一类连续状态非线性分枝过程的离散逼近

献给王梓坤教授 90 华诞

李培森¹, 杨叙², 周晓文^{3*}

1. 中国人民大学数学科学研究院, 北京 100872;

2. 北方民族大学数学与信息科学学院, 银川 750021;

3. Department of Mathematics and Statistics, Concordia University, Montreal H3G 1M8, Canada

E-mail: peisenli@ruc.edu.cn, xuyang@mail.bnu.edu.cn, xiaowen.zhou@concordia.ca

收稿日期: 2018-05-24; 接受日期: 2018-12-10; 网络出版日期: 2019-02-25; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11771046, 11731012 和 11771018)、北方民族大学重大专项 (批准号: ZDZX201804)、宁夏高等学校一流学科建设 (批准号: NXYLXK2017B09) 和 Natural Sciences and Engineering Research Council of Canada (批准号: RGPIN-2016-06704) 资助项目

摘要 本文考虑一类连续状态非线性分枝过程. 直观上, 这是一类带竞争且分枝速率与状态相依的连续状态分枝过程. 我们可以用由 Brown 运动和 Poisson 随机测度驱动的随机微分方程的解来构造该类过程. 本文的主要结果是构造一系列离散状态 Markov 链, 并在较弱的条件下, 通过胎紧性结论以及构造无穷维乘积空间上的收敛序列的方法证明其在轨道空间上弱收敛于上述连续状态的非线性分枝过程.

关键词 分枝过程 非线性分枝 随机微分方程 胎紧性

MSC (2010) 主题分类 60J68, 60K37, 60H15

1 引言

1.1 连续状态非线性分枝过程

分枝过程是复杂系统随机演化的数学模型, 描述了群体繁衍、核子裂变和生化反应等自然现象共同的数学结构. 分枝过程的研究最早可追溯到法国学者 Bienaymé^[1] 和英国学者 Galton 和 Watson^[2] 的工作. 古典的分枝过程是离散状态的 Markov 过程, 其状态空间为 $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \dots\}$. 这方面有标准的参考文献 [3–5] 等. 离散状态分枝过程通常只适用于个体数量较少的系统的描述.

为了描述大量个体构成的复杂群体的演化情形, Feller^[6] 通过研究相关的重整化极限, 得到了以 $\mathbb{R}_+ := [0, \infty)$ 为状态空间的扩散过程, 此过程后来被称为 Feller 分枝扩散过程. 此后, 很多学者对这种模型进行了研究. 例如, Lamperti^[7,8] 研究了该过程的推广, 这被称为连续状态分枝过程.

英文引用格式: Li P S, Yang X, Zhou X W. The discrete approximation of a class of continuous-state nonlinear branching processes (in Chinese). Sci Sin Math, 2019, 49: 403–414, doi: 10.1360/N012018-00139

假设 $b \in \mathbb{R}$ 和 $\sigma \geq 0$ 为常数, π 为 $(0, \infty)$ 上 σ 有限测度且满足 $\int_0^\infty (z \wedge z^2) \pi(dz) < \infty$. 设 $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ 是一个带流的概率空间且满足通常假设, 再设 $\{W(dt, du) : t, u \geq 0\}$ 是强度为 $dt du$ 的 $(\mathcal{G}_t)$ Gauss 白噪声, $\{N(dt, dz, du) : t, z, u > 0\}$ 是强度为 $dt \pi(dz) du$ 的 $(\mathcal{G}_t)$ Poisson 随机测度, 其带补偿的 Poisson 随机测度记作 $\{\tilde{N}(dt, dz, du) : t, z, u > 0\}$. Dawson 和 Li^[9, 10] 证明了如下随机积分方程有唯一的非负强解:

$$X_t = x - b \int_0^t X_s ds + \sigma \int_0^t \int_0^{X_{s-}} W(ds, du) + \int_0^t \int_0^\infty \int_0^{X_{s-}} z \tilde{N}(ds, dz, du). \quad (1.1)$$

上述方程的解 $\{X_t : t \geq 0\}$ 是一个 Markov 过程, 它的转移半群 $(P_t)_{t \geq 0}$ 满足如下分枝性:

$$P_t(x + y, \cdot) = P_t(x, \cdot) * P_t(y, \cdot), \quad x, y \in \mathbb{R}_+. \quad (1.2)$$

所以, $\{X_t : t \geq 0\}$ 是一个连续状态分枝过程. 该性质意味着种群中不同个体的演化是相互独立的. 有关连续状态分枝过程的基本理论, 可参见专著 [11, 12] 中的有关章节及那里给出的参考文献.

在很多实际情形中, 上述分枝性 (1.2) 并不容易满足. 例如, 在某些应用模型中, 当粒子个体总数很大或者粒子处于高速运动中时, 不同个体间可能存在相互影响, 这导致生死速率可能会提高或降低, 且不能再由线性函数给出. 为了解决上述问题, 我们在文献 [13] 中考虑了连续状态非线性分枝过程. 直观上, 该过程是一类分枝速率依赖于当前人口的分枝过程. 令 γ_0 为 $\mathbb{R}_+$ 上可测函数, γ_i ($i = 1, 2$) 为 $\mathbb{R}_+$ 上非负可测函数. 首先给出本文的两条基本假设:

条件 1.1 对于 $i = 0, 1, 2$, 假设 $\gamma_i(0) = 0$. 对于 $i = 1, 2$ 和任意 $x \geq 0$, 假设 $\gamma_i(x) \geq 0$.

条件 1.2 假设 γ_i ($i = 0, 1, 2$) 满足局部 Lipschitz 条件, 即对于给定的有界闭区间 $A \subset (0, \infty)$, 存在常数 $C_A > 0$, 使得对任意 $x, y \in A$, 都有

$$|\gamma_i(x) - \gamma_i(y)| \leq C_A |x - y|, \quad i = 0, 1, 2.$$

如下的随机积分方程的非负解被称为连续状态非线性分枝过程:

$$X_t = X_0 + \int_0^t \gamma_0(X_s) ds + \int_0^t \int_0^{\gamma_1(X_{s-})} W(ds, du) + \int_0^t \int_0^\infty \int_0^{\gamma_2(X_{s-})} z \tilde{N}(ds, dz, du). \quad (1.3)$$

上述随机积分方程等价于

$$X_t = X_0 + \int_0^t \gamma_0(X_s) ds + \int_0^t \sqrt{\gamma_1(X_{s-})} dB_s + \int_0^t \int_0^\infty \int_0^{\gamma_2(X_{s-})} z \tilde{N}(ds, dz, du), \quad (1.4)$$

其中 $\{B_t : t \geq 0\}$ 是 $(\mathcal{G}_t)$ Brown 运动. 我们在文献 [13] 中已经证明, 在上面条件成立的情形下, (1.3) 和 (1.4) 有唯一的非负强解. 文献 [13] 讨论了这一类过程在有限时间内灭绝、爆炸以及无穷远点为流入边界的条件.

若在上述方程中 $\gamma_i(z) = c_i z^{\theta_0}$ ($i = 0, 1, 2$), 其中 $\theta_0 > 0$ 且 $c_i \geq 0$, 则上述方程的解称为多项式分枝过程 (参见文献 [14]), 这里参数 θ_0 刻画了交互作用的强度. 特别地, 当 $\theta_0 = 1$ 时, 该过程退化为古典连续状态分枝过程, 此时其满足分枝性 (1.2).

令 C_0^2 为 $\mathbb{R}_+$ 上二阶连续可导的有界支撑函数构成的集合, 则过程 X 的生成元可由下式给出:

$$Lf(x) = \gamma_0(x)f'(x) + \frac{1}{2}\gamma_1(x)f''(x) + \gamma_2(x) \int_0^\infty [f(x+y) - f(x) - yf'(x)]\pi(dy),$$

这里 $x \in \mathbb{R}_+$, $f \in C_0^2$.

令 $D([0, \infty), \mathbb{R}_+)$ 为 $[0, \infty)$ 上非负左极右连函数构成的集合. 令 Λ' 为从 $[0, \infty)$ 到其自身的单调增双射 λ 所构成的集合. 令 Λ 为 Λ' 子集, 对任意 $\lambda \in \Lambda$, 满足

$$\gamma(\lambda) := \operatorname{ess\,sup}_{t \geq 0} |\log \lambda(t)| = \sup_{t > s \geq 0} \left| \log \frac{\lambda(t) - \lambda(s)}{t - s} \right| < \infty.$$

对 $\xi, \eta \in D([0, \infty), \mathbb{R}_+)$, 定义

$$d(\xi, \eta) = \inf_{\lambda \in \Lambda} \left[\gamma(\lambda) \vee \int_0^\infty e^{-t} d(\xi, \eta, \lambda, s) ds \right] \wedge 1, \quad (1.5)$$

其中 $d(\xi, \eta, \lambda, s) = \sup_{t \geq 0} |\xi(t \wedge s) - \eta(\lambda(t) \wedge s)| \wedge 1$. 我们知道 d 是 $D([0, \infty), \mathbb{R}_+)$ 上的距离, 它决定了 $D([0, \infty), \mathbb{R}_+)$ 上的 Skorokhod 拓扑. 另外, 空间 $(D([0, \infty), \mathbb{R}_+), d)$ 完备可分, 参见文献 [15, 第 121 页].

1.2 离散状态非线性分枝过程

我们将要构造一系列离散状态的非线性分枝过程, 使其在 $(D([0, \infty), \mathbb{R}_+), d)$ 中弱收敛于由 (1.3) 或 (1.4) 定义的连续状态非线性分枝过程. 对于离散状态的非线性分枝过程的一般结论可以参见文献 [16–19]. 对任意正整数 n , 如下定义 $\{-1/n, 1/n\}$ 上的概率测度 $m_1^{(n)}$:

$$m_1^{(n)}\left(\left\{\frac{1}{n}\right\}\right) = m_1^{(n)}\left(\left\{-\frac{1}{n}\right\}\right) = \frac{1}{2},$$

$m_2^{(n)}$ 是另一支撑在 $A_n := \{-\frac{1}{n}, 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots\}$ 上的概率测度, 使得

$$\int_{A_n} y m_2^{(n)}(dy) = 0. \quad (1.6)$$

令 $\bar{m}_2^{(n)}$ 为 $m_2^{(n)}$ 在 $\mathbb{N}/n := \{0, 1/n, 2/n, \dots\}$ 上的限制, $M_0^{(n)}(ds, dz, du)$ 是强度为 $ds du \delta_{\frac{1}{n}}(dz)$ 的 Poisson 随机测度, $M_i^{(n)}(ds, dz, du)$ 是强度为 $ds m_i^{(n)}(dz) du$ ($i = 1, 2$) 的 Poisson 随机测度. 假定上述随机测度是相互独立的. 固定 $x \geq 0$, 令 $X^{(n)} = \{X_t^{(n)} : t \geq 0\}$ 为下述方程的唯一强解:

$$\begin{aligned} X_t^{(n)} = & \frac{[nx]}{n} + \int_0^t \int_0^{n\gamma_0^+(X_{s-}^{(n)})} \int_{\{1/n\}} z M_0^{(n)}(ds, du, dz) \\ & - \int_0^t \int_0^{(n\gamma_0^-(X_{s-}^{(n)}))} \int_{\{1/n\}} z M_0^{(n)}(ds, du, dz) \\ & + \int_0^t \int_0^{n^2\gamma_1(X_{s-}^{(n)})} \int_{\{-1/n, 1/n\}} z M_1^{(n)}(ds, du, dz) \\ & + \int_0^t \int_0^{r_n\gamma_2(X_{s-}^{(n)})} \int_{A_n} z M_2^{(n)}(ds, du, dz), \end{aligned} \quad (1.7)$$

其中 $[nx]$ 表示 nx 的整数部分, γ_0^+ 和 γ_0^- 分别表示 γ_0 的正部和负部. 由文献 [18, 性质 2.1] 的证明可知, 上面的方程存在唯一的非负强解. 直观上, 当个体间存在竞争关系时, 物种的人口发展可由上述过程刻画. 因此, 该过程可以看作取值在 $\mathbb{N}/n$ 中的离散状态非线性分枝过程.

1.3 重整化极限定理

我们给出本文的第三条基本假定.

条件 1.3 存在正序列 r_n 和支撑在 $A_n := \{-1/n, 0, 1/n, 2/n, \dots\}$ 上的概率测度序列 $m_2^{(n)}$ 使得

(1) 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $r_n m_2^{(n)}(\{-1/n\})/n^2 \rightarrow 0$;

(2) $\int_{A_n} z m_2^{(n)}(dz) = 0$;

(3) $r_n(z \wedge z^2) \bar{m}_2^{(n)}(dz)$ 为有限测度且弱收敛于 $(z \wedge z^2)\pi(dz)$, 其中 $\bar{m}_2^{(n)}(dz)$ 是 $m_2^{(n)}(dz)$ 在 $\mathbb{N}/n := \{0, 1/n, 2/n, \dots\}$ 上的限制.

下面是本文的主要定理.

定理 1.1 假设条件 1.1–1.3 成立, 则当 $n \rightarrow \infty$ 时, 由 (1.7) 定义的过程 $X^{(n)}$ 在 $D([0, \infty), \mathbb{R}_+)$ 上依分布弱收敛于由 (1.3) 定义、初值为 $X_0 = x$ 的非线性分枝过程 $X = (X_t)_{t \geq 0}$.

注意到, 在上述定理的条件中, 我们并没有假设跳测度 π 的二阶矩有限, 也没有假定扩散项系数 γ_1 和跳项系数 γ_2 满足线性增长条件. 上述定理的证明中, 首先证明离散状态过程序列胎紧, 再通过生成元的收敛性, 在 γ_0 、 γ_1 和 γ_2 都满足线性增长条件的情形下, 证明了定理 1.1 中结论成立. 最后, 通过构造无穷维乘积空间上的收敛序列, 我们去掉了 γ_0 、 γ_1 和 γ_2 的线性增长条件, 并完成了定理 1.1 的证明. 通过上述构造过程不难看出, 对于一个连续状态非线性分枝过程, 找到一列逼近到它的离散状态过程的关键是构造满足条件 1.3 的常数序列 $\{r_n\}$ 和测度序列 $\{m_2^{(n)}\}$. 我们在下面的例子中将会看到对于 α -平稳测度, 这两个序列应该如何选取.

例 1.1 令 π 为支撑在 $(0, \infty)$ 上的测度且满足

$$\pi(dz) = z^{-1-\alpha} dz, \quad 1 < \alpha < 2.$$

如下定义一列支撑在 $\{-1/n, 1/n, \dots, n\}$ 上的概率测度 $m_2^{(n)}$:

$$m_2^{(n)}\left(\left\{\frac{k}{n}\right\}\right) = \frac{1}{nr_n} \left(\frac{k}{n}\right)^{-1-\alpha}, \quad k = 1, 2, \dots, n^2$$

且

$$m_2^{(n)}\left(\left\{-\frac{1}{n}\right\}\right) = \sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{r_n} \left(\frac{k}{n}\right)^{-\alpha},$$

其中

$$r_n = \sum_{k=1}^{n^2} \left(\frac{k+1}{n}\right) \left(\frac{k}{n}\right)^{-1-\alpha}.$$

由该定义可得 $\int_{A_n} z m_2^{(n)}(dz) = 0$ 且当 $n \rightarrow \infty$ 时, $r_n m_2^{(n)}(\{-1/n\}) \sim n^{-\alpha+1}$. 由此我们验证了条件 1.3 中的 (1) 和 (2) 成立. 最后, 不难验证 $r_n(z \wedge z^2) \bar{m}_2^{(n)}(dz)$ 弱收敛于 $(z \wedge z^2)\pi(dz)$, 其中 $\bar{m}_2^{(n)}(dz)$ 是 $m_2^{(n)}(dz)$ 在 $\mathbb{N}/n := \{0, 1/n, 2/n, \dots\}$ 上的限制.

2 离散状态非线性分枝过程

由方程 (1.7) 可见, 离散状态非线性分枝过程是状态空间为 $\mathbb{N}/n$ 的连续时间 Markov 链, 其生成元 $L^{(n)}$ 由下面问题中的鞅问题确定:

命题 2.1 在条件 1.1 和 1.2 下, 一个状态空间为 $\mathbb{N}/n$ 的左极右连过程 $X^{(n)} = \{X_t^{(n)} : t \geq 0\}$ 是 (1.7) 的弱解当且仅当对任意 $\mathbb{N}/n$ 上的有限支撑函数 f ,

$$M_t^{(n)}(f) := f(X_t^{(n)}) - f(X_0^{(n)}) - \int_0^t L^{(n)} f(X_s^{(n)}) ds, \quad t \geq 0$$

是鞅, 其中

$$\begin{aligned} L^{(n)}f(x) &= n\gamma_0^+(x)\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right]+n\gamma_0^-(x)\left[f\left(x-\frac{1}{n}\right)-f(x)\right] \\ &\quad +\frac{1}{2}n^2\gamma_1(x)\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-2f(x)+f\left(x-\frac{1}{n}\right)\right] \\ &\quad +\int_{A_n}r_n\gamma_2(x)[f(x+y)-f(x)]m_n(dy), \quad x\in\frac{\mathbb{N}}{n}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

证明 假设 $X^{(n)} = \{X_t^{(n)} : t \geq 0\}$ 是方程 (1.7) 的弱解. 由 Itô 公式 (参见文献 [20, 定理 32]) 得

$$\begin{aligned} f(X_t^{(n)}) &= f(X_0^{(n)}) + \int_0^t \int_0^{n\gamma_0^+(X_{s-}^{(n)})} \int_{\{1/n\}} \left[f\left(X_{s-}^{(n)} + \frac{1}{n}\right) - f(X_{s-}^{(n)}) \right] M_0^{(n)}(ds, du, dz) \\ &\quad + \int_0^t \int_0^{n\gamma_0^-(X_{s-}^{(n)})} \int_{\{1/n\}} \left[f\left(X_{s-}^{(n)} - \frac{1}{n}\right) - f(X_{s-}^{(n)}) \right] M_0^{(n)}(ds, du, dz) \\ &\quad + \int_0^t \int_0^{n^2\gamma_1(X_{s-}^{(n)})} \int_{\{-1/n, 1/n\}} [f(X_{s-}^{(n)} + z) - f(X_{s-}^{(n)})] M_1^{(n)}(ds, du, dz) \\ &\quad + \int_0^t \int_0^{r_n\gamma_2(X_{s-}^{(n)})} \int_{A_n} [f(X_{s-}^{(n)} + z) - f(X_{s-}^{(n)})] M_2^{(n)}(ds, du, dz) \\ &= f(X_0^{(n)}) + \int_0^t \int_0^{n\gamma_0^+(X_s^{(n)})} \left[f\left(X_s^{(n)} + \frac{1}{n}\right) - f(X_s^{(n)}) \right] ds du \\ &\quad + \int_0^t \int_0^{n\gamma_0^-(X_s^{(n)})} \left[f\left(X_s^{(n)} - \frac{1}{n}\right) - f(X_s^{(n)}) \right] ds du \\ &\quad + \int_0^t \int_0^{n^2\gamma_1(X_s^{(n)})} \int_{\{-1/n, 1/n\}} [f(X_s^{(n)} + z) - f(X_s^{(n)})] ds du m_1^{(n)}(dz) \\ &\quad + \int_0^t \int_0^{r_n\gamma_2(X_s^{(n)})} \int_{A_n} [f(X_s^{(n)} + z) - f(X_s^{(n)})] ds du m_2^{(n)}(dz) + M_{t,f}^{(n)} \\ &= f(X_0^{(n)}) + \int_0^t n\gamma_0^+(X_s^{(n)}) \left[f\left(X_s^{(n)} + \frac{1}{n}\right) - f(X_s^{(n)}) \right] ds \\ &\quad + \int_0^t n\gamma_0^-(X_s^{(n)}) \left[f\left(X_s^{(n)} - \frac{1}{n}\right) - f(X_s^{(n)}) \right] ds \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t n^2\gamma_1(X_s^{(n)}) \left[f\left(X_s^{(n)} + \frac{1}{n}\right) - 2f(X_s^{(n)}) + f\left(X_s^{(n)} - \frac{1}{n}\right) \right] ds \\ &\quad + \int_0^t ds \int_{A_n} r_n\gamma_2(X_s^{(n)}) [f(X_s^{(n)} + z) - f(X_s^{(n)})] m_2^{(n)}(dz) + M_{t,f}^{(n)} \\ &= f(X_0^{(n)}) + \int_0^t L^{(n)}f(X_s) ds + M_{t,f}^{(n)}, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} M_{t,f}^{(n)} &= \int_0^t \int_0^{n\gamma_0^+(X_{s-}^{(n)})} \int_{\{1/n\}} \left[f\left(X_{s-}^{(n)} + \frac{1}{n}\right) - f(X_{s-}^{(n)}) \right] \tilde{M}_0^{(n)}(ds, du, dz) \\ &\quad + \int_0^t \int_0^{n\gamma_0^-(X_{s-}^{(n)})} \int_{\{1/n\}} \left[f\left(X_{s-}^{(n)} - \frac{1}{n}\right) - f(X_{s-}^{(n)}) \right] \tilde{M}_0^{(n)}(ds, du, dz) \\ &\quad + \int_0^t \int_0^{n^2\gamma_1(X_{s-}^{(n)})} \int_{\{-1/n, 1/n\}} [f(X_{s-}^{(n)} + z) - f(X_{s-}^{(n)})] \tilde{M}_1^{(n)}(ds, du, dz) \end{aligned}$$

$$+ \int_0^t \int_0^{r_n \gamma_2(X_{s-}^{(n)})} \int_{A_n} [f(X_{s-}^{(n)} + z) - f(X_{s-}^{(n)})] \tilde{M}_2^{(n)}(ds, du, dz),$$

这里 $\tilde{M}_i^{(n)}(ds, du, dz)$ ($i = 0, 1, 2$) 为相应带补偿的 Poisson 随机测度. 因为 f 具有紧支撑, 故对较大的 x , $\sup_{|z| \leq 1} |f(x+z) - f(x)| = 0$, 故 $L^{(n)}f(x) = 0$. 由此得出 $M_t^{(n)}(f)$ 局部有界, 从而, $(M_{t,f}^{(n)})_{t \geq 0}$ 是鞅. 另一方向的证明可以通过局部的应用得到 (参见文献 [21, 命题 4.2]). $\square$

由以上命题可知, 离散状态非线性分枝过程 $X^{(n)}$ 是 $\mathbb{N}/n$ 上连续时间 Markov 链. 再由生成元 $L^{(n)}$ 的表达式 (2.1) 可知, $X^{(n)}$ 的 Q 矩阵可由下式给出:

$$q_{i/n, j/n} = \begin{cases} n\gamma_0^+(i)\delta_1(j-i) + \frac{1}{2}n^2\gamma_1\left(\frac{i}{n}\right) + r_n\gamma_2\left(\frac{i}{n}\right)m_2^{(n)}\left(\left\{\frac{j-i}{n}\right\}\right), & j \geq i+1, \\ -n\gamma_0(i) - n^2\gamma_1\left(\frac{i}{n}\right) - r_n\gamma_2\left(\frac{i}{n}\right), & j = i \geq 1, \\ n\gamma_0^-(i) + \frac{1}{2}n^2\gamma_1\left(\frac{i}{n}\right) + r_n\gamma_2\left(\frac{i}{n}\right)m_2^{(n)}\left(\left\{-\frac{1}{n}\right\}\right), & j = i-1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

首先考虑如下的线性增长条件.

条件 2.1 存在常数 $C > 0$, 使得对任意 $x > 0$, 都有

$$|\gamma_0(x)| + \gamma_1(x) + \gamma_2(x) \leq C(1+x).$$

引理 2.1 假设条件 1.1–1.3 和 2.1 成立, 则

$$\mathbb{E}[X_t^{(n)}] \leq (x + Ct)e^{Ct}.$$

证明 令 $\tau_m^{(n)} = \inf\{t > 0 : X_t^{(n)} > m\}$. 由于 $m_1^{(n)}(\{1/n\}) = m_1^{(n)}(\{-1/n\}) = 1/2$, 故由 Poisson 随机测度的平移不变性可知, 对任意 $0 < v < t$, 有

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\int_0^{t \wedge \tau_m^{(n)}} \int_0^{n^2 \gamma_1(X_{s-}^{(n)})} \int_{\{-1/n, 1/n\}} z M_1^{(n)}(ds, du, dz) \middle| \mathcal{G}_{v \wedge \tau_m^{(n)}} \right] \\ &= \int_0^{v \wedge \tau_m^{(n)}} \int_0^{n^2 \gamma_1(X_{s-}^{(n)})} \int_{\{-1/n, 1/n\}} z M_1^{(n)}(ds, du, dz) \\ &+ \mathbb{E} \left[\int_{v \wedge \tau_m^{(n)}}^{t \wedge \tau_m^{(n)}} \int_0^{n^2 \gamma_1(X_{s-}^{(n)})} \int_{\{-1/n, 1/n\}} z M_1^{(n)}(ds, du, dz) \middle| \mathcal{G}_{v \wedge \tau_m^{(n)}} \right] \\ &= \int_0^{v \wedge \tau_m^{(n)}} \int_0^{n^2 \gamma_1(X_{s-}^{(n)})} \int_{\{-1/n, 1/n\}} z M_1^{(n)}(ds, du, dz) \\ &+ \mathbb{E} \left[\int_{v \wedge \tau_m^{(n)}}^{t \wedge \tau_m^{(n)}} n^2 \gamma_1(X_{s-}^{(n)}) ds \int_{\{-1/n, 1/n\}} z dm_1^{(n)}(dz) \middle| \mathcal{G}_{v \wedge \tau_m^{(n)}} \right] \\ &= \int_0^{v \wedge \tau_m^{(n)}} \int_0^{n^2 \gamma_1(X_{s-}^{(n)})} \int_{\{-1/n, 1/n\}} z M_1^{(n)}(ds, du, dz). \end{aligned}$$

由条件 2.1 有

$$\mathbb{E} \left[\int_0^{t \wedge \tau_m^{(n)}} \int_0^{n^2 \gamma_1(X_{s-}^{(n)})} \int_{\{-1/n, 1/n\}} |z| ds du m_1^{(n)}(dz) \right] \leq 2tnm_1^{(n)} \left(\left\{ -\frac{1}{n} \right\} \right) \sup_{y \leq m} |\gamma_1(y)| < \infty.$$

于是,

$$t \mapsto \int_0^{t \wedge \tau_m^{(n)}} \int_0^{n^2 \gamma_1(X_{s-}^{(n)})} \int_{\{-1/n, 1/n\}} z M_1^{(n)}(ds, du, dz)$$

是鞅. 类似地, 由条件 2.1 和 1.3 可知,

$$t \mapsto \int_0^{t \wedge \tau_m^{(n)}} \int_0^{r_n \gamma_2(X_{s-}^{(n)})} \int_{A_n} z M_2^{(n)}(ds, du, dz)$$

也是鞅. 因此,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_{t \wedge \tau_m^{(n)}}^{(n)}] &= x + \mathbb{E} \left[\int_0^{t \wedge \tau_m^{(n)}} \int_0^{n \gamma_0^+(X_{s-}^{(n)})} \int_{\{1/n\}} z M_0^{(n)}(ds, du, dz) \right] \\ &\quad - \mathbb{E} \left[\int_0^{t \wedge \tau_m^{(n)}} \int_0^{n \gamma_0^-(X_{s-}^{(n)})} \int_{\{1/n\}} z M_0^{(n)}(ds, du, dz) \right] \\ &= x + \mathbb{E} \left[\int_0^{t \wedge \tau_m^{(n)}} \gamma_0(X_{s-}^{(n)}) ds \right] \\ &\leq x + C \int_0^{t \wedge \tau_m^{(n)}} \mathbb{E}[1 + X_{s-}^{(n)}] ds. \end{aligned}$$

因为对 $s \in [0, t \wedge \tau_m^{(n)}]$ 有 $X_{s-}^{(n)} \leq m$, 所以, $t \mapsto \mathbb{E}[X_{t \wedge \tau_m^{(n)}}^{(n)}]$ 在 $[0, \infty)$ 上局部有界, 且

$$\mathbb{E}[X_{t \wedge \tau_m^{(n)}}^{(n)}] \leq x + Ct + \int_0^t \mathbb{E}[X_{s \wedge \tau_m^{(n)}}^{(n)}] ds.$$

由 Gronwall 引理, 有 $\mathbb{E}[X_{t \wedge \tau_m^{(n)}}^{(n)}] \leq (x + Ct)e^{Ct}$. 利用 Fatou 引理, 有 $\mathbb{E}[X_t^{(n)}] \leq (x + Ct)e^{Ct}$. $\square$

我们将在下文中多次用到如下 C_r 不等式:

$$|a_1 + \cdots + a_n|^r \leq n^{(r-1)^+} (|a_1|^r + \cdots + |a_n|^r), \quad r, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}.$$

引理 2.2 假设条件 1.1–1.3 和 2.1 成立, 则对任意 $T > 0$, 有

$$\sup_{n \geq 1} \mathbb{E} \left[\sup_{t \in [0, T]} X_t^{(n)} \right] < \infty.$$

证明 由引理 2.1 的证明知,

$$t \mapsto \int_0^t \int_0^{n^2 \gamma_1(X_{s-}^{(n)})} \int_{\{-1/n, 1/n\}} z M_1^{(n)}(ds, du, dz)$$

和

$$t \mapsto \int_0^t \int_0^{r_n \gamma_2(X_{s-}^{(n)})} \int_{A_n} z M_2^{(n)}(ds, du, dz)$$

是局部鞅. 在 (1.7) 中用 Burkholder-Davis-Gundy 不等式和 C_r 不等式可知, 存在常数 $C_0 > 0$, 使得

$$\mathbb{E} \left[\sup_{t \in [0, T]} |X_t^{(n)}| \right] \leq x + \mathbb{E} \left[\int_0^T \int_0^{n |\gamma_0(X_{s-}^{(n)})|} \int_{\{-1/n, 1/n\}} |z| M_0^{(n)}(ds, du, dz) \right]$$

$$\begin{aligned}
 & + C_0 \mathbb{E} \left[\left[\int_0^T \int_0^{n^2 \gamma_1(X_{s-}^{(n)})} \int_{\{-1/n, 1/n\}} z^2 M_1^{(n)}(ds, du, dz) \right]^{1/2} \right] \\
 & + C_0 \mathbb{E} \left[\left[\int_0^T \int_0^{r_n \gamma_2(X_{s-}^{(n)})} \int_{A_n \cap [-1/n, 1]} z^2 M_2^{(n)}(ds, du, dz) \right]^{1/2} \right] \\
 & + C_0 \mathbb{E} \left[\left[\int_0^T \int_0^{r_n \gamma_2(X_{s-}^{(n)})} \int_1^\infty z^2 M_2^{(n)}(ds, du, dz) \right]^{\frac{1}{2}} \right] \\
 & =: x + I_1^{(n)} + C_0 I_2^{(n)} + C_0 I_3^{(n)} + C_0 I_4^{(n)}.
 \end{aligned}$$

由条件 2.1 可得

$$I_1^{(n)} = \mathbb{E} \left[\int_0^T |\gamma_0(X_s^{(n)})| ds \right] \leq CT + CE \left[\int_0^T |X_s^{(n)}| ds \right],$$

则由引理 2.1 可知, 上式右端一致有界. 利用 Jensen 不等式和条件 2.1 可得

$$\begin{aligned}
 I_2^{(n)} & \leq \left\{ \mathbb{E} \left[\int_0^T \int_0^{n^2 \gamma_1(X_{s-}^{(n)})} \int_{\{-1/n, 1/n\}} z^2 M_1^{(n)}(ds, du, dz) \right] \right\}^{1/2} \\
 & = \left\{ \frac{1}{2} \mathbb{E} \left[\int_0^T \gamma_1(X_s^{(n)}) ds \right] \right\}^{1/2} \leq \left\{ \frac{1}{2} CT + \frac{1}{2} CE \left[\int_0^T X_s^{(n)} ds \right] \right\}^{1/2},
 \end{aligned}$$

则由引理 2.1 可知上式右端一致有界. 由 C_r 不等式可得

$$\begin{aligned}
 I_3^{(n)} & \leq \mathbb{E} \left[\left| \int_0^T \int_0^{r_n \gamma_2(X_{s-}^{(n)})} \int_0^1 z^2 M_2^{(n)}(ds, du, dz) \right|^{1/2} \right] \\
 & + \mathbb{E} \left[\left| \int_0^T \int_0^{r_n \gamma_2(X_{s-}^{(n)})} \int_{\{-1/n\}} z^2 M_2^{(n)}(ds, du, dz) \right|^{1/2} \right] \\
 & \leq \left\{ \mathbb{E} \left[\int_0^T \int_0^{r_n \gamma_2^{(n)}(X_{s-})} \int_0^1 z^2 M_2^{(n)}(ds, du, dz) \right] \right\}^{1/2} \\
 & + \left\{ \mathbb{E} \left[\int_0^T \int_0^{r_n \gamma_2(X_{s-}^{(n)})} \int_{\{-1/n\}} z^2 M_2^{(n)}(ds, du, dz) \right] \right\}^{1/2} \\
 & \leq \left\{ \left(\int_0^1 z^2 r_n m_2^{(n)}(dz) \right) \mathbb{E} \left[\int_0^T \gamma_2(X_s^{(n)}) ds \right] \right\}^{1/2} \\
 & + \left\{ \left(\frac{r_n}{n^2} m_2^{(n)} \left(-\frac{1}{n} \right) \right) \mathbb{E} \left[\int_0^T \gamma_2(X_s^{(n)}) ds \right] \right\}^{1/2}.
 \end{aligned}$$

注意到

$$t \mapsto \int_0^t \int_0^{r_n \gamma_2(X_{s-}^{(n)})} \int_1^\infty z^2 M_2^{(n)}(ds, du, dz)$$

在 $t \in (0, T)$ 上只有有限跳. 故由 C_r 不等式可得

$$I_4^{(n)} \leq \mathbb{E} \left[\int_0^T \int_0^{r_n \gamma_2(X_{s-}^{(n)})} \int_1^\infty z M_2^{(n)}(ds, du, dz) \right] = r_n \left(\int_1^\infty z m_2^{(n)}(dz) \right) \mathbb{E} \left[\int_0^T \gamma_2(X_s^{(n)}) ds \right].$$

由条件 2.1 和引理 2.1 可知, $\mathbb{E}[\int_0^T \gamma_2(X_s^{(n)}) ds]$ 一致有界, 再利用条件 1.3 可得

$$\int_0^\infty (z \wedge z^2) r_n m_2^{(n)}(dz) + \frac{r_n}{n^2} m_2^{(n)} \left(\left\{ -\frac{1}{n} \right\} \right) \rightarrow \int_0^\infty (z \wedge z^2) m_2(dz).$$

因此, $I_3^{(n)}$ 和 $I_4^{(n)}$ 一致有界, 这样我们便完成了证明. $\square$

3 离散过程的收敛

本节证明在线性增长条件下由 (1.7) 定义的离散状态非线性分枝过程弱收敛于 (1.3) 或 (1.4) 所定义的连续状态非线性分枝过程.

引理 3.1 假设条件 1.1–1.3 和 2.1 成立, 则序列 $\{X^{(n)} : n = 1, 2, \dots\}$ 在 $D([0, \infty), \mathbb{R}_+)$ 中胎紧.

证明 由命题 2.1, 对任意紧支撑函数 f , 有

$$f(X_t^{(n)}) = f(X_0^{(n)}) + \int_0^t L^{(n)} f(X_s) ds + M_{t,f}^{(n)},$$

其中 $(M_{t,f}^{(n)})_{t \geq 0}$ 是鞅. 故文献 [22] 中的引理 2.2(b) 成立. 引理 2.2 意味着文献 [22] 中的引理 2.2(a) 成立. 则 $(X^n)_{n \geq 1}$ 在 $D([0, \infty), \mathbb{R}_+)$ 中胎紧. $\square$

我们先给出一个在较强条件下的收敛结论.

命题 3.1 假设条件 1.1–1.3 和 2.1 成立, 则当 $n \rightarrow \infty$ 时, 由 (1.7) 定义的离散过程 $X^{(n)}$ 在 $D([0, \infty), \mathbb{R}_+)$ 上依分布弱收敛于具有初值 $X_0 = x$ 的连续状态非线性分枝过程 $X = (X_t)_{t \geq 0}$.

证明 令 P 和 $P^{(n)}$ 分别记 X 和 $X^{(n)}$ 在 $D([0, \infty), \mathbb{R}_+)$ 上的分布. 我们需证明在弱收敛的意义下 $\lim_{n \rightarrow \infty} P^{(n)} = P$. 由引理 3.1 知 $\{X^{(n)} : n = 1, 2, \dots\}$ 的胎紧性, 于是, 序列 $\{P^{(n)} : n = 1, 2, \dots\}$ 相对紧, 故其存在弱收敛子列 $\{P^{(n_i)} : i = 1, 2, \dots\}$. 设其在 $D([0, \infty), \mathbb{R}_+)$ 上的弱极限为 $Q = \lim_{i \rightarrow \infty} P^{(n_i)}$. 我们将要证明 $Q = P$. 由 Skorokhod 表示定理, 存在定义在概率空间 $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ 上的非负左极右连过程 $Y = (Y_t)_{t \geq 0}$ 和 $Y^{(n_i)} = (Y_t^{(n_i)})_{t \geq 0}$ 使得

(i) Y 和 $Y^{(n_i)}$ 在 $D([0, \infty), \mathbb{R}_+)$ 上的分布分别为 P 和 $P^{(n_i)}$;

(ii) 在 (1.5) 定义的距离 d 下, 几乎必然地有 $Y = \lim_{i \rightarrow \infty} Y^{(n_i)}$.

由性质 (i), 对每个 $f \in C_0^2$, 有

$$f(Y_t^{(n_i)}) = f\left(\frac{\lfloor n_i x \rfloor}{n_i}\right) + \int_0^t L^{(n_i)} f(Y_s^{(n_i)}) ds + M_t^{(n_i)}(f), \quad (3.1)$$

其中 $\{M_t^{(n_i)}(f) : t \geq 0\}$ 是鞅. 在假设下, 存在常数 $K, L > 0$ 使得对 $y > L$ 有 $f(y), f'(y), f''(y) \leq K$ 且 $f(y) = f'(y) = f''(y) = 0$, 则有

$$\begin{aligned} L^{(n)} f(y) &= n\gamma_0^+(y) \left[f\left(y + \frac{1}{n}\right) - f(y) \right] + n\gamma_0^-(y) \left[f\left(y - \frac{1}{n}\right) - f(y) \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} n^2 \gamma_1(y) \left[f\left(y + \frac{1}{n}\right) - 2f(y) + f\left(y - \frac{1}{n}\right) \right] + \int_{A_n} r_n \gamma_2(y) [f(y+z) - f(y)] m_n(dz) \\ &= \gamma_0^+(y) f'(y + \xi_1) + \gamma_0^-(y) f'(y - \eta_1) + \frac{1}{2} \gamma_1(y) f''(y + \xi_2) \\ &\quad + \frac{1}{n^2} r_n \gamma_2(y) m_2^{(n)} \left(\left\{ -\frac{1}{n} \right\} \right) f''(y + \xi_3) + \int_{\mathbb{N}/n} r_n \gamma_2(y) [f(y+z) - f(y) - z f'(y)] \bar{m}_2^{(n)}(dz) \\ &\leq \sup_{0 < y < L} |\gamma_0(y)| K + \frac{1}{2} \sup_{0 < y < L+1} |\gamma_1(y)| K + \sup_{0 < y < L} |\gamma_2(y)| \frac{1}{n^2} r_n m_2^{(n)} \left(\left\{ -\frac{1}{n} \right\} \right) K \\ &\quad + \sup_{0 < y < L} |\gamma_2(y)| \int_{\mathbb{N}/n} r_n [f(y+z) - f(y) - z f'(y)] \bar{m}_2^{(n)}(dz), \end{aligned}$$

其中 $\xi_1, \eta_1, \xi_3 \in (0, 1/n)$ 且 $\xi_2 \in (-1/n, 1/n)$. 由 Taylor 展开和条件 1.3, 有

$$\frac{1}{n^2} r_n m_2^{(n)} \left(\left\{ -\frac{1}{n} \right\} \right) \rightarrow 0, \quad \text{当 } n \rightarrow \infty.$$

注意到, 对给定的 $y > 0$,

$$z \mapsto \frac{f(y+z) - f(y) - zf'(y)}{z \wedge z^2}, \quad z \in \mathbb{R}_+$$

是有界连续函数, 故由条件 1.3 可知,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{N}/n} r_n [f(y+z) - f(y) - zf'(y)] \bar{m}_2^{(n)}(dz) = \int_0^\infty [f(y+z) - f(y) - zf'(y)] \pi(dz) < \infty.$$

由此得出 $L^{(n)}f$ 一致有界. 注意到, 当 $i \rightarrow \infty$ 时,

$$|L^{(n_i)}f(Y_s^{(n_i)}) - Lf(Y_s)| \leq |L^{(n_i)}f(Y_s^{(n_i)}) - Lf(Y_s^{(n_i)})| + |Lf(Y_s^{(n_i)}) - Lf(Y_s)| \rightarrow 0.$$

则在 (3.1) 中, 令 $i \rightarrow \infty$ 并利用控制收敛定理可得 $f(Y_t) = f(x) + \int_0^t Lf(Y_s)ds + M_t(f)$, 其中 $\{M_t(f) : t \geq 0\}$ 是鞅. 由此得出 $Y = \{Y_t : t \geq 0\}$ 是方程 (1.3) 的弱解, 因此, 由条件 1.1 可知 $Q = P$. $\square$

为了定义在一般条件下离散状态非线性分枝过程的弱收敛, 我们需要一些准备. 记 $E = D([0, \infty), \mathbb{R}_+)$. 对 $a \geq 0$ 和 $\xi = \{\xi(t) : t \geq 0\} \in E$, 令 $\tau_a(\xi) = \inf\{t \geq 0 : \xi(t) \geq a\}$, 并定义 $\pi_a\xi = \{\pi_a\xi(t) : t \geq 0\} \in E$ 为 $\pi_a\xi(t) = \xi(t \wedge \tau_a(\xi))$. 由 (1.5), 对任意 $\xi, \eta \in E$, 有 $d(\pi_a\xi, \pi_a\eta) \leq d(\xi, \eta)$, 则 π_a 是 E 上连续算子. 对 $a_2 \geq a_1 \geq 0$, 显然有 $\pi_{a_1} \circ \pi_{a_2} = \pi_{a_1}$. 由文献 [15, 命题 5.3] 易得下面的引理:

引理 3.2 (i) 对任意 $\xi \in E$, 有 $\lim_{a \rightarrow \infty} d(\pi_a\xi, \xi) = 0$. (ii) 令 $\{\xi, \xi_1, \xi_2, \dots\} \subset E$. 若对任意 $k \geq 1$ 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} d(\pi_k\xi_n, \pi_k\xi) = 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} d(\xi_n, \xi) = 0$.

我们来考虑可数乘积空间 $E^\infty = E \times E \times \dots$. 该空间的拓扑由下述距离 d_∞ 定义:

$$d_\infty(\xi_*, \eta_*) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} d(\xi_i, \eta_i), \quad \xi_* = (\xi_1, \xi_2, \dots), \quad \eta_* = (\eta_1, \eta_2, \dots) \in E^\infty. \quad (3.2)$$

则在 (E^∞, d_∞) 中有 $\xi_*^{(n)} = (\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \dots) \rightarrow \xi_* = (\xi_1, \xi_2, \dots)$ 当且仅当对任意 $i = 1, 2, \dots$, 在 E 中有 $\xi_i^{(n)} \rightarrow \xi_i$.

给定正整数 $k \geq 1$ 和 $\xi_* = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in E^\infty$, 令 $T_k\xi_* = (\xi_1, \dots, \xi_k, 0, 0, \dots) \in E^\infty$, 其中 0 表示退化轨道. 因为 $d(\xi_i, 0) \leq 1$, 我们有

$$d_\infty(\xi_*, T_k\xi_*) = \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} d(\xi_i, 0) \leq \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^k}. \quad (3.3)$$

令 $\mathcal{P}(E^\infty)$ 表示 (E^∞, d_∞) 上 Borel 概率测度构成的集合. 给定 $F, G \in \mathcal{P}(E^\infty)$, 令 $\mathcal{M}(F, G)$ 为 $E^\infty \times E^\infty$ 上边缘分布分别为 F 和 G 的 Borel 概率测度所构成的集合 (对任意 $\mu \in \mathcal{M}(F, G)$ 和 Borel 集 $B \subset E^\infty$, 有 $F(B) = \mu(B \times E^\infty)$ 且 $G(B) = \mu(E^\infty \times B)$). $\mathcal{P}(E^\infty)$ 上的弱收敛由 Prohorov 距离 ρ_∞ 所决定, 其定义如下:

$$\rho_\infty(F, G) = \inf_{\mu \in \mathcal{M}(F, G)} \inf\{\varepsilon > 0 : \mu(I_\varepsilon^c) \leq \varepsilon\}, \quad F, G \in \mathcal{P}(E^\infty), \quad (3.4)$$

其中 $I_\varepsilon^c = \{(\xi_*, \eta_*) \in E^\infty \times E^\infty : d_\infty(\xi_*, \eta_*) \geq \varepsilon\}$. 对任意 $\varepsilon > 1/2^k$, 有 $\{\xi_* \in E^\infty : (\xi_*, T_k\xi_*) \in I_\varepsilon^c\} = \emptyset$. 令 ξ^* 为 E^∞ 上随机变量且服从分布 F , 则 $T_k\xi^*$ 的分布服从 $F \circ T_k^{-1}$. 令 μ 为 $(\xi^*, T_k\xi^*)$ 在 $E^\infty \times E^\infty$ 上的联合分布, 则对任意 $\varepsilon > 1/2^k$, 有 $\mu(I_\varepsilon^c) = 0$. 由此得出

$$\rho_\infty(F, F \circ T_k^{-1}) \leq \frac{1}{2^k}, \quad F \in \mathcal{P}(E^\infty). \quad (3.5)$$

定理 1.1 的证明 令 P 和 $P^{(n)}$ 分别表示 X 和 $X^{(n)}$ 在 E 上的分布. 就像命题 3.1 的证明一样, 我们需要证明在弱收敛意义下, $\lim_{n \rightarrow \infty} P^{(n)} = P$. 对任意正整数 $k \geq 1$, 令 $Z_k = \{Z_k(t) : t \geq 0\}$ 为方程 (1.3) 中将 $\gamma_i(\cdot)$ 替换为 $\gamma_i(\cdot \wedge k)$ ($i = 0, 1, 2$) 后的解. 类似地, 根据 (1.7) 定义 $Z_k^{(n)} = \{Z_k^{(n)}(t) : t \geq 0\}$. 令 Q_k 和 $Q_k^{(n)}$ 分别表示 Z_k 和 $Z_k^{(n)}$ 在 E 上的分布. 由命题 3.1 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_k^{(n)} = Q_k$, 因此, 由 π_k 在 E 上的连续性可知, $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_k^{(n)} \circ \pi_k^{-1} = Q_k \circ \pi_k^{-1}$. 由上述两方程的轨道唯一性, 对任意 $k \geq 1$, 几乎必然地有 $\pi_k Z_k = \pi_k X$ 和 $\pi_k Z_k^{(n)} = \pi_k X^{(n)}$. 由此可以推出 $Q_k \circ \pi_k^{-1} = P \circ \pi_k^{-1}$ 且 $Q_k^{(n)} \circ \pi_k^{-1} = P^{(n)} \circ \pi_k^{-1}$, 则我们还有 $\lim_{n \rightarrow \infty} P^{(n)} \circ \pi_k^{-1} = P \circ \pi_k^{-1}$, 即在弱收敛意义下, $\lim_{n \rightarrow \infty} \pi_k X^{(n)} \stackrel{d}{=} \pi_k X$. 于是, 由 Skorokhod 表示定理, 存在过程 $X'^{(n)} \stackrel{d}{=} \pi_k X^{(n)}$ 和 $X' \stackrel{d}{=} \pi_k X$ 使得几乎必然地有 $\lim_{n \rightarrow \infty} X'^{(n)} = X'$. 因此,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\pi_1 X^{(n)}, \pi_2 X^{(n)}, \dots, \pi_k X^{(n)}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\pi_1 \pi_k X^{(n)}, \pi_2 \pi_k X^{(n)}, \dots, \pi_k X^{(n)}) \\ &\stackrel{d}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} (\pi_1 X'^{(n)}, \pi_2 X'^{(n)}, \dots, X'^{(n)}) \\ &= (\pi_1 X', \pi_2 X', \dots, X') \\ &= (\pi_1 \pi_k X, \pi_2 \pi_k X, \dots, \pi_k X) \\ &= (\pi_1 X, \pi_2 X, \dots, \pi_k X). \end{aligned} \quad (3.6)$$

令 H 和 $H^{(n)}$ 分别记 $(\pi_1 X, \pi_2 X, \dots)$ 和 $(\pi_1 X^{(n)}, \pi_2 X^{(n)}, \dots)$ 在 E^∞ 上的分布, 则 (3.6) 意味着 $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_\infty(H^{(n)} \circ T_k^{-1}, H \circ T_k^{-1}) = 0$. 由三角不等式

$$\rho_\infty(H^{(n)}, H) \leq \rho_\infty(H^{(n)}, H^{(n)} \circ T_k^{-1}) + \rho_\infty(H^{(n)} \circ T_k^{-1}, H \circ T_k^{-1}) + \rho_\infty(H \circ T_k^{-1}, H),$$

我们有

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \rho_\infty(H^{(n)}, H) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \rho_\infty(H^{(n)}, H^{(n)} \circ T_k^{-1}) + \limsup_{n \rightarrow \infty} \rho_\infty(H \circ T_k^{-1}, H).$$

根据 (3.5), 右端有上界 $1/2^{k-1}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_\infty(H^{(n)}, H) = 0$, 即在弱收敛意义下, $\lim_{n \rightarrow \infty} H^{(n)} = H$. 由 Skorokhod 表示定理, 在概率空间 $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ 上, 存在取值在 E^∞ 上的随机变量 $Y = (Y_1, Y_2, \dots)$ 和 $Y^{(n)} = (Y_1^{(n)}, Y_2^{(n)}, \dots)$ 使得

- (i) Y 和 $Y^{(n)}$ 分别有分布 H 和 $H^{(n)}$;
- (ii) 几乎必然地有 $\lim_{n \rightarrow \infty} d_\infty(Y, Y^{(n)}) = 0$.

性质 (i) 意味着对任意 $k \geq j \geq 1$, 有 $\pi_j Y_k = Y_j$ 且 $\pi_j Y_k^{(n)} = Y_j^{(n)}$. 则由引理 3.2(i), 我们可定义非负左极右连过程 $Y_\infty := \lim_{k \rightarrow \infty} Y_k$ 和 $Y_\infty^{(n)} := \lim_{k \rightarrow \infty} Y_k^{(n)}$. 由 (i) 知, $Y_\infty = \{Y_\infty(t) : t \geq 0\}$ 是连续状态非线性分枝过程, 其生成元为 L 且 $Y_\infty^{(n)} = \{Y_\infty^{(n)}(t) : t \geq 0\}$ 是离散状态非线性分枝过程, 其生成元为 $L^{(n)}$. 由引理 3.2 和性质 (ii) 有 $Y_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} Y_\infty^{(n)}$, 这意味着在弱收敛的意义下 $P = \lim_{n \rightarrow \infty} P^{(n)}$. $\square$

致谢 非常感谢两位匿名审稿人的细致评论和有益建议.

参考文献

- 1 Bienaymé I J. De la loi de multiplication et de la durée des familles. Soc Philomat Paris Extraits Sér, 1845, 5: 37–39
- 2 Galton F, Watson H W. On the probability of extinction of families. J Anthropol Inst Great Britain Ireland, 1874, 4: 138–144
- 3 Athreya K B, Ney P E. Branching Processes. Heidelberg: Springer, 1972
- 4 Harris T E. The Theory of Branching Processes. Heidelberg: Springer, 1963
- 5 Jagers P. Branching Processes with Biological Applications. New York: John Wiley & Sons, 1975
- 6 Feller W. Diffusion processes in genetics. In: Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. Berkeley-Los Angeles: University of California Press, 1950, 227–246

- 7 Lamperti J. The limit of a sequence of branching processes. *Z Wahrsch Verw Gebiete*, 1967, 7: 271–288
- 8 Lamperti J. Continuous state branching processes. *Bull Amer Math Soc (NS)*, 1967, 73: 382–387
- 9 Dawson D A, Li Z. Skew convolution semigroups and affine Markov processes. *Ann Probab*, 2006, 34: 1103–1142
- 10 Dawson D A, Li Z. Stochastic equations, flows and measure-valued processes. *Ann Probab*, 2012, 40: 813–857
- 11 Kyprianou A E. *Introductory Lectures on Fluctuations of Lévy Processes with Applications*. Heidelberg: Springer, 2006
- 12 Li Z. *Measure-Valued Branching Markov Processes*. Heidelberg: Springer, 2011
- 13 Li P S, Yang X, Zhou X. A general continuous-state nonlinear branching process. *ArXiv:1708.01560v3*, 2018
- 14 Li P S. A continuous-state polynomial branching process. *Stochastic Process Appl*, 2018, doi: 10.1016/j.spa.2018.08.013
- 15 Ethier S N, Kurtz T G. *Markov Processes: Characterization and Convergence*. New York: John Wiley & Sons, 1986
- 16 Chen A, Li J, Ramesh N I. Uniqueness and extinction of weighted Markov branching processes. *Methodol Comput Appl Probab*, 2005, 7: 489–516
- 17 Chen A. Ergodicity and stability of generalised Markov branching processes with resurrection. *J Appl Probab*, 2002, 39: 786–803
- 18 Li P S. Nonlinear branching processes with immigration. *Acta Math Sin Engl Ser*, 2017, 33: 1021–1038
- 19 Pakes A G. Extinction and explosion of nonlinear Markov branching processes. *J Aust Math Soc*, 2007, 82: 403–428
- 20 Protter P E. *Stochastic Integration and Differential Equations*, 2nd ed. Berlin: Springer, 2004
- 21 Fu Z, Li Z. Stochastic equations of non-negative processes with jumps. *Stochastic Process Appl*, 2010, 120: 306–330
- 22 Xiong J, Yang X. Existence and pathwise uniqueness to an SPDE driven by α -stable colored noise. *Stochastic Process Appl*, 2018, doi: 10.1016/j.spa.2018.08.003

The discrete approximation of a class of continuous-state nonlinear branching processes

Pei-Sen Li, Xu Yang & Xiaowen Zhou

Abstract In this paper we consider a general continuous-state nonlinear branching process which can be identified as a nonnegative solution to a nonlinear version of the stochastic differential equation driven by Brownian motion and Poisson random measure. Intuitively, this process is a branching process with population-size-dependent branching rates and with competition. We construct a sequence of discrete-state nonlinear branching processes and prove that it converges weakly to the continuous-state nonlinear branching process by using tightness arguments and convergence criteria on infinite-dimensional space.

Keywords branching process, nonlinear branching, stochastic partial differential equation, tightness

MSC(2010) 60J68, 60K37, 60H15

doi: 10.1360/N012018-00139