动态非保守生灭 Q 矩阵的极限谱密度

献给严士健教授 90 华诞

韩东

上海交通大学数学科学学院, 上海 200240

E-mail: donghan@sjtu.edu.cn

收稿日期: 2018-06-27; 接受日期: 2019-07-17; 网络出版日期: 2019-11-21

国家自然科学基金 (批准号: 11531001) 和国家重点基础研究发展计划 (批准号: 2015CB856004) 资助项目

摘要 本文不仅证明 $N \times N$ 的动态非保守生灭 Q 矩阵 Q_N 标准化 $\bar{Q}_N = -N^{-\alpha} Q_N$ ($\alpha \geq 0$) 以后, 当 $N \rightarrow \infty$ 时, 极限谱分布的存在唯一性, 还给出极限谱密度的积分表达式; 在一些特殊情形, 还可以得到极限谱密度的显式表示.

关键词 动态非保守生灭 Q 矩阵 极限谱密度 动态生灭 Q 矩阵 谱分布 极限密度

MSC (2010) 主题分类 15B99, 60B10

1 引言

考虑一个有 N 个元素的随机系统, 其中每个元素都具有同样“存活”和“死亡”转移速率且分别为 b 和 d 的连续时间的生灭过程, 而且它们相互独立. 设 $X_N(s)$ 表示 s 时刻此系统存活的个数, 则 $\{X_N(s), s \geq 0\}$ 的转移速率矩阵 (或称 Q 矩阵) 可表示为

$$Q_N = \begin{pmatrix} -bN & bN & & & & & & \\ d & -(d+b(N-1)) & b(N-1) & & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ & & nd & -(nd+b(N-n)) & b(N-n) & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & (N-1)d - ((N-1)d+b) & b & & \\ & & & & Nd & -Nd & & \end{pmatrix}, \quad (1.1)$$

其中 $0 \leq n \leq N$.

英文引用格式: Han D. Limiting spectral density of a dynamic nonconservative birth-death Q matrix (in Chinese). Sci Sin Math, 2020, 50: 59–68, doi: 10.1360/N012018-00169

自然地, 我们可将上述的生灭 Q 矩阵推广到如下一般情形 (可以是非保守):

$$Q_N = \begin{pmatrix} -r_N(0) & b_N(0) & & & \\ d_N(1) & -r_N(1) & b_N(1) & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & d_N(n) & -r_N(n) & b_N(n) \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & d_N(N-1) & -r_N(N-1) & b_N(N-1) \\ & & & & & d_N(N) & -r_N(N) \end{pmatrix}, \quad (1.2)$$

其中 $b_N(n) \geq 0$, $d_N(n) \geq 0$, $r_N(n) \geq 0$, r_N 可以不大于等于 $b_N(n) + d_N(n)$, $0 \leq n \leq N$.

显然, 上述 Q 矩阵的每个元素都可以与 N 有关, 我们可称其为动态非保守生灭 Q 矩阵.

当 $b_N(n) \equiv 1$, $d_N(n) \equiv 1$, $r_N(n) \equiv 0$ ($0 \leq n \leq N$) 时, Van Mieghem 在文献 [1, 第 164 页] 中已给出了 Q_N 的特征根和谱密度的表达式, 而当 $b_N(n)$ 、 $d_N(n)$ 和 $r_N(n)$ 与 N 无关时, 即 $b_N(n) = b(n)$, $d_N(n) = d(n)$, $r_N(n) = r(n)$ ($0 \leq n \leq N$), 且 $\{b_N(n), 0 \leq n \leq N\}$ 、 $\{d_N(n), 0 \leq n \leq N\}$ 和 $\{r_N(n), 0 \leq n \leq N\}$ 为相互独立随机变量序列时, Popescu^[2] 及韩东和张登^[3] 分别证明了随机三对角对称矩阵和随机生灭保守 Q 矩阵极限谱密度的存在唯一性并在一些特殊的情形给出极限谱密度的表达式. 关于一般的随机对角矩阵 (通常不是三对角矩阵), Kirsch 和 Kriecherbauer^[4] 及 Bourgade^[5] 讨论并总结了其极限谱密度的存在性以及它是否为经典 Wigner 半圆律的条件. 值得注意的是, 所有上述研究结果都假设矩阵的元素与 N 无关.

本文的主要目的是, 证明标准化以后的动态非保守生灭 Q 矩阵 $\bar{Q}_N = -N^{-\alpha}Q_N$ ($\alpha \geq 0$) 的极限谱分布的存在唯一性并给出其谱密度的表达式, 此表达式包括了文献 [2, 推论 1] 的结论 (参见下一节的例 2.2).

2 主要结果

设 $q_{ij}(N)$ ($0 \leq i, j \leq N$) 是 (1.2) 中 Q_N 的元素, 其中

$$q_{nm}(N) = \begin{cases} b_N(n) > 0, & m = n+1, \quad n \geq 0, \\ -r_N(n) \leq 0, & m = n, \quad n \geq 0, \\ d_N(n) > 0, & m = n-1, \quad n \geq 1. \end{cases}$$

我们知道生灭 Q 矩阵是可配称的, 即取 $\pi_0 = 1$, $\pi_n = \prod_{k=1}^n \frac{b_N(k-1)}{d_N(k)}$, $n \geq 1$, 则有

$$(1) \text{ 当 } n \geq 0 \text{ 时, } \pi_n q_{nn+1}(N) = \prod_{k=1}^n \frac{b_N(k-1)}{d_N(k)} b_N(n) = \pi_{n+1} d_N(n+1) = \pi_{n+1} q_{n+1n};$$

$$(2) \text{ 当 } n \geq 1 \text{ 时, } \pi_n q_{nn-1}(N) = \prod_{k=1}^n \frac{b_N(k-1)}{d_N(k)} d_N(n) = \pi_{n-1} b_N(n-1) = \pi_{n-1} q_{n-1n}.$$

这说明 $\Lambda_N Q_N \Lambda_N^{-1}$ 是一个对称阵, 其中 $\Lambda_N = \text{diag}(1, \sqrt{\pi_1}, \dots, \sqrt{\pi_N})$. 由此可知, Q_N 与 $\Lambda_N Q_N \Lambda_N^{-1}$ 有相同的实特征值. 同样, $\bar{Q}_N = -N^{-\alpha}Q_N$ ($\alpha \geq 0$) 的 $N+1$ 个特征值 $\lambda_0(N), \lambda_1(N), \dots, \lambda_N(N)$ 也都是实的. 按通常的约定, $\bar{Q}_N$ 特征值的经验谱分布 $F_N(x)$ 定义为

$$F_N(x) = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N I_{\{\lambda_k(N) \leq x\}}, \quad (2.1)$$

其中 $I(\cdot)$ 为示性函数, x 是任意实数.

下面给出本文的主要定理.

定理 2.1 设存在三个定义在 $[0, 1]$ 上的非负连续函数 $b(t) > 0$, $d(t) > 0$, $r(t) \geq 0$, 使得 $\frac{b_N(n)}{N^\alpha} = b(\frac{n}{N}) + o(1)$, $\frac{d_N(n)}{N^\alpha} = d(\frac{n}{N}) + o(1)$, $\frac{r_N(n)}{N^\alpha} = r(\frac{n}{N}) + o(1)$, 其中 $1 \leq n \leq N-1$, $o(1)$ 表示无穷小量 (当 N 趋于无穷时), 则 $\bar{Q}_N$ 的极限谱分布

$$F(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} F_N(x)$$

存在唯一且其密度函数 $p(x) = F'(x)$ 几乎处处存在并可表示为: 当 $x \in (\beta, \gamma)$ 时,

$$p(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{4b(t)d(t) - (x - r(t))^2}}; \quad (2.2)$$

当 $x \notin (\beta, \gamma)$, $p(x) = 0$, 其中 $\beta = \min_{0 \leq t \leq 1} \{r(t) - 2\sqrt{b(t)d(t)}\}$ 和 $\gamma = \max_{0 \leq t \leq 1} \{r(t) + 2\sqrt{b(t)d(t)}\}$ 可分别视为 $\bar{Q}_N$ 的极限最小和最大特征根.

推论 2.1 设 $r(t) \equiv 0$, $b(t)d(t)$ 的最大值为 a^2 , 即 $a^2 = \max_{0 \leq t \leq 1} b(t)d(t)$, 则极限谱密度函数 $p(x)$ 是定义在 $[-2a, 2a]$ 上的偶函数.

作为定理 2.1 的应用, 下面给出三个例子和三个注记.

例 2.1 首先给出引言中保守生灭 Q 矩阵 Q_N (1.1) 的标准化 Q 矩阵 $\bar{Q}_N = -\frac{1}{N}Q_N$ 的极限谱密度函数, 这里取 $\alpha = 1$.

我们知道保守的生灭 Q 矩阵, 0 是它的一个特征值并且 $-Q$ 是非负定阵, 因此, $-Q$ 的特征值都大于等于 0. 也就是说 $\bar{Q}_N = -\frac{1}{N}Q_N$ 的特征值都大于等于 0. 由于

$$\frac{b_N(n)}{N} = b \cdot \left(1 - \frac{n}{N}\right), \quad \frac{d_N(n)}{N} = d \cdot \frac{n}{N}, \quad \frac{r_N(n)}{N} = d \cdot \frac{n}{N} + b \cdot \left(1 - \frac{n}{N}\right), \quad 1 \leq n \leq N-1,$$

$$r_N(0) = b_N(0), \quad r_N(N) = d_N(N),$$

即 $b(t) = b(1-t)$, $d(t) = td$, $r(t) = td + b(1-t)$, 其中 $b > 0$, $d > 0$, 根据定理 2.1 中的 (2.2) 可得

$$p(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{4bd(1-t)t - (x - (td + b(1-t)))^2}} = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{dt}{(b+d)\sqrt{\frac{4bd(b+d-x)x}{(b+d)^4} - [t - \frac{b(b+d)+x(d-b)}{(b+d)^2}]^2}}.$$

要使上式根号内数值大于 0, x 必须满足 $0 < x < b+d$. 令 $a^2 = \frac{4bdx(b+d-x)}{(b+d)^4}$, $c = \frac{b(b+d)+x(d-b)}{(b+d)^2}$, 显然,

$$\frac{\min(b, d)}{b+d} \leq c \leq \frac{\max(b, d)}{b+d}.$$

由 $(t-c)^2 \leq a^2$ 得 $c-a \leq t \leq a+c$. 可以验证 $c-a \geq 0$, $a+c \leq 1$. 事实上,

$$c^2 - a^2 = \frac{(b+d)^2(x-b)^2}{(b+d)^4} = \frac{(x-b)^2}{(b+d)^2} \geq 0,$$

$$(1-c)^2 - a^2 = 1 - 2c + c^2 - a^2 = \frac{(x-d)^2}{(b+d)^2} \geq 0.$$

因此, 当 $0 < x < b+d$ 时,

$$p(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{dt}{(b+d)\sqrt{a^2 - (t-c)^2}} = \frac{1}{\pi} \int_{c-a}^{c+a} \frac{dt}{(b+d)\sqrt{a^2 - (t-c)^2}}$$

$$= \frac{1}{\pi(b+d)} \arcsin \left(\frac{t-c}{a} \right) \Big|_{c-a}^{c+a} = \frac{1}{\pi(b+d)} \left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right] = \frac{1}{(b+d)}.$$

这说明 $\bar{Q}_N = -\frac{1}{N}Q_N$ 的极限谱分布是 $(0, b+d)$ 上的均匀分布.

注 2.1 在例 2.1 中取 $r_N(n) \equiv 0$ ($0 \leq n \leq N$). 根据定理 2.1 中的 (2.2), $\bar{Q}_N = -\frac{1}{N}Q_N$ 的极限谱密度为

$$p(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{4bdt(1-t) - x^2}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{bd}} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{x^2}{4bd} - (t - \frac{1}{2})^2}},$$

其中 $|x| < \sqrt{bd}$. 记 $c^2 = \frac{1}{4} - (\frac{x}{2\sqrt{bd}})^2$, 由根号内数值大于 0 可知,

$$c^2 > \left(t - \frac{1}{2} \right)^2.$$

从而,

$$0 \leq \frac{1}{2} - c < t < \frac{1}{2} + c \leq 1.$$

因此,

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{bd}} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{c^2 - (t - \frac{1}{2})^2}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{bd}} \int_{\frac{1}{2}-c}^{\frac{1}{2}+c} \frac{dt}{\sqrt{c^2 - (t - \frac{1}{2})^2}} \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{bd}} \arcsin \left(\frac{t - \frac{1}{2}}{c} \right) \Big|_{\frac{1}{2}-c}^{\frac{1}{2}+c} = \frac{1}{2\sqrt{bd}}, \end{aligned}$$

其中 $|x| < \sqrt{bd}$. 这说明 $\bar{Q}_N$ 的极限谱分布是 $(-\sqrt{bd}, \sqrt{bd})$ 上的均匀分布.

例 2.2 设生灭转移速率相等并且 $b_N(n) = d_N(n) = n^\alpha$, $r_N(n) \equiv 0$, 其中 $\alpha > 0$, $0 \leq n \leq N$, 则 $b(t) = d(t) = t^\alpha$, $r(t) = 0$, 其中 $0 \leq t \leq 1$.

根据定理 2.1 中的 (2.2), $\bar{Q}_N = -\frac{1}{N^\alpha}Q_N$ 的极限谱密度为

$$p_\alpha(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{4t^{2\alpha} - x^2}} = \frac{|x|^{1/\alpha-1}}{\alpha\pi} \int_{|x|}^2 \frac{u^{-1/\alpha} du}{\sqrt{4-u^2}},$$

其中 $|x| < 2$.

注 2.2 在例 2.2 中分别取 α 为 $1/2$ 、 $1/4$ 和 1 , 则有

$$\begin{aligned} p_{1/2}(x) &= \frac{2|x|}{\pi} \int_{|x|}^2 \frac{u^{-2} du}{\sqrt{4-u^2}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{4-x^2}, \\ p_{1/4}(x) &= \frac{4|x|^3}{\pi} \int_{|x|}^2 \frac{u^{-4} du}{\sqrt{4-u^2}} = \frac{1}{6\pi} (2+x^2) \sqrt{4-x^2}, \\ p_1(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{|x|}^2 \frac{du}{u\sqrt{4-u^2}} = \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{2+\sqrt{4-x^2}}{|x|} \right), \end{aligned}$$

其中 $|x| < 2$, 这里 $p_{1/2}(x)$ 就是经典的 Wigner 半圆律. 上述表达式与文献 [2, (2.18)] 的结论一致.

图 1 保守的常数生灭 Q 矩阵的极限谱密度

例 2.3 设 $b_N(n) \equiv b$, $d_N(n) \equiv d$, $r_N(n) \equiv r$, $0 \leq n \leq N$, 取 $\alpha = 0$, 则标准化的 Q 矩阵为 $\bar{Q}_N = -Q_N$,

$$\bar{Q}_N = \begin{pmatrix} r & -b & & & \\ -d & r & -b & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -d & r & -b \\ & & & -d & r \end{pmatrix}.$$

这里 r 可以不必等于 $b + d$, 当 $b + d \neq r$ 时, Q_N 是一个非保守的生灭 Q 矩阵. 由定理 2.1 知, $\bar{Q}_N$ 的极限谱密度为

$$p(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{4bd - (x - r)^2}} = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{4bd - (x - r)^2}},$$

其中 $r - 2\sqrt{bd} \leq x \leq r + 2\sqrt{bd}$, 也就是说, 当 N 趋于 ∞ 时, $\bar{Q}_N$ 的最小特征值为 $r - 2\sqrt{bd}$, 最大特征值为 $r + 2\sqrt{bd}$. 特别地, 当 $b = d = 1$ 和 $r = 0$ 时, 极限谱密度 $p(x)$ 与文献 [1, (6.9)] 一致.

注 2.3 当取 $r_N(0) \equiv b$, $r_N(N) \equiv d$, $b_N(n) \equiv b$, $d_N(n) \equiv d$, $r_N(n) \equiv b + d$ ($1 \leq n < N$) 时, Q_N 是一个保守的生灭 Q 矩阵, 因此, 0 是 $\bar{Q}_N = -Q_N$ 的一个特征值且所有的特征值都大于等于 0.

由

$$(\sqrt{b} - \sqrt{d})^2 = r - 2\sqrt{bd} \leq x \leq r + 2\sqrt{bd} = (\sqrt{b} + \sqrt{d})^2$$

可知, 只要 $b \neq d$, 当 N 趋于 $+\infty$ 时, 第一个非零特征值 (也就是次小特征值) 为 $(\sqrt{b} - \sqrt{d})^2$, 最大特征值为 $(\sqrt{b} + \sqrt{d})^2$.

图 1 是此极限谱密度的图示.

3 定理的证明

定理 2.1 的证明 设 $G_N(z)$ 为经验谱分布 $F_N(x)$ (见 (2.1)) 的特征函数, 即

$$G_N(z) = \int e^{izx} dF_N(x) = \frac{1}{N+1} \sum_{j=0}^N e^{i\lambda_j z},$$

其中 $i = \sqrt{-1}$ 为纯虚数, $-\infty < z < +\infty$. 设 $\mu_N(m) = \int x^m dF_N(x) = \frac{1}{N+1} \sum_{j=0}^N \lambda_j^m$ 为 $\bar{Q}_N$ 特征值的 m ($m \geq 0$) 阶矩. 由于 $\bar{Q}_N$ 是可配称的, 因此,

$$\text{Tr}(\bar{Q}_N^m) = \sum_{j=0}^N \lambda_j^m = (N+1)\mu_N(m), \quad (3.1)$$

其中 $\text{Tr}(A)$ 表示矩阵 A 的迹.

下面证明特征函数 $G_N(z)$ 的极限 $G(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} G_N(z)$ 存在. 由 $e^{i\lambda_j z}$ 的 Taylor 展式和 (3.1) 得

$$\begin{aligned} G_N(z) &= \frac{1}{N+1} \sum_{j=0}^N e^{i\lambda_j z} = \frac{1}{N+1} \sum_{j=0}^N \sum_{m=0}^{\infty} \frac{i^m \lambda_j^m z^m}{m!} \\ &= \frac{1}{N+1} \sum_{m=0}^{\infty} i^m \text{Tr}(\bar{Q}_N^m) \frac{z^m}{m!}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

根据假设条件可知, 当 N 充分大时, $\frac{b_N(n)}{N^\alpha} = b(\frac{n}{N}) + o(1)$, $\frac{d_N(n)}{N^\alpha} = d(\frac{n}{N}) + o(1)$, $\frac{r_N(n)}{N^\alpha} = r(\frac{n}{N}) + o(1)$, $1 \leq n \leq N-1$. 进一步地, 可将 $\bar{Q}_N$ 写为

$$\bar{Q}_N = Q_N(b, d) + D_N + o(1),$$

其中 $D_N = \text{diag}(r_N(0), r_N(\frac{1}{N}), \dots, r_N(\frac{N-1}{N}), r_N(1))$,

$$Q_N(b, d) = \begin{pmatrix} 0 & -b(0) & & & \\ -d(\frac{1}{N}) & 0 & -b(\frac{1}{N}) & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -d(\frac{n}{N}) & 0 & -b(\frac{n}{N}) \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & -d(\frac{N}{N}) & 0 & -b(\frac{N}{N}) \end{pmatrix}.$$

从而,

$$\bar{Q}_N^m = \sum_{k=0}^m C_m^k Q_N^k(b, d) D_N^{m-k} + o(1). \quad (3.3)$$

注意到当 k 为奇数时, $\text{Tr}(Q_N^k(b, d)) = 0$. 为证明方便, 我们引入组合数

$$C_k^{\frac{k}{2}} = \begin{cases} 0, & \text{当 } k \text{ 为奇数,} \\ C_{2l}^l, & \text{当 } k \text{ 为偶数 } k = 2l. \end{cases}$$

从而,

$$\frac{1}{N+1} \text{Tr}(Q_N^k(b, d) D_N^{m-k}) = \frac{1}{N+1} \sum_{n=1}^{N-1} C_k^{\frac{k}{2}} b^{\frac{k}{2}} \left(\frac{n}{N}\right) d^{\frac{k}{2}} \left(\frac{n}{N}\right) r^{m-k} \left(\frac{n}{N}\right) + o(1), \quad (3.4)$$

其中 $b(\frac{n-j}{N})$ 和 $d(\frac{n-j}{N})$ ($-k \leq j \leq k$) 都用 $b(\frac{n}{N})$ 和 $d(\frac{n}{N})$ 替代, 因为当 $\frac{n}{N} \rightarrow t$ ($N \rightarrow \infty$) 时, 对于任意固定的 j ($-k \leq j \leq k$), 有 $\frac{n-j}{N} \rightarrow t$. 再由 (3.2)–(3.4) 可得

$$\begin{aligned}
 G(z) &= \lim_{N \rightarrow \infty} G_N(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \text{Tr}(\bar{Q}_N^m) \frac{(iz)^m}{m!} \\
 &= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^m C_m^k \int_0^1 C_k^{\frac{k}{2}} b^{\frac{k}{2}}(t) d^{\frac{k}{2}}(t) r^{m-k}(t) dt \right) \frac{(iz)^m}{m!} \\
 &= \int_0^1 \left(\sum_{m=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^m \frac{m!}{k!(m-k)!} C_k^{\frac{k}{2}} b^{\frac{k}{2}}(t) d^{\frac{k}{2}}(t) r^{m-k}(t) \right] \frac{(iz)^m}{m!} \right) dt \\
 &= \int_0^1 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^m \left(\frac{C_k^{\frac{k}{2}} b^{\frac{k}{2}}(t) d^{\frac{k}{2}}(t)}{k!} (iz)^k \right) \left(\frac{r^{m-k}(t) (iz)^{m-k}}{(m-k)!} \right) \\
 &= \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k^{\frac{k}{2}} b^{\frac{k}{2}}(t) d^{\frac{k}{2}}(t) (iz)^k}{k!} \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{r^j(t) (iz)^j}{(j)!} \right) \\
 &= \int_0^1 \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{C_{2l}^l b^l(t) d^l(t) (iz)^{2l}}{2l!} \right) e^{ir(t)z} dt \\
 &= \int_0^1 \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!l!} \left(\frac{2\sqrt{b(t)d(t)}z}{2} \right)^{2l} \right) e^{ir(t)z} dt \\
 &= \int_0^1 J_0(2\sqrt{b(t)d(t)}z) e^{ir(t)z} dt, \tag{3.5}
 \end{aligned}$$

其中 $J_0(\cdot)$ 为第一类修正的 Bessel 函数. 这里需要说明的是, 由于

$$\begin{aligned}
 \mu(m) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \mu_N(m) = \sum_{k=0}^m C_m^k C_k^{\frac{k}{2}} \int_0^1 b^{\frac{k}{2}}(t) d^{\frac{k}{2}}(t) r^{m-k}(t) dt \\
 &= \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^m C_m^k C_k^{\frac{k}{2}} b^{\frac{k}{2}}(t) d^{\frac{k}{2}}(t) r^{m-k}(t) \right) dt,
 \end{aligned}$$

并且 $b(t)$ 、 $d(t)$ 和 $r(t)$ 均为 $[0, 1]$ 上的非负有界函数, 令它们共同的上界为 K , 则

$$\mu(2m) \leq \sum_{k=0}^{2m} C_{2m}^k C_k^{\frac{k}{2}} K^{2m} = \left(\sum_{l=0}^m C_{2m}^{2l} C_{2l}^l \right) K^{2m} \leq (4K)^{2m}.$$

显然,

$$\sum_{m=0}^{\infty} \mu(2m)^{-\frac{1}{2m}} \geq \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{4K} = +\infty.$$

由 Carleman 定理 (参见文献 [6, 第 367 页]) 知, 矩序列 $\{\mu(m); m \geq 0\}$ 唯一确定极限谱分布函数 $F(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} F_N(x)$, 也就是说极限特征函数 $G(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} G_N(z)$ 唯一确定极限谱分布函数 $F(x)$.

下面验证极限谱密度 $p(x) = F'(x)$ 存在且可表示为

$$p(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-izx} G(z) dz. \tag{3.6}$$

设 $x + \Delta x$ 和 x 分别为 $F(x)$ 的任意两个连续点, 其中 $\Delta x \downarrow 0$. 根据分布函数和特征函数之间的表示定理可知,

$$\frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-izx} \frac{1 - e^{-iz\Delta x}}{iz\Delta x} G(z) dz.$$

取充分大的 $M > 0$, 则上式可写为

$$\begin{aligned} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-M}^M e^{-izx} \frac{1 - e^{-iz\Delta x}}{iz\Delta x} G(z) dz \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{|z| \geq M} e^{-izx} \frac{1 - e^{-iz\Delta x}}{iz\Delta x} G(z) dz \\ &=: I_1 + I_2. \end{aligned} \quad (3.7)$$

注意到当 $0 \leq |z| \leq M$ 时, 有 $0 \leq |z|\Delta x \leq M\Delta x \rightarrow 0$ 且

$$\frac{1 - e^{-iz\Delta x}}{iz\Delta x} = \frac{1 - \cos(z\Delta x)}{iz\Delta x} + \frac{\sin(z\Delta x)}{z\Delta x} \rightarrow 1 \quad (\Delta x \rightarrow 0).$$

从而, 当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时,

$$I_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-M}^M e^{-izx} \frac{1 - e^{-iz\Delta x}}{iz\Delta x} G(z) dz \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-M}^M e^{-izx} G(z) dz.$$

下面验证当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, $|I_2| \leq \frac{C}{\sqrt{M}}$, 其中 $C > 0$ 为常数. 利用 $J_0(z)$ 的渐近表示 (参见文献 [7, 第 582 页]), 对于充分大的 z , 有

$$J_0(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} z^{-\frac{1}{2}} \cos\left(z - \frac{\pi}{4}\right) (1 + o(1)). \quad (3.8)$$

先来估计 I_2 中, 从 M 到 $+\infty$ 的积分, 根据 (3.6) 和 (3.8), 令 $a = 2\sqrt{b(t)d(t)}$, 且对任意固定的 $a > 0$, 当 Ma 充分大时, 有

$$\begin{aligned} &\int_M^{+\infty} e^{-izx} \frac{1 - e^{-iz\Delta x}}{iz\Delta x} G(z) dz \\ &= \int_0^1 dt \left[\int_M^{+\infty} e^{-izx} \frac{1 - e^{-iz\Delta x}}{iz\Delta x} J_0(2\sqrt{b(t)d(t)}z) e^{ir(t)z} dz \right] \\ &= \int_0^1 dt \left[\int_M^{+\infty} \frac{1 - e^{-iz\Delta x}}{iz\Delta x} e^{iz(r(t)-x)} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (az)^{-\frac{1}{2}} \cos\left(az - \frac{\pi}{4}\right) dz \right] \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 dt \int_M^{+\infty} \frac{1 - e^{-iz\Delta x}}{iz\Delta x} (\cos(z(r(t) - x)) + i \sin(z(r(t) - x))) \cos\left(az - \frac{\pi}{4}\right) (az)^{-\frac{1}{2}} dz. \end{aligned}$$

根据三角和差化积公式

$$\begin{aligned} &\cos(z(r(t) - x)) \cos\left(az - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{1}{2} \left[\cos\left((r(t) + a - x)z - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left((r(t) - a + x)z + \frac{\pi}{4}\right) \right], \\ &\sin(z(r(t) - x)) \cos\left(az - \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \left[\cos \left((r(t) + a - x)z - \frac{\pi}{4} \right) - \cos \left((r(t) - a - x)z + \frac{\pi}{4} \right) \right],$$

代入上式积分, 并设 $r(t) + a - x \neq 0$, 则有

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\sqrt{a}} \int_M^{+\infty} \frac{1 - e^{-iz\Delta x}}{iz\Delta x} \cos \left((r(t) + a - x)z - \frac{\pi}{4} \right) z^{-\frac{1}{2}} dz \right| \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\sin \left((r(t) + a - x)z - \frac{\pi}{4} \right) (1 - e^{-iz\Delta x}) z^{-\frac{1}{2}}}{|r(t) + a - x| iz\Delta x} \Big|_M^{+\infty} \\ &+ \frac{1}{\sqrt{a}|r(t) + a - x|} \int_M^{+\infty} \sin \left((r(t) + a - x)z - \frac{\pi}{4} \right) \left(\frac{(1 - e^{-iz\Delta x}) z^{-\frac{1}{2}}}{iz\Delta x} \right)' dz \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{a}|r(t) + a - x|\sqrt{M}} + \frac{1}{\sqrt{a}|r(t) + a - x|} \int_M^{+\infty} z^{-1-\frac{1}{2}} dz \\ &= \frac{2}{\sqrt{a}|r(t) + a - x|\sqrt{M}}. \end{aligned}$$

同理可得

$$\left| \frac{1}{\sqrt{a}} \int_M^{+\infty} \frac{1 - e^{-iz\Delta x}}{iz\Delta x} \cos \left((r(t) - a - x)z + \frac{\pi}{4} \right) z^{-\frac{1}{2}} dz \right| \leq \frac{2}{\sqrt{a}|a - r(t) - x|\sqrt{M}}.$$

令 $c(t) = \max\{\frac{1}{|a+r(t)-x|}, \frac{1}{|a-r(t)-x|}\}$, 同理可得

$$\left| \frac{1}{\sqrt{a}} \int_M^{+\infty} \frac{1 - e^{-iz\Delta x}}{iz\Delta x} \sin(z(r(t) - x)) \cos \left(az - \frac{\pi}{4} \right) z^{-\frac{1}{2}} dz \right| \leq \frac{2c(t)}{\sqrt{M}}.$$

从而,

$$\left| \int_M^{+\infty} e^{-izx} \frac{1 - e^{-iz\Delta x}}{iz\Delta x} G(z) dz \right| \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 dt \left[\frac{4c(t)}{\sqrt{M}} \right].$$

同理可得

$$\left| \int_{-\infty}^M e^{-izx} \frac{1 - e^{-iz\Delta x}}{iz\Delta x} G(z) dz \right| \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 dt \left[\frac{4c(t)}{\sqrt{M}} \right].$$

到此, 我们证明了对几乎所有的 $F(x)$ 的连续点 x , 其密度函数存在且可表为 (3.6). 将 (3.5) 代入 (3.6), 并令 $\tilde{z} = az = 2\sqrt{b(t)d(t)}z$, 得

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^1 dt \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-izx} J_0(2\sqrt{b(t)d(t)}z) e^{ir(t)z} dz \right] \\ &= \frac{1}{2\pi a} \int_0^1 dt \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-i(x-r(t))\tilde{z}}{a}} J_0(\tilde{z}) d\tilde{z} \right]. \end{aligned}$$

由 Bessel 函数 $J_0(\tilde{z})$ 的 Fourier 变换可知,

$$p(x) = \frac{1}{\pi a} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1 - (\frac{x-r(t)}{a})^2}} = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{4b(t)d(t) - (x - r(t))^2}}.$$

证毕. □

参考文献

- 1 Van Mieghem P. Graph Spectra for Complex Networks. Cambridge: Cambridge University Press, 2011
- 2 Popescu I. General tridiagonal random matrix models, limiting distributions and fluctuations. Probab Theory Related Fields, 2009, 144: 179–220
- 3 韩东, 张登. 随机生灭 Q 矩阵的极限谱分布. 中国科学: 数学, 2015, 45: 539–558
- 4 Kirsch W, Kriecherbauer T. Sixty years of moments for random matrices. ArXiv:1612.06725v1, 2016
- 5 Bourgade P. Random band matrices. ArXiv:1807.03031v2, 2018
- 6 Bai Z D, Silverstein J W. Spectral Analysis of Large Dimensional Random Matrices. Beijing: Science Press, 2006
- 7 郭大钧, 编. 大学数学手册. 济南: 山东科技出版社, 1985

Limiting spectral density of a dynamic nonconservative birth-death Q matrix

Dong Han

Abstract In this paper, we not only prove the existence and uniqueness of the limiting spectral distribution of a normalized dynamic nonconservative birth-death Q matrix, but also give an integral representation of the limiting spectral density function.

Keywords dynamic nonconservative birth-death Q matrix, limiting spectral density, dynamic birth-death Q matrix, spectral distribution, limiting density

MSC(2010) 15B99, 60B10

doi: 10.1360/N012018-00169