基于多项式级数的小天体表面参数化表征方法

王帅, 于洋*, 吕敬

北京航空航天大学航空科学与工程学院, 北京 100191

*联系人, E-mail: yuyang.thu@icloud.com

收稿日期: 2019-01-12; 接受日期: 2019-02-19; 网络出版日期: 2019-06-05

国家自然科学基金(编号: 11702009, 11572018)资助项目

摘要 最近对小天体地质结构的研究表明, 大多数小天体具有不对称和不规则的质量分布. 小天体的这些特点对其表面的准确建模提出了挑战. 对于太阳系中的小天体表面研究, 应用最广泛的方法是多面体方法. 本文提出了一种适用于任意小天体外形的参数化表征方法. 与多面体方法相比, 多项式为小天体表面提供了一个明确的形状解析的描述, 它是连续可微的, 并且对不同形状保持高度的通用性. 本文首先利用同时控制长度失真和面积失真的CALD算法将小天体的样本点数据映射到单位球面上, 得到小天体表面与单位球面之间的双射关系. 然后应用多项式级数形式的基函数表征该双射关系, 并进一步利用LSMR算法求解得出小天体表面模型的表征形式. 最后讨论方法的数值表现, 通过分析不同修正参数对模型误差的影响, 验证了该方法在数值上的优势与可行性, 给出了多个样本小天体表面形状的参数模型.

关键词 太阳系小天体, 多项式级数, 表面建模

PACS: 96.30.Ys, 95.75.mn, 02.60.Ed

1 引言

太阳系中绝大多数小天体是分布在行星轨道之间的小行星^[1]. 由于质量比主行星小很多, 所以系统化地研究小天体开始得很晚^[2]. 作为太阳系形成初期就存在的一类天体, 小天体与主行星经历了同样漫长的演化过程. 由于没有参与行星的构成, 小天体具有相对较低的演化程度. 基于上述原因, 太阳系早期的状况和状态信息被相对完整地记录在小天体中, 这给人类探索太阳系起源和演化历史提供了强有力的依据^[3]. 随着天文观测和深空探测技术的发展, 研究者们从小

天体对象中揭示出越来越多的科学信息.

对小天体表面地形参数化建模方法开展研究, 能够为下一步研究小天体的动力学特性提供强有力的理论和数值工具, 为天体建模与数值仿真提供精细化、多样化的技术方案, 为深入理解太阳系小天体的演化过程奠定基础. 另一方面, 随着深空探测技术的发展, 越来越多的深空探测卫星以及无人探测设备被送往太空对小天体进行实地的考察研究^[4,5]. 发展精细化的建模方法, 可以在此基础上对小天体表面引力场的分布进行研究, 为探测器自主导航和安全着陆等问题提供了理论支持^[6].

引用格式: 王帅, 于洋, 吕敬. 基于多项式级数的小天体表面参数化表征方法. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2019, 49: 084507

Wang S, Yu Y, Lv J. Large-scale modeling of parametric asteroid surfaces using polynomial series (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, 2019, 49: 084507, doi: [10.1360/SSPMA-2019-0011](https://doi.org/10.1360/SSPMA-2019-0011)

近年来对小天体地质构造的研究发现, 大多数小天体具有不对称和不规则的形貌、质量分布, 这无疑增加了建立小天体表面精确的连续三维模型的技术难度, 也将是本文尝试探索解决的核心问题. 而在小天体的形貌测绘以及三维模型重构领域中, 前人主要利用掩星数据、热数据和雷达数据来实现小天体三维模型的重构, 建立多面体模型^[7]. 对于太阳系中的小天体的表面运动, 应用最广泛的方法就是将它们的表面离散成三角网格, 从而进行表面建模的方法, 这也被称为多面体方法^[8-11]. 最近, Yu等人^[12,13]也简单地在多面体模型的基础上对小天体表面进行了多项式拟合, 但是, 他们的工作不是在小天体的表面整体都采用多面体级数生成.

在此之前, 描述不规则几何形状的数学方法已经在医学影像学科中得到了发展. 球面谐波函数已成功应用于医学中以描述器官形状^[14]. 球面谐波函数是一种典型的参数化任意曲面建模方法, 它将曲面函数扩展为谐波级数, 并通过迭代拟合方法计算系数. 但球面谐波函数方法具有相对复杂的表示形式, 在处理碰撞检测问题上存在一定的缺陷, 而计算效率上也难以满足星载实时计算的需求^[14].

基于上述原因, 本文提出了一种基于多项式级数的建模方法, 第2节介绍了利用CALD算法将小天体的样本点数据映射到单位球面上并且基于多项式级数建立小天体的形状模型的过程, 第3节介绍了利用LSMR算法求解多项式级数的系数, 第4节讨论了选取不同的修正参数对小天体重构精度的影响, 第5节对本文的工作进行了总结.

2 表面建模

2.1 表面参数化

表面参数化是在小天体表面的每个顶点坐标 $\mathbf{r} = (u, v, w)^T$ 与单位球面坐标 (x, y, z) 之间建立一个一对一的映射关系. 本文使用 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ 来表示这个映射关系. 考虑到小天体顶点坐标为 $\mathbf{r} = (u, v, w)^T$, 这个映射可以表示为

$$\mathbf{r}(x, y, z) = (u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z)). \quad (1)$$

表面参数化的关键步骤就是通过最小化面积失真将其表面映射到单位球体上. 其中一个方法是由

Brechbühler等人^[15]提出来的. 然而, 它并不适用于一般的三角形表面参数化方法. Sheffer等人^[16]提出的另一种方法是通过解决约束最小化问题来创建保面积映射. 然而, 这种方法非常缓慢, 而且对于具有几百个以上顶点的网格并不适用. 最近, Praun和Hoppe^[17]提出了一种有效的球面映射方法, 这种方法可以在不考虑面积失真的情况下最小化矢量长度的失真. 然而, 不受控制的区域保面积映射经常引入相对较大的长度失真, 因此, 本文采用Shen等人^[18]在Praun和Hoppe工作的基础上提出的同时控制面积和长度失真的CALD算法.

CALD算法从初始参数化开始, 通过迭代逐渐改善球面网格质量, 以便更好地进行参数化. 该算法包含初始参数化、局部平滑算法和全局平滑算法三个关键组成部分. 初始参数化步骤是Brechbühler的方法^[15]对三角形网格的扩展. CALD算法通过一种新的局部平滑算法和全局平滑算法来迭代提高参数化的质量. 局部平滑步骤主要是通过求解线性系统来最小化本地子网格中的面积失真成本, 并同时控制其最差的长度失真成本. 全局平滑算法是通过计算所有网格顶点的面积失真成本的分布, 使它们在整个球面上实现均衡分布. 整体算法将局部和全局方法结合在一起, 并交替执行每种算法, 直到获得解决方案.

图1展示了利用CALD算法对小行星形状模型实现球面参数化的仿真算例.

图1给出了利用CALD算法为小行星形状模型实现球面参数化的算例. 其中, 六个小行星分别为: (a) (216) kleopatra, (b) (1620) geographos, (c) (1998) ky26, (d) (433) Eros, (e) (2063) bacchus, (f) (6489) golevka. 在(a)–(f)的每个小行星模型中, 左边的图表示小行星表面, 中间的图表示初始参数化, 右边的图表示最终的球面参数化. 在每种情况下, 最终映射比初始映射有着明显的改进.

表1具体给出了小行星形状模型初始参数化与最终实现球面参数化的面积失真成本. 在每一种情况下, 我们可以发现初始映射并不理想. 但是, 使用CALD算法实现最终的球面参数化之后, 面积失真成本基本都分布在“1”附近, 映射有着明显的改善.

球面参数化的结果是在小行星表面上每个顶点 $\mathbf{r}(u, v, w)$ 与单位球面坐标 (x, y, z) 之间建立了一个双射映射. 使用 $\mathbf{r}(u, v, w)$ 表示这样的映射, 也就是说, 根据

图 1 CALD算法实现球面参数化. (a) (216) kleopatra; (b) (1620) geographos; (c) (1998) ky26; (d) (433) Eros; (e) (2063) bacchus; (f) (6489) golevka

Figure 1 Using CALD algorithm to realize spherical parameterization. (a) (216) kleopatra; (b) (1620) geographos; (c) (1998) ky26; (d) (433) Eros; (e) (2063) bacchus; (f) (6489) golevka.

表 1 球面参数化的面积失真成本

Table 1 The area distortion cost of spherical parameterization

小天体	初始参数化(C_a)	最终的球面参数化(C_a)
(216) kleopatra	3362.608701	1.380304
(1620) geographos	1.770708	1.322214
(1998) ky26	2.539985	1.251203
(433) Eros	1.504304	1.216207
(2063) bacchus	1.606943	1.206612
(6489) golevka	2.196672	1.564225

映射, 用球坐标 (x, y, z) 参数化 $\mathbf{r}$. 考虑到小天体空间中 $\mathbf{r}$ 的坐标 x , y 和 z , 映射可以表示为

$$\mathbf{r}(u, v, w) = \begin{pmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{pmatrix}. \quad (2)$$

曲面参数化的关键思想是实现参数空间的均匀分

布, 以便在后面的步骤中获得小行星表面与单位球面之间的对应关系.

2.2 多项式级数表征方法

任何连续函数都可以近似表示为多项式级数的形式. 多项式基函数在球面上是连续、单值和完整的一个无限函数集合. N 阶的多项式级数 $f(x, y, z)$ 定义为如下形式:

$$f(x, y, z) = \sum_{k=0}^N \sum_{i=0}^k \sum_{l=0}^i a_{il}^k x^{k-i} y^{i-l} z^l. \quad (3)$$

多项式级数具有完备性和从粗到细的层次结构等性质, 这使得它们成为基本函数的自然选择来表示小天体到单位球面的映射关系. 但是, 多项式级数的非正交性会增大模型的误差. 为了进一步缩小模型误差, 本文基于原多项式级数, 使用图2所示球坐标的符号约定, 提出了如下形式的表示形式:

图 2 球坐标的符号约定

Figure 2 The symbol for spherical coordinates.

$$f(x, y, z) = \sum_{k=0}^N \alpha_k \left(\sum_{i=0}^k \sum_{l=0}^i a_{il}^k x^{k-i} y^{i-l} z^l \right), \quad (4)$$

其中, α_k 为本文提出的用于减小模型误差的修正参数.

多项式级数展开需要提前得到小天体映射到单位球面上的坐标. 小天体表面的参数化可以表示为 $\mathbf{r}(x, y, z) = (u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z))^T$, 其中, $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$ 和 $w(x, y, z)$ 是定义在单位球面上的函数. 为了描述小天体的表面, 只需要利用多项式级数展开上面的三个函数. 因此, 展开形式为

$$\mathbf{r}(x, y, z) = \sum_{k=0}^N \alpha_k \left(\sum_{i=0}^k \sum_{l=0}^i \mathbf{a}_{il}^k x^{k-i} y^{i-l} z^l \right), \quad (5)$$

其中, $\mathbf{a}_{il}^k = (a_{il}^{kx}, a_{il}^{ky}, a_{il}^{kz})$ 是要求解的系数矩阵.

多项式级数展开的任务是计算系数矩阵 $\mathbf{a}_{il}^k$, 直到达到用户期望的程度. 利用这些系数可以实现小天体表面模型的重构. 理论上, 我们使用的系数越多, 重构的精度就会越高. 并且, 一阶的重构总是一个椭球. 图3提供了一个小行星表面及其多项式重构的示例.

图3中(a)为(1620) geographos小天体的表面网格. (b)–(d)分别为(1620) geographos小行星利用1阶、5阶、12阶系数实现的多项式重构模型. 因此, 一组系数实际上形成了一个小行星表面的描述.

3 数值算法

在实现表面参数化之后, 我们建立了小天体表面上每个顶点 $\mathbf{r} = (u, v, w)$ 与单位球面坐标 (x, y, z) 之间的双射映射. 本文使用 $\mathbf{r}(x, y, z)^T$ 来表示小天体表面顶点与单位球面之间的映射关系, 也就意味着表面上的点 $\mathbf{r}$ 是用 (x, y, z) 实现参数化. 由于小天体的顶点 $\mathbf{r}$ 在空间中

图 3 (1620) geographos小行星表面及其多项式重构. (a) (1620) geographos; (b) 一阶重构; (c) 五阶重构; (d) 十二阶重构

Figure 3 The surface of (1620) geographos and its polynomial reconstruction. (a) (1620) geographos; (b) first order reconstruction; (c) fifth-order reconstruction; (d) twelve-order reconstruction.

的坐标为 x , y 和 z , 映射可以表示为: $\mathbf{r}(x, y, z) = (u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z))^T$. 具体表达式为

$$\mathbf{r}(x, y, z) = \begin{cases} u(x, y, z) = \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^k \sum_{l=0}^i a_{il}^{kx} x^{k-i} y^{i-l} z^l, \\ v(x, y, z) = \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^k \sum_{l=0}^i a_{il}^{ky} x^{k-i} y^{i-l} z^l, \\ w(x, y, z) = \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^k \sum_{l=0}^i a_{il}^{kz} x^{k-i} y^{i-l} z^l, \end{cases} \quad (6)$$

其中, $\mathbf{r}(x, y, z)$ 为小天体样本点数据坐标 (u, v, w) . $a_{il}^{kx}, a_{il}^{ky}, a_{il}^{kz}$ 是本文下一步要求解的多项式级数的系数. (x, y, z) 是小天体样本点数据映射到单位球面上的坐标.

多项式级数法需要输入的数据包括小天体表面样本点坐标 (u, v, w) 和多项式级数需要展开的最大阶数 N , 其中 $1 \leq i \leq m$. 根据式(6), 我们推导得到如下形式的线性方程组:

$$\begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}_1, \\ \mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{b}_2, \\ \mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{b}_3, \end{cases} \Rightarrow \mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B}, \quad (7)$$

这里我们定义

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_1 &= (u_1, u_2, \dots, u_m)^T, \\ \mathbf{b}_2 &= (v_1, v_2, \dots, v_m)^T, \\ \mathbf{b}_3 &= (w_1, w_2, \dots, w_m)^T. \end{aligned}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_1 x_1 & \alpha_1 y_1 & \alpha_1 z_1 & \dots & \alpha_1 x_1^{n-1} y_1^{i-1} z_1^l \\ \alpha_2 & \alpha_2 x_2 & \alpha_2 y_2 & \alpha_2 z_2 & \dots & \alpha_2 x_2^{n-1} y_2^{i-1} z_2^l \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_m & \alpha_m x_m & \alpha_m y_m & \alpha_m z_m & \dots & \alpha_m x_m^{n-1} y_m^{i-1} z_m^l \end{pmatrix}_{m \times L},$$

$$\mathbf{x} = (a_{0x}, a_{1x}, a_{10}, \dots, a_{nx})_{L \times 1}^T,$$

$$\mathbf{y} = (a_{0y}, a_{1y}, a_{10}, \dots, a_{ny})_{L \times 1}^T,$$

$$\mathbf{z} = (a_{0z}, a_{1z}, a_{10}, \dots, a_{nz})_{L \times 1}^T,$$

$$L = n \times (n^2 + 6n + 11) / 6 + 1.$$

由于多项式级数的非正交性, 导致本文得到的矩阵 $\mathbf{A}$ 是大规模病态矩阵. 为了使求解出的多项式级数的系数矩阵 $\mathbf{a}_{il}^k$ 达到我们要求的标准, 本文将上述方程组的求解问题转化为如下形式的最小二乘问题:

$$\min_{\mathbf{x} \in R^{L \times 3}} \|\mathbf{A}\mathbf{X} - \mathbf{B}\|_2. \quad (8)$$

针对该最小二乘问题, 本文采用Fong和Saunders^[19]提出的LSMR算法解决该问题. LSMR算法主要

是基于Golub-Kahan双向对角化过程. 并且LSMR算法可以保证每次迭代的残差是单调递减的, 而相比于LSQR算法该算法可以更快地终止迭代. 基于上述原因, 本文采用LSMR算法求解多项式级数的求解问题.

本文使用的小天体的点面数据都是来自美国国家航空航天局(National Aeronautics and Space Administration, NASA)行星数据系统(Planetary Data System, PDS), 使用的计算机为搭载2.6 GHz CPU和12 GB RAM的联想Y430P. 该程序是在Windows 10操作系统中运行Matlab R2017a版本. 根据样本点数量的不同, 运行时间在从30 s到几小时不等. 图4给出了利用该算法建立的小天体的多项式模型.

图4给出了利用多项式级数实现小天体形状模型重构的算例. (a)为(216) kleopatra小天体, 样本点数据由2048个顶点和4092个面组成, 重构模型中多项式展开到22阶. (b)为(1620) geographos小天体, 样本点数据由8192个顶点和16380个面组成, 重构模型中多项式展开到35阶. (c)为(1998) ky26小天体, 样本点数据由2048个顶点和4092个面组成, 重构模型中多项式展开到22

图4 小天体的重构模型. (a) (216) kleopatra; (b) (1620) geographos; (c) (1998) ky26; (d) (433) Eros; (e) (2063) bacchus; (f) (6489) golevka

Figure 4 Reconstruction model of small celestial body. (a) (216) kleopatra; (b) (1620) geographos; (c) (1998) ky26; (d) (433) Eros; (e) (2063) bacchus; (f) (6489) golevka.

阶. (d)为(433) Eros小天体, 样本点数据由3897个顶点和7790个面组成, 重构模型中多项式展开到27阶. (e)为(2063) bacchus小天体, 样本点数据由2048个顶点和4092个面组成, 重构模型中多项式展开到22阶. (f)为(6489) golevka小天体, 样本点数据由2048个顶点和4092个面组成, 重构模型中多项式展开到22阶. 表2给出了模型误差.

其中, 设 x^* 为数值仿真的结果, 则 $b^* \triangleq Ax^*$, 定义如

表 2 模型误差

Table 2 Model error

小天体	e_{sum}	e_{max}
(216) kleopatra	0.009201	3.883887
(1620) geographos	0.007357	0.054517
(1998) ky26	0.009439	0.000566
(433) Eros	0.005609	0.377891
(2063) bacchus	0.007792	0.01279
(6489) golevka	0.02113	0.022253

下的几种误差:

$$e_{\text{sum}} = \|b^* - b\|_2 / \|b\|_2, \quad e_{\text{max}} = \max_{1 \leq i \leq m} |b_i^* - b_i|.$$

表2具体给出了小天体的多项式重构模型的总的相对误差和最大绝对误差. 在每一种情况下, 我们可以发现该算法的误差都在我们可以接受的范围之内, 实现了多项式级数对小天体表面模型的重构.

4 多项式系数修正

在完成小天体多项式模型的初步建立之后, 需要对建立的模型进一步优化. 为了选取合理的修正参数, 本文分析了几种不同修正参数下的模型误差. 我们选取(216) kleopatra小天体为研究对象并且多项式级数展开到22阶, 对建立的模型进行了数值仿真, 进而选取合适的修正参数优化模型. 图5给出了选取不同修正参数时(216) kleopatra小天体的重构模型.

图5中(216) kleopatra小天体的样本点数据由2048

图 5 修正参数对模型重构精度的影响

Figure 5 The influence of modified parameters on the precision of model reconstruction.

个顶点和4092个面组成. 模型(a)–(f)的修正参数 α_k 分别为 $1/k!$, 1 , e^k , 6^k , 10^k , $k!$. 为了进一步分析修正参数对模型精度的影响, 表3给出对应的模型误差.

通过分析表3数据, 可以发现修正参数对模型重构精度有着显著的影响. 当修正参数为 $1/k!$, 重构模型过程中方程组的条件数, 明显高于其他几种修正参数. 并且, 模型最终产生的误差相较于其他几种情况也比较大. 而当我们选择修正参数为 e^k 时, 无论是方程组的条件数和模型误差都有较好的改善. 因此, 选择适当的修正参数可以有效地减小模型误差. 通过上述分析, 本文

表 3 修正参数对模型重构精度的影响

Table 3 The influence of modified parameters on the precision of model reconstruction

修正参数	A的条件数	e_{sum}	e_{max}
$1/k!$	2.480×10^{40}	0.023342	6.866587
1	1.080×10^{21}	0.009201	3.883887
e^k	9.788×10^{21}	0.008976	3.871908
6^k	1.091×10^{24}	0.009825	3686919.
10^k	3.523×10^{25}	0.014497	4.325611
$k!$	2.649×10^{27}	0.028531	10.829981

发现该算法可以在一定的误差范围内, 建立小天体的通用性模型.

5 结论

本文参考医学以及计算机图形学领域对任意形状物体表面参数的建模研究, 提出了基于多项式级数的小天体表面模型. 首先, 本文利用同时控制面积和长度失真的CALD算法, 将小天体的样本点数据映射到单位球面上, 实现小天体表面参数化. 然后, 基于本文提出的多项式级数, 建立了小天体表面的参数模型, 并且将建模问题转化为大规模病态线性方程组的求解问题. 最后利用求解病态方程组的算法求解得到的方程, 最终实现基于多项式级数的小天体形状模型的重构. 本文还进一步通过分析修正参数对模型误差的影响, 选择适当的修正参数, 有效减小了模型误差.

同时, 本文也有一定的不足之处: 首先, 多项式级数的非正交性, 使我们建模过程中得到的方程组为大规模病态线性方程组, 影响了后续方程组求解的精度; 多项式模型对于形状较为复杂的小天体模型拟合效果较差.

参考文献

- Cunningham C J. Introduction to Asteroids: The Next Frontier. Richmond: Willmann-Bell, 1988. 1
- Cunningham C. Introduction to Asteroids: The Next Frontier. Virginia: Willmann-Bell, 1998
- Li J F, Zeng X Y, Zhang Y. Unique dynamics of asteroids (in Chinese). Mech Eng, 2016, 38: 603–611 [李俊峰, 曾祥远, 张韵. 小行星的奇特动力学. 力学与实践, 2016, 38: 603–611]
- Farquhar R, Kawaguchi J, Russell C, et al. Spacecraft Exploration of Asteroids: The 2001 Perspective. Tucson: The University of Arizona Press, 2002. 367–376
- Cheng A F, Santo A G, Heeres K J, et al. Near-earth asteroid rendezvous: Mission overview. J Geophys Res, 1997, 102: 23695–23708
- Baxansky A, Kiryati N. Calculating geometric properties of three-dimensional objects from the spherical harmonic representation. Pattern Recogn, 2007, 40: 756–770
- Đurech J, Carry B, Delbo M, et al. Asteroid Models from Multiple Data Sources. Tucson: The University of Arizona Press, 2015. 183–201
- Jiang Y, Zhang Y, Baoyin H. Surface motion relative to the irregular celestial bodies. Planet Space Sci, 2016, 127: 33–43, arXiv: 1605.06194
- Van Wal S, Scheeres D J, Tardivel S. High-fidelity small body lander simulations. In: 6th International Conference on Astrodynamics Tools and Techniques. 14–17 March 2016, Darmstadt, 2016
- Van Wal S, Tardivel S, Scheeres D. Parametric study of ballistic lander deployment to small bodies. J Spacecraft Rockets, 2017, 54: 1330–1355
- Van wal S, Tsuda Y, Yoshikawa K, et al. Prearrival deployment analysis of rovers on Hayabusa2 asteroid explorer. J Spacecraft Rockets, 2018, 55: 797–817
- Yu Y, Baoyin H X. Routing the asteroid surface vehicle with detailed mechanics. Acta Mech Sin, 2014, 30: 301–309
- Yu Y, Baoyin H. Modeling of migrating grains on asteroid's surface. Astrophys Space Sci, 2015, 355: 43–56
- Shen L, Chung M K. Large-scale modeling of parametric surfaces using spherical harmonics. In: Proceedings of Third International Symposium

- on 3D Data Processing. Chapel Hill: IEEE, 2006
- 15 Brechbühler C, Gerig G, Kübler O. Parametrization of closed surfaces for 3-D shape description. *Comput Vis Image Underst*, 1995, 61: 154–170
- 16 Sheffer A, Gotsman C, Dyn N. Robust spherical parameterization of triangular meshes. *Computing*, 2004, 72: 185–193
- 17 Praun E, Hoppe H. Spherical parametrization and remeshing. *ACM Trans Graph*, 2003, 22: 340
- 18 Shen L, Makedon F. Spherical mapping for processing of 3D closed surfaces. *Image Vis Comput*, 2006, 24: 743–761
- 19 Fong D C L, Saunders M. LSMR: An iterative algorithm for sparse least-squares problems. *SIAM J Sci Comput*, 2011, 33: 2950–2971

Large-scale modeling of parametric asteroid surfaces using polynomial series

WANG Shuai, YU Yang^{*} & LV Jing

School of Aeronautic Science and Engineering, Beihang University, Beijing 100191, China

In the last twenty years, numerous deep space probes have been sent to space to detect asteroids, comets and planetary satellites, indicating that small Solar System bodies have become one of the main targets for deep space exploration. Many of asteroids are remnants of the materials from which the solar system accreted. The asteroid contains information about the origins and development of the solar system. The size and shape of the asteroid contains their thermal, collision, and kinetic history, and is fundamental to the analysis of gravitational field and dynamics of the asteroid. Studies on the asteroid geological structure shows that most asteroids have asymmetric and irregular mass distributions. It posed a challenge in accurately modelling of such asteroids' surfaces. And for the solar system small bodies, the most widely-applied method to discretize their surfaces is the polyhedron method. However, the shape model of the asteroid obtained by polyhedron method is triangular mesh model. In order to study the dynamics of the asteroid's surface, we need to build a continuous, analytical model of asteroid surfaces. For these questions, the following research is done in this paper. Firstly, the CALD algorithm which controls both length distortion and area distortion is used to map the sample point data of the asteroid to the unit sphere. After obtaining the bijection relationship between the asteroid surface and the unit sphere, the polynomial series is used as the basis function to characterize the bijection relationship. Then, the sample point coordinates and the corresponding coordinates on the unit sphere are substituted into the polynomial model established to obtain a set of large-scale linear equations. Since the fundamental function of polynomial series is non-orthogonal, the system is a pathological equation. In this paper, the method of solving large-scale ill equations is adopted to control the error of solving equations within acceptable range. Finally, after the establishment of the polynomial model, this paper discusses in detail the modified parameters in the polynomial model that affect the model accuracy.

small celestial body, polynomial, surface modeling

PACS: 96.30.Ys, 95.75.mn, 02.60.Ed

doi: [10.1360/SSPMA-2019-0011](https://doi.org/10.1360/SSPMA-2019-0011)