稳态可压 Euler 方程组的形变张量与旋度分解

献给齐民友教授 90 华诞

翁上昆¹, 辛周平^{2*}

1. 武汉大学数学与统计学院, 武汉大学数学协同创新中心, 武汉 430072;

2. 香港中文大学数学科学研究所, 香港

E-mail: skweng@whu.edu.cn, zpxin@ims.cuhk.edu.hk

收稿日期: 2018-05-07; 接受日期: 2018-08-02; 网络出版日期: 2018-12-29; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11701431)、中央高校基本科研经费 (批准号: 201-413000047)、中组部青年千人项目 (批准号: 212100004)、香港研究局 (批准号: CUHK 4048/13P 和 CUHK-14305315)、国家自然科学基金委员会和香港研究局联合资助基金 (批准号: N-CUHK443-14) 资助项目

摘要 本文提出了稳态 Euler 方程组关于形变张量与旋度的一个分解, 这个分解的关键想法在于如下简单的观察: 注意到利用 Bernoulli 定律, 可以将密度改写为 Bernoulli 函数、熵和速度这三者的代数表示式, 从而将质量守恒方程改写成某一对称矩阵与形变张量的矩阵 Frobenius 内积形式. 进一步利用动量守恒方程组, 我们发现旋度可以由一个输运方程以及两个关于 Bernoulli 函数和熵的代数方程表示出来. 最后利用形变张量方程与旋度方程求解速度场和密度. 这个分解的好处在于, 我们最后构造的解的速度场与压力、Bernoulli 函数以及熵有相同的正则性. 基于这个分解, 本文证明了有限长方体管道中满足适当物理边界条件的亚音速解的存在唯一性.

关键词 稳态 Euler 方程组 双曲椭圆耦合 形变张量 旋度 相容性条件**MSC (2010) 主题分类** 35L65, 35L67, 76N15

1 引言

本文主要研究三维稳态非等熵 Euler 方程组

$$\begin{cases} \partial_{x_1}(\rho u_1) + \partial_{x_2}(\rho u_2) + \partial_{x_3}(\rho u_3) = 0, \\ \partial_{x_1}(\rho u_1^2 + P) + \partial_{x_2}(\rho u_1 u_2) + \partial_{x_3}(\rho u_1 u_3) = 0, \\ \partial_{x_1}(\rho u_1 u_2) + \partial_{x_2}(\rho u_2^2 + P) + \partial_{x_3}(\rho u_2 u_3) = 0, \\ \partial_{x_1}(\rho u_1 u_3) + \partial_{x_2}(\rho u_2 u_3) + \partial_{x_3}(\rho u_3^2 + P) = 0, \\ \operatorname{div}\left(\rho\left(\frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2 + e\right)\mathbf{u} + P\mathbf{u}\right) = 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

英文引用格式: Weng S K, Xin Z P. A deformation-curl decomposition for three dimensional steady Euler equations (in Chinese). Sci Sin Math, 2019, 49: 307–320, doi: 10.1360/N012018-00125

其中 $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ 、 ρ 、 P 和 e 表示速度场、密度、压力和内能. 我们主要考察多方气体, 其状态方程为 $P(\rho, K) = K(S)\rho^\gamma$ 和 $e = \frac{1}{\gamma-1} \frac{P}{\rho}$, 其中 $K(S) = ae^{\frac{S}{c_v}}$, a 和 c_v 是两个已知的正常数, S 表示熵. 定义声速

$$c^2(\rho, K) = \gamma K(S) \rho^{\gamma-1}$$

及焓

$$h(\rho, K) = \frac{\gamma}{\gamma-1} K(S) \rho^{\gamma-1}.$$

众所周知, 为研究稳态 Euler 方程组, 需要引入马赫数 $M = \frac{|\mathbf{u}|}{c(\rho, K)}$ 来区分不同的流体. 当马赫数大于 1 时, 称流体为超音速流; 马赫数小于 1 时, 称该流体为亚音速流; 马赫数等于 1 时, 流体为音速流. 当流体处于超音速流状态, Euler 方程组是双曲型方程组, 所有的未知函数都满足输运方程. 而当流体处于亚音速状态时, Euler 方程组是双曲与椭圆耦合的, 即方程中某些物理量满足输运方程, 某些物理量满足椭圆型方程. 由于我们对混合型方程的研究还没有有效的理论, 在研究亚音速流时, 通常需要结合物理边界条件对 Euler 方程组作适当的分解, 将其中的双曲型与椭圆型的物理量进行有效的分离, 以便我们作线性化从而构造出切实可行的迭代格式.

对于二维稳态 Euler 方程组, 经过许多数学家的辛勤工作, 我们对其中的双曲与椭圆耦合结构已经了解得比较清楚, 读者可以参见文献 [1–8] 等相关文献. 三维轴对称稳态 Euler 方程组的结构跟二维的情形很相似¹⁾, 相关的研究可参见文献 [9, 10] 等. 对三维稳态 Euler 方程组的研究, 由于其自身耦合结构比二维情形要复杂得多, 我们对方程组的结构认识还不够深入. Chen^[11]、Chen 和 Yuan^[12] 以及 Xin 和 Yin^[8] 研究了三维稳态 Euler 方程组在直管道或者张口管道中跨音速激波解的结构稳定性和动态稳定性问题, 他们都注意到在亚音速区域压力满足一个二阶椭圆型方程. 后来, Chen 和 Xie^[13] 以及 Weng^[14] 开始研究在有限长管道中一般亚音速流的存在唯一性问题, 但他们都要求管道必须是长方体. 最近, Liu 等^[15] 研究了球壳中球面对称亚音速解和跨音速激波解的结构稳定性, 但他们对背景解加了一个结构性的限制条件. 实际上, 文献 [13–15] 所研究的管道都是紧致无边的, 避开管道壁的影响. 对于三维锥形张口管道径向对称跨音速激波解关于出口压力和管道壁的扰动稳定性目前都没有任何结果. 另外一个问题就是目前已知的三维 Euler 方程组的结果 (参见文献 [8, 11–15]), 都只证明了速度场的正则性比压力的正则性要低一阶, 但对二维 Euler 方程组或者三维轴对称 Euler 方程组而言, 所有的物理量的正则性都是一样的.

本文提出三维稳态 Euler 方程组一个关于形变张量与旋度的分解. 我们注意到利用 Bernoulli 定律, 可以将密度改写为 Bernoulli 函数、熵和速度这三者的代数表示式, 将其代入质量守恒方程后, 利用 Bernoulli 函数和熵沿着轨线是守恒的这些性质, 将质量方程改写成某一对称矩阵跟形变张量的矩阵 Frobenius 内积形式. 在亚音速区域, 我们发现系数矩阵是正定的. 进一步利用动量守恒方程组, 我们发现旋度可以由一个输运方程以及两个关于 Bernoulli 函数和熵的代数方程求解出来. 这跟以往的研究中利用旋度满足的输运方程组有所不同, 我们求解旋度的方式更便于我们验证旋度的散度为零这一重要性质. 最后, 我们联合形变张量方程与旋度方程求解速度场, 这一形变张量与旋度方程组本质上与经典的散度与旋度方程组是一样的. 这一分解最重要的好处在于我们最后构造的解的速度场与压力、Bernoulli 函数以及熵有相同的正则性. 基于这个分解, 我们证明了有限长方体管道中满足适定物理边界条件的亚音速解的存在唯一性.

1) Weng S, Xie C, Xin Z. Structural stability of the transonic shock problem in a 3-D divergent axi-symmetric perturbed nozzle. Preprint, 2018.

本文的结构如下: 第 2 节给出稳态方程组关于形变张量和旋度的分解; 第 3 节将这个分解用于证明方体管道中给定恰当物理边界条件下亚音速流的存在唯一性.

2 稳态 Euler 方程组的一个形变张量与旋度分解

本节给出 Euler 方程组关于形变张量与旋度的一个分解. 假设 $(\rho, \mathbf{u}, P)$ 是稳态 Euler 方程组在区域 Ω 的一个光滑解, 并且在 Ω 上满足 $\rho > 0, u_1 > 0$.

第 1 步 我们知道 Bernoulli 函数 $B = \frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1}K(S)\rho^{\gamma-1}$ 和熵函数 $K(S)$ 满足输运方程, 它们沿着轨迹保持不变:

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla)B = 0, \quad (2.1)$$

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla)K(S) = 0. \quad (2.2)$$

第 2 步 我们利用动量守恒方程来推导旋度所满足的方程. 定义旋度 $\boldsymbol{\omega} = \text{curl } \mathbf{u} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$, 其中

$$\omega_1 = \partial_2 u_3 - \partial_3 u_2, \quad \omega_2 = \partial_3 u_1 - \partial_1 u_3, \quad \omega_3 = \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1.$$

从动量守恒方程的第二、第三个方程很容易导出如下等式:

$$\begin{aligned} u_1 \omega_3 - u_3 \omega_1 + \partial_2 B - \frac{1}{\gamma-1} \rho^{\gamma-1} \partial_2 K &= 0, \\ -u_1 \omega_2 + u_2 \omega_1 + \partial_3 B - \frac{1}{\gamma-1} \rho^{\gamma-1} \partial_3 K &= 0. \end{aligned}$$

所以, 在假设 $u_1 > 0$ 的情形下, ω_2 和 ω_3 可以通过 ω_1 及 Bernoulli 函数和熵表示出来:

$$\omega_2 = \frac{u_2 \omega_1 + \partial_3 B - \frac{1}{\gamma-1} \rho^{\gamma-1} \partial_3 K}{u_1}, \quad (2.3)$$

$$\omega_3 = \frac{u_3 \omega_1 - \partial_2 B + \frac{1}{\gamma-1} \rho^{\gamma-1} \partial_2 K}{u_1}. \quad (2.4)$$

另外, 由动量守恒方程可以推导出旋度满足如下等式:

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \boldsymbol{\omega} \text{div} \mathbf{u} - \rho^{\gamma-2}(\nabla \rho \times \nabla K) = 0. \quad (2.5)$$

为得到 ω_1 所满足的方程, 我们将 (2.3) 和 (2.4) 代入到上述方程组的第一个方程中去, 经简单的计算得到

$$\begin{aligned} &\left(\partial_1 + \frac{u_2}{u_1} \partial_2 + \frac{u_3}{u_1} \partial_3\right) \omega_1 + \partial_2 \left(\frac{u_2}{u_1}\right) \omega_1 + \partial_3 \left(\frac{u_3}{u_1}\right) \omega_1 + \partial_2 \left(\frac{1}{u_1}\right) \partial_3 B \\ &\quad - \partial_3 \left(\frac{1}{u_1}\right) \partial_2 B - \frac{1}{\gamma-1} \partial_2 \left(\frac{\rho^{\gamma-1}}{u_1}\right) \partial_3 K + \frac{1}{\gamma-1} \partial_3 \left(\frac{\rho^{\gamma-1}}{u_1}\right) \partial_2 K \\ &= 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

实际上, 如果将方程 (2.3) 和 (2.4) 代入到恒等式

$$\partial_1 \omega_1 + \partial_2 \omega_2 + \partial_3 \omega_3 = 0,$$

我们也可以得到 ω_1 所满足的方程 (2.6)²⁾.

在实际的应用中, 我们会用 (2.6) 求解 ω_1 , 再利用 (2.3) 和 (2.4) 求得 ω_2 和 ω_3 . 我们还将利用 (2.6) 来验证得到的旋度满足其散度为零的条件. 这种求解旋度的方法与 Alber^[16]、Tang 和 Xin^[17] 及可压 Euler 情形 Chen 和 Xie 的工作 [13] 不一样, 他们都是利用旋度满足的方程组 (2.5) 来求解, 相比而言, 我们认为我们的方法在验证迭代得到的旋度满足其散度为零的相容性条件时更为便利, 具体可见下一节的证明.

第 3 步 求解速度场和密度. 利用 Bernoulli 函数和熵沿着轨迹是守恒的这一性质, 首先将密度改为

$$\rho = H(B, K, |\mathbf{u}|^2) = \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma K} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \left(B - \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}. \quad (2.7)$$

将 (2.7) 代入到质量守恒方程 (1.1), 我们得到质量方程的另一形式:

$$H(B, K, |\mathbf{u}|^2) \operatorname{div} \mathbf{u} + 2 \frac{\partial H}{\partial |\mathbf{u}|^2} (B, K, |\mathbf{u}|^2) u_i u_j \partial_i u_j = 0.$$

这实际上给出了可压情形下形变张量应满足的限制方程:

$$\sum_{i,j=1}^3 \left(\delta_{ij} - \frac{u_i u_j}{c^2(\rho, K)} \right) \mathbb{D}_{ij}(\mathbf{u}) = 0, \quad (2.8)$$

其中 $\mathbb{D}(\mathbf{u}) = (\mathbb{D}_{ij}(\mathbf{u}))_{i,j=1}^3 = \left(\frac{\partial_i u_j + \partial_j u_i}{2} \right)_{i,j=1}^3$ 为形变张量. 注意到在亚音速区域, (2.8) 的系数矩阵 $A(\mathbf{u}, B, K) = (\delta_{ij} - \frac{u_i u_j}{c^2(\rho, K)})_{i,j=1}^3$ 是正定对称矩阵.

结合之前得到的旋度场, 速度场将通过求解下列的形变张量 - 旋度系统得到:

$$\begin{cases} \sum_{i,j=1}^3 \left(\delta_{ij} - \frac{u_i u_j}{c^2(\rho, K)} \right) \mathbb{D}_{ij}(\mathbf{u}) = 0, \\ \partial_2 u_3 - \partial_3 u_2 = \omega_1, \\ \partial_3 u_1 - \partial_1 u_3 = \omega_2, \\ \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1 = \omega_3. \end{cases} \quad (2.9)$$

实际上, 我们可以证明 (2.9) 线性化得到的方程组在给定向速度或者切向速度时解的先验估计跟经典的散度与旋度方程组的结果是一样的, 具体证明将会在其他文献中给出.

最后, 我们将速度场、Bernoulli 函数和熵函数代入到 (2.7) 求解密度函数.

定理 2.1 (等价性) 假设 $(\rho, \mathbf{u}, P)$ 是稳态 Euler 方程组在区域 Ω 的一个光滑解, 并且在 Ω 上满足 $\rho > 0$, $u_1 > 0$, 则稳态 Euler 方程组等价于 (2.1)–(2.4)、(2.6)、(2.7) 和 (2.9).

证明 在上述推导过程中, 我们已经证明如果 $(\rho, \mathbf{u}, P)$ 是稳态 Euler 方程组在区域 Ω 的一个光滑解, 并且在 Ω 上满足 $\rho > 0$, $u_1 > 0$, 则由 $(\rho, \mathbf{u}, P)$ 所定义的 Bernoulli 函数和熵满足 (2.1) 及 (2.2), 相应的旋度满足 (2.3)、(2.4) 和 (2.6), 密度和速度场也满足 (2.7) 和 (2.9). 我们只需证明反过来的那部分. 由 (2.1)、(2.2) 以及 (2.9) 中的第一个方程和密度函数 (2.7), 我们可以验证稳态 Euler 方程组 (1.1) 的第一个方程成立. 再利用 (2.9) 的后面三个方程以及 (2.3) 和 (2.4), 我们发现 (1.1) 中的第三、第四

2) 这一观察最早是由袁洪炜发现, 我们在此对他表示感谢.

个方程都成立. 最后由 (2.1) 和 (2.2), 可以推出

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \left(\frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 \right) + \frac{1}{\rho} (\mathbf{u} \cdot \nabla) P = 0. \quad (2.10)$$

再结合 (1.1) 中的第三、第四个方程, 可得

$$u_1 \left[(\mathbf{u} \cdot \nabla) u_1 + \frac{1}{\rho} \partial_1 P \right] = 0.$$

因为在整个流场内 $u_1 > 0$, (1.1) 中的第二个方程显然成立, 证明完毕. $\square$

3 长方体管道中亚音速流的存在唯一性问题

本节利用上节提出的稳态 Euler 方程组的分解, 研究在管道入口和出口给定恰当的物理边界下长方体管道中亚音速解的存在性和唯一性. 这类问题之前已经有一些相关的工作, 读者可以查询文献 [13–15, 18] 等相关文献. 这里所给定的边界条件与文献 [13] 是一样的, 但证明方法跟它们差别很大, 我们的结果跟它们最大的差别在于我们构造的解速度场的正则性与密度正则性是一样的. 为避开角点正则性问题, 本节只考察长方体管道 $\Omega = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$. 在直管道中存在着常状态的亚音速光滑解 $(\rho_0, u_0, 0, 0, K_0)$, 其中 $\rho_0 > 0$, u_0 和 K_0 是三个常数, 满足亚音速条件 $0 < u_0 < c(\rho_0, K_0)$. 我们称此常状态解为背景解, 其 Bernoulli 常数为 $B_0 = \frac{1}{2} u_0^2 + h(\rho_0, K_0)$, 马赫数为 $M_0^2 = \frac{u_0^2}{c^2(\rho_0, K_0)}$. 本节的主要目标是考察该背景解关于边界条件的高维扰动的结构稳定性问题. 我们所提的边界条件如下所述.

在管道的入口处 $x_1 = 0$, 我们给定动量和旋度的法向分量以及 Bernoulli 函数和熵函数:

$$\begin{cases} (\rho u_1)(0, x') = \rho_0 u_0 + \epsilon m_{en}(x'), & x' = (x_2, x_3), \\ \omega_1(0, x') = \epsilon J_{en}(x'), \\ B(0, x') = B_0 + \epsilon B_{en}(x'), \\ K(0, x') = K_0 + \epsilon K_{en}(x'). \end{cases} \quad (3.1)$$

假定 $(m_{en}, B_{en}, K_{en}) \in C^{2,\alpha}([0, 1] \times [0, 1])$ 和 $J_{en} \in C^{1,\alpha}([0, 1] \times [0, 1])$, 其中 $\alpha \in (0, 1)$. 为避开角点正则性问题, 我们要求边值满足下述的相容性条件:

$$\begin{cases} \partial_2(m_{en}, B_{en}, K_{en})(0, x_3) = \partial_3(B_{en}, K_{en})(x_2, 0) = 0, \\ \partial_2(m_{en}, B_{en}, K_{en})(1, x_3) = \partial_3(B_{en}, K_{en})(x_2, 1) = 0, \\ J_{en}(0, x_3) = J_{en}(x_2, 0) = 0, \\ J_{en}(1, x_3) = J_{en}(x_2, 1) = 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

在管道壁 $x_2 = 0/1$ 或者 $x_3 = 0/1$, 我们给定通常的无滑移边界条件:

$$\begin{cases} u_2(x_1, 0, x_3) = u_2(x_1, 1, x_3) = 0, \\ u_3(x_1, x_2, 0) = u_3(x_1, x_2, 1) = 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

在管道的出口处 $x_1 = 1$, 我们给定动量的法向分量:

$$(\rho u_1)(1, x') = \rho_0 u_0 + \epsilon m_{ex}(x'), \quad (3.4)$$

其中 $m_{ex} \in C^{2,\alpha}([0, 1] \times [0, 1])$ 满足

$$\begin{aligned}\partial_2 m_{ex}(0, x_3) &= \partial_3 m_{ex}(x_2, 0) = 0, \\ \partial_2 m_{ex}(1, x_3) &= \partial_3 m_{ex}(x_2, 1) = 0.\end{aligned}\tag{3.5}$$

因为质量守恒方程, m_{en} 和 m_{ex} 还需要满足下述的相容性条件:

$$\int_{[0,1]^2} (m_{ex}(x') - m_{en}(x')) dx' = 0.\tag{3.6}$$

基于边值满足的相容性条件 (3.2)、(3.5)、(3.6) 和无渗流边界条件 (3.3), 我们期望满足上述边值的稳态 Euler 方程组的光滑解 $(B, K, \mathbf{u}) \in C^{2,\alpha}([0, 1]^3)$ 经下述方式延拓到区域 $[0, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$ 后仍然满足稳态 Euler 方程组:

$$(\hat{B}, \hat{K}, \hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3)(\mathbf{x}) = \begin{cases} (B, K, u_1, u_2, u_3)(x_1, x_2, x_3), & \text{若 } (x_2, x_3) \in [0, 1] \times [0, 1], \\ (B, K, u_1, -u_2, u_3)(x_1, -x_2, x_3), & \text{若 } (x_2, x_3) \in [-1, 0] \times [0, 1], \\ (B, K, u_1, u_2, -u_3)(x_1, x_2, -x_3), & \text{若 } (x_2, x_3) \in [0, 1] \times [-1, 0], \\ (B, K, u_1, -u_2, -u_3)(x_1, -x_2, -x_3), & \text{若 } (x_2, x_3) \in [-1, 0] \times [-1, 0]. \end{cases}$$

进一步, 我们还可以将 $(\hat{B}, \hat{K}, \hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3)$ 在 x_2 和 x_3 方向以 2 为周期延拓到 $[0, 1] \times \mathbb{R}^2$, 很容易验证 $(\hat{B}, \hat{K}, \hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3) \in C^{2,\alpha}([0, 1] \times \mathbb{R}^2)^5$ 并且 $(\hat{B}, \hat{K}, \hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3)$ 满足稳态 Euler 方程组. 基于上述陈述, 我们将直接考察周期区域 $\Omega_e = [0, 1] \times \mathbb{T}^2$ 的流体问题, 其中 $\mathbb{T}^2$ 是二维的环面. 我们也需要将 $(m_{en}, J_{en}, B_{en}, K_{en}, m_{ex})$ 延拓到 $\mathbb{T}^2$, 我们仍然将其记为 $(m_{en}, J_{en}, B_{en}, K_{en}, m_{ex})$.

以下是本节的主要结果.

定理 3.1 给定满足相容性条件 (3.2)、(3.5) 和 (3.6) 的边值 $(m_{en}, B_{en}, K_{en}, J_{en}, m_{ex}) \in C^{2,\alpha}(\mathbb{T}^2)$, 存在一个小的正常数 $\epsilon_0 > 0$, ϵ_0 只依赖于 (ρ_0, u_0, K_0) 和 $(m_{en}, B_{en}, K_{en}, J_{en}, m_{ex})$, 使得如果 $0 < \epsilon < \epsilon_0$, 那就存在唯一的光滑的亚音速流 $(\rho, u_1, u_2, u_3, K) \in (C^{2,\alpha}(\Omega_e))^5$ 满足 Euler 方程组 (1.1) 和给定的上述边界条件 (3.1)、(3.3) 和 (3.4). 最后还有下述估计式成立:

$$\|(\rho, K, u_1, u_2, u_3) - (\rho_0, K_0, u_0, 0, 0)\|_{C^{2,\alpha}(\Omega_e)} \leq C_0 \epsilon,\tag{3.7}$$

其中 C_0 只依赖于背景解 (ρ_0, u_0, K_0) 和边值 $(m_{en}, B_{en}, K_{en}, J_{en}, m_{ex})$.

注 3.1 据作者所知, 之前相关的三维稳态 Euler 方程组亚音速解^[13, 14]和跨音速激波解^[3, 11, 12, 15]都只做到压力的正则性比速度场高一阶, 定理 3.1 中得到的解速度场正则性与密度及压力等的正则性是一样的. 这一性质对我们接下来做直管道以及张口管道中三维跨音速激波关于管道壁扰动的结构稳定性问题是至关重要的.

在下面的陈述中所有的常数 C 都只依赖于 (ρ_0, u_0, K_0) 和边值 $(m_{en}, B_{en}, K_{en}, J_{en}, m_{ex})$, 它们的值在每个估计式中会有所变化.

定理 3.1 的证明 定义 $W_1 = u_1 - u_0$, $W_i = u_i$ ($i = 2, 3$), $W_4 = B - B_0$, $W_5 = K - K_0$. 构造如下迭代格式, 首先记解所在的空间为

$$\Xi_\delta = \left\{ \mathbf{W} = (W_1, \dots, W_5) : \sum_{j=1}^5 \|W_j\|_{C^{2,\alpha}(\Omega_e)} \leq \delta \right\},$$

其中 $\delta > 0$ 为待定常数. 令 $\overline{\mathbf{W}} \in \Xi_\delta$.

第 1 步 求解 Bernoulli 函数和熵函数. Bernoulli 函数和熵函数满足下述输运方程:

$$\begin{cases} \partial_1 W_4 + \frac{\overline{W}_2}{u_0 + \overline{W}_1} \partial_2 W_4 + \frac{\overline{W}_3}{u_0 + \overline{W}_1} \partial_3 W_4 = 0, \\ W_4(0, x_2, x_3) = \epsilon B_{en}(x_2, x_3), \end{cases} \quad (3.8)$$

以及

$$\begin{cases} \partial_1 W_5 + \frac{\overline{W}_2}{u_0 + \overline{W}_1} \partial_2 W_5 + \frac{\overline{W}_3}{u_0 + \overline{W}_1} \partial_3 W_5 = 0, \\ W_5(0, x_2, x_3) = \epsilon K_{en}(x_2, x_3). \end{cases} \quad (3.9)$$

我们利用经典的特征线方法来求解上述方程. 速度场 $(u_0 + \overline{W}_1, \overline{W}_2, \overline{W}_3)$ 所决定的轨迹可以通过求解下述常微分方程组得到:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{x}_2(\tau; x)}{d\tau} = \frac{\overline{W}_2}{u_0 + \overline{W}_1}(\tau, \bar{x}_2(\tau; x), \bar{x}_3(\tau; x)), \\ \frac{d\bar{x}_3(\tau; x)}{d\tau} = \frac{\overline{W}_3}{u_0 + \overline{W}_1}(\tau, \bar{x}_2(\tau; x), \bar{x}_3(\tau; x)), \\ \bar{x}_2(x_1; x) = x_2, \quad \bar{x}_3(x_1; x) = x_3. \end{cases} \quad (3.10)$$

因为 $\overline{\mathbf{W}} \in C^{2,\alpha}(\Omega_e)$, 我们很容易证明 $(\bar{x}_2(0; x), \bar{x}_3(0; x)) \in C^{2,\alpha}(\Omega_e)$. 实际上, 下述估计式恒成立:

$$\|(\bar{x}_2(0; x), \bar{x}_3(0; x))\|_{C^{2,\alpha}(\Omega_e)} \leq C_1. \quad (3.11)$$

利用特征线方法, 有

$$\begin{cases} W_4(x) = \epsilon B_{en}(\bar{x}_2(0; x), \bar{x}_3(0; x)), \\ W_5(x) = \epsilon K_{en}(\bar{x}_2(0; x), \bar{x}_3(0; x)). \end{cases} \quad (3.12)$$

这使得我们很容易得到下述估计式:

$$\|(W_4(x), W_5(x))\|_{C^{2,\alpha}(\Omega_e)} \leq C_2 \epsilon \|(B_{en}, K_{en})\|_{C^{2,\alpha}(\mathbb{T}^2)} \leq C_3 \epsilon. \quad (3.13)$$

第 2 步 求解旋度场. 首先利用 ω_1 所满足的输运方程:

$$\begin{cases} \partial_1 \omega_1 + \frac{\overline{W}_2}{u_0 + \overline{W}_1} \partial_2 \omega_1 + \frac{\overline{W}_3}{u_0 + \overline{W}_1} \partial_3 \omega_1 + \mu(\overline{\mathbf{W}}) \omega_1 = R(\overline{\mathbf{W}}, W_4, W_5), \\ \omega_1(0, x_2, x_3) = \epsilon J_{en}(x_2, x_3), \end{cases} \quad (3.14)$$

其中

$$\begin{aligned} \mu(\overline{\mathbf{W}}) &= \left\{ \partial_2 \left(\frac{\overline{W}_2}{u_0 + \overline{W}_1} \right) + \partial_3 \left(\frac{\overline{W}_3}{u_0 + \overline{W}_1} \right) \right\}, \\ R(\overline{\mathbf{W}}, W_4, W_5) &= -\partial_2 \left(\frac{1}{u_0 + \overline{W}_1} \right) \partial_3 W_4 + \partial_3 \left(\frac{1}{u_0 + \overline{W}_1} \right) \partial_2 W_4 \\ &\quad - \frac{1}{\gamma - 1} \partial_3 \left(\frac{H^{\gamma-1}(\overline{\mathbf{W}})}{u_0 + \overline{W}_1} \right) \partial_2 W_5 + \frac{1}{\gamma - 1} \partial_2 \left(\frac{H^{\gamma-1}(\overline{\mathbf{W}})}{u_0 + \overline{W}_1} \right) \partial_3 W_5, \end{aligned}$$

$$H(\overline{\mathbf{W}}) = \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma(K_0 + \overline{W}_5)} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \left(B_0 + \overline{W}_4 - \frac{1}{2}((u_0 + \overline{W}_1)^2 + \overline{W}_2^2 + \overline{W}_3^2) \right)^{\frac{1}{\gamma-1}},$$

由特征线方法得到

$$\begin{aligned} \omega_1(x) &= \epsilon J_{en}(\bar{x}_2(0; x), \bar{x}_3(0; x)) e^{-\int_0^{x_1} \mu(\overline{\mathbf{W}})(t; \bar{x}_2(t, x), \bar{x}_3(t, x)) dt} \\ &\quad + \int_0^{x_1} R(\overline{\mathbf{W}}, W_4, W_5)(\tau, \bar{x}_2(\tau, x), \bar{x}_3(\tau, x)) e^{-\int_\tau^{x_1} \mu(\overline{\mathbf{W}})(t; \bar{x}_2(t, x), \bar{x}_3(t, x)) dt} d\tau. \end{aligned} \quad (3.15)$$

简单计算就得到下述估计式:

$$\|\omega_1\|_{C^{1,\alpha}(\Omega_e)} \leq C_4(\epsilon + \delta^2 + \delta\epsilon). \quad (3.16)$$

我们将 ω_1 代入 (2.3) 和 (2.4) 得到

$$\omega_2 = \frac{\overline{W}_2\omega_1 + \partial_3 W_4 - \frac{1}{\gamma-1} H^{\gamma-1}(\overline{\mathbf{W}}) \partial_3 W_5}{u_0 + \overline{W}_1}, \quad (3.17)$$

$$\omega_3 = \frac{\overline{W}_3\omega_1 - \partial_2 W_4 + \frac{1}{\gamma-1} H^{\gamma-1}(\overline{\mathbf{W}}) \partial_2 W_5}{u_0 + \overline{W}_1}. \quad (3.18)$$

ω_2 和 ω_3 也满足与 (3.16) 一样的估计式:

$$\sum_{j=2}^3 \|\omega_j\|_{C^{1,\alpha}(\Omega_e)} \leq C_5(\epsilon + \delta^2 + \delta\epsilon). \quad (3.19)$$

最后还需要验证 ω_1 、 ω_2 和 ω_3 满足散度为零的条件:

$$\begin{aligned} \partial_1 \omega_1 + \partial_2 \omega_2 + \partial_3 \omega_3 &= \partial_1 \omega_1 + \partial_2 \left(\frac{\overline{W}_2\omega_1 + \partial_3 W_4 - \frac{1}{\gamma-1} H^{\gamma-1}(\overline{\mathbf{W}}) \partial_3 W_5}{u_0 + \overline{W}_1} \right) \\ &\quad + \partial_3 \left(\frac{\overline{W}_3\omega_1 - \partial_2 W_4 + \frac{1}{\gamma-1} H^{\gamma-1}(\overline{\mathbf{W}}) \partial_2 W_5}{u_0 + \overline{W}_1} \right) \\ &= \partial_1 \omega_1 + \frac{\overline{W}_2}{u_0 + \overline{W}_1} \partial_2 \omega_1 + \frac{\overline{W}_3}{u_0 + \overline{W}_1} \partial_3 \omega_1 + \left\{ \partial_2 \left(\frac{\overline{W}_2}{u_0 + \overline{W}_1} \right) \right. \\ &\quad \left. + \partial_3 \left(\frac{\overline{W}_3}{u_0 + \overline{W}_1} \right) \right\} \omega_1 + \partial_2 \left(\frac{1}{u_0 + \overline{W}_1} \right) \partial_3 W_4 - \partial_3 \left(\frac{1}{u_0 + \overline{W}_1} \right) \partial_2 W_4 \\ &\quad + \frac{1}{\gamma-1} \partial_3 \left(\frac{H^{\gamma-1}(\overline{\mathbf{W}})}{u_0 + \overline{W}_1} \right) \partial_2 W_5 - \frac{1}{\gamma-1} \partial_2 \left(\frac{H^{\gamma-1}(\overline{\mathbf{W}})}{u_0 + \overline{W}_1} \right) \partial_3 W_5 \\ &= 0. \end{aligned}$$

第 3 步 求解速度场和密度. 我们需要求解下述的形变张量和旋度构成的方程组:

$$\begin{cases} (1 - M_0^2) \partial_1 W_1 + \partial_2 W_2 + \partial_3 W_3 = F(\overline{\mathbf{W}}, \nabla \overline{\mathbf{W}}), \\ \partial_2 W_3 - \partial_3 W_2 = \omega_1, \\ \partial_3 W_1 - \partial_1 W_3 = \omega_2, \\ \partial_1 W_2 - \partial_2 W_1 = \omega_3, \\ W_1(0, x_2, x_3) = g_1(\overline{\mathbf{W}})(0, x_2, x_3), \\ W_1(1, x_2, x_3) = g_2(\overline{\mathbf{W}}, W_4, W_5)(1, x_2, x_3) + \kappa, \end{cases} \quad (3.20)$$

其中

$$\begin{aligned}
 F(\overline{\mathbf{W}}, \nabla \overline{\mathbf{W}}) &= \left(\frac{(u_0 + \overline{W}_1)^2}{c^2(H(\overline{\mathbf{W}}), K_0 + \overline{W}_5)} - M_0^2 \right) \partial_1 \overline{W}_1 + \sum_{j=2}^3 \frac{(u_0 + \overline{W}_1) \overline{W}_j}{c^2(H(\overline{\mathbf{W}}), K_0 + \overline{W}_5)} \partial_1 \overline{W}_j \\
 &\quad + \sum_{i,j=2}^3 \frac{\overline{W}_i \overline{W}_j}{c^2(H(\overline{\mathbf{W}}), K_0 + \overline{W}_5)} \partial_i \overline{W}_j, \\
 g_1(\overline{\mathbf{W}}) &= \frac{\epsilon m_{en}}{\rho_0(1 - M_0^2)} - \frac{\epsilon u_0 B_{en}}{c^2(\rho_0, K_0) - u_0^2} + \frac{\epsilon u_0 K_{en}}{(\gamma - 1)K_0(1 - M_0^2)} \\
 &\quad - \frac{\overline{W}_1}{\rho_0(1 - M_0^2)} (H(B_0 + \epsilon B_{en}, K_0 + \epsilon K_{en}, (u_0 + \overline{W}_1)^2 + \overline{W}_2^2 + \overline{W}_3^2) - H(B_0, K_0, u_0^2))(0, x') \\
 &\quad - \frac{u_0}{\rho_0(1 - M_0^2)} \left(H(B_0 + \epsilon B_{en}, K_0 + \epsilon K_{en}, (u_0 + \overline{W}_1)^2 + \overline{W}_2^2 + \overline{W}_3^2) - H(B_0, K_0, u_0^2) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\epsilon \rho_0 B_{en}}{c^2(\rho_0, K_0)} + \frac{\epsilon \rho_0 K_{en}}{(\gamma - 1)K_0} + M_0^2 \overline{W}_1 \right) (0, x'), \\
 g_2(\overline{\mathbf{W}}, W_4, W_5) &= \frac{\epsilon m_{ex}}{\rho_0(1 - M_0^2)} - \frac{u_0 W_4(1, x')}{c^2(\rho_0, K_0) - u_0^2} + \frac{u_0 W_5(1, x')}{(\gamma - 1)K_0(1 - M_0^2)} \\
 &\quad - \frac{\overline{W}_1}{\rho_0(1 - M_0^2)} (H(B_0 + \overline{W}_4, K_0 + \overline{W}_5, (u_0 + \overline{W}_1)^2 + \overline{W}_2^2 + \overline{W}_3^2) \\
 &\quad - H(B_0, K_0, u_0^2))(1, x') \\
 &\quad - \frac{u_0}{\rho_0(1 - M_0^2)} \left(H(B_0 + \overline{W}_4, K_0 + \overline{W}_5, (u_0 + \overline{W}_1)^2 + \overline{W}_2^2 + \overline{W}_3^2) - H(B_0, K_0, u_0^2) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\rho_0 \overline{W}_4}{c^2(\rho_0, K_0)} + \frac{\rho_0 \overline{W}_5}{(\gamma - 1)K_0} + M_0^2 \overline{W}_1 \right) (1, x'), \\
 k &= \frac{1}{1 - M_0^2} \int_{\Omega_e} F(\overline{\mathbf{W}}, \nabla \overline{\mathbf{W}}) dx_1 dx' + \int_{\mathbb{T}^2} g_1(\overline{\mathbf{W}})(0, x') dx' - \int_{\mathbb{T}^2} g_2(\overline{\mathbf{W}}, W_4, W_5)(1, x') dx'.
 \end{aligned}$$

这里引入常数 κ 是为了保证这一形变张量与旋度方程组的可解性条件恒成立. 因为背景解的特殊性, 所以, (3.20) 本质上与经典的散度旋度方程组是一样的. 这样经典理论^[16, 19, 20]告诉我们, (3.20) 存在着唯一的光滑解 $(W_1, W_2, W_3) \in C^{2,\alpha}(\Omega_e)^3$ 满足 (3.20), 并且有下述估计式成立:

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^3 \|W_j\|_{C^{2,\alpha}(\Omega_e)} &\leq C_6 \left(\|F(\overline{\mathbf{W}}, \nabla \overline{\mathbf{W}})\|_{C^{1,\alpha}(\Omega_e)} + \sum_{j=1}^3 \|\omega_j\|_{C^{1,\alpha}(\Omega_e)} + \sum_{j=1}^2 \|g_j\|_{C^{2,\alpha}(\mathbb{T}^2)} + |\kappa| \right) \\
 &\leq C_7(\epsilon + \delta^2 + \delta\epsilon).
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

将上述结果归纳起来, 我们构造出新的 $\mathbf{W} \in C^{2,\alpha}(\Omega_e)$, 并且 $\mathbf{W}$ 满足

$$\sum_{j=1}^5 \|W_j\|_{C^{2,\alpha}(\Omega_e)} \leq C_9(\epsilon + \delta^2 + \delta\epsilon). \tag{3.22}$$

令

$$\epsilon_1 = \frac{1}{2(2C_9^2 + c_9)},$$

选取 $\delta = 2C_9\epsilon$, 其中 $\epsilon \leq \epsilon_1$, 则

$$\|\mathbf{W}\|_{\Xi_\delta} \leq C_9\epsilon + C_9(\delta + \epsilon)\delta = \frac{1}{2}\delta + C_9(2C_9\epsilon + \epsilon)\delta \leq \delta.$$

因此, $\mathbf{W} \in \Xi_\delta$, 从而可以定义映射 $\mathcal{T}$ 如下, $\mathcal{T}$ 将 Ξ_δ 映到其自身:

$$\mathcal{T}(\overline{\mathbf{W}}) = \mathbf{W}.$$

接下来证明当 ϵ 适当小时, $\mathcal{T}$ 关于 $C^{1,\alpha}$ 是一个压缩映象. 为此, 选取任意两个元素 $\overline{\mathbf{W}}^k \in \Xi_\delta$, $k = 1, 2$, 记 $\mathbf{W}^k = \mathcal{T}(\overline{\mathbf{W}}^k)$, $k = 1, 2$. 令

$$\mathbf{Y} = \mathbf{W}^1 - \mathbf{W}^2, \quad \overline{\mathbf{Y}} = \overline{\mathbf{W}}^1 - \overline{\mathbf{W}}^2.$$

下面的主要任务就是估计 $\|\mathbf{Y}\|_{C^{1,\alpha}(\Omega_e)}$.

第 1 步 估计 Y_4 和 Y_5 . 利用 (3.8) 和 (3.9), 很容易得到 Y_4 和 Y_5 所满足的方程如下:

$$\begin{cases} \partial_1 Y_4 + \frac{\overline{W}_2^1}{u_0 + \overline{W}_1^1} \partial_2 Y_4 + \frac{\overline{W}_3^1}{u_0 + \overline{W}_1^1} \partial_3 Y_4 \\ = - \left(\frac{\overline{W}_2^1}{u_0 + \overline{W}_1^1} - \frac{\overline{W}_2^2}{u_0 + \overline{W}_1^2} \right) \partial_2 W_4^2 - \left(\frac{\overline{W}_3^1}{u_0 + \overline{W}_1^1} - \frac{\overline{W}_3^2}{u_0 + \overline{W}_1^2} \right) \partial_3 W_4^2, \\ Y_4(0, x_2, x_3) = 0, \end{cases} \quad (3.23)$$

$$\begin{cases} \partial_1 Y_5 + \frac{\overline{W}_2^1}{u_0 + \overline{W}_1^1} \partial_2 Y_5 + \frac{\overline{W}_3^1}{u_0 + \overline{W}_1^1} \partial_3 Y_5 \\ = - \left(\frac{\overline{W}_2^1}{u_0 + \overline{W}_1^1} - \frac{\overline{W}_2^2}{u_0 + \overline{W}_1^2} \right) \partial_2 W_5^2 - \left(\frac{\overline{W}_3^1}{u_0 + \overline{W}_1^1} - \frac{\overline{W}_3^2}{u_0 + \overline{W}_1^2} \right) \partial_3 W_5^2, \\ Y_5(0, x_2, x_3) = 0. \end{cases} \quad (3.24)$$

由特征线方法, 有如下估计式:

$$\begin{aligned} \|Y_4\|_{C^{1,\alpha}(\Omega_e)} + \|Y_5\|_{C^{2,\alpha}(\Omega_e)} &\leq C_{10} \|\mathbf{W}^2\|_{C^{2,\alpha}(\Omega_e)} \sum_{k=1}^3 \|\overline{\mathbf{Y}}_k\|_{C^{1,\alpha}(\Omega_e)} \\ &\leq C_{11} \delta \|\overline{\mathbf{Y}}\|_{C^{1,\alpha}(\Omega_e)}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

第 2 步 估计旋度的差. 记 $J_k = \omega_k^1 - \omega_k^2$ ($k = 1, 2, 3$), 则由 (3.14)、(3.17) 和 (3.18), 可以推导出

$$\begin{cases} \partial_1 J_1 + \frac{\overline{W}_2^1}{u_0 + \overline{W}_1^1} \partial_2 J_1 + \frac{\overline{W}_3^1}{u_0 + \overline{W}_1^1} \partial_3 J_1 + \mu(\overline{\mathbf{W}}^1) J_1 \\ = R(\overline{\mathbf{W}}^1, W_4^1, W_5^1) - R(\overline{\mathbf{W}}^2, W_4^2, W_5^2) - \left(\frac{\overline{W}_2^1}{u_0 + \overline{W}_1^1} - \frac{\overline{W}_2^2}{u_0 + \overline{W}_1^2} \right) \partial_2 \omega_1^2 \\ - \left(\frac{\overline{W}_3^1}{u_0 + \overline{W}_1^1} - \frac{\overline{W}_3^2}{u_0 + \overline{W}_1^2} \right) \partial_3 \omega_1^2 - (\mu(\overline{\mathbf{W}}^1) - \mu(\overline{\mathbf{W}}^2)) \omega_1^2, \\ J_1(0, x') = 0, \end{cases} \quad (3.26)$$

以及

$$J_2 = \frac{\overline{W}_2^1 J_1 + \partial_3 Y_4 - \frac{1}{\gamma-1} H^{\gamma-1}(\overline{\mathbf{W}}^1) \partial_3 Y_5}{u_0 + \overline{W}_1^1} + \left(\frac{\overline{W}_2^1}{u_0 + \overline{W}_1^1} - \frac{\overline{W}_2^2}{u_0 + \overline{W}_1^2} \right) \omega_1^2$$

$$+ \left(\frac{1}{u_0 + \overline{W}_1^1} - \frac{1}{u_0 + \overline{W}_1^2} \right) \partial_3 W_4^2 - \frac{1}{\gamma - 1} \left(\frac{H^{\gamma-1}(\overline{\mathbf{W}}^1)}{u_0 + \overline{W}_1^1} - \frac{H^{\gamma-1}(\overline{\mathbf{W}}^2)}{u_0 + \overline{W}_1^2} \right) \partial_3 W_5^2, \quad (3.27)$$

$$J_3 = \frac{\overline{W}_3^1 J_1 - \partial_2 Y_4 + \frac{1}{\gamma-1} H^{\gamma-1}(\overline{\mathbf{W}}^1) \partial_2 Y_5}{u_0 + \overline{W}_1^1} + \left(\frac{\overline{W}_3^1}{u_0 + \overline{W}_1^1} - \frac{\overline{W}_3^2}{u_0 + \overline{W}_1^2} \right) \omega_1^2 \\ - \left(\frac{1}{u_0 + \overline{W}_1^1} - \frac{1}{u_0 + \overline{W}_1^2} \right) \partial_2 W_4^2 + \frac{1}{\gamma - 1} \left(\frac{H^{\gamma-1}(\overline{\mathbf{W}}^1)}{u_0 + \overline{W}_1^1} - \frac{H^{\gamma-1}(\overline{\mathbf{W}}^2)}{u_0 + \overline{W}_1^2} \right) \partial_2 W_5^2. \quad (3.28)$$

再由特征线方法, 我们得到如下估计式:

$$\sum_{i=1}^3 \|J_i\|_{C^\alpha(\Omega_e)} \leq C_{12} (\|\overline{\mathbf{Y}}\|_{C^{1,\alpha}(\Omega_e)} \|\omega^2\|_{C^{1,\alpha}(\Omega_e)} + \|(Y_4, Y_5)\|_{C^{1,\alpha}(\Omega_e)} \|\overline{\mathbf{W}}\|_{C^{1,\alpha}(\Omega_e)} \\ + \|\overline{\mathbf{Y}}\|_{C^{1,\alpha}(\Omega_e)} \|W_4^2, W_5^2\|_{C^{1,\alpha}(\Omega_e)}) \\ \leq C_{13} \delta \|\overline{\mathbf{Y}}\|_{C^{1,\alpha}(\Omega_e)}. \quad (3.29)$$

第 3 步 估计速度场的差 Y_j ($j = 1, 2, 3$). 从 (3.20) 可以推导出

$$\begin{cases} (1 - M_0^2) \partial_1 Y_1 + \partial_2 Y_2 + \partial_3 Y_3 = F(\overline{\mathbf{W}}^1, \nabla \overline{\mathbf{W}}^1) - F(\overline{\mathbf{W}}^2, \nabla \overline{\mathbf{W}}^2), \\ \partial_2 Y_3 - \partial_3 Y_2 = J_1, \\ \partial_3 Y_1 - \partial_1 Y_3 = J_2, \\ \partial_1 Y_2 - \partial_2 Y_1 = J_3, \\ Y_1(0, x') = (g_1(\overline{\mathbf{W}}^1) - g_1(\overline{\mathbf{W}}^2))(0, x'), \\ Y_1(1, x') = (g_2(\overline{\mathbf{W}}^1, W_4^1, W_5^1) - g_2(\overline{\mathbf{W}}^2, W_4^2, W_5^2))(1, x') + \kappa^1 - \kappa^2, \end{cases} \quad (3.30)$$

则下述估计成立:

$$\sum_{j=1}^3 \|Y_j\|_{C^{1,\alpha}(\Omega_e)} \leq \|F(\overline{\mathbf{W}}^1, \nabla \overline{\mathbf{W}}^1) - F(\overline{\mathbf{W}}^2, \nabla \overline{\mathbf{W}}^2)\|_{C^\alpha(\Omega_e)} + \sum_{k=1}^3 \|J_k\|_{C^\alpha(\Omega_e)} \\ + \|(g_1(\overline{\mathbf{W}}^1) - g_1(\overline{\mathbf{W}}^2))(0, x')\|_{C^{1,\alpha}(\mathbb{T}^2)} \\ + \|(g_2(\overline{\mathbf{W}}^1, W_4^1, W_5^1) - g_2(\overline{\mathbf{W}}^2, W_4^2, W_5^2))(1, x') + \kappa^1 - \kappa^2\|_{C^{1,\alpha}(\mathbb{T}^2)} \\ \leq C_{14} \|\mathbf{W}^1, \mathbf{W}^2\|_{C^{1,\alpha}(\Omega_e)} \|\overline{\mathbf{Y}}\|_{C^{1,\alpha}(\Omega_e)} \\ \leq C_{14} \delta \|\overline{\mathbf{Y}}\|_{C^{1,\alpha}(\Omega_e)}. \quad (3.31)$$

总结上面三步的估计, 我们得到如下估计:

$$\|\mathbf{Y}\|_{C^{1,\alpha}(\Omega_e)} \leq C_{15} \delta \|\overline{\mathbf{Y}}\|_{C^{1,\alpha}(\Omega_e)}. \quad (3.32)$$

选取

$$\epsilon_0 = \min \left\{ \epsilon_1, \frac{1}{3C_9 C_{15}} \right\},$$

则对任意的 $\epsilon \leq \epsilon_0$, 有

$$C_{15} \delta = 2C_9 C_{15} \epsilon \leq \frac{2}{3},$$

即映射 $\mathcal{T}$ 关于 $C^{1,\alpha}(\Omega_e)$ 模是压缩的, 故 $\mathcal{T}$ 在 Ξ_δ 存在唯一的不动点 $\mathbf{W}$. 记速度场

$$\mathbf{u} = (u_0 + W_1, W_2, W_3)$$

和密度

$$\rho = H(B_0 + W_4, K_0 + W_5, |\mathbf{u}|^2),$$

则方程组 (3.20) 可改写为

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, \\ \partial_2 u_3 - \partial_3 u_2 = \omega_1, \\ \partial_3 u_1 - \partial_1 u_3 = \omega_2, \\ \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1 = \omega_3, \\ (\rho u_1)(0, x') = \epsilon m_{en}(x'), \\ (\rho u_1)(1, x') = \epsilon m_{ex}(x') + \rho_0(1 - M_0^2)\kappa. \end{cases} \quad (3.33)$$

最后利用相容性条件 (3.6) 和质量守恒方程, 我们推出 $\kappa = 0$. 所以, 我们得到的解

$$(\mathbf{u}, B, K) = (u_0 + W_1, W_2, W_3, B_0 + W_4, K_0 + W_5)$$

是稳态 Euler 方程组满足边界条件 (3.1)、(3.3) 和 (3.4) 的光滑解. 证毕. $\square$

注 3.2 如果我们在出口处给定的是压力边界条件 $P(1, x') = P_0 + \epsilon P_{ex}(x')$, 则求解形变张量与旋度方程 (3.20) 时出口边界条件变为

$$\begin{aligned} g_2(\overline{\mathbf{W}}, W_4, W_5) &= \frac{W_4}{u_0} - \frac{\gamma}{(\gamma - 1)u_0} ((P_0 + \epsilon P_{ex})^{1-\frac{1}{\gamma}} (K_0 + W_5)^{\frac{1}{\gamma}} - P_0^{1-\frac{1}{\gamma}} K_0^{\frac{1}{\gamma}}) \\ &\quad - \frac{1}{2u_0} (\overline{W}_2^2 + \overline{W}_3^2). \end{aligned}$$

为保证 (3.20) 可解的相容性条件成立, 我们也需要引入依赖于函数 F 、 g_1 和 g_2 的常数 κ , 我们仍然可以找到映射 $\mathcal{T}$ 的一个不动点 $\mathbf{W}$. 同样地定义速度场和密度, 最后导出如下方程组:

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, \\ \partial_2 u_3 - \partial_3 u_2 = \omega_1, \\ \partial_3 u_1 - \partial_1 u_3 = \omega_2, \\ \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1 = \omega_3, \\ (\rho u_1)(0, x') = \epsilon m_{en}(x'), \\ P(1, x') = P_0 + \epsilon P_{ex}(x') + \kappa, \end{cases} \quad (3.34)$$

此时 κ 不一定为零, 所以, 如果出口给的是压力条件的话, 那么出口压力不能完全给定, 而是相差一个待定的常数.

注 3.3 如果背景解是亚音速剪切流 (即 $(u_0(x_2, x_3), 0, 0, P_0, K_0(x_2, x_3))$ 满足 $0 < u_0 < c(P_0, K_0)$), Weng^[14] 研究了方体管道中该剪切流关于入口处的来流方向及出口处的压力等边界条件的高维扰动

下三维亚音速解的存在性和唯一性问题, 但是, 文献 [14] 中构造的解压力正则性比速度场高一阶. 由于此时背景解的 Bernoulli 函数和熵不再是常数并且背景解的旋度可以很大, 所以, 本文所构造的迭代格式并不适用于该情形. 如何进一步改进我们的迭代格式使之适用于剪切流的情形是我们接下来要考察的事情.

注 3.4 本文给出的三维 Euler 方程组分解也可以用于证明直管道跨音速激波解的结构稳定性或者在球壳中亚音速球面对称背景解的结构稳定性以及跨音速激波解的结构稳定性问题, 这也是我们接下来要做的事情.

致谢 作者非常感谢审稿人的仔细阅读和极具建设性的批评指正.

参考文献

- 1 Chen G, Chen J, Song K. Transonic nozzle flows and free boundary problems for the full Euler equations. *J Differential Equations*, 2006, 229: 92–120
- 2 Chen G Q, Chen J, Feldman M. Transonic shocks and free boundary problems for the full Euler equations in infinite nozzles. *J Math Pures Appl* (9), 2007, 88: 191–218
- 3 Chen S. Stability of transonic shock fronts in two-dimensional Euler systems. *Trans Amer Math Soc*, 2005, 357: 287–308
- 4 Li J, Xin Z, Yin H. A free boundary value problem for the full Euler system and 2-d transonic shock in a large variable nozzle. *Math Res Lett*, 2009, 16: 777–796
- 5 Li J, Xin Z, Yin H. Transonic shocks for the full compressible Euler system in a general two-dimensional de Laval nozzle. *Arch Ration Mech Anal*, 2013, 207: 533–581
- 6 Serre D. Perfect fluid flow in two independent space variables: Reflection of a planar shock by a compressive wedge. *Arch Ration Mech Anal*, 1995, 132: 15–36
- 7 Xin Z, Yan W, Yin H. Transonic shock problem for the Euler system in a nozzle. *Arch Ration Mech Anal*, 2009, 194: 1–47
- 8 Xin Z, Yin H. The transonic shock in a nozzle, 2-D and 3-D complete Euler systems. *J Differential Equations*, 2008, 245: 1014–1085
- 9 Li J, Xin Z, Yin H. The existence and monotonicity of a three-dimensional transonic shock in a finite nozzle with axisymmetric exit pressure. *Pacific J Math*, 2010, 247: 109–162
- 10 Li J, Xin Z, Yin H. On transonic shocks in a conic divergent nozzle with axis-symmetric exit pressures. *J Differential Equations*, 2010, 248: 423–469
- 11 Chen S. Transonic shocks in 3-D compressible flow passing a duct with a general section for Euler systems. *Trans Amer Math Soc*, 2008, 360: 5265–5289
- 12 Chen S, Yuan H. Transonic shocks in compressible flow passing a duct for three-dimensional Euler systems. *Arch Ration Mech Anal*, 2008, 187: 523–556
- 13 Chen C, Xie C. Three dimensional steady subsonic Euler flows in bounded nozzles. *J Differential Equations*, 2014, 256: 3684–3708
- 14 Weng S. A new formulation for the 3-D Euler equations with an application to subsonic flows in a cylinder. *Indiana Univ Math J*, 2015, 64: 1609–1642
- 15 Liu L, Xu G, Yuan H. Stability of spherically symmetric subsonic flows and transonic shocks under multidimensional perturbations. *Adv Math*, 2016, 291: 696–757
- 16 Alber H D. Existence of three-dimensional, steady, inviscid, incompressible flows with nonvanishing vorticity. *Math Ann*, 1992, 292: 493–528
- 17 Tang C, Xin Z. Existence of solutions for three dimensional stationary incompressible Euler equations with nonvanishing vorticity. *Chin Ann Math Ser B*, 2009, 30: 803–830
- 18 Du L, Weng S, Xin Z. Subsonic irrotational flows in a finitely long nozzle with variable end pressure. *Comm Partial Differential Equations*, 2014, 39: 666–695
- 19 Gilbarg D, Trudinger N S. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, 2nd ed. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 224. Berlin-New York: Springer, 1998
- 20 Agmon S, Douglis A, Nirenberg L. Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions II. *Comm Pure Appl Math*, 1964, 17: 35–92

A deformation-curl decomposition for three dimensional steady Euler equations

Shangkun Weng & Zhouping Xin

Abstract In this paper, we provide a deformation-curl decomposition of three dimensional steady Euler equation. The key issue in this new decomposition is based on a simple observation that the density can be represented as a function of the Bernoulli's function, the entropy and the speed, and hence the density equation can be rewritten as a Frobenius inner product of a symmetric matrix with the deformation matrix: $A(\mathbf{u}) : \mathcal{D}(\mathbf{u}) = 0$, where $\mathcal{D}(\mathbf{u}) = (\frac{1}{2}(\partial_j u_k + \partial_k u_j))_{j,k=1}^3$ is the deformation matrix. Furthermore, employing the momentum equations, we find the vorticity can be resolved by a transport equation with another two algebraic equations involving the Bernoulli's function and entropy. We also obtain the velocity by solving the deformation and curl system. The most important advantage of this decomposition is the velocity, the Bernoulli's function and entropy we obtained share the same regularity as the pressure or density. Based on this decomposition, we prove the existence and uniqueness of subsonic flows in a finitely long rectangular nozzle by prescribing suitable physical boundary conditions.

Keywords steady Euler system, hyperbolic-elliptic coupled, deformation, curl, the compatibility condition

MSC(2010) 35L65, 35L67, 76N15

doi: 10.1360/N012018-00125