欠驱动双足机器人的指数稳定周期行走

王鹤霖, 张皓, 王祝萍, 陈启军*

同济大学电子信息与工程学院, 上海 201804

* E-mail: qjchen@tongji.edu.cn

收稿日期: 2018-05-28; 接受日期: 2018-09-29; 网络版发表日期: 2019-01-10

国家自然科学基金重点项目(批准号: 61733013)、上海市科学技术委员会项目(编号: 16JC1401200)和中央高校基本科研业务费专项资金资助

摘要 步行机器人环境适应性强、结构复杂、运动控制难. 本文研究了基于控制Lyapunov函数和混杂零动态控制的五关节欠驱动双足机器人RABBIT的指数稳定周期步态的行走方法. 根据拉格朗日原理建立了机器人腿的混杂动力学模型, 并对系统进行了输入/输出线性化处理. 结合零动态的思想, 构造了控制Lyapunov函数, 设计了使混杂模型实现指数稳定的状态反馈控制器, 利用限制Poincare的原理, 证明了其周期轨道的指数稳定性. 仿真结果验证该方法的有效性.

关键词 欠驱动双足机器人, 周期轨道指数稳定, 控制Lyapunov函数, 混杂零动态, 轨迹跟踪

1 引言

近年来, 机器人作为最具发展前景的新兴技术之一, 已经逐步从传统的工业领域向生活服务、教育娱乐、医疗康复等多个领域迅速延伸和发展. 这就对机器人在动态、未知、非结构复杂环境下的任务完成提出了更高的要求. 因此对环境的适应性、感知能力、自主学习和控制、友好的人机交互等方面均成为机器人领域的研究热点与重点^[1-3].

足式移动机器人以其移动灵活度高、环境适应性强、运动范围广等优势受到广泛的关注和研究. 相比多足等腿足式移动机器人, 双足机器人模仿人类的行走步态, 能耗低, 可以实现多工况、多任务的行走模式, 极大提高了双足行走领域的整体运动性能, 能进

一步揭示人类双足行走的本质运动规律^[4-6]. 目前国内外在系统设计、步态规划和稳定性等方面都有许多研究成果. 日本本田公司的仿人机器人ASIMO, 步速6 km/h, 可以完成弯腰、8字行走、上下楼梯等多个动作(ASIMO frequently asked questions, <http://www.honda.co.jp/ASIMO/>, 2013). Aldebaran Robotics公司开发了小型仿人机器人NAO, 集成了听觉、视觉、红外、触觉等多个传感和测量模块, 可用于控制方法的改进和研究^[7]. Boston Dynamics公司团队在研发了一系列足式机器人Big Dog, Wildcat, Spot Mini, Petman等基础上, 于2016年发布了可进行户外作业的Atlas机器人, 目前可以稳定地完成雪地行走、搬运重物、空翻、草地跑步等多个任务^[8-10]. 国内清华大学开发了仿人机器人THBIP, 哈尔滨工业大学研发了HIT系列机

引用格式: 王鹤霖, 张皓, 王祝萍, 等. 欠驱动双足机器人的指数稳定周期行走. 中国科学: 技术科学, 2019, 49: 288-300

Wang H L, Zhang H, Wang Z P, et al. Exponentially stable periodic walking of under-actuated biped robot (in Chinese). Sci Sin Tech, 2019, 49: 288-300, doi: 10.1360/N092018-00172

机器人等, 促进了足式机器人产业的蓬勃发展^[11~13].

基于仿人机器人是一个非线性、多变量、强耦合的系统, 这就给双足行走控制带来一定难度, 尤其是动态行走成为双足行走的难点之一. 目前有基于动态平衡理论、能量塑造、时间放缩、混杂零动态等多种控制策略. Hodgins等人^[14]研究了步长调整控制策略. 通过在运动周期内, 调整奔跑速度、高度和时间3个参数, 完成了双足机器人的动态平衡控制. 此方法主要针对不平坦路面的稳定行走问题. Spong等人^[15]研究了系统总能量平滑收敛到目标极限环能量的条件, 从而扩大系统收敛域, 但是对于机器人的前进速度无法进行直接控制. Chevallereau等人^[16]把时间放缩控制引入到平面欠驱动机器人的周期性参考轨迹的跟踪控制, 并且证明了步态存在性、唯一性和收敛性的证明. 由于引入了虚拟时间变量, 使得关节目标轨迹的规划方式发生了变化. 混杂零动态研究当设定输出为零时的各个离散子系统的内部动态. Westervelt等人^[17]利用零动态原理研究了平面三连杆机器人的行走控制, 但是有时虚拟约束的设计会带来混杂零动态子系统是否存在的问题.

因为稳定的双足行走表现为周期运动, 那么周期步态解的稳定性和鲁棒性是能否实现稳定运动的关键衡量指标. 庞加莱回归映射(poincare return map)常用来分析周期轨道的稳定性, 主要将其转换为平衡点处的稳定性. Grizzle等人^[18]用扩展Poincare方法实现了点足机器人的跳跃和奔跑. 考虑到实际工况中, 机器人受环境参数变化敏感, 当受到摄动或模型不确定时, Montano等人^[19]基于 H_∞ 输出反馈提出了单侧约束条件.

以上的研究受到机器人的机构、行走目标、环境场合等多个因素的制约^[20~22], 本文的研究对象是欠自由度为1的欠驱动双足机器人RABBIT. 欠驱动区别于全驱动主要在于前者缺乏与之对应的控制输入, 只能依靠关节运动学约束获得动作轨迹, 这就会增加控制的难度.

基于此本文研究了一种控制Lyapunov函数(ES-CLF)和混杂零动态结合的控制方法^[23], 实现了五关节欠驱动机器人RABBIT的指数稳定周期步态的双足行走. 首先建立全尺寸的拉格朗日动力学模型, 使之便于参数化. 接着证明了指数稳定周期轨道的判定准则. 结合零动态的控制策略, 设计了状态反馈控制器, 实现了

关节预设轨迹的跟踪. 在优化方面利用了力矩最小准则. 主要贡献在于:

- (1) 总结了以欠驱动双足行走为代表的一类混杂系统实现指数周期稳定的一般方法;
- (2) 通过扩展状态变量进行输入\输出线性化, 在Lyapunov原理基础上直接采用2-范数构造了ES-CLF, 给出了混杂系统指数稳定的充分条件;
- (3) 进行动力学参数摄动情况下的仿真, 进一步验证控制方法的有效性.

2 模型建立

2.1 动力学描述

本文采用具有代表一类混杂系统的五关节欠驱动双足机器人RABBIT作为研究对象, 其关节位形坐标及参数的定义如图1所示, 包含两条带膝关节的腿和躯干. 其中, 大腿与小腿等长, 长度为 L , 质量分别为 m_l 和 m_s . 躯干长度为 L_T , 质量为 M_T .

一个完整的步行阶段分为摆动和对地碰撞, 假设摆动腿与地面碰撞为完全弹性碰撞, 且碰撞时无侧移, 根据拉格朗日原理, 分别写出摆动阶段的动力学方程和碰撞阶段的映射.

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = Bu, \quad (1)$$

其中, $q = [q_1, q_2, q_3, q_4, q_5]^T$ 为各个关节的角位移, 取顺时针为正; $\dot{q} = [\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, \dot{q}_4, \dot{q}_5]^T$ 为各关节的角速度, $M(q) \in R^{5 \times 5}$ 为惯性矩阵, $C(q, \dot{q}) \in R^{5 \times 5}$ 为离心力和科氏力矩阵, $G(q) \in R^{5 \times 1}$ 为重力矩阵, u 为机器人各个关节的驱动力矩, $u = [u_1, u_2, u_3, u_4, 0]^T \in R^{5 \times 1}$ 力矩, 其中, u_3 和 u_4 表示髋关节与支撑腿与摆动腿间的驱动力矩, u_1 和 u_2 表示两个膝关节的控制力矩, 而机器人的上肢不添加驱动力矩. B 为力矩分配矩阵, 这里欠自由度为1, 故

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \in R^{5 \times 5}.$$

分别用 $-$ 和 $+$ 表示碰撞前后时刻, 那么碰撞阶段的映射为

图1 五关节RABBIT机器人示意图. (a) 坐标定义; (b) 参数定义

$$\begin{cases} q^+ = q^-, \\ \dot{q}^+ = \Delta(\dot{q}^-), \end{cases} \quad (2)$$

其中, Δ 为碰撞映射.

2.2 混杂系统模型

为了利用非线性系统的相关理论控制和分析欠驱动双足行走, 可以考虑把机器人的动力学模型写成混杂系统的形式, 又根据摆动阶段的连续性和对地碰撞的离散性, 可以分别采用连续微分方程和代数映射表示.

首先定义状态变量 $x = [q, \dot{q}]^T$, 则 $x^+ = [q^+, \dot{q}^+]^T$, $x^- = [q^-, \dot{q}^-]^T$, 则混杂系统模型如下:

$$\Sigma: \begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u, & x \notin S, \\ x^+ = \Delta(x^-), & x^- \in S, \end{cases} \quad (3)$$

其中, S 为碰撞切换曲面, $f(x)$, $g(x)$, Δ 均为局部 Lipschitz, 且

$$f(x) := \begin{bmatrix} \dot{q} \\ M^{-1}(q)[-C(q, \dot{q})\dot{q} - G(q)] \end{bmatrix},$$

$$g(x) := \begin{bmatrix} \dot{q} \\ M^{-1}(q)B \end{bmatrix}.$$

为了便于后面进行系统稳定性分析, 这里将状态变量划分出可控部分 $x \in X$ 和不可控部分 $z \in Z$, X 和 Z 为欧式空间的子集.

则式(3)扩展为

$$\Sigma|_H: \begin{cases} \dot{x} = f(x, z) + g(x, z)u, & (x, z) \in D \setminus S, \\ \dot{z} = p(x, z), \\ x^+ = \Delta_x(x^-, z^-), & (x^-, z^-) \in S, \\ z^+ = \Delta_z(x^-, z^-), \end{cases} \quad (4)$$

其中, p 为局部 Lipschitz 连续, 定义域 D 为 $X \times Z$ 的闭子集, $D = \{(x, z) \in X \times Z : h(x, z) \geq 0\}$, 碰撞截面 $S = \{(x, z) \in X \times Z : h(x, z) = 0, \dot{h}(x, z) < 0\}$, 这里, $h : X \times Z \rightarrow \mathbb{R}$ 且李导数 $L_g h = 0$. 其混杂自动机模型如图2所示.

3 控制策略

本文利用混杂零动态和控制 Lyapunov 稳定判据的原理, 通过构造指数稳定的控制 Lyapunov 函数, 设计混杂系统的指数稳定控制器, 实现欠驱动双足机器人周期步态稳定的控制目标.

所谓混杂零动态是指将主动关节的目标轨迹设计为欠驱动关节的一个函数, 经过反馈线性化, 从而实现主动关节的实际轨迹逐渐收敛到目标轨迹, 并保证状态切换时, 主动与欠驱动关节的约束关系不变. 混杂零动态也是对非线性系统中零动态的扩展, 即保持输出函数一直为0.

3.1 控制 Lyapunov 函数的构造

首先考虑混杂系统(4)的连续部分, 如式(5), 可以先实现非线性系统的周期轨道的指数稳定.

$$\Sigma|_N: \begin{cases} \dot{x} = f(x, z) + g(x, z)u, \\ \dot{z} = p(x, z). \end{cases} \quad (5)$$

当可控部分状态量 $x \in X$ 人为置0时, 此时系统的状态称为零动态.

定义1 (指数控制 Lyapunov 函数^[24,25]) 对于系统(5), 如果 $\forall (x, z) \in X \times Z$, 常数 $C_1, C_2, C_3 > 0$, s.t.

$$C_1 \|x\|^2 \leq V(x) \leq C_2 \|x\|^2, \quad (6)$$

$$\inf \{L_f V(x, z) + L_g V(x, z)u + C_3 V(x) \leq 0\}, \quad (7)$$

那么 $V(x)$ 称为指数稳定控制 Lyapunov 函数(ES-CLF).

图2 混杂自动机模型

这里采用零动态和和控制Lyapunov函数相结合, 当候选的Lyapunov函数 V 为一个ES-CLF, 对应的控制律为

$$u(x, z) = \{u \in U : L_f V(x, z) + L_g V(x, z)u + C_3 V(x) \leq 0\}, \quad (8)$$

其中, $x \in X \times Z$, $u(x, z) \in K(x, z)$ 且为局部Lipschitz连续.

定理1 (指数稳定周期轨道的判定准则) 对于非线性系统(5), 如果 V 是一个ES-CLF且满足 $\forall u(x, z) \in K(x, z)$, 那么轨道 $O = \iota_o(O_Z)$ 为指数周期稳定的, 其中, O_Z 为零动态面 Z 的一个指数周期稳定轨道.

证明: 定义系统(5)候选的ES-CLF为

$$V(x, z) = V_1(x) + V_2(z), \quad (9)$$

那么 $V_1(x)$ 为一个ES-CLF, 即

$$C_1 \|x\|^2 \leq V_1(x) \leq C_2 \|x\|^2, \quad (10)$$

$$\inf\{L_f V(x, z) + L_g V(x, z)u + C_3 V_1(x) \leq 0\}. \quad (11)$$

由于 O_Z 为指数稳定周期轨道. 根据定义1, 可得对于 $\forall C_4, C_5, d > 0$, 在 O 的邻域内, 满足

$$C_4 \|z\|^2 \leq V_2(z) \leq C_5 \|z\|^2, \quad (12)$$

$$\dot{V}_2(z) \leq -dV_2(z). \quad (13)$$

下面对 V 求导可得

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, z) &= \frac{\partial V}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial V}{\partial z} \dot{z} \\ &= V_1(x) \left[\frac{\partial V_1(x)}{\partial x} (f(x, z) + g(x, z)u) \right] \\ &\quad + V_2(z) \left[\frac{\partial V_2(z)}{\partial z} \dot{z} \right] \\ &\leq -C_3 V_1(x) - dV_2(z) \\ &\leq -\bar{C} (V_1(x) + V_2(z)) \\ &= -\bar{C} V(x, z), \end{aligned} \quad (14)$$

其中,

$$0 \leq \bar{C} \leq \min\{C_3, d\}, \quad C_2 \|x\|^2 V_1(x) \leq C_2 \|x\|^2.$$

(1) 若 $C_2 \|x\|^2 \geq C_5 \|z\|^2$, 则

$$\max\{C_2 \|x\|^2, C_5 \|z\|^2\} = C_2 \|x\|^2,$$

那么

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, z) &\leq -\bar{C} (V_1(x) + V_2(z)) \leq -2\bar{C} C_2 \|x\|^2, \\ V(x, z) &\leq e^{-2\bar{C} C_2 t} V(x_0, z_0) \quad (t \in R^+). \end{aligned} \quad (15)$$

(2) 若 $C_2 \|x\|^2 \leq C_5 \|z\|^2$, 则

$$\max\{C_2 \|x\|^2, C_5 \|z\|^2\} = C_5 \|z\|^2,$$

那么

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, z) &\leq -\bar{C} (V_1(x) + V_2(z)) \leq -2\bar{C} C_5 \|z\|^2, \\ V(x, z) &\leq e^{-2\bar{C} C_5 t} V(x_0, z_0) \quad (t \in R^+). \end{aligned}$$

综合情况(1)和(2), 故 $\exists \alpha, \beta > 0$, s.t.

$$\begin{aligned} \alpha(\|x\|^2 + \|z\|^2) &\leq V(x, z) \leq \beta(\|x\|^2 + \|z\|^2), \\ V(x, z) &\leq \frac{1}{\alpha} e^{-2\bar{C}\beta t} V(x_0, z_0), \end{aligned} \quad (16)$$

其中, 取常数 $\alpha = \min\{C_1, C_4\}$, 常数 $\beta = \max\{C_2, C_5\}$.

由2-范数表示欧式空间两点的距离, 得

$$\|(x, z)\|_o^2 = \|(x, z) - (x_0, z_0)\|_o^2 = \|x\|^2 + \|z - z_0\|^2. \quad (17)$$

代入不等式(16), 可得

$$\|x(t)\| \leq \sqrt{\frac{1}{\alpha} e^{-2\bar{C}\beta t} V(x_0, z_0)}$$

和

$$\|z(t)\| \leq \sqrt{\frac{1}{\alpha} e^{-2\bar{C}\beta t} V(x_0, z_0)},$$

即证明了定理1成立, 此时轨道 O 为指数周期稳定.

3.2 输入\输出线性化

有了周期轨道稳定性的判定准则后, 可以进一步研究混杂系统的指数稳定条件. 首先利用反馈线性化的方法将混杂系统(4)分解成内部动态和外部线性两部分. 基本思路是对输出的每一个元素对时间求导来推导出所需的输入、输出关系.

令 θ 为状态向量, 则混杂系统的仿射控制部分可以写成

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \theta \end{bmatrix} = f(\theta, \dot{\theta}) + g(\theta, \dot{\theta})u. \quad (18)$$

假设输出 $y(\theta)$ 的相对阶为2, 则

$$\dot{y}(\theta, \dot{\theta}) = L_f \dot{y}(\theta, \dot{\theta}), \quad (19)$$

$$\ddot{y}(\theta, \dot{\theta}) = L_f^2 \dot{y}(\theta, \dot{\theta}) + L_g L_f \dot{y}(\theta, \dot{\theta}) u(\theta, \dot{\theta}). \quad (20)$$

设计控制律

$$u(\theta, \dot{\theta}) = -(L_g L_f \dot{y}(\theta, \dot{\theta}))^{-1} (L_f^2 \dot{y}(\theta, \dot{\theta}) - v), \quad (21)$$

此时有

$$\ddot{y}(\theta, \dot{\theta}) = L_g L_f \dot{y}(\theta, \dot{\theta}) v := l(y, \dot{y}, z) v. \quad (22)$$

扩展状态变量 $\lambda = [\lambda_1 \ \lambda_2]^T = \left[\frac{1}{\varepsilon} y \ \dot{y} \right]^T$, 那么

$$\begin{aligned} \dot{\lambda} &= \begin{bmatrix} \dot{\lambda}_1 \\ \dot{\lambda}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\varepsilon} y \\ \dot{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ l(y, \dot{y}, z) v \end{bmatrix} \\ &:= F\lambda + G\dot{v}, \end{aligned} \quad (23)$$

其中, (F, G) 为可控的, I 为单位矩阵, 参数 $0 < \varepsilon < 1$, 影响指数收敛速度. 式(23)表明实现了输入到输出的线性化过程.

注1: 输入/输出线性化的过程实现了欠驱动系统部分反馈线性化, 使其外部部分被线性化了, 进而去跟踪关节预设轨迹, 而系统内部为自治系统, 使其稳定到一定的周期轨道.

3.3 基于ES-CLF的反馈控制器设计

本节在前两节给出周期轨道指数稳定判别条件和构造控制Lyapunov函数的基础上, 设计了基于零动态和ES-CLF的反馈控制器.

对于式(23), 令 $v = -l^{-1}(\lambda, z) K \lambda$, 其中, $K = [K_p \ K_d]^T$ 为增益矩阵, 代入式(23), 得

$$\dot{\lambda} = (F + GK)\lambda = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -K_p & -K_d \end{bmatrix} \lambda := A\lambda. \quad (24)$$

由于矩阵 A 为Hurwitz, 根据Lyapunov稳定性理论可知, 要使式(24)在平衡点处为指数稳定的充要条件为存在一个正定对称矩阵 $P = P^T$, s.t. 二次型 $V = \lambda^T P \lambda$ 对时间 t 的导数小于0. 因此结合式(23), 可以得到

$$\frac{dV}{dt} = \lambda^T (F^T P + PF) \lambda + \lambda^T (2G\dot{v}) \lambda < 0. \quad (25)$$

由式(25)和定理1, 令

$$L_f V(\lambda, z) = \lambda^T (F^T P + PF) \lambda, \quad (26)$$

$$L_g V(\lambda, z) = 2\lambda^T P G l(\lambda, z), \quad (27)$$

可以得到

$$\inf \{ L_f V(\lambda, z) + L_g V(\lambda, z) v + \gamma V(\lambda) \} < 0.$$

结合周期轨道指数稳定的判定准则, 假设存在零动态面 $Z = \{(\theta, \dot{\theta}) | v(0) = 0, L_f v(\theta, \dot{\theta}) = 0\}$, 设计一个状态反馈控制器 $u(\theta, \dot{\theta})$ 可以使 Z 为不变流形, 且混杂系统的连续部分可以达到指数稳定, 其控制律为

$$u(\theta, \dot{\theta}) = -L_g L_f v(\theta, \dot{\theta}) + L_f^2 y(\theta, \dot{\theta}) + v. \quad (28)$$

注2: 针对欠驱动双足机器人代表的一类典型的混杂系统, 如式(4), 按照定理1设计的反馈控制器可以保证系统的连续部分是指数稳定的, 还需要进一步证明连续部分的流形可以穿越切换截面的子流形, 从而把混杂系统的指数周期性轨道吸引到混杂零动态曲面上来.

4 稳定性分析

庞加莱回归映射是分析周期轨道稳定性的有力工具, 其基本思想是用平衡点处的稳定性来代替周期轨道的稳定性. 本文采用限制庞加莱回归映射的方法, 进一步分析离散部分的指数稳定性.

由上一节的结论, 分别假设 $f(0, z) = 0$ 和 $\Delta_x(0, z) = 0$ 均s.t. 零动态面 Z 为不变子流形, 此时的混杂零动态为

$$H|_Z: \begin{cases} \dot{z} = q(0, z), & z \in Z \setminus S \cap Z, \\ \dot{z} = \Delta_z(0, z^-), & z \in S \cap Z. \end{cases} \quad (29)$$

于是在控制律 $u(x, z) \in K(x, z)$ 下的混杂系统为

$$\Sigma|_{HZ}: \begin{cases} \dot{x} = f(x, z) + g(x, z)u(x, z), & (x, z) \in D \setminus S, \\ \dot{z} = p(x, z), \\ (x^+, z^+) = \Delta(x^-, z^-), & (x^-, z^-) \in S, \end{cases} \quad (30)$$

其中, $\Delta(x, z) = (\Delta_x(x, z), \Delta_z(x, z))$, D, S 分别为定义域和碰撞截面.

注3: 研究混杂周期轨道的指数稳定性可以转化为证明Poincare截面上的不动点处的指数稳定性. 类似于连续部分的稳定性证明方法, 需要选取基于限制

Poincare映射 $\rho: S \cap Z \rightarrow S \cap Z$ 的候选控制Lyapunov函数, 且 $\rho(z^*) = z^*$, 从而确保连续系统的流可以穿越碰撞截面 S .

引理2 (混杂周期轨道指数稳定的性质) 假设 O_z 为混杂系统 $(30) \sum_{HZ}$ 的一个穿越 $S \cap Z$ 的指数稳定周期轨道, 且连续部分可以找到一个ES-CLF的 V , 在 $v(x, z) \in K(x, z)$ 控制下, 必然存在两个正常数 $L_{T_I}, A_I \in R^+$, s.t. $\forall (x, z) \in B_\delta(0, 0) \cap S$, 有

$$\|T_I(x, z) - T_\rho(z)\| \leq L_{T_I} \|x\|, \quad (31)$$

$$\|P_z(x, z) - \rho(z)\| \leq A_I \|x\|, \quad (32)$$

其中, $T_I(x, z) := \inf\{t \geq 0 : \varphi_t(x, z) \in S\}$ 为混杂系统 $\Sigma|_{HZ}$ 的时间碰撞函数, $T_\rho(z)$ 为混杂零动态 $H|_z$ 的时间碰撞函数, $P_z(x, z) = \varphi_{T_I(x, z)}(\Delta(x, z))$, 引理的证明见文献[13].

定理3 (混杂系统指数稳定的充分条件) 假设 O_z 为一个穿越曲面 $S \cap Z$ 的一个指数稳定周期轨道, 对于系统(31)的连续部分, 如果存在一个ES-CLF的 V , s.t. $\forall u(x, z) \in K(x, z)$, 轨道 $O = \iota_o(O_z)$ 为混杂系统 $\sum_{HZ}$ 的一个指数稳定周期轨道.

证明: 因为周期轨道 O_z 为指数稳定的, 则 $\forall z \in B_\delta(0) \cap (S \cap Z)$, $\exists \delta > 0$, s.t. 限制Poincare映射 $\rho: B_\delta(0) \cap (S \cap Z) \rightarrow B_\delta(0) \cap (S \cap Z)$ 恒成立. 又因为 $z_{k+1} = \rho(z_k)$ 指数稳定, 即对于 $\forall \|z_0\| \leq \alpha^*$, 有 $\|z_k\| \leq \beta^* (k = 1, 2 \dots M)$, 其中, $\alpha^* \leq \beta^*$. 故对于 $\delta > 0$, 存在正常数 γ_1, γ_2 和一个 V_ρ 定义在 $B_\delta(0) \cap (S \cap Z)$ 上, s.t.

$$\gamma_1 \|z_k\|^2 \leq V_\rho(z_k) \leq \gamma_2 \|z\|^2, \quad (33)$$

$$V_\rho(z_{k+1}) - (1 + \pi_k) V_\rho(z_k) \leq 0, \quad (34)$$

其中, $V_\rho(z_0) \leq \gamma_0, \gamma_0 = \gamma_2 \alpha^*, \pi_k \in (-1, 0]$.

假设切换截面 S 的一个ES-CLF为 V_x , 那么选取的候选Lyapunov函数 $V_\rho(x, z)$ 为

$$V_\rho(x, z) = V_\rho(z) + \varsigma V_x(x), \quad (35)$$

其中, $\varsigma > 0$, $V_x(x)$ 和 $V_\rho(z)$ 分别表示连续部分和离散部分的Lyapunov函数. 由周期轨道指数稳定的性质, 可得

$$C_1 \|x\|^2 \leq V_x(x) \leq C_2 \|x\|^2,$$

$$\gamma_1 \|z\|^2 \leq V_\rho(z) \leq \gamma_2 \|z\|^2.$$

那么

$$\min\{\varsigma C_1, \gamma_1\} \|(x, z)\|^2 \leq V_\rho(x, z) \leq \max\{\varsigma C_2, \gamma_2\} \|(x, z)\|^2.$$

下面还需要进一步验证原点处的指数稳定性, 即满足 $V_\rho(P(x, z)) - V_\rho(x, z) \leq 0$.

$$\begin{aligned} & V_\rho(P(x, z)) - V_\rho(x, z) \\ &= [V_\rho(P_z(x, z)) - V_\rho(P_z(z))] \\ &+ \varsigma [V_x(P_x(x, z)) - V_x(x)]. \end{aligned} \quad (36)$$

(1) 对于离散部分, 在 $u(x, z) \in K(x, z)$ 下, 结合引理2的结论, 有

$$\begin{aligned} V_x(x, z) &\leq e^t V(\Delta_x(x, z)) \leq C_2 e^{T_I(x, z)} \|\Delta_x(x, z)\|^2 \\ &\leq C_2 e^{T_I(x, z)} L_{\Delta_x}^2 \|x\|^2, \end{aligned} \quad (37)$$

令 $\beta_1 = C_2 e^{T_I(x, z)} L_{\Delta_x}^2 < C_1$, 那么

$$\varsigma [V_x(P_x(x, z)) - V_x(x)] \leq \varsigma (\beta_1 - C_1) \|x\|^2 < 0. \quad (38)$$

(2) 针对连续部分, 假设指数稳定平衡点为 $(0, 0)$, 即存在一个ES-CLF的 V_ρ , s.t.

$$|V_\rho(x) - V_\rho(z)| \leq \gamma_4 (\|x\| + \|z\|) \|x - z\|.$$

综合(1)和(2), 满足 $V_\rho(P(x, z)) - V_\rho(x, z) \leq 0$. 由此证明了定理3成立, 即证明了混杂系统的指数稳定性.

注4: 本节从混杂系统连续部分的稳定性过渡到整个系统的稳定性, 给出了以欠驱动双足步行为典型的一类混杂系统稳定性证明的一般思路, 即先保证连续部分的周期性轨道在零动态面上, 进一步保证增加了离散切换截面后的混杂零动态面依然位于周期轨道上. 而在验证离散系统在原点处的稳定性等价于Lyapunov函数满足下降条件.

5 仿真结果

5.1 基于ES-CLF的仿真

本文在五关节欠驱动双足机器人RABBIT上对上述控制方法进行仿真验证, 机器人的模型参数如表1所

表1 五连杆机器人参数定义

参数	值	单位
躯干长度 L_T	0.63	m
大(小)腿长度 L	0.4	m
髋关节质量 M_T	12	kg
大腿质量 m_t	6.8	kg
小腿质量 m_s	3.2	kg
髋关节转动惯量 I_T	1.33	kg m ²
大腿转动惯量 I_t	0.47	kg m ²
小腿转动惯量 I_s	0.2	kg m ²
电机转子惯量 I_a	0.83	kg m ²

示. 首先在Matlab环境下建立系统的动力学模型, 再采用ode45积分算法求解微分方程, 并在odeset的Event选项中, 设置切换条件.

Bezier多项式常用来设计带有边界约束条件的轨迹^[20], 关节的预设轨迹采用Bezier多项式进行拟合^[13].

因为驱动器的驱动能力有限, 这里采用基于力矩最小的原则进行轨迹优化求解, 设计代价函数为

$$J = \frac{1}{L} \int_0^T \|u(t)\|_2^2 dt, \quad (39)$$

其中, L 为步长, T 为运动周期. 为了达到极限环步态, 即符合周期运动特点, 需要满足的等式约束:

- (a) $q_1(T) = (q_1)_i$;
- (b) $\dot{q}_1(T) = (\dot{q}_1)_i$;
- (c) $\dot{\theta}(T) = \dot{\theta}_f$.

另外还需要考虑如摩擦系数、驱动电机转矩、地面反作用力等不等式约束, 具体约束取值如下: 驱动电机转矩 $|u| < 250 \text{ N} \cdot \text{m}$; 地面反作用力的切向分量 $F_{\text{nom}} > 600 \text{ N}$; 摩擦系数 $\mu < 0.4$; 碰撞脉冲作用力 $F_c < 250 \text{ N}$.

利用Matlab优化工具箱的FMINCON函数确定代价函数 J 的最优解.

图3为驱动关节的输出转矩随时间的变化轨迹. 从每个周期的变化规律可以看出机器人的行走步态满足周期性, 并且在驱动电机的转矩约束范围内.

图4为地面作用力的切向与法向分量随时间的变化轨迹. 可以看出切向分量大于0, 符合机器人行走中始终受地面摩擦力, 而法向分量在对地碰撞时都会发

图3 (网络版彩图)驱动关节输出转矩随时间变化的轨迹

图4 (网络版彩图)地面作用力的切向与法向分量随时间的变化

生一个跳变, 基本满足优化过程中的不等式约束.

图5表示各个关节角度随时间的变化. 具有周期性重复和光滑的特点, 满足周期目标步态. 其中, q_1 和 q_2 在每个周期内有明显的反向切换, 表示摆动腿与支撑腿的切换. q_5 为欠驱动关节.

图6和7分别表示关节角度、输出转矩分别和关节角速度的相图, 呈被动极限环, 故实现了周期稳定步行. 红色点为极限环上的固定点, 即Poincare回归映射的不动点. 图中的直线部分表示摆动腿与地面发生了碰撞, 此时机器人的关节角速度发生突变. 结合图3和7仿真结果发现, 各个驱动关节输出转矩在各驱动电机的实际工作力矩范围内, 即各电机电矩曲线可以被驱动电机工作力矩的取值范围所包络. 图8为一个周期内的Lyapunov函数及其导数的轨迹图.

5.2 模型不确定性的仿真

本文进一步进行了模型不确定性的仿真. 分别对机器人髋关节质量 M_T , 大腿质量 m_t , 小腿质量 m_s 模型

图 5 (网络版彩图)关节角度的周期运动轨迹

图 6 (网络版彩图)关节角和关节角速度的相图

参数进行摄动, 对比参数不摄动时的数值仿真结果.

(1) 参数摄动1.05倍

将表1中的质量模型参数扩大1.05倍, 即: M_T

$=12.6 \text{ kg}$, $m_t=7.14 \text{ kg}$, $m_s=3.57 \text{ kg}$, 其余模型参数不变, 得到的仿真结果如图9~12所示.

图9~11分别表示驱动关节的输出转矩、地面作用

图 7 (网络版彩图)输出转矩和关节角速度的关系

图 8 (网络版彩图)Lyapunov函数及其导数的轨迹图

图 9 (网络版彩图)驱动关节输出转矩随时间变化的轨迹

图 10 (网络版彩图)地面作用力的切向与法向分量随时间的变化

力和各关节角度随时间的变化轨迹. 可以看出, 尽管各个质心质量扩大了1.05倍, 机器人仍能实现动态的稳定行走. 由图12的关节角和关节角速度的相图为极限环可知, 步行满足周期运动特点.

(2) 参数摄动1.1倍

将表1中的质量模型参数扩大1.1倍, 即: $M_T=13.2$ kg, $m_t=7.48$ kg, $m_s=3.74$ kg, 其余模型参数不变, 得到的仿真结果如图13~16所示.

图13~15分别表示驱动关节的输出转矩、地面作

图 11 (网络版彩图) 关节角度的周期运动轨迹

图 12 (网络版彩图) 关节角和关节角速度的相图

图 13 (网络版彩图)驱动关节输出转矩随时间变化的轨迹

图 14 (网络版彩图)地面作用力的切向与法向分量随时间的变化

用力和各关节角度随时间的变化轨迹. 可以看出, 尽管各个质心质量扩大了1.1倍, 机器人仍能达到动态稳定行走. 由图16的关节角和关节角速度的相图呈现极限环可得, 步行具有周期特点.

6 结论

本文采用ES-CLF和混杂零动态和相结合的控制策略实现了五关节欠驱动机器人RABBIT的指数稳定

周期步态的行走, 并提供了证明一类混杂系统指数稳定性的一般思路. 通过输入输出反馈线性化, 构造了ES-CLF, 结合零动态的思想, 设计了使混杂系统指数稳定的状态反馈控制器, 并利用限制Poincare回归映射, 对周期轨道的指数稳定性进行了证明. 最后依照最小力矩的原则对系统参数进行了调整和关节轨迹跟踪的优化. 为了实现更高效稳定的行走效果, 可以考虑进一步推广到有限时间稳定, 并且增加柔顺关节, 扩大极限环的收敛域.

图 15 (网络版彩图)关节角度的周期运动轨迹

图 16 (网络版彩图) 关节角和关节角速度的相图

参考文献

- 1 Katić D. Survey of intelligent control techniques for humanoid robots. *J Intelligent Robotic Syst*, 2003, 37: 117–141
- 2 Xu T, Chen Q. Learning gait of quadruped robot without prior knowledge of the environment. *Chin J Mech Eng*, 2012, 25: 1068–1074
- 3 安康, 陈启军. 具有屈膝行为的双足被动行走模型. *控制理论与应用*, 2013, 30: 346–354
- 4 Huang Q, Yokoi K, Kajita S, et al. Planning walking patterns for a biped robot. *IEEE Trans Robot Automat*, 2001, 17: 280–289
- 5 杜明晓, 陈启军. 基于场地模型的多机器人动态协作技术. *华中科技大学学报(自然科学版)*, 2015, 1: 84–87
- 6 Wang H, Zhang H, Chen Q. Gait generation and control of biped robot with moving torso based on virtual constraint. In: *Proceedings of the IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics*. IEEE, 2017. 1435–1440
- 7 Gouaillier D, Hugel V, Blazevic P, et al. Mechatronic design of NAO humanoid. In: *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*. IEEE, 2009. 769–774
- 8 Ding L. Key technology analysis of bigdog quadruped robot. *JME*, 2015, 51: 1
- 9 Kuindersma S, Deits R, Fallon M, et al. Optimization-based locomotion planning, estimation, and control design for the atlas humanoid robot. *Auton Robot*, 2016, 40: 429–455
- 10 Feng S, Xinjilefu X, Atkeson C G, et al. Optimization based controller design and implementation for the Atlas robot in the DARPA robotics challenge finals. In: *Proceedings of the IEEE International Conference on Humanoid Robots*. IEEE, 2015. 1028–1035
- 11 刘莉, 汪劲松, 陈昱, 等. THBIP-I 拟人机器人研究进展. *机器人*, 2002, 24: 262–267
- 12 Zhao M, Liu L, Wang J, et al. Control system design of THBIP-I humanoid robot. In: *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*. IEEE, 2002. 2253–2258
- 13 Grizzle J W, Abba G, Plestan F. Asymptotically stable walking for biped robots: Analysis via systems with impulse effects. *IEEE Trans Automat Contr*, 2001, 46: 51–64
- 14 Hodgins J K, Raibert M N. Adjusting step length for rough terrain locomotion. *IEEE Trans Robot Automat*, 1991, 7: 289–298
- 15 Spong M, Holm J, Lee D. Passivity-based control of bipedal locomotion. *IEEE Robot Automat Mag*, 2007, 14: 30–40
- 16 Chevallereau C, Grizzle J W, Ching-Long Shih J W. Asymptotically stable walking of a five-link underactuated 3-D bipedal robot. *IEEE Trans*

- [Robot](#), 2009, 25: 37–50
- 17 Westervelt E, Grizzle J, Chevallereau C, et al. Feedback control of dynamic bipedal robot locomotion. *British J Philosophy Sci*, 2007, 4: 302
- 18 Grizzle J W, Chevallereau C, Sinnet R W, et al. Models, feedback control, and open problems of 3D bipedal robotic walking. [Automatica](#), 2014, 50: 1955–1988
- 19 Montano O, Orlov Y, Aoustin Y, et al. H_∞ -stabilization of a 3D bipedal locomotion under a unilateral constraint. *New Perspect Appl Modern Control Theory*, 2018, 15: 371–396
- 20 祁峰, 毕来业, 王天舒. 被动行走测试系统的建立与实验研究. *中国科学: 物理学 力学 天文学*, 2013, 43: 557–563
- 21 Morris B, Grizzle J W. Hybrid invariant manifolds in systems with impulse effects with application to periodic locomotion in bipedal robots. [IEEE Trans Automat Contr](#), 2009, 54: 1751–1764
- 22 Xing D P, Su J B. Arm/trunk motion generation for humanoid robot. [Sci China Inf Sci](#), 2010, 53: 1603–1612
- 23 Ames A D, Galloway K, Sreenath K, et al. Rapidly exponentially stabilizing control lyapunov functions and hybrid zero dynamics. [IEEE Trans Automat Contr](#), 2014, 59: 876–891
- 24 Jiang Z P, Wang Y. A converse Lyapunov theorem for discrete-time systems with disturbances. [Syst Control Lett](#), 2002, 45: 49–58
- 25 Zhang W, Abate A, Hu J, et al. Exponential stabilization of discrete-time switched linear systems. [Automatica](#), 2009, 45: 2526–2536

Exponentially stable periodic walking of under-actuated biped robot

WANG HeLin, ZHANG Hao, WANG ZhuPing & CHEN QiJun

Department of Electronics and Information Engineering, Tongji University, Shanghai 201804, China

The biped robots have characteristics of strong environmental adaptability, complex structure and difficult motion control. This paper addresses the problem of exponential stable walking of a five-link under-actuated biped robot (RABBIT) through control Lyapunov function and hybrid zero dynamics. The walking system is input-output linearized after the full-order dynamic model is described with Lagrange dynamic equations. Based on hybrid zero dynamics, a state feedback controller is then utilized to realize exponential stability of periodic orbit by designing control Lyapunov function, which is proved to be exponentially stable by restricted Poincare Return Map. The effectiveness of the mentioned method is illustrated by simulations.

under-actuated biped robot, exponential stability of periodic orbit, control Lyapunov function, hybrid zero dynamics, trajectory tracking

doi: [10.1360/N092018-00172](https://doi.org/10.1360/N092018-00172)