带非奇扰动项的 $(2, p)$ -Laplace 方程无穷多解的存在性

梁占平, 解利霞, 李福义*

山西大学数学科学学院, 太原 030006

E-mail: lzp@sxu.edu.cn, 764886077@qq.com, fyli@sxu.edu.cn

收稿日期: 2019-10-16; 接受日期: 2020-01-21; 网络出版日期: 2020-02-28; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11571209 和 11671239) 资助项目

摘要 本文研究带非奇扰动项的 $(2, p)$ -Laplace 方程

$$\begin{cases} -\Delta u - \Delta_p u = a(x)|u|^{q-2}u + f(x, u), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 是有界光滑区域, $1 < q < 2 < p < N$, $a \in C(\bar{\Omega})$ 可变号, f 关于 u 不必是奇函数. 利用变分方法, 本文获得该方程无穷多解的存在性.

关键词 $(2, p)$ -Laplace 方程 非奇扰动项 变分方法 无穷多解

MSC (2010) 主题分类 35J62, 35J92, 35A15

1 引言

本文研究下面的 $(2, p)$ -Laplace 方程:

$$\begin{cases} -\Delta u - \Delta_p u = a(x)|u|^{q-2}u + f(x, u), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.1)$$

其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 是有界光滑区域, $\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ 是 p -Laplace 算子, $1 < q < 2 < p < N$ 且

$$p + \frac{N(p-q)}{q} < p^* := \frac{Np}{N-p}, \quad (1.2)$$

$a \in C(\bar{\Omega})$ 可变号, f 关于 u 不必是奇函数.

英文引用格式: Liang Z P, Xie L X, Li F Y. Existence of infinitely many solutions to $(2, p)$ -Laplacian equations with non-odd perturbation terms (in Chinese). Sci Sin Math, 2021, 51: 439–456, doi: 10.1360/SSM-2019-0255

方程 (1.1) 是由 Laplace 算子和 p -Laplace 算子构成的椭圆方程, 它在诸多数学物理模型中有着广泛的应用, 如生物数学、量子物理学和等离子体物理学等, 具体参见文献 [1–5]. 近年来, 关于 $(2, p)$ -Laplace 方程已经有了许多解的存在性和多重性结果, 具体参见文献 [6–13].

文献 [6–10] 利用变分方法和 Morse 理论证明了方程

$$\begin{cases} -\Delta u - \Delta_p u = f(u), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (1.3)$$

非平凡解的存在性, 其中非线性项 f 在无穷远点附近是 $p-1$ 渐近线性增长, 在零点附近是渐近线性增长. 文献 [11] 同样利用变分方法和 Morse 理论, 证明了方程 (1.3) 非平凡解的存在性, 其中 f 在无穷远点附近是 $p-1$ 超线性增长, 在零点附近是渐近线性增长. 文献 [12, 13] 利用类似的方法证明了方程 (1.3) 非平凡解的存在性, 其中非线性项 f 在 ∞ 附近是 $p-1$ 超线性增长, 在 $-\infty$ 附近是 $p-1$ 渐近线性增长, 在零点附近是渐近线性增长.

若 f 在零点附近满足条件, 在无穷远点附近也满足条件, 则称 f 满足全局条件; 若 f 只在零点附近满足条件, 则称 f 满足局部条件. 上面提到的文献 [6–13] 均是研究非线性项 f 在满足全局条件下方程 (1.3) 非平凡解的存在性. 近几年, 一些学者开始讨论在非线性项满足局部条件下一些偏微分方程解的存在性. 例如, Sun 等^[14] 考虑了如下 Schrödinger-Poisson 系统:

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u + \lambda\phi u = K(x)|u|^{q-2}u + f(x, u), & x \in \mathbb{R}^3, \\ -\Delta\phi = u^2, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} \phi(x) = 0, & x \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

无穷多解的存在性, 其中非线性项 f 满足局部条件: 对于某个 $\delta > 0$, $f \in C(\mathbb{R}^3 \times (-\delta, \delta))$ 是奇函数且

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x, t)}{K(x)|t|^{q-1}} = 0$$

对 $x \in \mathbb{R}^3$ 一致成立.

近来, 学者们还研究了以下带有非奇扰动项的 p -Laplace 方程:

$$\begin{cases} -\Delta_p u = h(x, u) + g(x, u), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.4)$$

在文献 [15] 中, $p = 2$, $g \in L^2(\Omega)$, h 关于 u 是奇函数, 该文献证明了方程 (1.4) 无穷多解的存在性. 在文献 [16] 中, $p = 2$, $h(x, t) = |t|^{s-2}t$, $g \in L^2(\Omega)$, $N \geq 2$, 当 $s \in (1, s_N)$ 时, 该文献证明了方程 (1.4) 无穷多解的存在性, 其中 s_N 为方程 $(2N-2)s^2 - (N+2)s - N = 0$ 的最大根. 在文献 [17] 中, $p = 2$, $h(x, t) = |t|^{s-2}t$, $g \in L^2(\Omega)$, 当 $N \geq 3$ 时, $2 < s < 2^*$, 当 $N = 1, 2$ 时, $s > 2$, 该文献证明了方程 (1.4) 无穷多解的存在性. 在文献 [18] 中, $h(x, t) = a(x)|t|^{s-2}t$, $1 < s < p$, 函数 a 可变量, g 关于 u 不必是奇函数, 该文献证明了方程 (1.4) 无穷多解的存在性.

基于文献 [14, 18] 的结果, 自然问: $(2, p)$ -Laplace 方程在满足局部条件以及非奇扰动下是否存在无穷多解? 利用文献 [18] 的研究思路, 本文给出这个问题的肯定回答. 同时, 我们引进了新的控制泛函, 界定了参数的取值范围, 使得证明过程更加易于理解. 在本文中, 方程 (1.1) 的解是指 $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ 且对所有的 $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, 有

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} a(x)|u|^{q-2}uv + \int_{\Omega} f(x, u)v.$$

为了获得方程 (1.1) 无穷多解的存在性, 我们对方程 (1.1) 右边的非线性项 a 和 f 作如下假设:

(A) 函数 $a \in C(\bar{\Omega})$ 且存在 $x_0 \in \Omega$, 使得 $a(x_0) > 0$;

(F) 函数 $f \in C(\bar{\Omega} \times (-\delta, \delta))$, 其中 $\delta > 0$, 且存在 $r \in (p + N(p - q)/q, p^*]$, 使得

$$f(x, t) = o(|t|^{r-1}), \quad t \rightarrow 0$$

对 $x \in \Omega$ 一致成立.

注 1.1 在本文中, 条件 (1.2) 是开展研究工作的必要条件. 通过简单的计算可知, 当 $N = 3$ 且 $1 < q < 2 < p < N$ 时, 都有 $p + 3(p - q)/q < p^*$; 而当 $N \geq 4$ 时, $p + N(p - q)/q < p^*$ 不一定成立. 例如, 取 $N = 4, p = 2.001, q = 1.01$, 则 $p + 4(p - q)/q - 4p/(4 - p) \approx 1.92 > 0$; 取 $N = 4, p = 3, q = 1.5$, 则 $p + 4(p - q)/q - 4p/(4 - p) = -5 < 0$.

注 1.2 根据假设 (A), 存在 $r_0 > 0$, 使得 $B(x_0, r_0) \subset \Omega$ 且当 $x \in B(x_0, r_0)$ 时, 有 $a(x) > 0$. 因此, 如果 $u \in C_0^\infty(B(x_0, r_0)) \setminus \{0\}$, 则 $\int_\Omega a(x)|u|^q > 0$, 其中 $B(x_0, r_0)$ 表示 $\mathbb{R}^N$ 中以 x_0 为中心、 r_0 为半径的开球.

在本文中, $|\cdot|_s$ 表示 $L^s(\Omega)$ 的范数, 其中 $s \in [1, \infty]$. $\|\cdot\|$ 表示 $E := W_0^{1,p}(\Omega)$ 中的范数. $\|\cdot\|_2$ 表示 $H_0^1(\Omega)$ 中的范数. $c_i > 0$ ($i = 1, 2, \dots$) 是在命题证明中使用的常数, 依次编号; $C_i > 0$ ($i = 1, 2, \dots$) 是取定的常数, 后面的内容中要再次使用. k 是正整数. 由于 $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, 则存在 $M_0 > 0$, 使得 $\|u\|_2^2 \leq M_0 \|u\|_2^2, u \in H_0^1(\Omega)$. 类似地, 存在 $M_1, M_2 > 0$, 分别使得 $|u|_r^r \leq M_1 \|u\|^r, |u|_p^p \leq M_2 \|u\|^p$.

下面给出本文的主要结果.

定理 1.1 假设 (A) 和 (F) 成立, 则方程 (1.1) 存在一个解序列 $\{u_n\}$, 使得 $\|u_n\| \rightarrow 0, |u_n|_\infty \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$; 此外, 有 $J(u_n) < 0$ 且当 $n \rightarrow \infty$ 时, $J(u_n) \rightarrow 0$, 其中

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 + \frac{1}{p} \int_\Omega |\nabla u|^p - \frac{1}{q} \int_\Omega a(x)|u|^q - \int_\Omega F(x, u),$$

这里 $F(x, t) = \int_0^t f(x, s)ds, (x, t) \in \Omega \times (-\delta, \delta)$.

2 准备工作

为了寻找方程 (1.1) 的解序列, 本节首先研究一些辅助泛函的性质. 定义

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 + \frac{1}{p} \int_\Omega |\nabla u|^p - \frac{1}{q} \int_\Omega a(x)|u|^q, \quad u \in E,$$

$$\hat{I}(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 + \frac{1}{p} \int_\Omega |\nabla u|^p - \frac{1}{q} \int_\Omega (a(x) + 1)|u|^q, \quad u \in E.$$

记

$$\mathcal{N}_I := \{u \in E \setminus \{0\} : \langle I'(u), u \rangle = 0\}.$$

引理 2.1 如果 $u \in E$ 且 $\int_\Omega a(x)|u|^q > 0$, 则存在唯一的 $T_0(u) > 0$, 使得 $T_0(u)u \in \mathcal{N}_I$ 且

$$I(T_0(u)u) = \min\{I(tu) : t \geq 0\} < 0.$$

另外, $I(tu)$ 关于 t 在区间 $[0, T_0(u)]$ 上递减, 在区间 $[T_0(u), \infty)$ 上递增.

证明 给定 $u \in E$ 且 $\int_{\Omega} a(x)|u|^q > 0$, 则对任意的 $t \in [0, \infty)$, 有

$$I(tu) = \frac{1}{2}t^2\|u\|_2^2 + \frac{1}{p}t^p\|u\|^p - \frac{1}{q}t^q \int_{\Omega} a(x)|u|^q.$$

记

$$g(t) := \frac{d}{dt} [I(tu)] = t\|u\|_2^2 + t^{p-1}\|u\|^p - t^{q-1} \int_{\Omega} a(x)|u|^q, \quad t \geq 0.$$

因为 $1 < q < 2 < p$, 易知在零点附近 $I(tu) < 0$ 及在无穷远点附近 $I(tu) > 0$. 从而存在 $t_1 > 0$, 使得

$$I(t_1u) = \min\{I(tu) : t \geq 0\} < 0.$$

从而知 $g(t_1) = \frac{1}{t_1} \langle I'(t_1u), t_1u \rangle = 0$. 故 $t_1u \in \mathcal{N}_I$. 为了证明唯一性和单调性, 只需证明, 当 $t > 0$ 且 $g(t) = 0$ 时, 有 $g'(t) > 0$. 事实上, 当 $t > 0$ 且 $g(t) = 0$ 时, 有

$$\begin{aligned} g'(t) &= \|u\|_2^2 + (p-1)t^{p-2}\|u\|^p - (q-1)t^{q-2} \int_{\Omega} a(x)|u|^q \\ &= (2-q)\|u\|_2^2 + (p-q)t_1^{p-2}\|u\|^p \\ &> 0, \end{aligned}$$

取 $T_0(u) = t_1$, 引理得证. □

记 $\alpha := (r-p)/p$. 由于 $\hat{I}$ 强制且 $\hat{I}(u) \leq I(u)$, $u \in E$, 利用引理 2.1, 我们可定义

$$m_1 = \inf_{u \in E} \hat{I}(u), \quad m_2 = \inf \left\{ (1+t|I(T_0(u)u)|^\alpha)I(T_0(u)u) : t \in [0, 1], u \in E \text{ 且 } \int_{\Omega} a(x)|u|^q > 0 \right\}, \quad (2.1)$$

且知 $m_1, m_2 \in (-\infty, 0)$.

引理 2.2 记 $\theta := 1/((\alpha+1)(1-m_1-m_2)^\alpha)$, 则当 $C > 0$ 时, 函数 $f(t) = (1-C|t|^\alpha)t$ 在区间 $(-(C(\alpha+1))^{-1/\alpha}, 0]$ 上严格递增. 特别地, 当 $C \in (0, \theta)$ 时, 函数 $f(t) = (1-C|t|^\alpha)t$ 在区间 $[m_1+m_2, 0]$ 上严格递增.

证明 取 $C > 0$. 因为

$$f'(t) = 1 - C(\alpha+1)|t|^\alpha,$$

所以, 当 $t \in (-(C(\alpha+1))^{-1/\alpha}, 0]$ 时, 有 $f'(t) > 0$, 则函数 $f(t) = (1-C|t|^\alpha)t$ 在区间 $(-(C(\alpha+1))^{-1/\alpha}, 0]$ 上严格递增. 特别地, 取 $C \in (0, \theta)$, 因为

$$-\frac{1}{(C(\alpha+1))^{1/\alpha}} < m_1 + m_2 - 1 < m_1 + m_2,$$

所以, 函数 $f(t) = (1-C|t|^\alpha)t$ 在区间 $[m_1+m_2, 0]$ 上严格递增. □

取

$$0 < b < \min \left\{ \frac{\theta r}{M_1} \left(\frac{p-q}{pq} \right)^{r/p}, \frac{\theta r}{2^{r/(p-q)} M_1} \left(\frac{p-q}{pq} \right)^{r/p}, 1 \right\}. \quad (2.2)$$

由假设 (F) 可知, 存在

$$0 < t_0 < \frac{1}{2} \min \left\{ \left(\frac{2-q}{(r+3)M_0} \right)^{1/(r-2)}, \frac{1}{(2M_2)^{1/(r-p)}}, \left(\frac{p-q}{(p+q)M_2} \right)^{1/(r-p)}, \delta, 1 \right\}, \quad (2.3)$$

使得

$$|f(x, t)| \leq b|t|^{r-1}, \quad x \in \Omega, \quad |t| \leq 2t_0. \quad (2.4)$$

取 $\phi \in C^1(\mathbb{R}, [0, 1])$ 是偶函数且当 $|t| \leq t_0$ 时, $\phi(t) = 1$; 当 $|t| \geq 2t_0$ 时, $\phi(t) = 0$; 在 $\mathbb{R}$ 上, $|\phi'(t)| \leq 2t_0^{-1}$. 利用 ϕ , 定义

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x, t) &= \begin{cases} \phi(t)f(x, t), & (x, t) \in \bar{\Omega} \times (-\delta, \delta), \\ 0, & (x, t) \in \bar{\Omega} \times ((-\infty, \delta] \cup [\delta, \infty)), \end{cases} \\ \hat{f}(x, t) &= b\phi(t)|t|^{r-2}t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

根据 (2.4) 及 ϕ 的定义, 有

$$|\tilde{F}(x, t)| \leq \hat{F}(x, t) = \int_0^t b\phi(s)|s|^{r-2}sd s \leq \frac{b}{q}(2t_0)^{r-q}|t|^q \leq \frac{1}{q}|t|^q, \quad (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}, \quad (2.5)$$

其中 $\tilde{F}(x, t) = \int_0^t \tilde{f}(x, s)ds$, $\hat{F}(x, t) = \int_0^t \hat{f}(x, s)ds$, $(x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}$. 定义

$$\begin{aligned} \tilde{J}(u) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla u|^p - \frac{1}{q} \int_{\Omega} a(x)|u|^q - \int_{\Omega} \tilde{F}(x, u), \quad u \in E, \\ \hat{J}(u) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla u|^p - \frac{1}{q} \int_{\Omega} a(x)|u|^q - \int_{\Omega} \hat{F}(x, u), \quad u \in E. \end{aligned}$$

显然, $I, \tilde{J}, \hat{J} \in C^1(E, \mathbb{R})$ 且 I 和 $\hat{J}$ 是偶泛函. 根据 (2.5), 对所有的 $u \in E$, 有

$$I(u) \geq \tilde{J}(u) \geq \hat{J}(u), \quad \tilde{J}(u) \geq \hat{J}(u) \geq \hat{I}(u). \quad (2.6)$$

由于 $\hat{I}$ 强制, 故 $\tilde{J}$ 和 $\hat{J}$ 是下有界的. 另外, 当 $|u|_{\infty} \leq t_0$ 时, $\tilde{J}$ 的每个临界点 $u \in E$ 是方程 (1.1) 的解. 因此, 在本文中, 我们的主要方法是, 首先寻找 $\tilde{J}$ 无穷多临界点的存在性, 然后利用解的 L^{∞} 估计获得原方程 (1.1) 无穷多解的存在性.

记 $\mathcal{N}_{\tilde{J}} := \{u \in E \setminus \{0\} : \langle \tilde{J}'(u), u \rangle = 0\}$. 类似于泛函 $I, \hat{J}$ 具有如下性质.

引理 2.3 如果 $u \in E$ 且 $\int_{\Omega} a(x)|u|^q > 0$, 则存在唯一的 $T(u) > 0$, 使得 $T(u)u \in \mathcal{N}_{\tilde{J}}$ 且

$$\hat{J}(T(u)u) = \min\{\hat{J}(tu) : t \geq 0\} < 0.$$

另外, $\hat{J}(tu)$ 关于 t 在区间 $[0, T(u)]$ 上递减, 在区间 $[T(u), \infty)$ 上递增.

证明 给定 $u \in E$ 且 $\int_{\Omega} a(x)|u|^q > 0$, 则对任意的 $t \in [0, \infty)$, 有

$$\hat{J}(tu) = \frac{1}{2}t^2\|u\|_2^2 + \frac{1}{p}t^p\|u\|^p - \frac{1}{q}t^q \int_{\Omega} a(x)|u|^q - \int_{\Omega} \hat{F}(x, tu).$$

对任意的 $t \geq 0$, 记

$$\begin{aligned} h(t) &:= \frac{d}{dt}[\hat{J}(tu)] \\ &= t\|u\|_2^2 + t^{p-1}\|u\|^p - t^{q-1} \int_{\Omega} a(x)|u|^q - \int_{\Omega} \hat{f}(x, tu)u \\ &= t(\|u\|_2^2 + t^{p-2}\|u\|^p - ct^{q-2} - bt^{r-2}d(t)), \end{aligned}$$

其中 $c = \int_{\Omega} a(x)|u|^q$, $d(t) = \int_{\Omega} \phi(tu)|u|^r$. 根据 ϕ 和 M_0 的定义及 (2.2), 有

$$bt^{r-2}d(t) = b \int_{\Omega} \phi(tu)|tu|^{r-2}|u|^2 \leq (2t_0)^{r-2}|u|_2^2 \leq (2t_0)^{r-2}M_0\|u\|_2^2. \quad (2.7)$$

因此, 当 t 充分大时, $h(t) > 0$. 另外, 易证在零点附近, $h(t) < 0$. 根据 $\hat{J}$ 的连续性, 存在 $t_2 > 0$, 使得

$$\hat{J}(t_2u) = \min\{\hat{J}(tu) : t \geq 0\} < 0.$$

从而知 $h(t_2) = \frac{1}{t_2} \langle \hat{J}'(t_2u), t_2u \rangle = 0$. 故 $t_2u \in \mathcal{N}_{\hat{J}}$. 类似于引理 2.1, 下面证明: 当 $t > 0$ 且 $h(t) = 0$ 时, 有 $h'(t) > 0$. 事实上, 当 $t > 0$ 时,

$$h'(t) = \|u\|_2^2 + (p-1)t^{p-2}\|u\|^p - (q-1)ct^{q-2} - b(r-1)t^{r-2}d(t) - bt^{r-1} \int_{\Omega} \phi'(tu)|u|^r u. \quad (2.8)$$

从 h 的定义, 有

$$ct^{q-2} = \|u\|_2^2 + t^{p-2}\|u\|^p - bt^{r-2}d(t) \leq \|u\|_2^2 + t^{p-2}\|u\|^p. \quad (2.9)$$

从 ϕ 的定义和 (2.2), 有

$$\left| bt^{r-1} \int_{\Omega} \phi'(tu)|u|^r u \right| \leq \int_{\Omega} |\phi'(tu)||tu|^{r-1}u^2 \leq 4(2t_0)^{r-2}M_0\|u\|_2^2. \quad (2.10)$$

根据 (2.8)、(2.9)、(2.7)、(2.10) 和 (2.3), 可得

$$\begin{aligned} h'(t) &\geq \|u\|_2^2 + (p-1)t^{p-2}\|u\|^p - (q-1)(\|u\|_2^2 + t^{p-2}\|u\|^p) - (r+3)(2t_0)^{r-2}M_0\|u\|_2^2 \\ &\geq (2-q)\|u\|_2^2 - (r+3)(2t_0)^{r-2}M_0\|u\|_2^2 > 0. \end{aligned}$$

取 $T(u) = t_2$, 引理得证. $\square$

注 2.1 根据隐函数定理知, 映射 $T_0, T : \{u \in E : \int_{\Omega} a(x)|u|^q > 0\} \rightarrow (0, \infty)$ 是连续的. 另外, 由于 I 和 $\hat{J}$ 是偶泛函, 易知 T_0 和 T 也是偶的.

记

$$C_1 := \frac{b}{r}M_1 \left(\frac{pq}{p-q} \right)^{r/p}, \quad C_2 := \frac{b}{r} \frac{M_1}{(1 - b(2t_0)^{r-p}M_2)^{r/(p-q)}} \left(\frac{pq}{p-q} \right)^{r/p}. \quad (2.11)$$

根据 (2.2) 和 (2.3) 知, $C_1, C_2 \in (0, \theta)$. 由引理 2.2 知, 函数 $t \mapsto (1 - C_1|t|^\alpha)t$ 和 $t \mapsto (1 - C_2|t|^\alpha)t$ 在 $[m_1 + m_2, 0]$ 上严格递增且有下列的引理:

引理 2.4 如果 $u \in E$ 且 $\int_{\Omega} a(x)|u|^q > 0$, 则

$$\tilde{J}(T_0(u)u) \leq (1 - C_1|I(T_0(u)u)|^\alpha)I(T_0(u)u), \quad I(T_0(u)u) \leq (1 - C_2|\hat{J}(T(u)u)|^\alpha)\hat{J}(T(u)u).$$

证明 首先证明第一个不等式成立. 取 $u \in E$ 且 $\int_{\Omega} a(x)|u|^q > 0$. 不失一般性, 假设 $T_0(u) = 1$. 故有

$$I(u) = I(u) - \frac{1}{q} \langle I'(u), u \rangle = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right) \|u\|_2^2 + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) \|u\|^p < 0. \quad (2.12)$$

根据 (2.5), 有

$$|\tilde{F}(x, t)| \leq \hat{F}(x, t) = \int_0^t b\phi(s)|s|^{r-2}sd s \leq \frac{b}{r}|t|^r, \quad (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}. \quad (2.13)$$

由 $\tilde{J}$ 和 I 的定义、(2.13) 及 Sobolev 嵌入定理, 有

$$\tilde{J}(u) = I(u) - \int_{\Omega} \tilde{F}(x, u) \leq I(u) + \frac{b}{r}|u|_r^r \leq I(u) + \frac{b}{r}M_1\|u\|^r.$$

再根据 (2.12), 有

$$\begin{aligned} \tilde{J}(u) &\leq I(u) + \frac{b}{r}M_1 \left(\frac{I(u) - (2^{-1} - q^{-1})\|u\|_2^2}{p^{-1} - q^{-1}} \right)^{r/p} \\ &\leq I(u) + \frac{b}{r}M_1 \left(\frac{I(u)}{p^{-1} - q^{-1}} \right)^{r/p} \\ &= I(u) + \frac{b}{r}M_1 \left(\frac{pq}{p - q} \right)^{r/p} |I(u)|^{r/p} \\ &= \left(1 - \frac{b}{r}M_1 \left(\frac{pq}{p - q} \right)^{r/p} |I(u)|^\alpha \right) I(u) \\ &= (1 - C_1 |I(u)|^\alpha) I(u). \end{aligned}$$

下面证明第二个不等式成立. 取 $u \in E$ 且 $\int_{\Omega} a(x)|u|^q > 0$. 为了方便, 记 $\lambda_0 = T_0(u)$, $\lambda = T(u)$. 根据 T_0 的定义, 有

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} [\hat{J}(tu)] \Big|_{t=\lambda} \\ &= \lambda \|u\|_2^2 + \lambda^{p-1} \|u\|^p - \lambda^{q-1} \int_{\Omega} a(x)|u|^q - b\lambda^{r-1} \int_{\Omega} \phi(\lambda u)|u|^r \\ &= \lambda \|u\|_2^2 + \lambda^{p-1} \|u\|^p - \lambda^{q-1} (\lambda_0^{2-q} \|u\|_2^2 + \lambda_0^{p-q} \|u\|^p) - b\lambda^{r-1} \int_{\Omega} \phi(\lambda u)|u|^r \\ &= \lambda^{q-1} (\lambda^{2-q} - \lambda_0^{2-q}) \|u\|_2^2 + \lambda^{q-1} (\lambda^{p-q} - \lambda_0^{p-q}) \|u\|^p - b\lambda^{r-1} \int_{\Omega} \phi(\lambda u)|u|^r. \end{aligned} \quad (2.14)$$

由于 $b\lambda^{r-1} \int_{\Omega} \phi(\lambda u)|u|^r \geq 0$, 利用 (2.14) 可推出 $\lambda \geq \lambda_0$. 另外, 根据 ϕ 的定义和 Sobolev 嵌入定理, 有

$$b\lambda^{r-1} \int_{\Omega} \phi(\lambda u)|u|^r = b\lambda^{p-1} \int_{\Omega} \phi(\lambda u)|\lambda u|^{r-p}|u|^p \leq b\lambda^{p-1} (2t_0)^{r-p} M_2 \|u\|^p. \quad (2.15)$$

根据 (2.14) 和 (2.15), 有

$$\lambda^{q-1} (\lambda^{p-q} - \lambda_0^{p-q}) \|u\|^p \leq b\lambda^{p-1} (2t_0)^{r-p} M_2 \|u\|^p.$$

结合 (2.2) 和 (2.3), 得

$$\lambda^{p-q} \leq \frac{\lambda_0^{p-q}}{1 - b(2t_0)^{r-p} M_2}. \quad (2.16)$$

根据引理 2.1、(2.13)、Sobolev 嵌入定理、 T_0 的定义和 (2.16), 有

$$\hat{J}(\lambda u) = I(\lambda u) - \int_{\Omega} \hat{F}(x, \lambda u)$$

$$\begin{aligned}
 & \geq I(\lambda_0 u) - \frac{b}{r} M_1 \lambda^r \|u\|^r \\
 & = I(\lambda_0 u) - \frac{b}{r} M_1 \lambda^r \left(\frac{I(\lambda_0 u) - (2^{-1} - q^{-1}) \lambda_0^2 \|u\|_2^2}{(p^{-1} - q^{-1}) \lambda_0^p} \right)^{r/p} \\
 & \geq I(\lambda_0 u) - \frac{b}{r} M_1 \left(\frac{\lambda_0^{p-q}}{1 - b(2t_0)^{r-p} M_2} \right)^{r/(p-q)} \left(\frac{I(\lambda_0 u)}{(p^{-1} - q^{-1}) \lambda_0^p} \right)^{r/p} \\
 & = \left(1 + \frac{b}{r} \frac{M_1}{(1 - b(2t_0)^{r-p} M_2)^{r/(p-q)}} \left(\frac{pq}{p-q} \right)^{r/p} |I(\lambda_0 u)|^\alpha \right) I(\lambda_0 u) \\
 & = (1 + C_2 |I(\lambda_0 u)|^\alpha) I(\lambda_0 u).
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

另外, 注意到 $I(\lambda_0 u) < 0$ 且 $1 + C_2 |I(\lambda_0 u)|^\alpha \geq 1$, 有

$$\begin{aligned}
 & (1 - C_2 |I(\lambda_0 u)|^\alpha) I(\lambda_0 u) |I(\lambda_0 u)|^\alpha (1 + C_2 |I(\lambda_0 u)|^\alpha) I(\lambda_0 u) \\
 & \geq (1 - C_2 |I(\lambda_0 u)|^\alpha) (1 + C_2 |I(\lambda_0 u)|^\alpha) I(\lambda_0 u) \\
 & \geq I(\lambda_0 u).
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

根据 (2.1)、(2.17) 和引理 2.3, 有

$$m_1 + m_2 < m_2 \leq (1 + C_2 |I(\lambda_0 u)|^\alpha) I(\lambda_0 u) \leq \hat{J}(\lambda u) < 0.$$

再根据引理 2.2 和 (2.18), 有

$$I(\lambda_0 u) \leq (1 - C_2 |\hat{J}(\lambda u)|^\alpha) \hat{J}(\lambda u).$$

证毕. □

引理 2.5 如果 $u \in E$ 且 $\hat{J}(u) < 0$, 则 $\int_\Omega a(x) |u|^q > 0$.

证明 根据 ϕ 的定义, 有

$$\hat{F}(x, t) = \int_0^t b\phi(s) |s|^{r-2} s ds \leq b(2t_0)^{r-p} \int_0^t |s|^{p-2} s ds = \frac{b}{p} (2t_0)^{r-p} |t|^p, \quad (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}.$$

再由 Sobolev 嵌入定理, 可得

$$\begin{aligned}
 \hat{J}(u) & \geq \frac{1}{2} \|u\|_2^2 + \frac{1}{p} \|u\|^p - \frac{1}{q} \int_\Omega a(x) |u|^q - \frac{b}{p} (2t_0)^{r-p} |u|_p^p \\
 & \geq \frac{1}{p} \|u\|^p - \frac{1}{q} \int_\Omega a(x) |u|^q - \frac{b}{p} (2t_0)^{r-p} M_2 \|u\|^p \\
 & \geq \frac{1}{p} (1 - b(2t_0)^{r-p} M_2) \|u\|^p - \frac{1}{q} \int_\Omega a(x) |u|^q.
 \end{aligned}$$

进而根据 $\hat{J}(u) < 0$ 、(2.2) 和 (2.3), 可得

$$\int_\Omega a(x) |u|^q \geq \frac{q}{p} (1 - b(2t_0)^{r-p} M_2) \|u\|^p - q \hat{J}(u) > 0.$$

证毕. □

引理 2.6 设 $h \in C(S^{k-1}, E \setminus \{0\})$. 如果对所有的 $z' \in S^{k-1}$, 都有

$$\int_{\Omega} a(x) |h(z')|^q > 0,$$

则存在 $\hat{h} \in C(S_+^k, E \setminus \{0\})$, 使得对所有的 $z \in S_+^k$, 有

$$\int_{\Omega} a(x) |\hat{h}(z)|^q > 0, \quad (2.19)$$

及对所有的 $z' \in S^{k-1}$, 有

$$\hat{h}(z', 0) = h(z'),$$

其中 $S_+^k = \{(z_1, z_2, \dots, z_{k+1}) \in S^k : z_{k+1} \geq 0\}$, S^k 是空间 $\mathbb{R}^{k+1}$ 中的单位球面.

证明 具体证明可参见文献 [18, 引理 2.5]. 为了方便读者, 这里把证明过程再书写一遍. 对每一个 $z \in S^{k-1}$, 因为 $\int_{\Omega} a(x) |h(z)|^q > 0$, 所以存在 $x_z \in \Omega$ 和 $r_z > 0$, 使得

$$B(x_z, 3r_z) \subset \{x \in \Omega : a(x) > 0\} \quad (2.20)$$

和

$$\int_{B(x_z, r_z)} a(x) |h(z)|^q > 0.$$

因为 h 是连续的, 所以在 S^{k-1} 中存在一个 z 的开邻域 $\mathcal{O}(z)$, 使得

$$\int_{B(x_z, r_z)} a(x) |h(\tilde{z})|^q > 0, \quad \tilde{z} \in \mathcal{O}(z). \quad (2.21)$$

设 $\rho_z \in C^\infty(\mathbb{R}^N, [0, 1])$ 满足

$$\rho_z(x) = 1, \quad x \in B(x_z, r_z), \quad \rho_z(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N \setminus B(x_z, 2r_z). \quad (2.22)$$

集合

$$\mathcal{O} := \{\mathcal{O}(z) : z \in S^{k-1}\}$$

是 S^{k-1} 的一个开覆盖. 因为 S^{k-1} 是紧的, 所以存在 $z_1, z_2, \dots, z_m \in S^{k-1}$, 使得

$$S^{k-1} = \bigcup_{i=1}^m \mathcal{O}(z_i). \quad (2.23)$$

记 $x_i = x_{z_i}$, $r_i = r_{z_i}$, $\rho_i = \rho_{z_i}$, $i = 1, 2, \dots, m$. 在 Ω 上, 定义 $\rho = \sum_{i=1}^m \rho_i \geq 0$. 利用 (2.22) 和 (2.20), 得

$$\text{supp}(\rho) \subset \bigcup_{i=1}^m \overline{B(x_i, 2r_i)} \subset \{x \in \Omega : a(x) > 0\}. \quad (2.24)$$

根据 (2.24), 存在 $B(y, r) \subset \{x \in \Omega : a(x) > 0\}$, 使得

$$\overline{B(y, r)} \cap \text{supp}(\rho) = \emptyset. \quad (2.25)$$

取 $v \in C_0^\infty(B(y, r))$ 满足 $\int_\Omega a(x)|v|^q > 0$. 利用 ρ 和 v , 定义一个映射 $\hat{h}: S_+^k \rightarrow E \setminus \{0\}$,

$$\hat{h}(z) = \begin{cases} (1 - 2z_{k+1})h\left(\frac{z'}{|z'|}\right) + 2z_{k+1}\rho h\left(\frac{z'}{|z'|}\right), & z_{k+1} \in \left[0, \frac{1}{2}\right), \\ (2 - 2z_{k+1})\rho h\left(\frac{z'}{|z'|}\right) + (2z_{k+1} - 1)v, & z_{k+1} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right), \\ v, & z_{k+1} = 1, \end{cases}$$

其中 $z = (z', z_{k+1}) \in S_+^k$. 易证 $\hat{h}$ 是连续的. 显然, $\hat{h}(z', 0) = h(z')$, $z' \in S^{k-1}$. 下面验证 (2.19) 成立即可. 设 $z = (z', z_{k+1}) \in S_+^k$. 为了方便, 记 $\bar{z} = z'/|z'|$. 分 3 种情形讨论, 具体如下:

(i) 当 $z_{k+1} \in [0, 1/2)$ 时, 根据 (2.24), 可得

$$\begin{aligned} \int_\Omega a(x)|\hat{h}(z)|^q &= \int_{\{x \in \Omega: a(x) > 0\}} a(x)|h(\bar{z})|^q (1 - 2z_{k+1} + 2z_{k+1}\rho)^q \\ &\quad + \int_{\{x \in \Omega: a(x) \leq 0\}} a(x)|h(\bar{z})|^q (1 - 2z_{k+1} + 2z_{k+1}\rho)^q \\ &\geq \int_{\{x \in \Omega: a(x) > 0\}} a(x)|h(\bar{z})|^q (1 - 2z_{k+1})^q + \int_{\{x \in \Omega: a(x) \leq 0\}} a(x)|h(\bar{z})|^q (1 - 2z_{k+1})^q \\ &= (1 - 2z_{k+1})^q \int_\Omega a(x)|h(\bar{z})|^q \\ &> 0. \end{aligned}$$

(ii) 当 $z_{k+1} \in [1/2, 1)$ 时, 根据 (2.23), 存在 z_i , 使得 $\bar{z} \in \mathcal{O}(z_i)$. 再根据 (2.25)、(2.24)、(2.22) 和 (2.21) 以及 $v \in C_0^\infty(B(y, r))$ 且满足 $\int_\Omega a(x)|v|^q > 0$, 可知

$$\begin{aligned} \int_\Omega a(x)|\hat{h}(z)|^q &= \int_\Omega a(x)|(2 - 2z_{k+1})\rho h(\bar{z}) + (2z_{k+1} - 1)v|^q \\ &= (2 - 2z_{k+1})^q \int_\Omega a(x)|\rho h(\bar{z})|^q + (2z_{k+1} - 1)^q \int_\Omega a(x)|v|^q \\ &= (2 - 2z_{k+1})^q \int_{\{x \in \Omega: a(x) > 0\}} a(x)\rho^q |h(\bar{z})|^q + (2z_{k+1} - 1)^q \int_\Omega a(x)|v|^q \\ &\geq (2 - 2z_{k+1})^q \int_{B(x_i, r_i)} a(x)\rho_i^q |h(\bar{z})|^q + (2z_{k+1} - 1)^q \int_\Omega a(x)|v|^q \\ &= (2 - 2z_{k+1})^q \int_{B(x_i, r_i)} a(x)|h(\bar{z})|^q + (2z_{k+1} - 1)^q \int_\Omega a(x)|v|^q \\ &> 0. \end{aligned}$$

(iii) 当 $z_{k+1} = 1$ 时, (2.19) 显然成立. □

为了证明方程解的存在性, 我们需要验证 PS (Palais-Smale) 条件. 称一个泛函 $\Phi \in C^1(E, \mathbb{R})$ 满足 PS 条件, 如果 E 中任何使得 $\{\Phi(u_n)\}$ 有界且在 E^* 中 $\Phi'(u_n) \rightarrow 0$ 的序列 $\{u_n\}$ 都存在收敛子列.

引理 2.7 泛函 $\tilde{J}$ 满足 PS 条件.

证明 设 $\{u_n\} \subset E$ 满足 $\{\tilde{J}(u_n)\}$ 有界且 $\tilde{J}'(u_n) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. 因为

$$\begin{aligned} \frac{1}{q} \langle \tilde{J}'(u_n), u_n \rangle - \tilde{J}(u_n) &= \frac{1}{q} \|u_n\|_2^2 + \frac{1}{q} \|u_n\|^p - \frac{1}{q} \int_\Omega a(x)|u_n|^q - \frac{1}{q} \int_\Omega \tilde{f}(x, u_n)u_n \\ &\quad - \left(\frac{1}{2} \|u_n\|_2^2 + \frac{1}{p} \|u_n\|^p - \frac{1}{q} \int_\Omega a(x)|u_n|^q - \int_\Omega \tilde{F}(x, u_n) \right) \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2}\right) \|u_n\|_2^2 + \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right) \|u_n\|^p - \frac{1}{q} \int_{\Omega} \tilde{f}(x, u_n) u_n + \int_{\Omega} \tilde{F}(x, u_n),$$

所以, 根据 Sobolev 嵌入定理、 $\tilde{f}$ 和 ϕ 的定义以及 (2.4), 当 n 充分大时,

$$\begin{aligned} c_1 + \|u_n\| &\geq \frac{1}{q} \langle \tilde{J}'(u_n), u_n \rangle - \tilde{J}(u_n) \\ &\geq \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2}\right) \|u_n\|_2^2 + \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right) \|u_n\|^p - \frac{b}{q} (2t_0)^{r-p} M_2 \|u_n\|^p - \frac{b}{p} (2t_0)^{r-p} M_2 \|u_n\|^p \\ &\geq \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p} - \frac{b}{q} (2t_0)^{r-p} M_2 - \frac{b}{p} (2t_0)^{r-p} M_2\right) \|u_n\|^p. \end{aligned} \quad (2.26)$$

根据 (2.2) 和 (2.3), 由 $p > 2$ 知, $\{u_n\}$ 在 E 中有界. 不失一般性, 我们可以假设在 E 中 $u_n \rightharpoonup u$. 又由紧嵌入定理知, 在 $L^p(\Omega)$ 中 $u_n \rightarrow u$. 记

$$g(x, t) := \tilde{f}(x, t) + a(x)|t|^{q-2}t, \quad (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}.$$

根据 $\tilde{f}$ 的定义、 $q < p$ 及条件 (A), 有

$$|g(x, t)| \leq b(2t_0)^{r-1} + |a|_{\infty} |t|^{q-1} \leq c_2(1 + |t|^{p-1}), \quad (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}.$$

因此, 在 $L^{p/(p-1)}(\Omega)$ 中 $g(x, u_n) \rightarrow g(x, u)$. 利用 Hölder 不等式, 得

$$\left| \int_{\Omega} (g(x, u_n) - g(x, u))(u_n - u) \right| \leq |g(x, u_n) - g(x, u)|_{p/(p-1)} \|u_n - u\|_p \rightarrow 0.$$

又因为 $\langle \tilde{J}'(u_n) - \tilde{J}'(u), u_n - u \rangle \rightarrow 0$, 并注意到

$$\begin{aligned} &\langle \tilde{J}'(u_n) - \tilde{J}'(u), u_n - u \rangle + \int_{\Omega} (g(x, u_n) - g(x, u))(u_n - u) \\ &= \int_{\Omega} |\nabla u_n - \nabla u|^2 + \int_{\Omega} (|\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n - |\nabla u|^{p-2} \nabla u) \cdot (\nabla u_n - \nabla u) \\ &\geq 2^{2-p} \|u_n - u\|^p, \end{aligned}$$

所以, 在 E 中 $u_n \rightarrow u$. □

现在考虑如下特征值问题:

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda |u|^{p-2} u, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

文献 [19] 已证明上述问题存在一个无界的特征值序列 $\{\lambda_k\}$, 其中 $\lambda_k = \inf_{F \in \mathcal{F}_k} \max_{u \in F} \|u\|^p$, 这里

$$\mathcal{F}_k = \{F : |u|_p = 1, u \in F \subset E, F \text{ 是紧的、对称的且 } \gamma(F) \geq k\},$$

其中 $\gamma(F)$ 表示 F 的亏格 (参见文献 [20]). 由文献 [21] 知, 存在 $C_3 > 0$, 使得

$$\lambda_k \geq C_3 k^{p/N}. \quad (2.27)$$

设 $\Gamma_k = \{h \in C(S^{k-1}, E \setminus \{0\}) : h \text{ 是奇的}\}$. 定义

$$b_k := \inf_{h \in \Gamma_k} \max_{z \in S^{k-1}} I(h(z)). \quad (2.28)$$

记 $\beta := pq/(N(p-q))$, $C_4 := (p-q)|a|_{\infty}^{q/(p-q)} |\Omega| C_3^{-q/(p-q)} / (pq)$. 我们有下面的引理:

引理 2.8 $-C_4 k^{-\beta} \leq b_k < 0$ ($k = 1, 2, \dots$).

证明 任取 $h \in \Gamma_k$. 根据 Γ_k 的定义可知, $h(S^{k-1})$ 是对称的、紧的且 $\gamma(h(S^{k-1})) \geq k$. 令

$$F := \left\{ \frac{u}{|u|_p} : u \in h(S^{k-1}) \right\}.$$

利用 γ 的性质知 $F \in \mathcal{F}_k$. 由于 $F \subset E$ 是紧的, 故存在 $u_0 \in h(S^{k-1})$, 使得

$$\frac{\|u_0\|_p^p}{|u_0|_p^p} = \max_{u \in F} \|u\|^p \geq \lambda_k.$$

从而, 由 (2.27), 有

$$\begin{aligned} \max_{z \in S^{k-1}} I(h(z)) &\geq \frac{1}{2} \|u_0\|_2^2 + \frac{1}{p} \|u_0\|^p - \frac{1}{q} \int_{\Omega} a(x) |u_0|^q \\ &\geq \frac{1}{p} \|u_0\|^p - \frac{1}{q} |a|_{\infty} |\Omega|^{(p-q)/p} |u_0|_p^q \\ &\geq \frac{1}{p} \|u_0\|^p - \frac{1}{q} |a|_{\infty} |\Omega|^{(p-q)/p} \lambda_k^{-q/p} \|u_0\|^q \\ &\geq -\frac{p-q}{pq} |a|_{\infty}^{q/(p-q)} |\Omega| \lambda_k^{-q/(p-q)} \\ &\geq -\frac{p-q}{pq} |a|_{\infty}^{q/(p-q)} |\Omega| C_3^{-q/(p-q)} k^{-\beta} \\ &= -C_4 k^{-\beta}. \end{aligned}$$

根据 h 的任意性, 有 $b_k \geq -C_4 k^{-\beta}$.

下证 $b_k < 0$. 事实上, 根据注 1.2, 我们可取 k 个线性无关的函数 $w_1, w_2, \dots, w_k \in C_0^{\infty}(B(x_0, r_0))$, 使得 $\int_{\Omega} a(x) |w_i|^q > 0$ ($i = 1, 2, \dots, k$). 定义

$$h(z) = T_0 \left(\sum_{i=1}^k z_i w_i \right) \sum_{i=1}^k z_i w_i, \quad z = (z_1, z_2, \dots, z_k) \in S^{k-1}.$$

根据注 2.1、引理 2.1 及 S^{k-1} 是紧集知, $h \in \Gamma_k$ 且 $\max_{z \in S^{k-1}} I(h(z)) < 0$. 因此, $b_k < 0$. □

取 $C_5 > C_1 + C_2$, 我们有下面的引理:

引理 2.9 (i) $(1 - C_2|(1 - C_1|t|^{\alpha})t|^{\alpha})(1 - C_1|t|^{\alpha})t < (1 - C_5|t|^{\alpha})t$, $t \in [m_1 + m_2, 0)$;
(ii) 存在 $\{b_k\}$ 的子列 $\{b_{k_i}\}$, 使得 $b_{k_i+1} > (1 - C_5|b_{k_i}|^{\alpha})b_{k_i}$.

证明 (i) 任取 $t \in [m_1 + m_2, 0)$, 我们有 $1 - C_1|t|^{\alpha} > 0$, 故

$$C_1|t|^{\alpha} + C_2|(1 - C_1|t|^{\alpha})t|^{\alpha} - C_1C_2|(1 - C_1|t|^{\alpha})t|^{\alpha}|t|^{\alpha} < C_5|t|^{\alpha}.$$

从而有

$$1 - C_1|t|^{\alpha} - C_2|(1 - C_1|t|^{\alpha})t|^{\alpha} + C_1C_2|(1 - C_1|t|^{\alpha})t|^{\alpha}|t|^{\alpha} > 1 - C_5|t|^{\alpha}.$$

因此, $(1 - C_2|(1 - C_1|t|^{\alpha})t|^{\alpha})(1 - C_1|t|^{\alpha})t < (1 - C_5|t|^{\alpha})t$.

(ii) 假设结论不成立. 结合引理 2.8, 我们能够选取 $k_0 \in \mathbb{N}$, 使得当 $k \geq k_0$ 时, 有

$$b_k > -\frac{1}{(C_5(\alpha + 1))^{1/\alpha}}, \quad \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{-1/\alpha} \leq 1 - \frac{1}{2k\alpha}, \quad b_{k+1} \leq (1 - C_5|b_k|^{\alpha})b_k.$$

记 $c_3 := \min\{(2\alpha C_5)^{-1/\alpha}, k_0^{1/\alpha}|b_{k_0}|\}$. 我们断言 $b_k \leq -c_3 k^{-1/\alpha}$, $k \geq k_0$. 利用数学归纳法证断言. 显然, $b_{k_0} \leq -c_3 k_0^{-1/\alpha}$. 假设 $k \geq k_0$, $b_k \leq -c_3 k^{-1/\alpha}$. 因为 $-(C_5(\alpha+1))^{-1/\alpha} < b_k \leq -c_3 k^{-1/\alpha} < 0$, 所以, 由引理 2.2 和 c_3 的定义知,

$$b_{k+1} \leq (1 - C_5| -c_3 k^{-1/\alpha}|^\alpha)(-c_3 k^{-1/\alpha}) \leq \left(1 - \frac{1}{2k\alpha}\right)(-c_3 k^{-1/\alpha}) \leq -c_3(1+k)^{-1/\alpha}.$$

再利用引理 2.8 知, $-C_4 k^{-\beta} \leq b_k \leq -c_3 k^{-1/\alpha}$. 由 (F) 知 $\beta > 1/\alpha$, 故 k 充分大时不成立, 矛盾. $\square$

引理 2.10 假设 (A) 和 (F) 成立, 则存在常数 $C_6, \nu > 0$, 使得对 $\tilde{J}$ 的临界点 $u \in E$, 都有

$$|u|_\infty \leq C_6 \|u\|^\nu.$$

证明 对自然数 $n, \mu > 1$, 定义 $A_n = \{x \in \Omega : |u(x)|^{\mu-1} \leq n\}$, $B_n = \Omega \setminus A_n$,

$$u_n(x) = \begin{cases} u(x)|u(x)|^{p(\mu-1)}, & x \in A_n, \\ n^p u(x), & x \in B_n, \end{cases}$$

则有

$$|u_n| \leq |u|^{p\mu-p+1} \quad (2.29)$$

和

$$\nabla u_n(x) = \begin{cases} (p\mu - p + 1)|u(x)|^{p(\mu-1)} \nabla u(x), & x \in A_n, \\ n^p \nabla u(x), & x \in B_n. \end{cases}$$

从而,

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla u_n &= (p\mu - p + 1) \int_{A_n} |u|^{p(\mu-1)} |\nabla u|^p + n^p \int_{B_n} |\nabla u|^p \\ &\geq \int_{A_n} |u|^{p(\mu-1)} |\nabla u|^p + n^p \int_{B_n} |\nabla u|^p. \end{aligned} \quad (2.30)$$

设 $u \in L^{p\mu}(\Omega)$, 取 $v = u_n$ 作为 $\langle \tilde{J}'(u), v \rangle = 0$ 中的检验函数. 由于 $\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u_n \geq 0$, 根据 (2.30)、(2.4)、 ϕ 的定义和 (2.29), 有

$$\begin{aligned} \int_{A_n} |u|^{p(\mu-1)} |\nabla u|^p &\leq \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla u_n \\ &\leq \int_\Omega |a(x)| |u|^{q-1} |u_n| + \int_\Omega |\tilde{f}(x, u)| |u_n| \\ &\leq |a|_\infty \int_\Omega |u|^{q-1} |u_n| + b \int_\Omega \phi(u) |u|^{r-q} |u|^{q-1} |u_n| \\ &\leq (|a|_\infty + b(2t_0)^{r-q}) \int_\Omega |u|^{p\mu-p+q} \\ &\leq c_4 |u|_{p\mu}^{p\mu-p+q}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

类似地, 定义

$$w_n(x) = \begin{cases} u(x)|u(x)|^{\mu-1}, & x \in A_n, \\ nu(x), & x \in B_n, \end{cases}$$

则有

$$\nabla w_n(x) = \begin{cases} \mu |u(x)|^{\mu-1} \nabla u(x), & x \in A_n, \\ n \nabla u(x), & x \in B_n. \end{cases}$$

根据 Sobolev 嵌入定理, 存在正常数 S , 使得 $|u|_{p^*} \leq S^{1/p} \|u\|$. 进而, 根据 (2.30) 和 (2.31), 可得

$$\begin{aligned} \left(\int_{A_n} |w_n|^{p^*} \right)^{p/p^*} &\leq S \int_{\Omega} |\nabla w_n|^p \\ &= S \left(\mu^p \int_{A_n} |u|^{p(\mu-1)} |\nabla u|^p + n^p \int_{B_n} |\nabla u|^p \right) \\ &\leq S \left((\mu^p - 1) \int_{A_n} |u|^{p(\mu-1)} |\nabla u|^p + \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla u_n \right) \\ &\leq S \mu^p \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla u_n \\ &\leq c_4 S \mu^p |u|_{p\mu}^{p\mu-p+q}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

对 (2.32) 中的 n 取极限, 并开 $p\mu$ 次方, 则有

$$|u|_{p^*\mu} \leq (c_4 S)^{1/(p\mu)} \mu^{1/\mu} |u|_{p\mu}^{(p\mu-p+q)/(p\mu)}. \quad (2.33)$$

令 $\eta = N/(N-p)$, 则 $p\eta = p^*$. 在 (2.33) 中取 $\mu = \eta$, 则有

$$|u|_{p^*\eta} \leq (c_4 S)^{1/(p\eta)} \eta^{1/\eta} |u|_{p\eta}^{(p\eta-p+q)/(p\eta)}. \quad (2.34)$$

再在 (2.33) 中取 $\mu = \eta^2$, 则有

$$|u|_{p^*\eta^2} \leq (c_4 S)^{1/(p\eta^2)} \eta^{2/\eta^2} |u|_{p\eta^2}^{(p\eta^2-p+q)/(p\eta^2)}. \quad (2.35)$$

不失一般性, 假设 $c_4 S > 1$. 由于 $1 < q < p$, 则

$$\frac{p\eta^2 - p + q}{p\eta^2} < 1.$$

根据 (2.34) 和 (2.35), 有

$$|u|_{p^*\eta^2} \leq (c_4 S)^{1/(p\eta)+1/(p\eta^2)} \eta^{1/\eta+2/\eta^2} |u|_{p^*}^{((p\eta-p+q)/(p\eta)) \cdot ((p\eta^2-p+q)/(p\eta^2))}.$$

通过迭代, 取 $\mu = \eta^j$, $j = 1, 2, \dots$, 有

$$|u|_{p^*\eta^j} \leq (c_4 S)^{\sum_{i=1}^j 1/(p\eta^i)} \eta^{\sum_{i=1}^j i/\eta^i} |u|_{p^*}^{\prod_{i=1}^j (p\eta^i-p+q)/(p\eta^i)}. \quad (2.36)$$

因为

$$\ln \left(\prod_{i=1}^j \frac{p\eta^i}{p\eta^i - p + q} \right) = \sum_{i=1}^j \ln \left(1 + \frac{p-q}{p\eta^i - p + q} \right),$$

又

$$\sum_{i=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{p-q}{p\eta^i - p + q} \right) < \infty,$$

所以可设

$$\prod_{i=1}^{\infty} \frac{p\eta^i - p + q}{p\eta^i} =: \nu.$$

同时, $\sum_{i=1}^{\infty} 1/(p\eta^i)$ 和 $\sum_{i=1}^{\infty} i/\eta^i$ 均收敛. 因此, 在 (2.36) 中, 令 $j \rightarrow \infty$, 由 $|u|_{p^*} \leq S^{1/p}\|u\|$ 可知, $u \in L^\infty(\Omega)$ 且 $|u|_\infty \leq C_6\|u\|^\nu$, 其中 $C_6, \nu > 0$ 与 u 无关. $\square$

3 主要结论的证明

用 $\mathcal{K}$ 表示 $\tilde{J}$ 的临界点集. 对 $c \in \mathbb{R}$, 记 $\tilde{J}_c := \{u \in E : \tilde{J}(u) \leq c\}$, $\hat{J}_c := \{u \in E : \hat{J}(u) \leq c\}$.

定理 1.1 的证明 根据引理 2.9(ii), 存在 $\{b_k\}$ 的子列 $\{b_{k_i}\}$, 使得 $b_{k_i+1} > (1 - C_5|b_{k_i}|^\alpha)b_{k_i}$ ($i = 1, 2, \dots$). 根据 (2.1)、(2.6)、(2.28) 和引理 2.8, 有 $m_1 \leq b_{k_i} < 0$. 从而能够选取 $\varepsilon_{k_i} > 0$, 使得

$$m_1 < b_{k_i} + \varepsilon_{k_i} < 0 \quad (3.1)$$

且

$$b_{k_i+1} > (1 - C_5|b_{k_i} + \varepsilon_{k_i}|^\alpha)(b_{k_i} + \varepsilon_{k_i}). \quad (3.2)$$

再由 (3.1)、(2.11) 和引理 2.2, 有

$$b_{k_i} + \varepsilon_{k_i} < a_{k_i} := (1 - C_1|b_{k_i} + \varepsilon_{k_i}|^\alpha)(b_{k_i} + \varepsilon_{k_i}) < 0. \quad (3.3)$$

利用 b_{k_i} 的定义, 我们可选取 $h \in \Gamma_{k_i}$, 使得

$$\max_{z \in S^{k_i-1}} I(h(z)) < b_{k_i} + \varepsilon_{k_i} < 0. \quad (3.4)$$

又因为当 $z \in S^{k_i-1}$ 时, $I(h(z)) < 0$, 故根据 (2.6) 和引理 2.5 知, $\int_\Omega a(x)|h(z)|^q > 0$, $z \in S^{k_i-1}$. 另外, 根据引理 2.6 知, 存在 $\hat{h} \in C(S_+^{k_i}, E \setminus \{0\})$, 使得

$$\int_\Omega a(x)|\hat{h}(z)|^q > 0, \quad z \in S_+^{k_i}, \quad \hat{h}(z', 0) = h(z'), \quad z' \in S^{k_i-1}. \quad (3.5)$$

定义

$$\sigma_0(z) = T_0(\hat{h}(z))\hat{h}(z), \quad z \in S_+^{k_i}.$$

由 (3.5) 和引理 2.1 知, σ_0 有定义. 再根据 (2.1) 和 (2.6), 当 $z \in S_+^{k_i}$ 时, $m_1 \leq I(\sigma_0(z)) < 0$. 从而根据引理 2.4 和 2.2, 当 $z \in S_+^{k_i}$ 时, 有

$$\tilde{J}(\sigma_0(z)) \leq (1 - C_1|I(\sigma_0(z))|^\alpha)I(\sigma_0(z)) < 0.$$

当 $(z', 0) \in S_+^{k_i}$ 时, 结合 (2.1)、(2.6)、(3.5) 和 (3.4), 再次利用引理 2.1 知,

$$m_1 \leq I(\sigma_0(z', 0)) \leq I(h(z')) < b_{k_i} + \varepsilon_{k_i} < 0.$$

因此, 由引理 2.4、2.2 和 (3.3), 有

$$\begin{aligned}\tilde{J}(\sigma_0(z', 0)) &\leq (1 - C_1 |I(\sigma_0(z', 0))|^\alpha) I(\sigma_0(z', 0)) \\ &\leq (1 - C_1 |I(h(z'))|^\alpha) I(h(z')) \\ &< (1 - C_1 |b_{k_i} + \varepsilon_{k_i}|^\alpha) (b_{k_i} + \varepsilon_{k_i}) \\ &= a_{k_i} < 0.\end{aligned}$$

由注 2.1 和 $\tilde{J}$ 的连续性, 可选取 d_{k_i} 满足

$$\max \left\{ \max_{z \in S_+^{k_i}} \tilde{J}(\sigma_0(z)), a_{k_i} \right\} < d_{k_i} < 0. \quad (3.6)$$

下证 $\mathcal{K} \cap \tilde{J}^{-1}([a_{k_i}, d_{k_i}]) \neq \emptyset$. 用反证法. 假设 $\mathcal{K} \cap \tilde{J}^{-1}([a_{k_i}, d_{k_i}]) = \emptyset$. 由引理 2.7 知, $\tilde{J}$ 满足 PS 条件. 从而存在一个连续映射 $\tau: \tilde{J}_{d_{k_i}} \rightarrow E$, 使得

$$\tau(\tilde{J}_{d_{k_i}}) \subset \tilde{J}_{a_{k_i}}, \quad \tau|_{\tilde{J}_{a_{k_i}}} = \text{id}|_{\tilde{J}_{a_{k_i}}}. \quad (3.7)$$

利用 σ_0 和 τ , 定义 $\tilde{h}: S^{k_i} \rightarrow E$ 为

$$\tilde{h}(z) = \begin{cases} \tau(\sigma_0(z)), & z \in S_+^{k_i}, \\ -\tau(\sigma_0(-z)), & z \in -S_+^{k_i}. \end{cases}$$

根据注 2.1, 显然 $\tilde{h}$ 是连续的、奇的. 再根据 (3.6)、(3.7) 和 (2.6), 有

$$\tilde{h}(S_+^{k_i}) \subset \tilde{J}_{a_{k_i}} \subset \hat{J}_{a_{k_i}}.$$

因为 $\hat{J}$ 是偶泛函, 所以, $\hat{J}(-\tau(\sigma_0(-z))) = \hat{J}(\tau(\sigma_0(-z)))$, $z \in -S_+^{k_i}$. 从而知

$$\tilde{h}(S^{k_i}) \subset \hat{J}_{a_{k_i}}. \quad (3.8)$$

再根据引理 2.5, 对所有的 $z \in S^{k_i}$, 有 $\int_\Omega a(x) |\tilde{h}(z)|^q > 0$. 定义

$$h^*(z) = T_0(\tilde{h}(z))\tilde{h}(z), \quad z \in S^{k_i}.$$

根据引理 2.1、注 2.1 以及 $\tilde{h}$ 和 Γ_k 的定义知, $h^* \in \Gamma_{k_i+1}$. 根据 (2.1)、(2.6)、引理 2.4 和 (3.8) 知, 当 $z \in S^{k_i}$ 时, 有

$$m_1 \leq \hat{J}(T(\tilde{h}(z))\tilde{h}(z)) \leq \hat{J}(\tilde{h}(z)) \leq a_{k_i} < 0.$$

再根据引理 2.4、2.2、(3.3)、(3.1)、引理 2.9(i) 和 (3.2) 知, 当 $z \in S^{k_i}$ 时, 有

$$\begin{aligned}I(h^*(z)) &\leq (1 - C_2 |\hat{J}(T(\tilde{h}(z))\tilde{h}(z))|^\alpha) \hat{J}(T(\tilde{h}(z))\tilde{h}(z)) \\ &\leq (1 - C_2 |a_{k_i}|^\alpha) a_{k_i} \\ &= (1 - C_2 |(1 - C_1 |b_{k_i} + \varepsilon_{k_i}|^\alpha)(b_{k_i} + \varepsilon_{k_i})|^\alpha) (1 - C_1 |b_{k_i} + \varepsilon_{k_i}|^\alpha) (b_{k_i} + \varepsilon_{k_i}) \\ &< (1 - C_5 |b_{k_i} + \varepsilon_{k_i}|^\alpha) (b_{k_i} + \varepsilon_{k_i})\end{aligned}$$

$$< b_{k_i+1}.$$

这与 b_{k_i+1} 的定义矛盾. 因此, $\mathcal{K} \cap \tilde{J}^{-1}([a_{k_i}, d_{k_i}]) \neq \emptyset$. 于是, 存在 $\tilde{J}$ 的非平凡临界点 $u_i \in E$ 且满足

$$b_{k_i} < b_{k_i} + \varepsilon_{k_i} < a_{k_i} \leq \tilde{J}(u_i) \leq d_{k_i} < 0.$$

故 $\tilde{J}(u_i) \rightarrow 0$. 类似于 (2.26) 并结合 (2.2) 和 (2.3), 有

$$-\tilde{J}(u_i) \geq \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p} - \frac{b}{q}(2t_0)^{r-p}M_2 - \frac{b}{p}(2t_0)^{r-p}M_2 \right) \|u_i\|^p \geq 0.$$

于是, 在 E 中 $u_i \rightarrow 0$. 根据引理 2.10, $|u_i|_\infty \rightarrow 0$. 因此, 当 i 充分大时, u_i 是方程 (1.1) 的解. $\square$

致谢 衷心感谢匿名审稿人对本文提出的宝贵意见.

参考文献

- 1 Benci V, D'Avenia P, Fortunato D, et al. Solitons in several space dimensions: Derrick's problem and infinitely many solutions. *Arch Ration Mech Anal*, 2000, 154: 297–324
- 2 Cherfilis L, Il'yasov Y. On the stationary solutions of generalized reaction diffusion equations with (p, q) -Laplacian. *Commun Pure Appl Anal*, 2005, 4: 9–22
- 3 Fife P C. *Mathematical Aspects of Reacting and Diffusing Systems*. Lecture Notes in Biomathematics, vol. 28. Berlin: Springer-Verlag, 1979
- 4 Wilhelmsson H. Explosive instabilities of reaction-diffusion equations. *Phys Rev A* (3), 1987, 36: 965–966
- 5 Benci V, Fortunato D, Pisani L. Soliton like solutions of a Lorentz invariant equation in dimension 3. *Rev Math Phys*, 1998, 10: 315–344
- 6 Aizicovici S, Papageorgiou N S, Staicu V. Nodal solutions for $(p, 2)$ -equations. *Trans Amer Math Soc*, 2015, 367: 7343–7372
- 7 Papageorgiou N S, Rădulescu V D. Resonant $(p, 2)$ -equations with asymmetric reaction. *Anal Appl (Singap)*, 2015, 13: 481–506
- 8 Papageorgiou N S, Rădulescu V D. Noncoercive resonant $(p, 2)$ -equations. *Appl Math Optim*, 2017, 76: 621–639
- 9 Liu H H, Liang Z P. Compactness condition of $(2, p)$ -Laplacian equation and its applications (in Chinese). *J Taiyuan Univ Technol*, 2018, 49: 648–652 [刘慧慧, 梁占平. $(2, p)$ -Laplace 方程的紧性条件及其应用. 太原理工大学学报, 2018, 49: 648–652]
- 10 Papageorgiou N S, Vetro C, Vetro F. Multiple solutions for $(p, 2)$ -equations at resonance. *Discrete Contin Dyn Syst Ser S*, 2019, 12: 347–374
- 11 Liang Z P, Song Y M, Su J B. Existence of solutions to $(2, p)$ -Laplacian equations by Morse theory. *Electron J Differential Equations*, 2017, 2017: 1–9
- 12 Gasiński L, Papageorgiou N S. Asymmetric $(p, 2)$ -equations with double resonance. *Calc Var Partial Differential Equations*, 2017, 56: 88
- 13 Papageorgiou N S, Winkert P. Asymmetric $(p, 2)$ -equations, superlinear at $+\infty$, resonant at $-\infty$. *Bull Sci Math*, 2017, 141: 443–488
- 14 Sun M Z, Su J B, Zhao L G. Solutions of a Schrödinger-Poisson system with combined nonlinearities. *J Math Anal Appl*, 2016, 442: 385–403
- 15 Rabinowitz P H. Multiple critical points of perturbed symmetric functionals. *Trans Amer Math Soc*, 1982, 272: 753–769
- 16 Bahri A, Berestycki H. A perturbation method in critical point theory and applications. *Trans Amer Math Soc*, 1981, 267: 1–32
- 17 Bahri A, Lions P L. Morse index of some min-max critical points. I: Application to multiplicity results. *Comm Pure Appl Math*, 1988, 41: 1027–1037
- 18 Jing Y T, Liu Z L. Infinitely many solutions of p -sublinear p -Laplacian equations. *J Math Anal Appl*, 2015, 429: 1240–1257
- 19 García Azorero J P, Peral Alonso I. Existence and nonuniqueness for the p -Laplacian. *Comm Partial Differential Equations*, 1987, 12: 126–202

- 20 Rabinowitz P H. Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations. Conference Board of the Mathematical Sciences Regional Conference Series in Mathematics, Number 65. Providence: Amer Math Soc, 1986
- 21 García Azorero J P, Peral Alonso I. Comportement asymptotique des valeurs propres du p -Laplacian. C R Acad Sci Paris Sér I Math, 1988, 307: 75–78

Existence of infinitely many solutions to $(2, p)$ -Laplacian equations with non-odd perturbation terms

Zhanping Liang, Lixia Xie & Fuyi Li

Abstract In this paper, the $(2, p)$ -Laplacian equations with non-odd perturbation terms

$$\begin{cases} -\Delta u - \Delta_p u = a(x)|u|^{q-2}u + f(x, u), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

are considered, where $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ is a smooth bounded domain, $1 < q < 2 < p < N$, $a \in C(\bar{\Omega})$ is allowed to change sign, and f may not be odd in u . Using the variational method, we obtain the existence of infinitely many solutions to the above equations.

Keywords $(2, p)$ -Laplacian equations, non-odd perturbation terms, variational method, infinitely many solutions

MSC(2010) 35J62, 35J92, 35A15

doi: 10.1360/SSM-2019-0255