土的统一硬化函数的构造

姚仰平^{1*}, 田雨¹, 周安楠¹, 孙德安²

1 北京航空航天大学交通科学与工程学院, 北京 100083;

2 上海大学土木工程系, 上海 200444

* E-mail: ypyao@buaa.edu.cn

收稿日期: 2018-08-30; 接受日期: 2018-12-12; 网络版发表日期: 2018-12-29

摘要 弹塑性本构模型中的硬化函数在加载条件下应该与应力路径无关. 本文基于两条正交的加载路径(即等平均正应力剪切和等向压缩)下的土的变形规律, 构造了能够统一地描述剪缩和剪胀特性的硬化函数, 称为统一硬化函数. 然后根据格林公式和试验数据, 分别从理论和试验的角度验证了统一硬化函数在加载条件下的应力路径无关性. 最后通过与各种加载应力路径下黏土、砂土的应力应变关系的试验结果进行对比, 进一步证明了统一硬化函数及其统一硬化本构模型的合理性.

关键词 土, 弹塑性模型, 统一硬化函数, 加载路径无关性, 剪胀性

1 引言

弹塑性本构模型包含三个基本要素, 即屈服函数、塑性势函数和硬化函数, 分别用于描述塑性应变的起始条件、方向和发展规律. 根据三者推导出弹塑性刚度矩阵, 就能计算材料的应力应变关系.

对于理想弹塑性材料, 如图1(a)所示, 由于其屈服应力并不随加载过程而变化(非硬化材料), 且剪切过程中不引起体积应变(非耦合材料), 因此其弹塑性本构方程只需要确定屈服函数和塑性势函数, 不涉及硬化函数.

对于正常固结黏土或者松砂(图1(b)), 在剪切加载的过程中, 其屈服应力不断升高(硬化材料), 剪切应力会引起相应的体积收缩(耦合材料), 且硬化和体积收缩单调同步(单调耦合硬化材料). 对于单调耦合硬化

材料, 其弹塑性本构方程需要屈服函数、塑性势函数和硬化函数三个要素. 因为硬化和体积收缩单调同步, 所以其硬化过程可以用体积变化相关的状态参量(例如塑性体积应变)来表示.

对于超固结黏土或者密砂(图1(c)), 在剪切加载的过程中, 其屈服应力不断升高(硬化材料), 剪切应力会引起相应的体积变化(耦合材料), 但硬化和体积不单调同步. 在剪切硬化过程中体积先收缩后膨胀(非单调耦合硬化材料). 对于超固结黏土或者密砂这一类非单调耦合硬化材料, 其硬化过程非常复杂, 如何构造塑性体积应变相关的增量函数来反映硬化过程, 一直是弹塑性理论和土力学的研究热点和重点.

针对土材料的弹塑性模型一般都建立在 (p, q, θ) 空间, 应力 (p, q, θ) 空间是应力 $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ 空间的球坐标形式, (p, q, θ) 可以和 $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ 在任意条件下相互

引用格式: 姚仰平, 田雨, 周安楠, 等. 土的统一硬化函数的构造. 中国科学: 技术科学, 2019, 49: 26–34

Yao Y P, Tian Y, Zhou A N, et al. Unified hardening law for soils and its construction (in Chinese). Sci Sin Tech, 2019, 49: 26–34, doi: 10.1360/N092018-00296

图 1 (网络版彩图) 弹塑性材料分类. (a) 非硬化非耦合材料; (b) 单调耦合硬化材料(例如正常固结黏土或松砂); (c) 非单调耦合硬化材料(例如超固结黏土或密砂)

转换. 其中, p 为平均正应力, q 为偏应力, θ 是应力罗德角. 如果忽略应力罗德角的影响, 应力(p, q, θ)空间可以进一步简化为应力(p, q)空间. 在应力(p, q)空间中, 剑桥大学的Roscoe等人提出了剑桥模型^[1]和修正剑桥模型^[2]以描述正常固结黏土(单调耦合硬化材料)的应力应变特性. 一直以来, 修正剑桥模型被认为是最具代

表性的土的弹塑性模型. 修正剑桥模型的屈服函数 f 、塑性势函数 g 和硬化函数 H 分别为

$$f = g = \ln \frac{p}{p_0} + \ln \left(1 + \frac{q^2}{M^2 p^2} \right) - \frac{H}{c_p} = 0, \quad (1)$$

$$H = \varepsilon_v^p, \quad (2)$$

式中, p_0 为 $p-q$ 平面上初始屈服面在 p 轴上的截距, M 为临界状态应力比, c_p 为塑性参数, ε_v^p 为塑性体应变. 在三维主应力空间, 修正剑桥模型的屈服面关于空间对角线(即 p 轴)对称(如图2(a)所示, 因为忽略应力罗德角的影响, 所以屈服面呈椭球体), 且在三轴压缩子午面上的截面呈椭圆(见图2(b)). 修正剑桥模型采用相关联的流动法则, 其塑性势面也为椭圆; 假定对于正常固结黏土, 屈服面是塑性体应变的等值面, 即塑性体应变为硬化函数.

对于超固结黏土或者密砂(非单调耦合硬化材料), Hashiguchi^[3]在修正剑桥模型的基础上提出了下加载面的概念来描述超固结黏土在加载过程中的屈服特性. Dafalias^[4]利用当前应力状态点到边界的距离作为衡量超固结黏土的塑性刚度及其衰减速率的状态参量. Whittle和Kavvas^[5]提出屈服面在加载过程中逐渐旋转以反映应力诱导各向异性的影响. Lade^[6]和 McDowell^[7]的模型采用非关联流动法则, 塑性势面与屈服面的形状有所不同. 我国的土力学先驱黄文熙等人^[8]为了建立超固结黏土和密砂的本构模型, 将硬化函数假设为塑性体应变和剪应变的组合函数, 然后根据试验结果确定了半经验性质的表达式, 但并没有针对硬化函数的路径相关性予以验证. 总之, 对于满足加载条件下应力路径无关、且简单实用的硬化函数的构造一直是国内外土力学学者开展研究工作的重点.

修正剑桥模型的硬化函数为塑性体应变(见公式(2)), 能够合理地描述正常固结黏土的硬化规律. 但对于超固结黏土和密砂, 剪切时先体缩后体胀, 塑性体应变并不单调, 这与硬化过程中硬化函数单调增加的变化趋势相违背. 此外, 塑性体应变的大小受应力路径影响, 不满足塑性理论对硬化函数在加载条件下的应力路径无关性要求. 因此, 需要引入新的硬化函数用来统一地描述正常固结黏土、超固结黏土、松砂和密砂的硬化特性. 姚仰平等人^[9]提出的统一硬化函数, 能够简单、实用、且统一地反映黏土和砂土硬化时的剪胀和剪缩特性, 本文将详细介绍其构造过程, 并从理论

图2 (网络版彩图)修正剑桥模型的屈服面. (a) 三维主应力空间; (b) 三轴压缩子午面

和试验角度验证了统一硬化函数在加载条件下的应力路径无关性.

2 统一硬化函数的构造

修正剑桥模型的屈服函数和塑性势函数是根据剪胀方程和相关联流动法则确定的, 所采用的剪胀方程和相关联流动法则也基本适用于超固结黏土和密砂, 因此可以沿用修正剑桥模型的椭圆屈服面方程(即公式(1)), 并通过引入新的硬化函数 H 来描述超固结黏土和密砂的硬化规律. 下面简要展示 H 的推导思路, 详细过程见参考文献[10].

对于超固结黏土和密砂, 参照剑桥模型的假定, 构造新的硬化函数 H 以取代塑性体应变, 这样屈服面将成为 H 的等值面.

通常, H 可设成塑性体应变 ε_v^p 或塑性剪应变 ε_d^p 的函数, 或二者的组合函数. 由于塑性体应变增量 $d\varepsilon_v^p$ 与塑性剪应变增量 $d\varepsilon_d^p$ 的相对大小可用剪胀方程确定, 二者并不相互独立, 因此假设 H 是 $d\varepsilon_v^p$ 的积分函数, 即

$$H = \int c(p, q) d\varepsilon_v^p, \quad (3)$$

式中, $c(p, q)$ 为与应力状态有关的待定函数. 根据硬化函数的路径无关性要求, 从初始屈服面 f_1 出发, 沿任意加载路径加载到后继屈服面 f_2 , H 的增量应当相等. 因此, 可以通过正交的两条加载路径, 如图3所示的等 p 剪切路径AB和等向压缩路径AC来确定 H 的具体形式.

2.1 等 p 剪切路径AB

首先根据屈服函数(即公式(1))和待定的硬化函数(即公式(3))推导塑性剪应变增量 $d\varepsilon_d^p$ 的表达式. 对公式(1)进行全微分可得

$$df = \frac{\partial f}{\partial p} dp + \frac{\partial f}{\partial q} dq + \frac{\partial f}{\partial H} dH = 0. \quad (4)$$

根据相关联流动法则:

$$d\varepsilon_v^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial p}, \quad (5a)$$

$$d\varepsilon_d^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial q}, \quad (5b)$$

式中, λ 为塑性因子. 将公式(3)和(5a)代入公式(4), 得到 λ 的表达式为

$$\lambda = \frac{c_p}{c(p, q)} \left(dp + \frac{2\eta}{M^2 - \eta^2} dq \right), \quad (6)$$

式中, $\eta = q/p$ 为应力比. 将公式(6)代入公式(5b), 并考虑到沿AB路径 $dp = 0$, 可得

$$d\varepsilon_d^p = \frac{1}{c(p, q)} \frac{c_p}{p} \frac{4\eta^2}{M^4 - \eta^4} dq. \quad (7)$$

此即为塑性剪应变增量的理论表达式.

另一方面, 根据等 p 剪切三轴试验^[11]测得的正常固结黏土和密砂的 η - ε_d 关系曲线如图4所示. 从中可以看出, 两种土材料的应力应变关系曲线形状相似, 仅峰值应力比存在差异: 正常固结黏土在剪切过程中单调体缩, 因此可认为其特征状态(即由剪缩转变为剪胀

图 3 等 p 剪切路径AB和等向压缩路径AC

图 4 正常固结黏土与密砂的应力应变关系曲线对比

的状态)与临界状态重合, 均用 M 表示; 而密砂在应力比达到峰值之前将发生剪胀, 所以峰值应力比 M_f 高于特征状态应力比 M . 注意到修正剑桥模型计算出的正常固结黏土的塑性剪应变增量为

$$d\varepsilon_d^p = \frac{c_p}{p} \frac{4\eta^2}{M^4 - \eta^4} dq. \quad (8)$$

上式确定的 η - ε_d 关系曲线呈抛物线型, 且随着 ε_d 增加, 该曲线逐渐趋近于直线 $\eta = M$. 基于上文所述正常固结黏土和密砂的应力应变关系曲线的异同点, 类比公式(8), 假定密砂的塑性剪应变增量为

$$d\varepsilon_d^p = \rho \frac{c_p}{p} \frac{4\eta^2}{M_f^4 - \eta^4} dq. \quad (9)$$

与公式(8)相比, 公式(9)将 M 替换为 M_f , 以反映峰值应力比的差异, 并引入了比例系数 ρ . 对比公式(7)和公式(9), 可以得到

$$c(p, q) = \frac{1}{\rho} \frac{M_f^4 - \eta^4}{M^4 - \eta^4}. \quad (10)$$

于是

$$H = \int \frac{1}{\rho} \frac{M_f^4 - \eta^4}{M^4 - \eta^4} d\varepsilon_v^p. \quad (11)$$

2.2 等向压缩路径AC

由于硬化函数需在加载条件下与应力路径无关, 公式(11)也应当适用于描述等向压缩时超固结黏土和密砂的硬化规律. 在等向压缩($\eta = 0$)条件下, 公式(11)可化为

$$H = \int \frac{1}{\rho} \frac{M_f^4}{M^4} d\varepsilon_v^p. \quad (12)$$

另一方面, 根据等向压缩试验结果, 在 $e - \ln p$ (e 为孔隙比)空间内, 超固结黏土和密砂的压缩线也可简单地用直线拟合(这与正常固结黏土的等向压缩线类似). 因此, 等向压缩时 H 应能退化为 ε_v^p , 公式(12)中的被积函数应等于1, 即

$$\rho = \frac{M_f^4}{M^4}. \quad (13)$$

最终, 硬化函数可以构造为

$$H = \int \frac{M^4}{M_f^4} \frac{M_f^4 - \eta^4}{M^4 - \eta^4} d\varepsilon_v^p. \quad (14)$$

对于正常固结黏土, 由于 $M_f = M$, 上式中的硬化函数退化为剑桥模型所采用的塑性体应变(即公式(2)). 该硬化函数称为统一硬化(unified hardening)函数^[10], 简称UH硬化函数. 统一硬化函数应满足加载路径无关性的理论要求, 并且能够统一地描述黏土和砂土的剪缩硬化和剪胀硬化特性(详见第4节和第5节).

3 应力应变关系的计算

3.1 塑性应变增量

参考公式(4)~(6), 利用统一硬化函数重新推导塑性因子:

$$A = c_p \frac{M_f^4}{M^4} \frac{M^4 - \eta^4}{M_f^4 - \eta^4} \left(dp + \frac{2\eta}{M^2 - \eta^2} dq \right). \quad (15)$$

代入公式(5), 得到塑性应变增量:

$$\begin{pmatrix} d\varepsilon_v^p \\ d\varepsilon_d^p \end{pmatrix} = c_p \frac{M_f^4 M^4 - \eta^4}{M^4 M_f^4 - \eta^4} \frac{1}{p} \begin{pmatrix} \frac{M^2 - \eta^2}{M^2 + \eta^2} & \frac{2\eta}{M^2 + \eta^2} \\ \frac{2\eta}{M^2 + \eta^2} & \frac{4\eta^2}{M^4 - \eta^4} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} dp \\ dq \end{pmatrix}. \quad (16)$$

与修正剑桥模型的塑性矩阵相比, 上式仅多了 $M_f^4 / M^4 \cdot (M^4 - \eta^4) / (M_f^4 - \eta^4)$ 项. 正是由于这一项的存在, 使得本构模型能够描述超固结黏土和密砂的剪胀特性.

3.2 弹性应变增量

与修正剑桥模型一样, 弹性体应变增量 $d\varepsilon_v^e$ 和弹性剪应变增量 $d\varepsilon_d^e$ 可根据下式计算:

$$\begin{pmatrix} d\varepsilon_v^e \\ d\varepsilon_d^e \end{pmatrix} = c_k \frac{1}{p} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{2(1+\nu)}{9(1-2\nu)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dp \\ dq \end{pmatrix}, \quad (17)$$

式中, c_k 为弹性参数, ν 为泊松比.

3.3 总应变增量

联立公式(16)和(17), 可得总应力应变关系为

$$\begin{pmatrix} d\varepsilon_v \\ d\varepsilon_d \end{pmatrix} = \frac{1}{p} \begin{pmatrix} c_p \frac{M_f^4(M^2 - \eta^2)^2}{M^4(M_f^4 - \eta^4)} + c_k & c_p \frac{2\eta M_f^4(M^2 - \eta^2)}{M^4(M_f^4 - \eta^4)} \\ c_p \frac{2\eta M_f^4(M^2 - \eta^2)}{M^4(M_f^4 - \eta^4)} & c_p \frac{4\eta^2 M_f^4}{M^4(M_f^4 - \eta^4)} + c_k \frac{2(1+\nu)}{9(1-2\nu)} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} dp \\ dq \end{pmatrix}. \quad (18)$$

4 统一硬化函数在加载条件下应力路径无关性的理论验证

本构模型所采用的硬化函数代表的是屈服面的硬化规律. 因为屈服面是硬化函数的等值面, 所以硬化函数在加载条件下需与应力路径无关. 因为屈服面只和

加载相关(卸载不引起屈服面的变动), 因此硬化函数的应力路径无相关要求只在加载条件下有效. 本节将从理论上验证统一硬化函数以及由其推导出的塑性体应变、剪应变和对应加载路径的相关或无关性.

4.1 塑性体应变

对塑性体应变增量(即公式(16))进行积分, 可得

$$\begin{aligned} \varepsilon_v^p &= \int c_p \frac{M_f^4(M^2 - \eta^2)^2}{p M^4(M_f^4 - \eta^4)} dp + c_p \frac{2\eta M_f^4(M^2 - \eta^2)}{p M^4(M_f^4 - \eta^4)} dq \\ &= \int A dp + B dq. \end{aligned} \quad (19)$$

上式是一个沿某一个加载应力路径的曲线积分. 根据格林公式, 可以通过比较偏微分 $\partial A / \partial q$ 和 $\partial B / \partial p$ 来判断 ε_v^p 的路径相关性. 由于

$$\frac{\partial A}{\partial q} = c_p \frac{4\eta M_f^4(M^2 - \eta^2)(M^2\eta^2 - M_f^4)}{p^2 M^4(M_f^4 - \eta^4)^2}, \quad (20a)$$

$$\frac{\partial B}{\partial p} = c_p \frac{4\eta M_f^4(2M_f^4\eta^2 - M^2 M_f^2 - M^2\eta^4)}{p^2 M^4(M_f^4 - \eta^4)^2}, \quad (20b)$$

所以 $\partial A / \partial q \neq \partial B / \partial p$, 由此可知塑性体积应变 ε_v^p 与应力路径相关. 同理可证, 塑性剪应变 ε_d^p 也与应力路径相关.

4.2 统一硬化函数

将 $d\varepsilon_v^p$ 的计算公式(16)代入到统一硬化函数的表达式(即公式(14))中可得

$$\begin{aligned} H &= \int c_p \frac{M^2 - \eta^2}{p(M^2 + \eta^2)} dp + c_p \frac{2\eta}{p(M^2 + \eta^2)} dq \\ &= \int C dp + D dq. \end{aligned} \quad (21)$$

由于

$$\frac{\partial C}{\partial q} = -c_p \frac{4\eta M^2}{p^2(M^2 + \eta^2)^2}, \quad (22a)$$

$$\frac{\partial D}{\partial p} = -c_p \frac{4\eta M^2}{p^2(M^2 + \eta^2)^2}, \quad (22b)$$

所以 $\partial C / \partial q = \partial D / \partial p$, 表明统一硬化函数在加载时与应力路径无关. 由此可以看出, 构造统一硬化函数时,

通过引入一个与应力状态相关的函数项 M^4/M_f^4 . $(M_f^4 - \eta^4)/(M^4 - \eta^4)$ 消除了 ε_v^p 的在加载条件下的路径相关性.

5 统一硬化函数在加载条件下应力路径无关性的试验验证

根据 Toyoura 砂土的三轴压缩试验结果^[12], 检验统一硬化函数的应力路径无关性. 试验加载路径如图 5(a) 所示, 试样的初始应力状态用点 A(196, 0) 表示, 最终均达到点 F(588, 882), 分别沿 ABCF、ABEF、ADEF 和 AF 四条路径进行加载. 图 5(b) 和 (c) 分别显示了塑性体应变 ε_v^p 和塑性剪应变 ε_d^p 的实测值, 可以看出当加载至点 F 时, 沿不同路径产生的 ε_v^p 和 ε_d^p 互不相等, 说明二者均与路径有关. 根据实测的 ε_v^p 增量, 利用公式(14) 计算统一硬化函数的大小, 其中特征状态应力比 M 取 0.95, 峰值应力比 M_f 取 1.66. 将计算结果绘制在图 5(d) 中, 我们可以发现经各条加载路径(ABCF、ABEF、

ADEF 和 AF) 后的终点 F 对应的 H 值基本相同(路径 ABEF 和 ADEF 上点 E 处的 H 值也很接近), 从而根据试验结果验证了统一硬化函数满足应力路径无关性的要求.

6 各种加载路径下的应力应变关系试验验证

为进一步验证统一硬化函数的合理性, 利用基于统一硬化函数所建立的本构模型(UH 模型), 预测各种加载路径下黏土和砂土的应力应变关系.

图 6 和图 7 分别显示了正常固结 Fujinomor 黏土^[11] 和 Toyoura 砂土^[12] 的三轴压缩试验结果(应力路径包括等 p 、等 σ_3 和等 σ_1 三种不同的加载路径). 图中 ε_1 为轴向应变, ε_3 为径向应变. 本文根据 UH 模型对试验结果进行预测(模型参数见表 1 所示). 从图 6 和图 7 可以看出, 引入统一硬化函数后, UH 模型既能合理地描述正常固结黏土的剪缩特性, 又能反映密砂的剪胀特性, 且对不同加载路径的预测结果均与实测结果基本一致.

图 5 (网络版彩图)不同路径下塑性体应变、塑性剪应变和统一硬化函数. (a) 应力路径示意图; (b) 塑性体应变; (c) 塑性剪应变; (d) 统一硬化函数

图 6 (网络版彩图)各种路径下Fujinomori黏土的应力应变关系的实测和预测结果. (a) 等 p 路径; (b) 等 σ_3 路径; (c) 等 σ_1 路径

图 7 (网络版彩图)各种路径下Toyoura砂土的应力应变关系的实测和预测结果. (a) 等 p 路径; (b) 等 σ_3 路径; (c) 等 σ_1 路径

除了等 p 、等 σ_3 和等 σ_1 三种不同的加载路径以外, 本文还采用了更为复杂的加载路径来验证UH模型的

计算能力. 如图8(a)所示, 三轴试验中先保持应力比 η 不变, 对中密砂进行各向异性压缩, 再保持偏应力 q 不变,

表 1 UH模型参数表

试样	M	M_f	c_p	c_k	v
Fujinomori黏土	1.45	1.45	0.0396	0.0112	0.3
Toyoura砂土	0.95	1.66	0.00152	0.00251	0.3
中密砂	1.08	1.68	0.00203	0.00259	0.3

图 8 (网络版彩图)复杂路径下中密砂的应力应变关系的实测和预测结果. (a) 应力路径示意图; (b) ABC路径; (c) DEF路径

而使平均正应力 p 逐渐增大. 试验测得的应力比 σ_1/σ_3 和轴向应变和体应变 ε_v 关系如图8(b)和(c)所示. 通过对比我们可以看出, UH模型基本能够描述这种复杂应力路径下的应力应变关系.

需要说明的是, 本文是在三轴压缩应力状态下推导和验证统一硬化函数的, 若要考虑中主应力的影响, 可以采用变换应力方法^[9], 在不改变统一硬化函数及屈服函数的方程形式的基础上, 将本构模型三维化, 其适用性已得到验证.

7 结论

(1) 统一硬化函数能够克服塑性体应变在加载条

件下不单调且路径相关的缺陷, 能统一地描述超固结黏土和密砂的剪缩、剪胀特性.

(2) 在构造统一硬化函数时, 利用了等 p 剪切和等向压缩两条正交的应力路径下的变形规律. 与试验结果的对比表明, 在复杂加载路径下统一硬化函数仍能保证与加载路径无关.

(3) 根据格林公式, 证明了统一硬化函数满足塑性理论对硬化函数加载路径无关的要求.

(4) 基于统一硬化函数和加卸载准则(区分加载和卸载路径)建立的本构模型(UH模型), 适用于模拟三轴压缩状态下黏土和砂土沿不同路径的应力应变关系; 结合变换应力方法, 还能合理地描述中主应力的影响.

致谢 本文在成文过程中得到了陈云敏院士的指点与帮助, 凌道盛教授也提出了宝贵的建议, 在此表示衷心的感谢!

参考文献

- 1 Roscoe K H, Schofield A N, Thurairajah A. Yielding of clays in states wetter than critical. *Géotechnique*, 1963, 13: 211–240
- 2 Roscoe K H, Burland J B. On the generalized stress-strain behaviour of ‘wet clay’. In: *Engineering Plasticity*. Cambridge at the University Press, 1968. 535–609
- 3 Hashiguchi K. Subloading surface model in unconventional plasticity. *Int J Solids Struct*, 1989, 25: 917–945
- 4 Dafalias Y F. Bounding surface plasticity. I: Mathematical foundation and hypoplasticity. *J Eng Mech*, 1986, 112: 966–987
- 5 Whittle A J, Kavvas M J. Formulation of MIT-E3 constitutive model for overconsolidated clays. *J Geotechnical Eng*, 1994, 120: 173–198
- 6 Lade P V. Elasto-plastic stress-strain theory for cohesionless soil with curved yield surfaces. *Int J Solids Struct*, 1977, 13: 1019–1035
- 7 McDowell G R. A simple non-associated flow model for sand. *GM*, 2002, 4: 65–69
- 8 黄文熙, 濮家骊, 陈愈炯. 土的硬化规律和屈服函数. *岩土工程学报*, 1981, 3: 19–26
- 9 Yao Y P, Sun D A, Matsuoka H. A unified constitutive model for both clay and sand with hardening parameter independent on stress path. *Comput Geotechnics*, 2008, 35: 210–222
- 10 姚仰平. UH模型系列研究. *岩土工程学报*, 2015, 37: 193–217

- 11 Nakai T, Matsuoka H. A generalized elastoplastic constitutive model for clay in three-dimensional stresses. *SOILS Found*, 1986, 26: 81–98
- 12 Nakai T. An isotropic hardening elastoplastic model for sand considering the stress path dependency in three-dimensional stresses. *SOILS Found*, 1989, 29: 119–137

Unified hardening law for soils and its construction

YAO YangPing¹, TIAN Yu¹, ZHOU AnNan¹ & SUN DeAn²

¹ School of Transportation Science and Engineering, Beihang University, Beijing 100083, China;

² Department of Civil Engineering, Shanghai University, Shanghai 200444, China

The hardening law in an elastoplastic constitutive model should be independent of the stress path for loading conditions. Based on the deformation behavior of soils along two orthogonal stress paths (i.e., constant mean stress shear path and isotropic compression path), a new hardening law, unified hardening law, is proposed to describe the shear contraction and dilatancy in an identical framework. Against Green's Formula and test data, we prove that the unified hardening law meets the requirement on the independence of loading path, theoretically and experimentally. The constitutive model developed by employing the unified hardening law is further verified by comparing it with the measured stress-strain relation of clay and sand under different loading paths.

soil, elastoplastic model, unified hardening law, loading path independence, dilatancy

doi: [10.1360/N092018-00296](https://doi.org/10.1360/N092018-00296)