\top \mathbb{B})^{-1} \mathbb{B}^\top (\mathbf{m}_{t,T} - \mathbb{B} \boldsymbol{\beta})| + |\mathbf{1}_i^\top (I_p \otimes \mathcal{B}^\top(s, \mu)) (\mathbb{B}^\top \mathbb{B})^{-1} \mathbb{B}^\top \boldsymbol{\varepsilon}| + O(M_T^{-4}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left| \sum_{i,j=1}^{N_T} B_{ij}(s, u) \right| \|V_T^{-1}(\boldsymbol{\theta})\|_{\infty} \{ \|T^{-1}\mathbb{B}^{\top}\|_{\infty} \cdot \|\mathbf{m}_{t,T} - \mathbb{B}\boldsymbol{\beta}\|_{\infty} + \|T^{-1}\mathbb{B}^{\top}\boldsymbol{\varepsilon}\|_{\infty} \} + O(M_T^{-4}) \\
&= O(M_T^2)O(M_T^{-2})O(M_T^{-4}) + O(M_T^2)O\left(\frac{\log T}{\sqrt{T}M_T^2} + \frac{1}{T^r M_T}\right) + O(M_T^{-4}) \\
&= O\left(M_T^{-4} + T^{-r}M_T + \frac{M_T \log T}{\sqrt{T}}\right).
\end{aligned}$$

证毕. $\square$

定理 3.1 假设 (A1)–(A6) 和 (A8)–(A11) 成立, $r = \min\{\rho, 1\} > 1/2$, 内节点数 M_T 满足 $T^{1/12} \ll M_T \ll T^{1/10}(\log T)^{-1/5}$, 则

$$\sup_{(s,u)} |\hat{\alpha}_{i,\text{PLS}}((s, u), \hat{\boldsymbol{\theta}}) - \alpha_i(s, u)| = O_p\left(\frac{1}{M_T^4} + \frac{M_T}{T^r} + \frac{M_T \log T}{\sqrt{T}}\right), \quad i = 1, \dots, p. \quad (3.4)$$

证明 首先可以证明

$$\|\hat{\boldsymbol{\theta}}_{-1} - \boldsymbol{\theta}_{-1}\| = O_p(T^{-1/2}).$$

具体证明过程可参见文献 [28, 定理 1]. 再根据引理 3.6 结论即可得证. $\square$

定理 3.2 和 3.3 将分别给出参数估计 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{-1}$ 和非参数函数向量的估计 $\hat{\boldsymbol{\lambda}}_{\text{LLk}}(s, u)$ 的渐近正态性.

定理 3.2 假设 (A1)–(A6) 和 (A8)–(A11) 成立, 且 $T^{1/12} \ll M_T \ll T^{1/10}(\log T)^{-1/5}$, 则

$$\sqrt{T}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{-1} - \boldsymbol{\theta}_{-1}) \xrightarrow{d} N(0, \Sigma^{-1}\Sigma^*\Sigma^{-1}), \quad T \rightarrow \infty,$$

其中

$$\Sigma = J^{\top} \left(\iint \Omega_2(s, u) f(s, u) ds du \right) J, \quad \Sigma^* = J^{\top} \left(\iint \Omega_2^*(s, u) f(s, u) ds du \right) J.$$

证明 令

$$L_T(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left(y_{t,T} - \mathbf{x}_{t,T}^{\top} \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\text{PLS}} \left(\left(\frac{t}{T}, \mathbf{z}_{t,T}^{\top} \boldsymbol{\theta} \right); \boldsymbol{\theta} \right) \right)^2.$$

根据定理 3.1 的证明中 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{-1}$ 的一致性结果, 对 $L_T(\boldsymbol{\theta})$ Taylor 展开得

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{-1} - \boldsymbol{\theta}_{-1} = - \left(\frac{\partial L_T^2(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}_{-1} \partial \boldsymbol{\theta}_{-1}^{\top}} \right)^{-1} \frac{\partial L_T(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}_{-1}} (1 + o_p(1)).$$

根据 Cramér-Wold 法则和 α -混合过程极限定理, 可以证明 $\partial L_T(\boldsymbol{\theta}) / \partial \boldsymbol{\theta}_{-1}$ 的渐近正态性, 在此我们仅计算其偏差和协方差矩阵. 首先,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L_T(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}_{-1}} &= -\frac{2}{T} \sum_{t=1}^T (y_{t,T} - \mathbf{x}_{t,T}^{\top} \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\text{PLS}}((t_T, \mathbf{z}_{t,T}^{\top} \boldsymbol{\theta}); \boldsymbol{\theta})) \mathbf{x}_{t,T}^{\top} \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\text{PLS}}^{(2)}((t_T, \mathbf{z}_{t,T}^{\top} \boldsymbol{\theta}); \boldsymbol{\theta}) J^{\top} \mathbf{z}_{t,T} \\
&= -\frac{2}{T} \sum_{t=1}^T (y_{t,T} - \mathbf{x}_{t,T}^{\top} \boldsymbol{\alpha}(t_T, \mathbf{z}_{t,T}^{\top} \boldsymbol{\theta})) \mathbf{x}_{t,T}^{\top} \boldsymbol{\alpha}^{(2)}(t_T, \mathbf{z}_{t,T}^{\top} \boldsymbol{\theta}) J^{\top} \mathbf{z}_{t,T} + o(1) \\
&= -\frac{2}{T} \sum_{t=1}^T \varepsilon_{t,T} \mathbf{z}_{t,T}^{\top} \boldsymbol{\alpha}^{(2)}(t_T, \mathbf{z}_{t,T}^{\top} \boldsymbol{\theta}) J^{\top} \mathbf{z}_{t,T} + o(1)
\end{aligned}$$

$$= B_T + o(1),$$

其中

$$B_T = -\frac{2}{T} \sum_{t=1}^T \varepsilon_{t,T} \mathbf{x}_{t,T}^\top \boldsymbol{\alpha}^{(2)}(t_T, \mathbf{z}_{t,T}^\top \boldsymbol{\theta}) J^\top \mathbf{z}_{t,T}.$$

显然, $E(B_T) = 0$. 此外, B_T 的协方差矩阵为

$$\begin{aligned} E(B_T B_T^\top) &= \frac{4}{T^2} E \left(\sum_{t_1=1}^T \varepsilon_{t_1,T} \mathbf{x}_{t_1,T}^\top \boldsymbol{\alpha}^{(2)} \left(\frac{t_1}{T}, \mathbf{z}_{t_1,T}^\top \boldsymbol{\theta} \right) J^\top \mathbf{z}_{t_1,T} \right) \left(\sum_{t_2=1}^T \varepsilon_{t_2,T} \mathbf{x}_{t_2,T}^\top \boldsymbol{\alpha}^{(2)} \left(\frac{t_2}{T}, \mathbf{z}_{t_2,T}^\top \boldsymbol{\theta} \right) J^\top \mathbf{z}_{t_2,T} \right)^\top \\ &= \frac{4}{T^2} E \left(\sum_{t=1}^T \varepsilon_{t,T}^2 (\mathbf{x}_{t,T}^\top \boldsymbol{\alpha}^{(2)}(t_T, u_{t,T}(\boldsymbol{\theta})))^2 J^\top \mathbf{z}_{t,T} \mathbf{z}_{t,T}^\top J \right) + o(1) \\ &= \frac{4}{T^2} E \left(\sum_{t=1}^T \sigma^2(t_T, \mathbf{x}_{t,T}, \mathbf{z}_{t,T}) (\boldsymbol{\alpha}^{(2)}(t_T, u_{t,T}(\boldsymbol{\theta})))^\top \mathbf{x}_{t,T} \mathbf{x}_{t,T}^\top \boldsymbol{\alpha}^{(2)}(t_T, u_{t,T}(\boldsymbol{\theta})) J^\top \mathbf{z}_{t,T} \mathbf{z}_{t,T}^\top J \right) \\ &\quad + o(1) \\ &= \frac{4}{T^2} E \left(\sum_{t=1}^T (\boldsymbol{\alpha}^{(2)}(t_T, u_{t,T}(\boldsymbol{\theta})))^\top E(\sigma^2(t_T, \mathbf{x}_{t,T}, \mathbf{z}_{t,T}) \mathbf{x}_{t,T} \mathbf{x}_{t,T}^\top \mid \mathbf{z}_{t,T}) \right. \\ &\quad \times \boldsymbol{\alpha}^{(2)}(t_T, u_{t,T}(\boldsymbol{\theta})) J^\top \mathbf{z}_{t,T} \mathbf{z}_{t,T}^\top J \Big) + o(1) \\ &= \frac{4}{T^2} E \left(\sum_{t=1}^T (\boldsymbol{\alpha}^{(2)}(t_T, u_{t,T}(\boldsymbol{\theta})))^\top \Omega_1^*(t_T, \mathbf{z}_{t,T}) \boldsymbol{\alpha}^{(2)}(t_T, u_{t,T}(\boldsymbol{\theta})) J^\top \mathbf{z}_{t,T} \mathbf{z}_{t,T}^\top J \right) + o(1) \\ &= \frac{4}{T^2} E \left(\sum_{t=1}^T J^\top E((\boldsymbol{\alpha}^{(2)}(t_T, u_{t,T}(\boldsymbol{\theta})))^\top \Omega_1^*(t_T, \mathbf{z}_{t,T}) \boldsymbol{\alpha}^{(2)}(t_T, u_{t,T}(\boldsymbol{\theta})) \mathbf{z}_{t,T} \mathbf{z}_{t,T}^\top \mid u_{t,T}(\boldsymbol{\theta})) J \right) + o(1) \\ &= \frac{4}{T^2} E \left(\sum_{t=1}^T J^\top \Omega_2^*(t_T, u_{t,T}(\boldsymbol{\theta})) J \right) + o(1) = \frac{4}{T^2} E \left(\sum_{t=1}^T J^\top \Omega_2^*(t_T, u_t(t_T, \boldsymbol{\theta})) J \right) + o(1) \\ &= \frac{4}{T} J^\top \left(\iint f(s, u) \Omega_2^*(s, u) ds du \right) J + o(1) = \frac{4}{T} \Sigma^* + o(1). \end{aligned}$$

综合以上结论可知,

$$\frac{\partial L_T(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}_{-1}} \xrightarrow{d} N \left(0, \frac{4}{T} \Sigma^* \right), \quad T \rightarrow \infty. \quad (3.5)$$

其次, $L_T(\boldsymbol{\theta})$ 关于 $\boldsymbol{\theta}_{-1}$ 的二阶微分矩阵为

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 L_T(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}_{-1} \partial \boldsymbol{\theta}_{-1}^\top} &= \frac{2}{T} \sum_{t=1}^T (\mathbf{x}_{t,T}^\top \hat{\boldsymbol{\alpha}}^{(2)}(t_T, \mathbf{z}_{t,T}^\top \boldsymbol{\theta}))^2 J^\top \mathbf{z}_{t,T} \mathbf{z}_{t,T}^\top J \\ &\quad - \frac{2}{T} \sum_{t=1}^T (y_{t,T} - \mathbf{x}_{t,T}^\top \hat{\boldsymbol{\alpha}}(t_T, \mathbf{z}_{t,T}^\top \boldsymbol{\theta})) \mathbf{x}_{t,T}^\top \hat{\boldsymbol{\alpha}}^{(22)}(t_T, \mathbf{z}_{t,T}^\top \boldsymbol{\theta}) J^\top \mathbf{z}_{t,T} \mathbf{z}_{t,T}^\top J, \end{aligned}$$

且其期望为

$$E \left(\frac{\partial^2 L_T(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}_{-1} \partial \boldsymbol{\theta}_{-1}^\top} \right) = E \left(\frac{2}{T} \sum_{t=1}^T (\mathbf{x}_{t,T}^\top \boldsymbol{\alpha}^{(2)}(t_T, u_{t,T}(\boldsymbol{\theta})))^2 J^\top \mathbf{z}_{t,T} \mathbf{z}_{t,T}^\top J \right) + o(1)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{T} \sum_{t=1}^T J^\top E((\mathbf{x}_{t,T}^\top \boldsymbol{\alpha}^{(2)}(t_T, u_{t,T}(\boldsymbol{\theta})))^2 \mathbf{z}_{t,T} \mathbf{z}_{t,T}^\top \mid u_{t,T}(\boldsymbol{\theta})) J + o(1) \\
&= \frac{2}{T} \sum_{t=1}^T J^\top E(\boldsymbol{\alpha}^{(2)}(t_T, u_{t,T}(\boldsymbol{\theta}))^\top E(\mathbf{x}_{t,T} \mathbf{x}_{t,T}^\top \mid \mathbf{z}_{t,T}) \boldsymbol{\alpha}^{(2)}(t_T, u_{t,T}(\boldsymbol{\theta})) \mathbf{z}_{t,T} \mathbf{z}_{t,T}^\top) J + o(1) \\
&= \frac{2}{T} \sum_{t=1}^T J^\top E(\boldsymbol{\alpha}^{(2)}(t_T, u_{t,T}(\boldsymbol{\theta}))^\top \Omega_1(t_T, \mathbf{z}_{t,T}) \boldsymbol{\alpha}^{(2)}(t_T, u_{t,T}(\boldsymbol{\theta})) \mathbf{z}_{t,T} \mathbf{z}_{t,T}^\top) J + o(1) \\
&= \frac{2}{T} \sum_{t=1}^T J^\top E(\boldsymbol{\alpha}^{(2)}(t_T, \mu_{t,T}(\boldsymbol{\theta}))^\top \Omega_1(t_T, \mathbf{z}_{t,T}) \boldsymbol{\alpha}^{(2)}(t_T, u_{t,T}(\boldsymbol{\theta})) \mathbf{z}_{t,T} \mathbf{z}_{t,T}^\top \mid u_{t,T}(\boldsymbol{\theta})) J + o(1) \\
&= \frac{2}{T} \sum_{t=1}^T J^\top \Omega_2(t_T, u_{t,T}(\boldsymbol{\theta})) J + o(1) = \frac{2}{T} \sum_{t=1}^T J^\top \Omega_2(t_T, u_t(t_T, \boldsymbol{\theta})) J + o(1) \\
&= 2J^\top \iint \Omega_2(s, u) f(s, u) ds du J + o(1) = 2\Sigma + o(1).
\end{aligned}$$

由此可得

$$\frac{\partial L_T^2(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}_{-1} \partial \boldsymbol{\theta}_{-1}^\top} \xrightarrow{\text{a.s.}} 2\Sigma, \quad T \rightarrow \infty. \quad (3.6)$$

由 (3.6) 和 (3.5), 定理证毕. $\square$

定理 3.3 假设 (A1)–(A13) 成立, 且 $T^{1/12} \ll M_T \ll T^{1/10}(\log T)^{-1/5}$, $h_T^3 T^r \rightarrow \infty$, $r = \min\{\rho, 1\} > 1/2$. 假设存在常数 c_h , 使得 $h_T^6 T \rightarrow c_h$ 成立, 则

$$\sqrt{T} h_T \mathbf{H}_T \{\hat{\boldsymbol{\lambda}}_{\text{LLk}}(s, u) - \boldsymbol{\lambda}(s, u)\} \xrightarrow{d} N(B(s, u), \boldsymbol{\Sigma}(s, u)), \quad T \rightarrow \infty,$$

其中

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}_T &= \text{diag}((1, \dots, 1)_p, (h_T, \dots, h_T)_{2p}), \\
B(s, u) &= \frac{\kappa_2 \sqrt{c_h}}{2} (\boldsymbol{\alpha}^{(11)}(s, \mu)^\top + \boldsymbol{\alpha}^{(22)}(s, u)^\top, \mathbf{0}, \mathbf{0})^\top, \\
\boldsymbol{\Sigma}(s, u) &= \nu_0 f^{-1}(s, u) \text{diag}(\nu_0, \kappa_2^{-2} \nu_2, \kappa_2^{-2} \nu_2) \otimes \boldsymbol{\Omega}^{-1}(s, u) \boldsymbol{\Omega}^*(s, u) \boldsymbol{\Omega}^{-1}(s, u).
\end{aligned}$$

证明 令 $\mathbf{T}_T^* = (\mathbf{T}_{00}^{*\top}, \mathbf{T}_{10}^{*\top}, \mathbf{T}_{01}^{*\top})^\top$, 其中

$$\mathbf{T}_{mn}^* = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbf{x}_{t,T} \left(\frac{t_T - s}{h_T} \right)^m \left(\frac{u_{t,T} - u}{h_T} \right)^n K_{h_T}(t_T - s) K_{h_T}(u_{t,T} - u) (y_{t,T} - m(t_T, u_{t,T}, \mathbf{x}_{t,T})).$$

在邻域 $|t_T - s| < h_T$ 和 $|u_{t,T} - u| < h_T$, 对函数 $m(t_T, u_{t,T}, \mathbf{x}_{t,T}) = \mathbf{x}_{t,T}^\top \boldsymbol{\alpha}(t_T, u_{t,T})$ Taylor 展开得到

$$\begin{aligned}
m(t_T, u_{t,T}, \mathbf{x}_{t,T}) &= \mathbf{x}_{t,T}^\top \left(\boldsymbol{\alpha}(s, u) + \boldsymbol{\alpha}^{(1)}(s, u)(t_T - s) + \boldsymbol{\alpha}^{(2)}(s, u)(u_{t,T} - u) + \frac{1}{2} \boldsymbol{\alpha}^{(11)}(s, u)(t_T - s)^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \boldsymbol{\alpha}^{(22)}(s, u)(u_{t,T} - u)^2 + \boldsymbol{\alpha}^{(12)}(s, u)(t_T - s)(u_{t,T} - u) \right) + o_p(h_T^2).
\end{aligned}$$

于是,

$$\mathbf{T}_{00} - \mathbf{T}_{00}^* = \mathbf{S}_{00} \boldsymbol{\alpha} + h_T \mathbf{S}_{10} \boldsymbol{\alpha}^{(1)} + h_T \mathbf{S}_{01} \boldsymbol{\alpha}^{(2)} + \frac{h_T^2}{2} \mathbf{S}_{20} \boldsymbol{\alpha}^{(11)} + \frac{h_T^2}{2} \mathbf{S}_{02} \boldsymbol{\alpha}^{(22)} + \frac{h_T^2}{2} \mathbf{S}_{11} \boldsymbol{\alpha}^{(12)} + o_p(h_T^2),$$

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_{10} - \mathbf{T}_{10}^* &= \mathbf{S}_{10}\boldsymbol{\alpha} + h_T \mathbf{S}_{20}\boldsymbol{\alpha}^{(1)} + h_T \mathbf{S}_{11}\boldsymbol{\alpha}^{(2)} + \frac{h_T^2}{2} \mathbf{S}_{30}\boldsymbol{\alpha}^{(11)} + \frac{h_T^2}{2} \mathbf{S}_{12}\boldsymbol{\alpha}^{(22)} + \frac{h_T^2}{2} \mathbf{S}_{21}\boldsymbol{\alpha}^{(12)} + o_p(h_T^2), \\ \mathbf{T}_{01} - \mathbf{T}_{01}^* &= \mathbf{S}_{01}\boldsymbol{\alpha} + h_T \mathbf{S}_{11}\boldsymbol{\alpha}^{(1)} + h_T \mathbf{S}_{02}\boldsymbol{\alpha}^{(2)} + \frac{h_T^2}{2} \mathbf{S}_{21}\boldsymbol{\alpha}^{(11)} + \frac{h_T^2}{2} \mathbf{S}_{03}\boldsymbol{\alpha}^{(22)} + \frac{h_T^2}{2} \mathbf{S}_{12}\boldsymbol{\alpha}^{(12)} + o_p(h_T^2),\end{aligned}$$

其中 $\mathbf{S}_{mn}(s, u)$ 简写成 $\mathbf{S}_{mn}$, $\boldsymbol{\alpha}^{(i)}(s, u)$ 和 $\boldsymbol{\alpha}^{(ij)}(s, u)$ 分别简写成 $\boldsymbol{\alpha}^{(i)}$ 和 $\boldsymbol{\alpha}^{(ij)}$ (下同). 故可以得到

$$\mathbf{T}_T - \mathbf{T}_T^* = \mathbf{S}_T \mathbf{H}_T \boldsymbol{\lambda} + \frac{h_T^2}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{20} & \mathbf{S}_{02} & \mathbf{S}_{11} \\ \mathbf{S}_{30} & \mathbf{S}_{12} & \mathbf{S}_{21} \\ \mathbf{S}_{21} & \mathbf{S}_{03} & \mathbf{S}_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}^{(11)} \\ \boldsymbol{\alpha}^{(22)} \\ 2\boldsymbol{\alpha}^{(12)} \end{pmatrix} + o_p(h_T^2),$$

且

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_T(\hat{\boldsymbol{\lambda}} - \boldsymbol{\lambda}) &= \mathbf{S}_T^{-1} \mathbf{T}_T^* + \frac{h_T^2}{2} \mathbf{S}_T^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{20} & \mathbf{S}_{02} & \mathbf{S}_{11} \\ \mathbf{S}_{30} & \mathbf{S}_{12} & \mathbf{S}_{21} \\ \mathbf{S}_{21} & \mathbf{S}_{03} & \mathbf{S}_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}^{(11)} \\ \boldsymbol{\alpha}^{(22)} \\ 2\boldsymbol{\alpha}^{(12)} \end{pmatrix} + o_p(h_T^2) \\ &= f^{-1}(s, u) \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Omega}^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \kappa_2^{-1} \boldsymbol{\Omega}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \kappa_2^{-1} \boldsymbol{\Omega}^{-1} \end{pmatrix} \mathbf{T}_T^* + \frac{\kappa_2 h_T^2}{2} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}^{(11)} + \boldsymbol{\alpha}^{(22)} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + o_p(h_T^2).\end{aligned}$$

那么, 估计的偏差是显然存在的, 见上式右边第二项. 为了研究估计随机部分的性质, 我们仅给出 $\mathbf{T}_T^*$ 的渐近性质. $\mathbf{T}_T^*$ 是渐近正态的, 其证明利用一般的块 (blocking) 技巧, 与文献 [23, 定理 4.3] 中的证明是类似的. 因为 $E(\mathbf{T}_T^*) = \mathbf{0}$, 所以仅需要计算 $\mathbf{T}_T^*$ 的协方差.

因为 $\text{Var}(\mathbf{T}_{00}^*) = \text{Var}(\sum_{t=1}^T \mathbf{x}_{t,T} \varepsilon_{t,T} K_{h_T}(t_T - s) K_{h_T}(u_{t,T} - u) / T)$, 由一些常规计算, 可以得到

$$\begin{aligned}\text{Var}(\mathbf{T}_{00}^*) &= \frac{1}{T^2} \sum_{t=1}^T K_{h_T}^2(t_T - s) \text{Var}(\mathbf{x}_{t,T} \varepsilon_{t,T} K_{h_T}(u_{t,T} - u)) \\ &\quad + \frac{1}{T^2} \sum_{t_1 \neq t_2} \text{Cov} \left(\mathbf{x}_{t_1,T} \varepsilon_{t_1,T} K_{h_T} \left(\frac{t_1}{T} - s \right) K_{h_T}(u_{t_1,T} - u), \right. \\ &\quad \left. \mathbf{x}_{t_2,T} \varepsilon_{t_2,T} K_{h_T} \left(\frac{t_2}{T} - s \right) K_{h_T}(u_{t_2,T} - u) \right) \\ &= \frac{1}{T^2} \sum_{t=1}^T K_{h_T}^2(t_T - s) E(\mathbf{x}_{t,T} \mathbf{x}_{t,T}^\top \varepsilon_{t,T}^2 K_{h_T}^2(u_{t,T} - u)) + o(1) \\ &= \frac{1}{T^2} \sum_{t=1}^T K_{h_T}^2(t_T - s) E(\mathbf{x}_{t,T} \mathbf{x}_{t,T}^\top K_{h_T}^2(u_{t,T} - u) E(\varepsilon_{t,T}^2 | \mathbf{x}_{t,T}, u_{t,T})) + o(1) \\ &= \frac{1}{T^2} \sum_{t=1}^T K_{h_T}^2(t_T - s) E(\mathbf{x}_{t,T} \mathbf{x}_{t,T}^\top K_{h_T}^2(u_{t,T} - u) \sigma^2(t_T, \mathbf{x}_{t,T}, u_{t,T})) + o(1) \\ &= \frac{1}{T^2} \sum_{t=1}^T K_{h_T}^2(t_T - s) E(\boldsymbol{\Omega}^*(t_T, u_{t,T}) K_{h_T}^2(u_{t,T} - u)) + o(1) \\ &= \frac{1}{T^2} \sum_{t=1}^T K_{h_T}^2(t_T - s) E(K_{h_T}^2(u_t(t_T) - u) \boldsymbol{\Omega}^*(t_T, u_t(t_T))) + o(1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{T^2} \sum_{t=1}^T K_{h_T}^2(t_T - s) \int K_{h_T}^2(\mu - u) \boldsymbol{\Omega}^*(t_T, \mu) f(t_T, \mu) d\mu + o(1) \\
&= \frac{1}{T^2 h_T} \sum_{t=1}^T K_{h_T}^2(t_T - s) \nu \boldsymbol{\Omega}^*(t_T, u) f(t_T, u) + o(1) \\
&= \frac{1}{T h_T^2} \nu_0^2 \boldsymbol{\Omega}^*(s, u) f(s, u) + o(1).
\end{aligned}$$

相似地, 我们可以证明

$$\begin{aligned}
\text{Var}(\mathbf{T}_{10}^*) &= T^{-1} h_T^{-2} \nu_0 \nu_2 \boldsymbol{\Omega}^*(s, u) f(s, u) + o(1), \\
\text{Var}(\mathbf{T}_{01}^*) &= T^{-1} h_T^{-2} \nu_0 \nu_2 \boldsymbol{\Omega}^*(s, u) f(s, u) + o(1), \\
\text{Cov}(\mathbf{T}_{00}^*, \mathbf{T}_{10}^*) &= o(1), \quad \text{Cov}(\mathbf{T}_{00}^*, \mathbf{T}_{01}^*) = o(1), \quad \text{Cov}(\mathbf{T}_{10}^*, \mathbf{T}_{01}^*) = o(1).
\end{aligned}$$

因此, 有

$$\text{Var}(\mathbf{T}_T^*) = \frac{\nu_0 f(s, u)}{T h_T^2} \text{diag}(\nu_0, \nu_2, \nu_2) \otimes \boldsymbol{\Omega}^*(s, u) + o(1)$$

和

$$\text{Var}(\hat{\boldsymbol{\lambda}} - \boldsymbol{\lambda}) = \frac{\nu_0}{T h_T^2 f(s, u)} \text{diag}\left(\nu_0, \frac{\kappa_2^{-2} \nu_2}{h_T^2}, \frac{\kappa_2^{-2} \nu_2}{h_T^2}\right) \otimes (\boldsymbol{\Omega}^{-1}(s, u) \boldsymbol{\Omega}^*(s, u) \boldsymbol{\Omega}^{-1}(s, u)) + o(1).$$

从而, 当 $T \rightarrow \infty$ 时, $\sqrt{T} h_T \mathbf{H}_T(\hat{\boldsymbol{\lambda}} - \boldsymbol{\lambda}) \xrightarrow{d} N(\mu(s, u), \Sigma(s, u))$. $\square$

4 检验系数函数的时不变性

模型 (1.2) 中的系数向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 是一个二元函数, 随时间变化. 一个显然的问题是, 若协变量的效应确实与时间无关, 则模型 (1.2) 可能存在模型假定错误问题. 因此, 本节将对向量函数 $\boldsymbol{\alpha}_S(s, u) = (\alpha_i)_{i \in S}$ ($S \subseteq \{1, \dots, p\}$) 进行假设检验, 判断其是否是时不变的. 模型原假设可以表示为

$$H_0: \boldsymbol{\alpha}_S(s, \cdot) = \boldsymbol{\alpha}_S(v, \cdot) \quad \pi\text{-a.s.}, \quad \text{对所有的 } s, v \in I \subseteq [0, 1],$$

其中 $\pi(\cdot)$ 是加权函数, I 是 $(0, 1)$ 中的闭子集. 可以等价地写为

$$H_0: \int_{I^2} \left\{ \int \|\boldsymbol{\alpha}_S(s, u) - \boldsymbol{\alpha}_S(v, u)\|^2 \pi(u) du \right\} ds dv = 0, \quad (4.1)$$

vs.

$$H_1: \int_{I^2} \left\{ \int \|\boldsymbol{\alpha}_S(s, u) - \boldsymbol{\alpha}_S(v, u)\|^2 \pi(u) du \right\} ds dv > 0, \quad (4.2)$$

其中 $I^2 = I \times I$.

为了研究检验功效, 首先研究局部备择 (local alternatives) 假设. 为了表示备择假设形式, 定义

$$\boldsymbol{\alpha}_S(s, u) = \mathbf{a}_S(u) + c_T \boldsymbol{\delta}(s, u), \quad (4.3)$$

其中 $c_T \rightarrow 0$, 函数 $\delta(s, u)$ 是连续的, α 满足原假设. 那么, 假设备择假设表示成

$$H_{1,T}: \int_{I^2} \left\{ \int \|\alpha_S(s, u) - \alpha_S(v, u)\|^2 \pi(u) du \right\} ds dv = c_T^2 \Delta_I,$$

其中

$$\Delta_I = \int_{I^2} \left\{ \int \|\delta(s, u) - \delta(v, u)\|^2 \pi(u) du \right\} ds dv.$$

值得注意的是, 当 $T \rightarrow \infty$ 时, 假设 $H_{1,T}$ 近似于 H_0 .

对于假设检验 (4.1) 和 (4.2), 以及局部备择假设 (4.3), 定义检验统计量 Ψ_T 为

$$\Psi_T = h_T T \int_{I^2} \left\{ \int \|\hat{\alpha}_S(s, u) - \hat{\alpha}_S(v, u)\|^2 \pi(u) du \right\} ds dv, \quad (4.4)$$

其中向量 $\hat{\alpha}_S(s, u)$ 是向量 $\hat{\lambda}_{\text{LLk}}(s, u)$ 的部分元组成的向量, 即存在矩阵 $A = (I_S, \mathbf{0}_{p \times 2p})$, 使得 $\hat{\alpha}_S(s, u) = A \hat{\lambda}_{\text{LLk}}(s, u)$. 为了简单起见, 假设加权函数 π 的定义域是有界的.

为了研究检验统计量 Ψ_T 分别在假设 H_0 、 H_1 和 $H_{1,T}$ 下的渐近性质, 记 $\text{tr}(\cdot)$ 为矩阵的迹, 我们还需要下列记号:

$$\begin{aligned} \lambda_I &= \int \omega(s) ds, \quad \omega(s) = 1_{s \in I}, \quad \bar{\alpha}(u) = \lambda_I^{-1} \int \alpha(s, u) \omega(s) ds, \\ \Lambda_1 &= \lambda_I h_T^{-1} \int \cdots \int \text{tr}\{f^{-2}(s, u) K^2(\eta) \Omega^*(h_T \eta + s, z) \Omega^{-1}(s, u) I_S \Omega^{-1}(s, u) K^2(\phi) \pi(u) f(h_T \eta \\ &\quad + s, h_T \phi + u)\} \cdot \omega(s) d\eta d\phi duds, \\ \Lambda_2 &= \int \cdots \int f^{-1}(s, u) f^{-1}(s - h_T \gamma, u) \text{tr}\{\Omega^*(s + h_T \zeta, u + h_T z) f(s + h_T \zeta, u + h_T z) K(\zeta) K(\gamma + \eta) \\ &\quad \times \Omega^{-1}(s, u) I_S \Omega^{-1}(s - h_T \gamma, u) K^2(z)\} \pi(u) \omega(u) \omega(s - h_T \gamma) d\zeta dz duds d\gamma, \\ \Lambda_3 &= h_T^{-2} \int \cdots \int K^2(\xi) K^2(\eta) f(s + h_T \xi, u + h_T \eta) \|\bar{\alpha}(u + h_T \eta) - \bar{\alpha}(u)\|^2 \frac{\pi(u) \omega(s)}{f^2(s, u)} duds d\xi d\eta, \\ \Lambda_4 &= \int \cdots \int K^2(s) K(\xi) K(\xi + \eta) f(s + h_T \xi, u + h_T z) \|\bar{\alpha}(u + h_T z) - \bar{\alpha}(u)\|^2 \\ &\quad \times \frac{\pi(u) \omega(s) \omega(s - h_T \eta)}{f(s, u) f(s - h_T \eta, u)} duds d\xi d\eta dz, \\ V &= 2\lambda_I^2 \text{tr} \left(\iint \Omega^*(s, u) \Omega^{-1}(s, u) I_S \Omega^{-1}(s, u) \Omega^*(s, u) \Omega^{-1}(s, u) I_S \Omega^{-1}(s, u) \frac{\pi^2(u) \omega(s)}{f^2(u, s)} duds \right) \\ &\quad \times \left\{ \int \left(\int \prod_{i=0}^1 K(z^i) K(v^i + z^i) dz \right)^2 dv \right\}, \\ \Lambda_T &= 2(\Lambda_1 - \Lambda_2 + \lambda_I \Lambda_3 - \Lambda_4). \end{aligned}$$

定理 4.1 给出了检验统计量 Ψ_T 分别在模型假设 (4.1) 和 (4.2) 以及局部备择假设 (4.3) 下的渐近性质.

定理 4.1 假设 (A1)–(A11) 成立, 窗宽 h_T 满足: 存在一个很小的数 $\varrho > 0$ 和一个正数 $C > 0$, 使得 $CT^{-(1/4-\varrho)} \leq h_T \leq CT^{-(1/5+\varrho)}$, 那么, 当 $T \rightarrow \infty$ 时,

(1) 在假设 H_0 下, $\Psi_T - \Lambda_T \xrightarrow{d} N(0, 4V)$.

(2) 在假设 H_1 下,

$$(h_T T)^{-1} (\Psi_T - \Lambda_T) \xrightarrow{P} \int_I \int_I \left\{ \int \|\alpha(s, u) - \alpha(v, u)\|^2 \pi(u) du \right\} ds dv > 0.$$

(3) 令 $c_T = (h_T T)^{-1/2}$. 在假设 $H_{1,T}$ 下, $\Psi_T - \Lambda_T - \Delta_T \xrightarrow{d} N(0, 4V)$.

证明 根据定理 3.2、3.3 和文献 [32, 定理 4.1、4.2 和 4.4], 我们即可得到所要结果. $\square$

由于参数 Λ_T 和 V 在有限样本下是未知的, 因此, 我们利用文献 [32] 中的原始自助法 (wild bootstrap) 得到检验统计量 Ψ_T 的分布.

5 模拟研究与实例分析

5.1 模拟研究

本节通过一些模拟研究来说明我们的估计方法在有限样本下的表现. 具体考虑下面的时变指标模型:

$$y_{t,T} = x_{t1,T} \alpha_1(t_T, \mathbf{z}_{t,T}^\top \boldsymbol{\theta}) + x_{t2,T} \alpha_2(t_T, \mathbf{z}_{t,T}^\top \boldsymbol{\theta}) + \epsilon_t,$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_{t,T} &= (z_{t1,T}, z_{t2,T}, z_{t3,T})^\top, \quad \alpha_1(x, y) = 2(1 + c \sin(0.5\pi x)) \cos(0.5\pi y), \\ \alpha_2(x, y) &= (1 + c \cos(\pi x)) y e^{-y^2/5}, \end{aligned}$$

ϵ_t 为独立同分布的标准正态随机变量, $\boldsymbol{\theta}^\top = (1, 2, -3)/\sqrt{14}$.

模型中局部平稳变量由下面的过程产生:

$$x_{ti,T} = m_i(t_T, x_{(t-1)i,T}) + \xi_{ti}, \quad z_{tj,T} = g_j(t_T, z_{(t-1)j,T}) + \zeta_{tj}, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2, 3,$$

其中

$$\begin{aligned} m_1(x, y) &= \arctan(30(x - 0.5)) \cos(0.5\pi y), \\ m_2(x, y) &= 2(-0.5 + (x - 0.5) \cdot 1_{x>0.5}) \cos(0.25\pi y), \\ g_1(x, y) &= (2 + \arctan(75(x - 0.5))) \sin(0.5\pi y), \\ g_2(x, y) &= (2.3 \cdot 1_{x>0.5} + 1.75 \cdot 1_{x \leq 0.5}) \sin(0.75\pi y), \\ g_3(x, y) &= (-0.5 + (x - 0.5) \cdot 1_{x>0.5}) y, \end{aligned}$$

ξ_{ti} 和 ζ_{ti} 均为独立同分布的标准正态随机变量.

首先, 考虑 $c = 1$ 时的情形. 模拟的时间长度 $T = (400, 800, 1000)$, 并且对于每个时间长度 T , 模拟次数为 $N = 500$, 其中 B 样条自由度为 3 阶, 节点个数为 5 个. 局部线性用到的核函数为 Epanechnikov 核函数, 窗宽为 $(h_t, h_u) = 0.5(T^{-1/6}, (q_{0.05}(u_{t,T}) - q_{0.95}(u_{t,T})) \times T^{-1/6})$, $u_{t,T} = \mathbf{z}_{t,T}^\top \hat{\boldsymbol{\theta}}$. 模拟结果见表 1, 其中 Bias、SD (standard deviation) 和 CP (coverage probability) 分别为参数 $\boldsymbol{\theta}$ 的估计 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 的偏差 (bias)、样本标准差 (SD) 和 95% 置信区间覆盖概率 (CP), 其中 CP 通过 bootstrap 方法得到, bootstrap 次数为 $B = 500$. 此外, RASE 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 第二步估计 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\text{LLk}}$ 的均方误差根. 均方误差根的定义为

$$\text{RASE} = \sqrt{\sum_{j=1}^p \text{RASE}_j^2},$$

其中

$$\text{RASE}_j = \left(\frac{1}{n_{\text{grid}}^2} \sum_{k_1=1}^{n_{\text{grid}}} \sum_{k_2=1}^{n_{\text{grid}}} (\hat{a}_j(s_{k_1}, u_{k_2}) - a_j(s_k, u_k))^2 \right)^{1/2},$$

集合 $\{(s_{k_1}, u_{k_2}), k_1, k_2 = 1, \dots, n_{\text{grid}}\}$ 是平面 $[0.1, 0.9] \times [-2, 2]$ 规则网格中的均匀点集, 且 $n_{\text{grid}} = 50$. 此外, 图 2 和 3 分别给出 $T = 800$ 时参数估计 $\hat{\theta}$ 的偏差的直方图以及某次模拟的非参函数估计曲面 $\hat{\lambda}_{\text{LLk}}$.

从表 1 可以看出, 参数估计 $\hat{\theta}$ 的偏差都很小, 样本标准差随着时间长度的增长而减小, 并且 CP 均近似等于 95%, 从参数检验的方式验证了估计的优良性质. 系数函数估计 $\hat{\lambda}_{\text{LLk}}$ 的均方误差根和标准差同样也是随着时间长度 T 的增长而减小的. 此外, 图 2 直观地描述了 $\hat{\theta}$ 的渐近分布呈正态且均值位于真实值处, 而图 3 从直观上说明了估计 $\hat{\lambda}_{\text{LLk}}$ 与真实曲面近似.

其次, 考虑 $c = 0$ 时的情形. 显然, 此时系数函数 $\alpha_1(s, u)$ 和 $\alpha_2(s, u)$ 均是时不变的, 退化为一元函数, 且时间效应随着 c 的增大而变得明显. 考虑时间长度 $T = 800$, 采用上节中的检验方法检验系数向量函数 α 是否时不变, 我们按如下的步骤模拟不同 c 值下的检验功效函数: 令 $\Psi_{T,n}$ 为第 n 次模拟样本得到的检验统计量, 进一步地, 令 $\Psi_{T,n,b}^*$ 为根据第 n 次模拟样本产生的第 b 个 bootstrap 样本得到的 bootstrap 检验统计量. 根据第 n 次模拟得到 B 个 bootstrap 检验统计量值 $\{\Psi_{T,n,b}^*\}_{b=1}^B$, 我们可以得到经验分布 F_n^* . 那么, 固定名义水平 α , 对每次模拟样本 n , 计算分布 F_n^* 的 $1 - \alpha$ 分位数 $q_{\alpha,n}^*$, 最后计算对应于名义 α 的实际水平

$$\sum_{n=1}^N 1_{S_{T,n} > q_{\alpha,n}^*}.$$

所得到的检验功效函数见图 4. 从图中可以看出, 当 $c = 0$ 时, 即原假设成立时, 无法拒绝原假设; 而当 c 增大时, 即原假设错误时, 拒绝假设的可能性变大. 从而说明了检验方法的可行性.

表 1 模型估计的样本偏差、标准差、覆盖概率、均方误差根和标准差

T	$\hat{\theta}_1$			$\hat{\theta}_2$			$\hat{\theta}_3$			$\hat{\lambda}_{1,\text{LLk}}$		$\hat{\lambda}_{2,\text{LLk}}$	
	Bias	SD	CP	Bias	SD	CP	Bias	SD	CP	RASE	SD	RASE	SD
400	0.0006	0.0104	0.9420	0.0064	0.0212	0.9400	0.0038	0.0242	0.9440	0.4158	0.1342	0.0794	0.0294
800	-0.0013	0.0096	0.9460	-0.0036	0.0174	0.9480	-0.0012	0.0082	0.9480	0.2542	0.0964	0.0535	0.0148
1000	0.0009	0.0064	0.9500	0.0042	0.0102	0.9480	-0.0024	0.0052	0.9520	0.1362	0.0872	0.0150	0.0102

图 2 参数估计偏差的直方图, $T = 800$

图 3 系数函数 α 及其估计 $\hat{\alpha}_{LLK}$ 的曲面图. (a) 真实函数 α_1 的曲面; (b) 估计 $\hat{\alpha}_{1,LLK}$ 的曲面; (c) 真实函数 α_2 的曲面; (d) 估计 $\hat{\alpha}_{2,LLK}$ 的曲面

图 4 不同常数 c 下模型估计的检验功效

5.2 实例分析

在本例中, 我们将采用本文的方法对 1700 年至 1994 年间太阳黑子每年活动次数 (x_t) (Wolf's sunspot number) 进行建模. 此数据集被许多学者用来研究不平稳数据下的各种非线性建模, 可参见文献 [4, 12, 19, 21, 33] 等. 图 5 展示了该数据集的时序图. 此外, 我们采用 KPSS 检验该数据的平稳性, 其 p 值为 0.019, 在显著水平为 0.05 下, 可以拒绝原假设, 即该数据不是平稳的.

因此以上提到的各文献均是采用传统的处理非平稳数据方法, 将数据经过变换 $y_t = 2(\sqrt{1+x_t}-1)$ 得到平稳数据后再建模. Tong^[21] 采用门限自回归 (threshold autoregressive, TAR) 模型并选取 y_{t-8} 为门限变量. Chen 和 Tsay^[19] 采用了多种非线性检验方法确定了数据集的非线性结构, 从而对数据集采用了函数系数自回归 (functional coefficient autoregressive, FAR) 模型, 并通过检验显示滞后 3 阶和滞后 8 阶均可作为门限参数. 此外, 除去 y_{t-3} 以外, y_{t-1} 、 y_{t-2} 和 y_{t-8} 均与 y_t 具有很强的相关性. 因此, Chen 和 Tsay^[19] 最终采用 y_{t-3} 作为门限变量, y_{t-1} 、 y_{t-2} 和 y_{t-8} 作为解释变量建立 FAR 模型. 模型选取门限值为 10.5 从而分为两个区间, 并且在上门限区间加入 y_{t-6} 来提高拟合效果.

根据文献 [19] 的分析结果: 滞后 3 阶和滞后 8 阶均可作为门限参数, Xia 和 Li^[4] 将滞后 3 阶和滞后 8 阶均选作门限参数并构造“单指标” $g(\theta, y_{t-3}, y_{t-8}) = \cos(\theta)y_{t-3} + \sin(\theta)y_{t-8}$, 同时选取 y_{t-1} 、 y_{t-2} 、 y_{t-3} 和 y_{t-8} 为解释变量从而建立单指标系数 (single-index functional coefficient, SIFC) 模型. 分析显示 SIFC 模型预测效果明显优于 TAR 模型和 FAR 模型 (参见文献 [19]).

综上所述, 本文借鉴 Xia 和 Li^[4] 的单指标系数 (SIFC) 模型中变量的设定, 选取 $x_{t-3,T}$ 和 $x_{t-8,T}$ 为指标变量, 与 $x_{t-1,T}$ 、 $x_{t-2,T}$ 、 $x_{t-3,T}$ 和 $x_{t-8,T}$ 建立回归模型. 与上述的所有模型不同之处在于, 本文将在原始数据上建模. 从而更容易理解且相对准确. 在此, 我们建立如下时变指标系数模型:

$$\begin{aligned} x_{t,T} = & \alpha_0(t_T, \mathbf{z}^\top \boldsymbol{\theta}) + \alpha_1(t_T, \mathbf{z}^\top \boldsymbol{\theta})x_{t-1,T} + \alpha_2(t_T, \mathbf{z}^\top \boldsymbol{\theta})x_{t-2,T} + \alpha_3(t_T, \mathbf{z}^\top \boldsymbol{\theta})x_{t-3,T} \\ & + \alpha_4(t_T, \mathbf{z}^\top \boldsymbol{\theta})x_{t-8,T} + \epsilon_t, \end{aligned} \quad (5.1)$$

其中 $\mathbf{z}_{t,T} = (x_{t-3,T}, x_{t-8,T})^\top$.

首先, 检验系数函数是否时不变, 其结果见表 2. 从检验结果, 我们可以认为在显著性水平 0.1 下, 拒绝原假设, 即系数函数都是随时间变化的. 因此在时变单指标变系数模型 (5.1) 下, 应用本文中的估计方法, 得到参数估计 $\hat{\boldsymbol{\theta}} = (0.67, 0.74)^\top$, 且系数函数向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的估计见图 6. 从图中可以直观地发现, 系数函数是与时间有关的.

图 5 Wolf 太阳黑子数

表 2 检验系数函数时不变

系数	α_0	α_1	α_2	α_3	α_4
p 值	0.02	0.04	0.06	0.08	0.03

图 6 Wolf 太阳黑子的系数函数估计曲面. (a) α_0 的估计曲面; (b) α_1 的估计曲面; (c) α_2 的估计曲面; (d) α_3 的估计曲面; (e) α_4 的估计曲面

6 结论

本文基于局部平稳数据的特征提出了一个新的半参模型—时变单指标变系数模型, 我们采用二步估计思想提出了该模型中参数和非参数系数函数的估计方法, 研究了这些估计量的渐近性质. 对于模型中的连接函数是否具有时不变性质, 我们设计了一种模型假设检验方法, 构造了相应的检验统计量并证明了它的渐近性质. 最后, 我们进行了模拟和实例分析, 其有限样本模拟结果表明我们所提估计和检验方法是有效和可行的.

致谢 衷心感谢主编、编委和两位审稿人的宝贵意见, 使得本文有了大幅的提升并得以发表.

参考文献

- 1 Hastie T, Tibshirani R. Varying-coefficient models. *J R Stat Soc Ser B Stat Methodol*, 1993, 55: 757–779
- 2 Ichimura H. Semiparametric least squares (SLS) and weighted SLS estimation of single-index models. *J Econometrics*, 1993, 58: 71–120
- 3 Carroll R J, Fan J, Gijbels I, et al. Generalized partially linear single-index models. *J Amer Statist Assoc*, 1997, 92: 477–489
- 4 Xia Y, Li W K. On single-index coefficient regression models. *J Amer Statist Assoc*, 1999, 94: 1275–1285
- 5 Liang H, Liu X, Li R, et al. Estimation and testing for partially linear single-index models. *Ann Statist*, 2010, 38: 3811–3836
- 6 Chen J, Gao J, Li D. Estimation in single-index panel data models with heterogeneous link functions. *Econometric Rev*, 2013, 32: 928–955
- 7 Cui X, Härdle W K, Zhu L. The EFM approach for single-index models. *Ann Statist*, 2011, 39: 1658–1688
- 8 Chang Z, Xue L, Zhu L. On an asymptotically more efficient estimation of the single-index model. *J Multivariate Anal*, 2010, 101: 1898–1901
- 9 Härdle W K, Hall P, Ichimura H. Optimal smoothing in single-index models. *Ann Statist*, 1993, 21: 157–178
- 10 Dong C, Gao J, Tjøstheim D. Estimation for single-index and partially linear single-index integrated models. *Ann Statist*, 2016, 44: 425–453
- 11 Huang Z, Zhang R. Efficient empirical-likelihood-based inferences for the single-index model. *J Multivariate Anal*, 2011, 102: 937–947
- 12 Cai Z, Fan J, Yao Q. Functional-coefficient regression models for nonlinear time series. *J Amer Statist Assoc*, 2000, 95: 941–956
- 13 Cai Z, Fan J, Li R. Efficient estimation and inferences for varying-coefficient models. *J Amer Statist Assoc*, 2000, 95: 888–902
- 14 Cai Z, Xu X. Nonparametric quantile estimations for dynamic smooth coefficient models. *J Amer Statist Assoc*, 2009, 104: 371–383
- 15 Fan J, Yao Q, Cai Z. Adaptive varying-coefficient linear models. *J R Stat Soc Ser B Stat Methodol*, 2003, 65: 57–80
- 16 Lu Z, Tjøstheim D, Yao Q. Adaptive varying-coefficient linear models for stochastic processes: Asymptotic theory. *Statist Sinica*, 2007, 17: 177–198
- 17 Huang Z, Pang Z, Lin B, et al. Model structure selection in single-index-coefficient regression models. *J Multivariate Anal*, 2014, 125: 159–175
- 18 Ma S, Song P X K. Varying index coefficient models. *J Amer Statist Assoc*, 2015, 110: 341–356
- 19 Chen R, Tsay R S. Functional-coefficient autoregressive models. *J Amer Statist Assoc*, 1993, 88: 298–308
- 20 Teräsvirta T. Specification, estimation, and evaluation of smooth transition autoregressive models. *J Amer Statist Assoc*, 1994, 89: 208–218
- 21 Tong H. *Non-Linear Time Series: A Dynamical System Approach*. Oxford: Oxford University Press, 1990
- 22 Dahlhaus R. Asymptotic statistical inference for nonstationary processes with evolutionary spectra. In: *Athens Conference on Applied Probability and Time Series Analysis*. New York: Springer, 1996, 145–159
- 23 Vogt M. Nonparametric regression for locally stationary time series. *Ann Statist*, 2012, 40: 2601–2633
- 24 Van Bellegem S, Dahlhaus R. Semiparametric estimation by model selection for locally stationary processes. *J R Stat Soc Ser B Stat Methodol*, 2006, 68: 721–746
- 25 Pei Y, Huang T, You J. Nonparametric fixed effects model for panel data with locally stationary regressors. *J Econometrics*, 2018, 202: 286–305
- 26 Wang L, Yang L. Spline-backfitted kernel smoothing of nonlinear additive autoregression model. *Ann Statist*, 2007, 35: 2474–2503
- 27 Ma S, Song Q, Wang L. Simultaneous variable selection and estimation in semiparametric modeling of longitudinal/clustered data. *Bernoulli*, 2013, 19: 252–274
- 28 Wang L, Yang L. Spline estimation of single-index models. *Statist Sinica*, 2009, 19: 765–783
- 29 Wang L, Liu X, Liang H, et al. Estimation and variable selection for generalized additive partial linear models. *Ann Statist*, 2011, 39: 1827–1851
- 30 Fan J, Gijbels I. *Local Polynomial Modelling and Its Applications*. London: Chapman and Hall, 1996
- 31 He X, Shi P. Bivariate tensor-product B-splines in a partly linear model. *J Multivariate Anal*, 1996, 58: 162–181
- 32 Vogt M. Testing for structural change in time-varying nonparametric regression models. *Econom Theory*, 2015, 31: 811–859
- 33 Xue L, Yang L. Estimation of semi-parametric additive coefficient model. *J Statist Plann Inference*, 2006, 136: 2506–2534

Statistical inference of time-varying single-index coefficient models for locally stationary time series

Tao Li, Jianhua Hu, Jinhong You & Liangyuan Liu

Abstract In this paper, we propose a novel index coefficient model for locally stationary time series data. Through a two-stage procedure, the estimation is derived and the asymptotic properties of the estimators are given. Moreover, we develop a test statistic for testing if the coefficient functions are time invariant, and derive the asymptotic distribution of the test statistic. A simulation study is conducted to assess the finite sample performances. Finally, a real data analysis is provided. The nice final sample simulation performances illustrate the efficiency of our proposed model and estimation.

Keywords locally stationary, single-index coefficient model, two-stage procedure, tensor B-spline, kernel estimation

MSC(2010) 62G08, 62J02

doi: 10.1360/N012018-00137