正倒向随机微分方程的参数估计

献给王梓坤教授 90 华诞

梁齐珠¹, 熊捷^{2*}

1. 澳门大学数学系, 澳门 999078;

2. 南方科技大学数学系, 深圳 518055

E-mail: yb47422@connect.umac.mo, xiongj@sustc.edu.cn

收稿日期: 2017-12-04; 接受日期: 2018-01-31; 网络出版日期: 2018-12-28; * 通信作者
澳门科学技术发展基金 (批准号: 025/2016/A1) 资助项目

摘要 本文的研究目标是离散观测下正倒向随机微分方程中未知参数的估计及其性质. 作为第一步, 本文考虑一个线性模型. 本文先导出两个状态过程的关系式, 进而找到离散观测数据的似然函数. 最后详细讨论最大似然估计量的相合性和渐近正态性.

关键词 正倒向随机微分方程 最大似然估计 离散观测

MSC (2010) 主题分类 60J60, 62F12

1 引言

随机微分方程在离散观测下的参数估计问题一直以来备受关注. Dacunha-Castelle 和 Florens-Zmirou^[1] 以及 Lo^[2] 利用最大似然估计处理了一般的 Itô 扩散过程的未知参数. 在转移概率没有解析解的情形下, Pedersen^[3] 和 Ait-Sahalia^[4] 构造了闭合函数序列以逼近真实 (但未知) 的似然函数, 进而得出与最大似然估计量 (maximum likelihood estimator, MLE) 具有相同渐近性的估计量. 此外, 学者们还提出了一些参数估计方法, 包括 Hansen^[5] 的广义矩估计及 Bibby 和 Sørensen^[6] 的鞅估计方程, 以及对于部分信息下带跳模型, Djouadi 等^[7] 提出的最小二乘法估计未知 Poisson 密度等. 而基于离散数据的扩散过程非参数估计问题可参见文献 [8].

在探讨各种随机系统的参数估计时, 离散观测下的正倒向随机微分方程 (forward-backward stochastic differential equation, FBSDE) 的参数估计是必不可少的. 假设 $T > 0$ 为给定的期限, $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P)$ 是一个含有信息流的完备概率空间, 其中信息流 $\mathcal{F}_t = \sigma\{B_s : 0 \leq s \leq t\}$, B_t 是标准 Brown 运动. 考虑非耦合 FBSDE:

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t, \theta)dt + \sigma(t, X_t)dB_t, & X_0 = x, \\ dY_t = g(t, X_t, Y_t, Z_t, \theta)dt + Z_t dB_t, & Y_T = \Phi(X_T). \end{cases}$$

英文引用格式: Liang Q Z, Xiong J. Parameter estimation on forward-backward stochastic differential equations (in Chinese). Sci Sin Math, 2019, 49: 433–446, doi: 10.1360/N012017-00256

模型中的状态过程 X_t 不可观测, 控制变量 Z_t 未必能观测到, 已知 b 、 σ 、 g 和 Φ 的函数表达式, 根据带有白噪声的观测数据 $Y_{t_1} + \varepsilon_{t_1}, Y_{t_2} + \varepsilon_{t_2}, \dots, Y_{t_n} + \varepsilon_{t_n}$, 我们需要估计未知参数 θ . 线性的倒向随机微分方程最早在 1973 年由 Bismut^[9] 在研究经典随机最优控制问题时引入, 继而 Pardoux 和 Peng^[10] 将其发展成一般形式. 据我们所知, 目前只有 Su 和 Lin^[11] 及 Chen 和 Lin^[12] 讨论过 FBSDE 的半参数和非参数估计问题. 与本文不同的是, 他们的模型要求状态过程 X_t 和 Y_t 皆可观测, 然而在某些实际应用中, 这个前提条件并不适用.

例 1.1 分公司在业务、资金和人事上皆受总公司管辖. 一些业务往往由总公司与分公司或者由几个分公司共同完成, 造成各自的业绩核算不容易. 也就是说, 分公司在时刻 t 的业绩 X_t 有时无法直接观测. 但整个企业的收益 Y_t 仍然可由总公司的财务部门根据经营者的需求核算提供. 假设总公司的决策层需不断调整投入资金 π_t 到 m 个分公司, 以达到年末的盈利目标. 若 m 个旗下公司的发展各受到外部因素 (如当地经济和天气因素) θ^i ($1 \leq i \leq m$) 的影响, 我们可建立一个简单的模型:

$$\begin{cases} dX_t = b(X_t, \theta)dt + \sigma_t dB_t, & X_0 = x \in \mathbb{R}^m, \\ dY_t = \sum_{i=1}^m \pi_t^i dX_t^i = \pi_t b(X_t, \theta)dt + \pi_t \sigma_t dB_t, & Y_1 = \Phi(X_1), \end{cases}$$

其中 $b = (b^1, b^2, \dots, b^m)$, $\sigma = (\sigma^1, \sigma^2, \dots, \sigma^m)$. $b^i: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\sigma^i: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ 和 $\Phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 为已知函数, $B_t = (B_t^1, \dots, B_t^m)$ 是 Brown 运动. 企业的经营者可根据间断性的信息 $Y_{t_1}, Y_{t_2}, \dots, Y_{t_n}$ 来估计未知参数 $\theta \in \mathbb{R}^m$.

本文组织如下: 第 2 节将探究一个线性的 FBSDE 模型, 导出 Y_t 关于 X_t 的表达式, 并试图找到离散观测数据的似然函数. 第 3 节详细讨论 MLE 的相合性和渐近正态性. 第 4 节给出本文结论.

2 模型的建立

本节将从一个线性的 FBSDE 出发, 讨论离散观测下的 FBSDE 的参数估计问题. 我们期望以此为参照, 将理论推广到一般的 FBSDE. 对前述的 FBSDE 的漂移系数和扩散系数定义具体的函数表达式如下:

$$\begin{cases} dX_t = \theta X_t dt + dB_t, & X_0 = x, \\ dY_t = X_t dt + Z_t dB_t, & Y_1 = X_1. \end{cases} \quad (2.1)$$

此模型的期限为 1, 我们选择在时刻 $\{t_k^n = k\delta \mid \delta = 1/n, k = 1, \dots, n\}$ 获取观测数据 $\{Y_{t_k^n}\}_{1 \leq k \leq n}$, $n \geq 1$. 记 $\mathcal{F}_k^n$ 为 $\{Y_{t_1^n}, \dots, Y_{t_k^n}\}$ 生成的 σ 代数, $1 \leq k \leq n$. 本文将集中精力对区间 $\Theta = [a, b]$ 内的参数 θ 进行估计, 其中 $0 < a < b < \infty$.

得益于两个状态过程在终端时刻的线性关系, 利用 Itô 公式可得到 Y_t 关于 X_t 的表达式:

引理 2.1 对任意的 $t \in [0, T]$, 当 $\theta \in \Theta$ 时,

$$Y_t = \frac{1}{\theta} [(\theta - 1)e^{\theta(1-t)} + 1] X_t.$$

证明 (2.1) 的解的存在唯一性是众所周知的 (参见文献 [13]). 下面推导 Y_t 关于 X_t 的反馈形式. 假设 $Y_t = a_t X_t + b_t$, 其中 $a_1 = 1$, $b_1 = 0$. 依据 Itô 公式, 可得

$$dY_t = a_t dX_t + \dot{a}_t X_t dt + \dot{b}_t dt = (a_t \theta X_t + \dot{a}_t X_t + \dot{b}_t) dt + a_t dB_t.$$

与 (2.1) 比较, 有

$$a_t\theta + \dot{a}_t = 1, \quad \dot{b}_t = 0, \quad a_t = Z_t.$$

所以,

$$a_t(\theta) = \frac{1}{\theta}[(\theta - 1)e^{\theta(1-t)} + 1], \quad b_t = 0.$$

证毕. $\square$

经过上述计算, 原问题被转化为下列随机微分方程的参数估计问题:

$$dY_t = a_t(\theta)^{-1}Y_t dt + a_t(\theta)dB_t, \quad Y_0 = a_0(\theta)x.$$

注意到非随机初始值 Y_0 与待估参数 θ 有关, 漂移系数和扩散系数皆含有关于 θ 和 t 的非线性函数. 事实上, Jimenez 和 Ozaki^[14] 对此类模型有过讨论. 他们利用滤波方法 (filtering method) 和更新方法 (innovation method) 找出未知参数的估计量. 考虑到最大似然估计量在独立同分布或者平稳遍历 Markov 链的例子中享有一些最优性质, 具体参见文献 [15, 16], 本文将试图采用最大似然估计处理这个非时齐的随机微分方程的未知参数. 下面给出的引理将帮助我们推导似然函数.

引理 2.2 假设 $0 \leq s < t \leq 1$. 给定 Y_s 和 Y_t 的条件分布为

$$Y_t | Y_s \sim \mathcal{N}\left(\frac{(\theta - 1)e^\theta + e^{\theta t}}{(\theta - 1)e^\theta + e^{\theta s}}Y_s, \frac{((\theta - 1)e^{\theta(1-t)} + 1)^2(e^{2\theta(t-s)} - 1)}{2\theta^3}\right).$$

证明 把 Itô 公式应用到 $e^{-\theta t}X_t$, 我们有

$$d(e^{-\theta t}X_t) = -\theta e^{-\theta t}X_t dt + e^{-\theta t}\theta X_t dt + e^{-\theta t}dB_t = e^{-\theta t}dB_t.$$

从而,

$$X_t = e^{\theta(t-s)}X_s + \int_s^t e^{\theta(t-r)}dB_r.$$

若给定 X_s , 则上式右边的第一项是常数, 第二项服从正态分布且依赖于未知参数 θ 的一阶矩和二阶矩分别为

$$\begin{aligned} E\left(\int_s^t e^{\theta(t-r)}dB_r \middle| X_s\right) &= 0, \\ E\left(\left(\int_s^t e^{\theta(t-r)}dB_r\right)^2 \middle| X_s\right) &= \int_s^t e^{2\theta(t-r)}dr = \frac{e^{2\theta(t-s)} - 1}{2\theta}, \end{aligned}$$

所以,

$$X_t | X_s \sim \mathcal{N}\left(e^{\theta(t-s)}X_s, \frac{e^{2\theta(t-s)} - 1}{2\theta}\right).$$

由前一个引理, 结论可得. $\square$

对所有的 $1 \leq k \leq n$, 余文将使用下列简化符号:

$$\begin{aligned} y_0 &= Y_0, \quad y_k^n = Y_{\frac{k}{n}}, \\ \mu_k^n(\theta) &= \frac{(\theta - 1)e^\theta + e^{\frac{\theta k}{n}}}{(\theta - 1)e^\theta + e^{\frac{\theta(k-1)}{n}}} = 1 + \frac{e^{\frac{\theta}{n}} - 1}{(\theta - 1)e^{\theta(1 - \frac{k-1}{n})} + 1}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\gamma_k^n(\theta) = \frac{[(\theta - 1)e^{\theta(1 - \frac{k}{n})} + 1]^2(e^{\frac{2\theta}{n}} - 1)}{2\theta^3}. \quad (2.3)$$

相应地, 可推出 $\mu_k^n(\theta)$ 和 $\gamma_k^n(\theta)$ 关于 θ 的一阶和二阶导数分别为

$$\dot{\mu}_k^n(\theta) = \frac{\frac{1}{n}[(\theta-1)e^{(1-\frac{k-1}{n})\theta} + 1]e^{\frac{\theta}{n}} - (e^{\frac{\theta}{n}} - 1)[1 + (1 - \frac{k-1}{n})(\theta-1)]e^{(1-\frac{k-1}{n})\theta}}{[(\theta-1)e^{\theta(1-\frac{k-1}{n})} + 1]^2}, \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_k^n(\theta) = & \left\{ 2e^{(1-\frac{k}{n})\theta}[(\theta-1)e^{(1-\frac{k}{n})\theta} + 1] \left[1 + (\theta-1) \left(1 - \frac{k}{n} \right) \right] (e^{\frac{2\theta}{n}} - 1) \right. \\ & \left. + \frac{2}{n}[(\theta-1)e^{(1-\frac{k}{n})\theta} + 1]^2 e^{\frac{2\theta}{n}} - \frac{3}{\theta}[(\theta-1)e^{(1-\frac{k}{n})\theta} + 1]^2 (e^{\frac{2\theta}{n}} - 1) \right\} \frac{1}{2\theta^3}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\mu}_k^n(\theta) = & \left\{ (e^{\frac{\theta}{n}} - 1) \left[1 + (1-\theta)\theta \frac{k-1}{n} + (1-\theta)^2 \left(\frac{k-1}{n} \right)^2 \right] e^{(1+\frac{k}{n})\theta} \right. \\ & + \frac{1}{n} \left[(\theta-1) \frac{2k-1}{n} - \theta \right] [(\theta-1)e^{(1+\frac{k+1}{n})\theta} - e^{\frac{2k}{n}\theta}] \\ & - (e^{\frac{\theta}{n}} - 1) \left[1 + \theta - \theta \frac{k-1}{n} \right] e^{(1+\frac{2k-2}{n})\theta} + \frac{k}{n^2}(\theta-1)e^{(1+\frac{2k-1}{n})\theta} \\ & \left. + \frac{k}{n^2} e^{\frac{3k-2}{n}\theta} \right\} \frac{1}{((\theta-1)e^\theta + e^{\frac{k-1}{n}\theta})^3}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\gamma}_k^n(\theta) = & \left\{ 2(e^{\frac{\theta}{n}} - 1) \left(1 - \frac{k}{n} \right) [1 + (\theta-1)e^{(1-\frac{k}{n})\theta}] \left[2 + (\theta-1) \left(1 - \frac{k}{n} \right) \right] e^{(1-\frac{k}{n})\theta} \right. \\ & + 2(e^{\frac{\theta}{n}} - 1) \left[1 + (\theta-1) \left(1 - \frac{k}{n} \right) \right]^2 e^{2(1-\frac{k}{n})\theta} \\ & + \frac{12}{\theta^2} (e^{\frac{\theta}{n}} - 1) [1 + (\theta-1)e^{(1-\frac{k}{n})\theta}]^2 \\ & - \frac{12}{\theta} (e^{\frac{\theta}{n}} - 1) [1 + (\theta-1)e^{(1-\frac{k}{n})\theta}] \left[1 + (\theta-1) \left(1 - \frac{k}{n} \right) \right] e^{(1-\frac{k}{n})\theta} \\ & + \frac{8}{n} [1 + (\theta-1)e^{(1-\frac{k}{n})\theta}] \left[1 + (\theta-1) \left(1 - \frac{k}{n} \right) \right] e^{(1-\frac{k-2}{n})\theta} \\ & \left. + \left(\frac{4}{n^2} - \frac{12}{n\theta} \right) [1 + (\theta-1)e^{(1-\frac{k}{n})\theta}]^2 e^{\frac{2\theta}{n}} \right\} \frac{1}{2\theta^3}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

为清晰起见, 贯穿全文, 对任意的 $\theta \in \Theta$, 记 $\phi_k^n = \phi_k^n(\theta)$, $\phi = \mu, \dot{\mu}, \ddot{\mu}, \gamma, \dot{\gamma}, \ddot{\gamma}$. 因此, 给定 y_{k-1}^n 和 y_k^n 的条件分布为

$$y_k^n | y_{k-1}^n \sim \mathcal{N}(\mu_k^n y_{k-1}^n, \gamma_k^n).$$

随之, 关于观测值 $y_1^n, y_2^n, \dots, y_n^n$ 的似然函数的简单表达式可表示如下:

$$L_n(\theta) = \sum_{k=1}^n \ln p(y_k^n | y_{k-1}^n; \theta),$$

其中转移密度函数为

$$p(y_k^n | y_{k-1}^n; \theta) = (2\pi\gamma_k^n)^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{(y_k^n - \mu_k^n y_{k-1}^n)^2}{2\gamma_k^n} \right\}.$$

若 $\hat{\theta}_n$ 记作 MLE, 则 $\hat{\theta}_n = \arg \max_{\theta \in \Theta} L_n(\theta)$.

3 MLE 的收敛性质

本节将详细分析 MLE 的收敛性质. 令

$$l_k^n(\theta) = \ln p(y_k^n | y_{k-1}^n; \theta) = -\frac{1}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln \gamma_k^n - \frac{(y_k^n - \mu_k^n y_{k-1}^n)^2}{2\gamma_k^n}.$$

记 $\dot{l}_k^n(\theta)$ 和 $\ddot{l}_k^n(\theta)$ 分别是 $l_k^n(\theta)$ 关于 θ 的一阶和二阶导数. 假设 θ_0 是未知参数的真实值. 依据 Taylor 展开定理, 对于任意的 $\theta \in \Theta$ 和 $\delta \geq 0$, 满足 $|\theta - \theta_0| \leq \delta$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} L_n(\theta) &= \sum_{k=1}^n \dot{l}_k^n(\theta) = \sum_{k=1}^n \dot{l}_k^n(\theta_0) + (\theta - \theta_0) \sum_{k=1}^n \ddot{l}_k^n(\theta_n^*) \\ &= \sum_{k=1}^n \dot{l}_k^n(\theta_0) - (\theta - \theta_0) \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(\dot{l}_k^n(\theta_0)^2 | \mathcal{F}_{k-1}^n) \\ &\quad + (\theta - \theta_0) \left(\sum_{k=1}^n \ddot{l}_k^n(\theta_n^*) + \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(\dot{l}_k^n(\theta_0)^2 | \mathcal{F}_{k-1}^n) \right), \end{aligned} \quad (3.1)$$

其中 θ_n^* 取值于 θ_0 与 θ 之间.

3.1 MLE 的强相合性

观察 $l_k^n(\theta)$ 关于 θ 的一阶导函数:

$$\dot{l}_k^n(\theta) = -\frac{\dot{\gamma}_k^n}{2\gamma_k^n} + \frac{2(y_k^n - \mu_k^n y_{k-1}^n)y_{k-1}^n \dot{\mu}_k^n \gamma_k^n + (y_k^n - \mu_k^n y_{k-1}^n)^2 \dot{\gamma}_k^n}{2(\gamma_k^n)^2}. \quad (3.2)$$

显然, 由 $y_k^n - \mu_k^n y_{k-1}^n \sim \mathcal{N}(0, \gamma_k^n)$ 可得

$$\mathbb{E}(\dot{l}_k^n(\theta) | \mathcal{F}_{k-1}^n) = 0$$

和

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\dot{l}_k^n(\theta)^2 | \mathcal{F}_{k-1}^n) &= \mathbb{E} \left(\frac{(\dot{\gamma}_k^n)^2}{4(\gamma_k^n)^4} (y_k^n - \mu_k^n y_{k-1}^n)^4 + \frac{\dot{\mu}_k^n \dot{\gamma}_k^n}{(\gamma_k^n)^3} y_{k-1}^n (y_k^n - \mu_k^n y_{k-1}^n)^3 \right. \\ &\quad + \left(\frac{(\dot{\mu}_k^n)^2}{(\gamma_k^n)^2} (y_{k-1}^n)^2 - \frac{(\dot{\gamma}_k^n)^2}{2(\gamma_k^n)^3} \right) (y_k^n - \mu_k^n y_{k-1}^n)^2 \\ &\quad \left. - \frac{\dot{\mu}_k^n \dot{\gamma}_k^n}{(\gamma_k^n)^2} y_{k-1}^n (y_k^n - \mu_k^n y_{k-1}^n) + \frac{(\dot{\gamma}_k^n)^2}{4(\gamma_k^n)^2} \middle| \mathcal{F}_{k-1}^n \right) \\ &= \frac{(\dot{\gamma}_k^n)^2}{4(\gamma_k^n)^4} \cdot 3(\gamma_k^n)^2 + \left(\frac{(\dot{\mu}_k^n)^2}{(\gamma_k^n)^2} (y_{k-1}^n)^2 - \frac{(\dot{\gamma}_k^n)^2}{2(\gamma_k^n)^3} \right) \cdot \gamma_k^n + \frac{(\dot{\gamma}_k^n)^2}{4(\gamma_k^n)^2} \\ &= \frac{2(\dot{\mu}_k^n)^2 \gamma_k^n (y_{k-1}^n)^2 + (\dot{\gamma}_k^n)^2}{2(\gamma_k^n)^2}. \end{aligned}$$

引理 3.1 定义

$$I_n(\theta) = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(\dot{l}_k^n(\theta)^2 | \mathcal{F}_{k-1}^n). \quad (3.3)$$

对所有 $\theta \in \Theta$, $I_n(\theta) \xrightarrow{\text{a.s.}} \infty$, 也就是说, 当 n 趋于无穷大, $I_n(\theta)$ 几乎处处趋于无穷大.

证明 根据定义, 可得

$$I_n(\theta) = \sum_{k=1}^n \frac{(\dot{\mu}_k^n)^2 (y_{k-1}^n)^2}{\gamma_k^n} + \sum_{k=1}^n \frac{(\dot{\gamma}_k^n)^2}{2(\gamma_k^n)^2}.$$

第 1 步 因为

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{(\dot{\gamma}_k^n)^2}{2(\gamma_k^n)^2} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left\{ 2e^{\theta(1-\frac{k}{n})} [(\theta-1)e^{\theta(1-\frac{k}{n})} + 1] \left[1 + (\theta-1) \left(1 - \frac{k}{n} \right) \right] (e^{\frac{2\theta}{n}} - 1) \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{n} [(\theta-1)e^{\theta(1-\frac{k}{n})} + 1]^2 e^{\frac{2\theta}{n}} - \frac{3}{\theta} [(\theta-1)e^{\theta(1-\frac{k}{n})} + 1]^2 (e^{\frac{2\theta}{n}} - 1) \right\}^2 \\ &\quad \times \frac{1}{\{[(\theta-1)e^{\theta(1-\frac{k}{n})} + 1]^2 (e^{\frac{2\theta}{n}} - 1)\}^2} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left(\frac{2[1 + (\theta-1)(1-\frac{k}{n})]}{\theta-1 + e^{\theta(\frac{k}{n}-1)}} + \frac{2}{n(1 - e^{-\frac{2\theta}{n}})} - \frac{3}{\theta} \right)^2, \end{aligned}$$

所以,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{(\dot{\gamma}_k^n)^2}{2(\gamma_k^n)^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{2[1 + (\theta-1)(1-\frac{k}{n})]}{\theta-1 + e^{\theta(\frac{k}{n}-1)}} + \frac{2}{n(1 - e^{-\frac{2\theta}{n}})} - \frac{3}{\theta} \right)^2 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{2[1 + (\theta-1)(1-\frac{k}{n})]}{\theta-1 + e^{\theta(\frac{k}{n}-1)}} - \frac{3}{\theta} \right)^2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^2(1 - e^{-\frac{2\theta}{n}})^2} \\ &\quad + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^2(1 - e^{-\frac{2\theta}{n}})} \sum_{k=1}^n \left(\frac{2[1 + (\theta-1)(1-\frac{k}{n})]}{\theta-1 + e^{\theta(\frac{k}{n}-1)}} - \frac{3}{\theta} \right) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{2[1 + (\theta-1)(1-x)]}{\theta-1 + e^{\theta(x-1)}} - \frac{3}{\theta} \right)^2 dx + \frac{1}{2\theta^2} \\ &\quad + \frac{1}{\theta} \int_0^1 \left(\frac{2[1 + (\theta-1)(1-x)]}{\theta-1 + e^{\theta(x-1)}} - \frac{3}{\theta} \right) dx \\ &= 2 \int_0^1 \left(\frac{1 + (\theta-1)x}{\theta-1 + e^{-\theta x}} - \frac{1}{\theta} \right)^2 dx \triangleq C(\theta). \end{aligned}$$

显然, $C(\theta)$ 在 Θ 上一致连续. 所以,

$$\sum_{k=1}^n \frac{(\dot{\gamma}_k^n)^2}{2(\gamma_k^n)^2} = O(n) \rightarrow \infty, \quad \text{当 } n \rightarrow \infty.$$

第 2 步 根据 (2.4), 可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{(\dot{\mu}_k^n)^2}{\gamma_k^n} (y_{k-1}^n)^2 &= \frac{1}{n^3(e^{\frac{2\theta}{n}} - 1)} \sum_{k=1}^n \frac{2\theta^3[(\theta-1)e^{(1-\frac{k-1}{n})\theta} + 1]^2 e^{\frac{2\theta}{n}}}{[(\theta-1)e^{\theta(1-\frac{k-1}{n})} + 1]^4 [(\theta-1)e^{\theta(1-\frac{k}{n})} + 1]^2} (y_{k-1}^n)^2 \\ &\quad + \frac{(e^{\frac{\theta}{n}} - 1)^2}{n(e^{\frac{2\theta}{n}} - 1)} \sum_{k=1}^n \frac{2\theta^3[1 + (1-\frac{k-1}{n})(\theta-1)]^2 e^{2(1-\frac{k-1}{n})\theta}}{[(\theta-1)e^{\theta(1-\frac{k-1}{n})} + 1]^4 [(\theta-1)e^{\theta(1-\frac{k}{n})} + 1]^2} (y_{k-1}^n)^2 \\ &\quad - \frac{(e^{\frac{\theta}{n}} - 1)}{n^2(e^{\frac{2\theta}{n}} - 1)} \sum_{k=1}^n \frac{2\theta^3[(\theta-1)e^{(1-\frac{k-1}{n})\theta} + 1][1 + (1-\frac{k-1}{n})(\theta-1)]e^{(1-\frac{k-2}{n})\theta}}{[(\theta-1)e^{\theta(1-\frac{k-1}{n})} + 1]^4 [(\theta-1)e^{\theta(1-\frac{k}{n})} + 1]^2} (y_{k-1}^n)^2 \end{aligned}$$

$$\leq K \left(\frac{1}{n^3(e^{\frac{2\theta}{n}} - 1)} + \frac{(e^{\frac{\theta}{n}} - 1)^2}{n(e^{\frac{2\theta}{n}} - 1)} + \frac{(e^{\frac{\theta}{n}} - 1)}{n^2(e^{\frac{2\theta}{n}} - 1)} \right) \sum_{k=1}^n (y_{k-1}^n)^2.$$

注意到

$$\frac{1}{n^3(e^{\frac{2\theta}{n}} - 1)} + \frac{(e^{\frac{\theta}{n}} - 1)^2}{n(e^{\frac{2\theta}{n}} - 1)} + \frac{(e^{\frac{\theta}{n}} - 1)}{n^2(e^{\frac{2\theta}{n}} - 1)} = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

事实上,

$$y_j^n | y_i^n \sim \mathcal{N}\left(\frac{(\theta - 1)e^\theta + e^{\frac{\theta j}{n}}}{(\theta - 1)e^\theta + e^{\frac{\theta i}{n}}} y_i^n, \frac{((\theta - 1)e^{\theta(1 - \frac{j}{n})} + 1)^2 (e^{\frac{2\theta(j-i)}{n}} - 1)}{2\theta^3}\right), \quad 0 \leq i < j \leq n,$$

所以, 对任意 $\varepsilon > 0$, 有

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left\{\sup_{m \geq n} \frac{1}{m^2} \sum_{k=1}^m (y_{k-1}^m)^2 > \varepsilon\right\} \\ & \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left\{\bigcup_{m=n}^{\infty} \left\{\frac{1}{m^2} \sum_{k=1}^m (y_{k-1}^m)^2 > \varepsilon\right\}\right\} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=n}^{\infty} \mathbb{P}\left\{\frac{1}{m^2} \sum_{k=1}^m (y_{k-1}^m)^2 > \varepsilon\right\} \\ & \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=n}^{\infty} \frac{1}{m^4} \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^m (y_{k-1}^m)^2\right)^2 \\ & = \frac{1}{\varepsilon^2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=n}^{\infty} \frac{1}{m^4} \sum_{k=1}^m \mathbb{E}(y_{k-1}^m)^4 + \frac{2}{\varepsilon^2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=n}^{\infty} \frac{1}{m^4} \sum_{1 \leq i < j \leq m} \mathbb{E}((y_{i-1}^m)^2 \mathbb{E}((y_{j-1}^m)^2 | \mathcal{F}_{i-1}^m)) \\ & \leq \frac{K}{\varepsilon^2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=n}^{\infty} \frac{1}{m^3} + \frac{K}{\varepsilon^2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=n}^{\infty} \frac{1}{m^2} = 0. \end{aligned}$$

根据文献 [17] 中第 6.2 小节的定理 11, 可得 $n^{-2} \sum_{k=1}^n (y_{k-1}^n)^2 \xrightarrow{\text{a.s.}} 0$. 由此可得

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{(\dot{\mu}_k^n)^2}{\gamma_k^n} (y_{k-1}^n)^2 \xrightarrow{\text{a.s.}} 0.$$

综上所述, $I_n(\theta) \xrightarrow{\text{a.s.}} \infty$, 而且随着 $n \rightarrow \infty$, $n^{-1} I(\theta) \xrightarrow{\text{a.s.}} C(\theta)$. $\square$

基于上述结论, 当 (3.2) 中的 $\dot{l}_k^n$ 是一个数列, 即 $\dot{l}_k^n$ 与 n 无关, Hall 和 Heyde^[18] 根据鞅收敛定理得出下述引理 (参见文献 [18, 第 6.2 小节]). 事实上, 即使本文的 $\dot{l}_k^n$ 是一个数组, 引理依然成立.

引理 3.2 当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$I_n(\theta_0)^{-1} \sum_{k=1}^n \dot{l}_k^n(\theta_0) \xrightarrow{\text{a.s.}} 0.$$

证明 已知 $z_k = (\gamma_k^n)^{-1/2}(\theta_0)(y_k^n - \mu_k^n(\theta_0)y_{k-1}^n) \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$, $1 \leq k \leq n$. 在此证明过程中, $\theta = \theta_0$. 鉴于 $I_n(\theta) = O(n)$, 由 (3.2), 有

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \dot{l}_k^n(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\dot{\mu}_k^n}{\sqrt{\gamma_k^n}} y_{k-1}^n z_k + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\dot{\gamma}_k^n}{2\gamma_k^n} (z_k^2 - 1).$$

对于上式右端第一项, (2.3) 和 (2.4) 使我们得到

$$\frac{\dot{\mu}_k^n}{\sqrt{\gamma_k^n}} = \frac{1}{n(e^{\frac{2\theta}{n}} - 1)^{\frac{1}{2}}} \frac{\sqrt{2\theta^{\frac{3}{2}}}}{[(\theta - 1)e^{\theta(1 - \frac{k}{n})} + e^{-\frac{\theta}{n}}][(\theta - 1)e^{\theta(1 - \frac{k}{n})} + 1]}$$

$$-(e^{\frac{2\theta}{n}} - 1)^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{2}\theta^{\frac{3}{2}}[1 + (1 - \frac{k-1}{n})(\theta - 1)]e^{(1 - \frac{k-1}{n})\theta}}{[(\theta - 1)e^{\theta(1 - \frac{k-1}{n})} + 1]^2[(\theta - 1)e^{\theta(1 - \frac{k}{n})} + 1]},$$

其中

$$\frac{1}{n(e^{\frac{2\theta}{n}} - 1)^{\frac{1}{2}}} = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad (e^{\frac{2\theta}{n}} - 1)^{\frac{1}{2}} = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

而且它们对应的系数也是有界的. 对任意固定的 $\varepsilon > 0$, 有

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\sup_{m \geq n} \left| \frac{1}{m^{3/2}} \sum_{k=1}^m y_{k-1}^m z_k \right| > \varepsilon\right\} \\ & \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=n}^{\infty} P\left\{\left| \frac{1}{m^{3/2}} \sum_{k=1}^m y_{k-1}^m z_k \right| > \varepsilon\right\} \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=n}^{\infty} \frac{1}{m^3} E\left(\sum_{k=1}^m y_{k-1}^m z_k\right)^2 \\ & = \frac{1}{\varepsilon^2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=n}^{\infty} \frac{1}{m^3} \sum_{k=1}^m E((y_{k-1}^m)^2 z_k^2) + \frac{2}{\varepsilon^2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=n}^{\infty} \frac{1}{m^3} \sum_{1 \leq i < j \leq m} E(y_{i-1}^m z_i y_{j-1}^m E(z_j | \mathcal{F}_{j-1}^m)) \\ & \leq \frac{K}{\varepsilon^2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=n}^{\infty} \frac{1}{m^2} = 0. \end{aligned}$$

因而,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\dot{\mu}_k^n}{\sqrt{\gamma_k^n}} y_{k-1}^n z_k \xrightarrow{\text{a.s.}} 0.$$

另一方面, 记 $\zeta_k = z_k^2 - 1$, 则 $\{\zeta_k\}_{k \geq 1}$ 是独立同分布的随机变量且 $E(\zeta_k) = 0$, $E(\zeta_k^2) = 2$, $E(\zeta_k^3) = 8$, $E(\zeta_k^4) = 60$. 如此, 对任意 $\varepsilon > 0$, 有

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\sup_{m \geq n} \left| \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \frac{\dot{\gamma}_k^m}{2\gamma_k^m} (z_k^2 - 1) \right| > \varepsilon\right\} \\ & \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=n}^{\infty} P\left\{\left| \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \frac{\dot{\gamma}_k^m}{2\gamma_k^m} \zeta_k \right| > \varepsilon\right\} \leq \frac{1}{\varepsilon^4} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=n}^{\infty} \frac{1}{m^4} E\left(\sum_{k=1}^m \frac{\dot{\gamma}_k^m}{2\gamma_k^m} \zeta_k\right)^4 \\ & = \frac{1}{16\varepsilon^4} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=n}^{\infty} \frac{1}{m^4} \sum_{k=1}^m \frac{(\dot{\gamma}_k^m)^4}{(\gamma_k^m)^4} E(\zeta_k^4) \\ & \quad + \frac{4}{16\varepsilon^4} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=n}^{\infty} \frac{1}{m^4} \sum_{1 \leq i < j \leq m} \left(\frac{(\dot{\gamma}_i^m)^3 \dot{\gamma}_j^m}{(\gamma_i^m)^3 \gamma_j^m} E(\zeta_i^3 \zeta_j) + \frac{\dot{\gamma}_i^m (\dot{\gamma}_j^m)^3}{\gamma_i^m (\gamma_j^m)^3} E(\zeta_i \zeta_j^3) \right) \\ & \quad + \frac{6}{16\varepsilon^4} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=n}^{\infty} \frac{1}{m^4} \sum_{1 \leq i < j \leq m} \frac{(\dot{\gamma}_i^m)^2 (\dot{\gamma}_j^m)^2}{(\gamma_i^m)^2 (\gamma_j^m)^2} E(\zeta_i^2 \zeta_j^2) \\ & \quad + \frac{12}{16\varepsilon^4} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=n}^{\infty} \frac{1}{m^4} \sum_{1 \leq i < j < k \leq m} \left(\frac{(\dot{\gamma}_i^m)^2 \dot{\gamma}_j^m \dot{\gamma}_k^m}{(\gamma_i^m)^2 \gamma_j^m \gamma_k^m} E(\zeta_i^2 \zeta_j \zeta_k) \right. \\ & \quad \left. + \frac{\dot{\gamma}_i^m (\dot{\gamma}_j^m)^2 \dot{\gamma}_k^m}{\gamma_i^m (\gamma_j^m)^2 \gamma_k^m} E(\zeta_i \zeta_j^2 \zeta_k) + \frac{\dot{\gamma}_i^m \dot{\gamma}_j^m (\dot{\gamma}_k^m)^2}{\gamma_i^m \gamma_j^m (\gamma_k^m)^2} E(\zeta_i \zeta_j \zeta_k^2) \right) \\ & \quad + \frac{24}{16\varepsilon^4} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=n}^{\infty} \frac{1}{m^4} \sum_{1 \leq i < j < k < l \leq m} \frac{\dot{\gamma}_i^m \dot{\gamma}_j^m \dot{\gamma}_k^m \dot{\gamma}_l^m}{\gamma_i^m \gamma_j^m \gamma_k^m \gamma_l^m} E(\zeta_i \zeta_j \zeta_k \zeta_l) \\ & = \frac{15}{4\varepsilon^4} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=n}^{\infty} \frac{1}{m^4} \sum_{k=1}^m \frac{(\dot{\gamma}_k^m)^4}{(\gamma_k^m)^4} + \frac{3}{2\varepsilon^4} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=n}^{\infty} \frac{1}{m^4} \sum_{1 \leq i < j \leq m} \frac{(\dot{\gamma}_i^m)^2 (\dot{\gamma}_j^m)^2}{(\gamma_i^m)^2 (\gamma_j^m)^2} \end{aligned}$$

$$\leq \frac{K}{\varepsilon^2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=n}^{\infty} \frac{1}{m^3} + \frac{K}{\varepsilon^2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=n}^{\infty} \frac{1}{m^2} = 0.$$

亦即,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\dot{\gamma}_k^n}{2\gamma_k^n} (z_k^2 - 1) \xrightarrow{\text{a.s.}} 0.$$

证毕. □

现在, 考察 $l_k^n(\theta)$ 关于 θ 的二阶导函数,

$$\begin{aligned} \ddot{l}_k^n(\theta) &= \frac{(\dot{\gamma}_k^n)^2 - \ddot{\gamma}_k^n \gamma_k^n - 2(\dot{\mu}_k^n)^2 \gamma_k^n (y_{k-1}^n)^2}{2(\gamma_k^n)^2} + \frac{y_k^n - \mu_k^n y_{k-1}^n}{(\gamma_k^n)^{1/2}} \cdot \frac{\ddot{\mu}_k^n \gamma_k^n - 2\dot{\mu}_k^n \dot{\gamma}_k^n}{(\gamma_k^n)^{3/2}} y_{k-1}^n \\ &\quad + \left(\frac{y_k^n - \mu_k^n y_{k-1}^n}{(\gamma_k^n)^{1/2}} \right)^2 \cdot \frac{\ddot{\gamma}_k^n \gamma_k^n - 2(\dot{\gamma}_k^n)^2}{2(\gamma_k^n)^2}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

显而易见,

$$E(\ddot{l}_k^n(\theta) \mid \mathcal{F}_{k-1}^n) = -E(\dot{l}_k^n(\theta)^2 \mid \mathcal{F}_{k-1}^n), \quad \forall k \geq 1, \quad \forall \theta \in \Theta. \quad (3.5)$$

记

$$J_n(\theta) = \sum_{k=1}^n \ddot{l}_k^n(\theta). \quad (3.6)$$

引理 3.3 当 θ_n^* 在 θ_0 的某邻域内, 不等式 $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|I_n(\theta_0) + J_n(\theta_n^*)|}{I_n(\theta_0)} < 1$, a.s. 成立.

证明 引理 3.1 告诉我们, $I_n(\theta_0)$ 与 n 同阶. $y_k^n \mid y_{k-1}^n$ 的条件分布使我们有表达式

$$y_k^n = \mu_k^n(\theta_0) y_{k-1}^n + (\gamma_k^n)^{1/2}(\theta_0) z_k, \quad z_k \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathcal{N}(0, 1), \quad 1 \leq k \leq n.$$

如此, 先考虑

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} J_n(\theta_n^*) &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{-(\dot{\gamma}_k^n)^2(\theta_n^*) - 2(\dot{\mu}_k^n)^2(\theta_n^*) \gamma_k^n(\theta_n^*) (y_{k-1}^n)^2}{2(\gamma_k^n)^2(\theta_n^*)} \\ &\quad + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{(\mu_k^n(\theta_0) - \mu_k^n(\theta_n^*)) y_{k-1}^n + (\gamma_k^n)^{1/2}(\theta_0) z_k}{(\gamma_k^n)^{1/2}(\theta_n^*)} \\ &\quad \times \frac{\ddot{\mu}_k^n(\theta_n^*) \gamma_k^n(\theta_n^*) - 2\dot{\mu}_k^n(\theta_n^*) \dot{\gamma}_k^n(\theta_n^*)}{(\gamma_k^n)^{3/2}(\theta_n^*)} y_{k-1}^n \\ &\quad + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{[(\mu_k^n(\theta_0) - \mu_k^n(\theta_n^*)) y_{k-1}^n + (\gamma_k^n)^{1/2}(\theta_0) z_k]^2}{\gamma_k^n(\theta_n^*)} - 1 \right) \\ &\quad \times \frac{\ddot{\gamma}_k^n(\theta_n^*) \gamma_k^n(\theta_n^*) - 2(\dot{\gamma}_k^n)^2(\theta_n^*)}{2(\gamma_k^n)^2(\theta_n^*)} \\ &=: J_1 + J_2 + J_3. \end{aligned}$$

以下分别讨论 J_2 、 J_3 和 J_1 的收敛性.

(1) 回顾 (2.2),

$$\mu_k^n - 1 = \frac{e^{\frac{\theta}{n}} - 1}{(\theta - 1)e^{\theta(1 - \frac{k-1}{n})} + 1},$$

我们得到

$$\begin{aligned}
J_2 &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{(\mu_k^n(\theta_0) - \mu_k^n(\theta_n^*))y_{k-1}^n + (\gamma_k^n)^{1/2}(\theta_0)z_k}{(\gamma_k^n)^{1/2}(\theta_n^*)} \cdot \frac{\ddot{\mu}_k^n(\theta_n^*)\gamma_k^n(\theta_n^*) - 2\dot{\mu}_k^n(\theta_n^*)\dot{\gamma}_k^n(\theta_n^*)}{(\gamma_k^n)^{3/2}(\theta_n^*)} y_{k-1}^n \\
&= \frac{e^{\frac{\theta_0}{n}} - 1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\ddot{\mu}_k^n(\theta_n^*)\gamma_k^n(\theta_n^*) - 2\dot{\mu}_k^n(\theta_n^*)\dot{\gamma}_k^n(\theta_n^*)}{[(\theta_0 - 1)e^{\theta_0(1-\frac{k-1}{n})} + 1](\gamma_k^n)^2(\theta_n^*)} (y_{k-1}^n)^2 \\
&\quad - \frac{e^{\frac{\theta_n^*}{n}} - 1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\ddot{\mu}_k^n(\theta_n^*)\gamma_k^n(\theta_n^*) - 2\dot{\mu}_k^n(\theta_n^*)\dot{\gamma}_k^n(\theta_n^*)}{[(\theta_n^* - 1)e^{\theta_n^*(1-\frac{k-1}{n})} + 1](\gamma_k^n)^2(\theta_n^*)} (y_{k-1}^n)^2 \\
&\quad + \frac{(e^{\frac{\theta_0}{n}} - 1)^{1/2}}{n} \sum_{k=1}^n \frac{[(\theta_0 - 1)e^{\theta_0(1-\frac{k}{n})} + 1][\ddot{\mu}_k^n(\theta_n^*)\gamma_k^n(\theta_n^*) - 2\dot{\mu}_k^n(\theta_n^*)\dot{\gamma}_k^n(\theta_n^*)]}{\sqrt{2}\theta^{3/2}(\gamma_k^n)^2(\theta_n^*)} y_{k-1}^n z_k.
\end{aligned}$$

留意到当 $n \rightarrow \infty$ 时, $e^{\theta/n} - 1 = O(n^{-1})$; 在上式右端的三个级数中, $(y_{k-1}^n)^2$ 和 $y_{k-1}^n z_k$ 的系数在 $\theta_0, \theta_n^* \in \Theta$ 上有界. 因而与引理 3.1 的第二步证明同理, 右端的第一、二项几乎处处收敛到零. 再者, 与引理 3.2 的证明方法一样, 上式右端的第三项也是几乎处处收敛为零. 综上所述, $J_2 \xrightarrow{a.s.} 0$.

(2) 为方便, 记

$$B_k^n = \frac{\dot{\gamma}_k^n(\theta_n^*)\gamma_k^n(\theta_n^*) - 2(\dot{\gamma}_k^n)^2(\theta_n^*)}{2(\gamma_k^n)^2(\theta_n^*)}.$$

对所有 $1 \leq k \leq n$, B_k^n 在 $\theta_n^* \in \Theta$ 上有界. 随之,

$$\begin{aligned}
J_3 &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{B_k^n (\mu_k^n(\theta_0) - \mu_k^n(\theta_n^*))^2 (y_{k-1}^n)^2}{\gamma_k^n(\theta_n^*)} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{2B_k^n (\gamma_k^n)^{1/2} (\mu_k^n(\theta_0) - \mu_k^n(\theta_n^*)) y_{k-1}^n z_k}{\gamma_k^n(\theta_n^*)} \\
&\quad + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{B_k^n \gamma_k^n(\theta_0)}{\gamma_k^n(\theta_n^*)} (z_k^2 - 1) + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n B_k^n \left(\frac{\gamma_k^n(\theta_0)}{\gamma_k^n(\theta_n^*)} - 1 \right).
\end{aligned}$$

类似于 J_2 , 可以验证随着 $n \rightarrow \infty$, J_3 右端的第一、二项几乎处处收敛到零. 由于 $B_k^n \gamma_k^n(\theta_0)/\gamma_k^n(\theta_n^*)$ 在 $\theta_0, \theta_n^* \in \Theta$ 有界, $1 \leq k \leq n$, 采用引理 3.2 的证明方法, 第三项亦然. 至于 J_3 右端的最后一项, 不妨设 $\theta_n^* - \theta_0 = \delta$, 则

$$\begin{aligned}
\frac{\gamma_k^n(\theta_0)}{\gamma_k^n(\theta_n^*)} - 1 &= \frac{[(\theta_0 - 1)e^{\theta_0(1-\frac{k}{n})} + 1]^2 \cdot (\theta_n^*)^2}{[(\theta_n^* - 1)e^{\theta_n^*(1-\frac{k}{n})} + 1]^2 \cdot (\theta_0)^2} \cdot \frac{(e^{\frac{2\theta_0}{n}} - 1)/2\theta_0}{(e^{\frac{2\theta_n^*}{n}} - 1)/2\theta_n^*} - 1 \\
&= \frac{(e^{\frac{2\theta_0}{n}} - 1)/2\theta_0}{(e^{\frac{2\theta_n^*}{n}} - 1)/2\theta_n^*} \left(\frac{[(\theta_0 - 1)e^{\theta_0(1-\frac{k}{n})} + 1]^2 \cdot (\theta_n^*)^2}{[(\theta_n^* - 1)e^{\theta_n^*(1-\frac{k}{n})} + 1]^2 \cdot (\theta_0)^2} - 1 \right) + \frac{(e^{\frac{2\theta_0}{n}} - 1)/2\theta_0}{(e^{\frac{2\theta_n^*}{n}} - 1)/2\theta_n^*} - 1 \\
&= \frac{(e^{\frac{2\theta_0}{n}} - 1)/2\theta_0}{(e^{\frac{2\theta_n^*}{n}} - 1)/2\theta_n^*} \cdot \frac{[\theta_n^*(\theta_0 - 1)e^{\theta_0(1-\frac{k}{n})} + \theta_n^* + \theta_0(\theta_n^* - 1)e^{\theta_n^*(1-\frac{k}{n})} + \theta_0]}{[(\theta_n^* - 1)e^{\theta_n^*(1-\frac{k}{n})} + 1]^2 \cdot (\theta_0)^2} \\
&\quad \times [\theta_n^*(\theta_0 - 1)e^{\theta_0(1-\frac{k}{n})} + \theta_n^* - \theta_0(\theta_n^* - 1)e^{\theta_n^*(1-\frac{k}{n})} - \theta_0] \\
&\quad + \frac{(e^{\frac{2\theta_0}{n}} - 1)/2\theta_0}{(e^{\frac{2\theta_n^*}{n}} - 1)/2\theta_n^*} - 1 \\
&= \frac{(e^{\frac{2\theta_0}{n}} - 1)/2\theta_0}{(e^{\frac{2\theta_n^*}{n}} - 1)/2\theta_n^*} \cdot \frac{[\theta_n^*(\theta_0 - 1)e^{\theta_0(1-\frac{k}{n})} + \theta_n^* + \theta_0(\theta_n^* - 1)e^{\theta_n^*(1-\frac{k}{n})} + \theta_0]}{[(\theta_n^* - 1)e^{\theta_n^*(1-\frac{k}{n})} + 1]^2 \cdot (\theta_0)^2} \\
&\quad \times [\theta_0 e^{\theta_0(1-\frac{k}{n})} (1 - \theta_n^*) - \delta] \cdot (e^{\delta(1-\frac{k}{n})} - 1) + \frac{(e^{\frac{2\theta_0}{n}} - 1)/2\theta_0}{(e^{\frac{2\theta_n^*}{n}} - 1)/2\theta_n^*} - 1.
\end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n B_k^n \left(\frac{\gamma_k^n(\theta_0)}{\gamma_k^n(\theta_n^*)} - 1 \right) \right| &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{K}{n} \frac{(e^{\frac{2\theta_0}{n}} - 1)/2\theta_0}{(e^{\frac{2\theta_n^*}{n}} - 1)/2\theta_n^*} \sum_{k=1}^n (e^{\delta(1-\frac{k}{n})} - 1) \\ &\quad + \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left| \frac{(e^{\frac{2\theta_0}{n}} - 1)/2\theta_0}{(e^{\frac{2\theta_n^*}{n}} - 1)/2\theta_n^*} - 1 \right| \\ &= K \int_0^1 (e^{\delta(1-x)} - 1) dx \\ &= K \left(\frac{1}{\delta} (e^\delta - 1) - 1 \right) \triangleq K_\delta. \end{aligned}$$

归纳上述步骤可得, $\limsup_{n \rightarrow \infty} |J_3| \leq K_\delta$, a.s.

(3) 步骤 (1) 和 (2) 指出, $n^{-1}J_n(\theta_n^*) = -n^{-1}I_n(\theta_n^*) + J_2 + J_3$, 其中 $\lim_{n \rightarrow \infty} J_2 = 0$, $\limsup_{n \rightarrow \infty} |J_3| \leq K_\delta$, a.s. 如果 $n^{-1}I_n(\theta_0)$ 的极限存在, 则有

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|J_n(\theta_n^*) + I_n(\theta_0)|}{I_n(\theta_0)} &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|\frac{1}{n}J_n(\theta_n^*) + \frac{1}{n}I_n(\theta_0)|}{\frac{1}{n}I_n(\theta_0)} \\ &\leq \frac{\limsup_{n \rightarrow \infty} |\frac{1}{n}I_n(\theta_0) - \frac{1}{n}I_n(\theta_n^*)| + K_\delta}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}I_n(\theta_0)}, \quad \text{a.s.} \end{aligned}$$

事实上, 根据引理 3.1, 可得

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} I_n(\theta) &\stackrel{\text{a.s.}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{2[1 + (\theta - 1)(1 - \frac{k}{n})]}{\theta - 1 + e^{\theta(\frac{k}{n} - 1)}} + \frac{2}{n(1 - e^{-\frac{2\theta}{n}})} - \frac{3}{\theta} \right)^2 \\ &= 2 \int_0^1 \left(\frac{1 + (\theta - 1)x}{\theta - 1 + e^{-\theta x}} - \frac{1}{\theta} \right)^2 dx = C(\theta). \end{aligned}$$

记

$$c_k^n(\theta) = \frac{1}{2} \left(\frac{2[1 + (\theta - 1)(1 - \frac{k}{n})]}{\theta - 1 + e^{\theta(\frac{k}{n} - 1)}} + \frac{2}{n(1 - e^{-\frac{2\theta}{n}})} - \frac{3}{\theta} \right)^2,$$

那么一定存在与 n 和 k 独立的正数 K_1 , 令 $|c_k^n(\theta_n^*) - c_k^n(\theta_0)| \leq K_1\delta$, 从而使得

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^n c_k^n(\theta_n^*) - \sum_{k=1}^n c_k^n(\theta_0) \right| \leq K_1\delta.$$

最后, 我们必定能找到 $\delta > 0$ 使下式成立:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|J_n(\theta_n^*) + I_n(\theta_0)|}{I_n(\theta_0)} \leq \frac{K_\delta + K_1\delta}{C(\theta_0)} < 1, \quad \text{a.s.}$$

证毕. □

结合引理 3.1–3.3, 依据 (3.1) 和文献 [18] 的第 6.2 小节, 我们得出如下结论:

定理 3.1 在此模型中, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\hat{\theta}_n \xrightarrow{\text{a.s.}} \theta_0$, 即 MLE 具有强相合性.

3.2 MLE 的渐近正态性

基于前一小节, 下面进一步讨论 MLE 的渐近性质.

引理 3.4

$$I_n(\theta_0)^{-1/2} \sum_{k=1}^n \dot{I}_k^n(\theta_0) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1).$$

证明 在此证明过程中, $\theta = \theta_0$. 根据前文所得 $I_n(\theta) = O(n)$ 和 (3.2), 考虑

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \dot{I}_k^n(\theta) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \frac{\dot{\mu}_k^n}{\sqrt{\gamma_k^n}} y_{k-1}^n z_k + \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \frac{\dot{\gamma}_k^n}{2\gamma_k^n} (z_k^2 - 1).$$

于第一项而言, 通过 (2.4) 和 (2.3), 可以得到

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\mu}_k^n}{\sqrt{n}\sqrt{\gamma_k^n}} &= \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}(e^{\frac{2\theta}{n}} - 1)^{\frac{1}{2}}} \frac{\sqrt{2}\theta^{\frac{3}{2}}}{[(\theta - 1)e^{\theta(1-\frac{k}{n})} + e^{-\frac{\theta}{n}}][(\theta - 1)e^{\theta(1-\frac{k}{n})} + 1]} \\ &\quad - \frac{(e^{\frac{2\theta}{n}} - 1)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{n}} \frac{\sqrt{2}\theta^{\frac{3}{2}}[1 + (1 - \frac{k-1}{n})(\theta - 1)]e^{(1-\frac{k-1}{n})\theta}}{[(\theta - 1)e^{\theta(1-\frac{k-1}{n})} + 1]^2[(\theta - 1)e^{\theta(1-\frac{k}{n})} + 1]}. \end{aligned}$$

特别地,

$$\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}(e^{\frac{2\theta}{n}} - 1)^{\frac{1}{2}}} = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad \frac{(e^{\frac{2\theta}{n}} - 1)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{n}} = O\left(\frac{1}{n}\right),$$

以及它们对应的系数皆有上界. 因而, 当 n 趋于无穷大时,

$$\mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^n \frac{\dot{\mu}_k^n}{\sqrt{n}\sqrt{\gamma_k^n}} y_{k-1}^n z_k\right)^2 = \sum_{k=1}^n \frac{(\dot{\mu}_k^n)^2}{n\gamma_k^n} \mathbb{E}(y_{k-1}^n)^2 \rightarrow 0.$$

也就是说,

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \frac{\dot{\mu}_k^n}{\sqrt{\gamma_k^n}} y_{k-1}^n z_k \xrightarrow{L^2} 0.$$

另一方面, 运用 Taylor 定理对第二项的特征函数进行展开, 则对所有的 $t \in \mathbb{R}$, 有

$$\begin{aligned} \varphi_n(t) &= \mathbb{E} \exp \left\{ it \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \frac{\dot{\gamma}_k^n}{2\gamma_k^n} (z_k^2 - 1) \right\} = \prod_{k=1}^n \mathbb{E} \exp \left\{ it \frac{\dot{\gamma}_k^n}{2\sqrt{n}\gamma_k^n} (z_k^2 - 1) \right\} \\ &= \prod_{k=1}^n \left(1 + \mathbb{E} \frac{it\dot{\gamma}_k^n}{2\sqrt{n}\gamma_k^n} (z_k^2 - 1) + \mathbb{E} \frac{i^2 t^2 (\dot{\gamma}_k^n)^2}{8n(\gamma_k^n)^2} (z_k^2 - 1)^2 + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \\ &= \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{t^2 (\dot{\gamma}_k^n)^2}{4n(\gamma_k^n)^2} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right). \end{aligned}$$

得益于引理 3.1, 再次对 $\ln(1-x)$ 使用 Taylor 展开定理, 当 n 上升到无穷大时,

$$\begin{aligned} \ln \varphi_n(t) &= \sum_{k=1}^n \ln \left(1 - \frac{t^2 (\dot{\gamma}_k^n)^2}{4n(\gamma_k^n)^2} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) = \sum_{k=1}^n \left(-\frac{t^2 (\dot{\gamma}_k^n)^2}{4n(\gamma_k^n)^2} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \\ &= -\frac{t^2}{2} \sum_{k=1}^n \frac{(\dot{\gamma}_k^n)^2}{2n(\gamma_k^n)^2} + o(1) \rightarrow -\frac{t^2}{2} C(\theta), \end{aligned}$$

其中

$$C(\theta) = 2 \int_0^1 \left(\frac{1 + (\theta - 1)x}{\theta - 1 + e^{-\theta x}} - \frac{1}{\theta} \right)^2 dx.$$

换言之, $\varphi_n(t) \rightarrow \exp\{-\frac{1}{2}t^2 C(\theta)\}$, 这表示

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \frac{\dot{\gamma}_k^n}{2\gamma_k^n} (z_k^2 - 1) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, C(\theta)).$$

由 Slutsky 定理, 我们的结论是

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \dot{l}_k^n(\theta) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, C(\theta)).$$

最后, 又因为 $n^{-1}I_n(\theta) \xrightarrow{\text{a.s.}} C(\theta)$, 引理证毕. $\square$

引理 3.5 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $J_n(\theta_0)/I_n(\theta_0)$ 在区间 Θ 上几乎处处一致收敛到 -1 , 即

$$\frac{J_n(\theta_0)}{I_n(\theta_0)} \xrightarrow{\text{a.s.}} -1.$$

证明 只需要把引理 3.3 证明过程中的 θ_n^* 替代为 θ , 便能取得结论. 此处忽略具体证明过程. $\square$

结合定理 3.1、引理 3.4 和 3.5, 由文献 [18, 第 6.2 小节], 我们总结得到下面的定理:

定理 3.2 在此模型中, 随着 $n \rightarrow \infty$, $\text{MLE}\{\hat{\theta}_n\}_{n \geq 1}$ 满足

$$I_n(\theta_0)^{1/2}(\hat{\theta}_n - \theta_0) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1).$$

4 结论

本文探讨了一个线性的正倒向随机微分方程关于离散数据的参数估计问题. 可以看到, 第 2 节把原问题转化为一个扩散过程的参数估计问题. 在分析过程中, 与众多相关文献的扩散模型不同的是, 本模型涉及数组, 而非仅仅数列, 这使得数列的中心极限定理和鞅收敛定理等不能直接使用. 尽管如此, 我们证实了所得的最大似然估计量具有强相合性和渐近正态性.

受本文思路的启发, 在未来的工作中, 对于一般的模型, 我们将采取“四步法” (four-step scheme, 参见文献 [19]) 先推导 Y_t 关于 X_t 的表达式, 即 $Y_t = \phi(t, X_t)$, 设法找出估计量, 最后具体讨论其收敛性质.

致谢 作者非常感谢审稿人的宝贵建议.

参考文献

- 1 Dacunha-Castelle D, Florens-Zmirou D. Estimation of the coefficients of a diffusion from discrete observations. *Stochastics*, 1986, 19: 263–284
- 2 Lo A W. Maximum likelihood estimation of generalized Itô processes with discretely sampled data. *Econom Theory*, 1988, 4: 231–247
- 3 Pedersen A R. A new approach to maximum likelihood estimation for stochastic differential equations based on discrete observations. *Scand J Statist*, 1995, 22: 55–71
- 4 Aït-Sahalia Y. Maximum likelihood estimation of discretely sampled diffusions: A closed-form approximation approach. *Econometrica*, 2002, 70: 223–262
- 5 Hansen L P. Large sample properties of generalized method of moments estimators. *Econometrica*, 1982, 50: 1029–1054
- 6 Bibby B M, Sørensen M. Martingale estimation functions for discretely observed diffusion processes. *Bernoulli*, 1995, 1: 17–39
- 7 Djouadi S M, Maroulas V, Pan X, et al. Consistency and asymptotics of a Poisson intensity least-squares estimator for partially observed jump-diffusion processes. *Statist Probab Lett*, 2017, 123: 8–16
- 8 Fan J. A selective overview of nonparametric methods in financial econometrics. *Statist Sci*, 2005, 20: 317–337

- 9 Bismut J M. Conjugate convex functions in optimal stochastic control. *J Math Anal Appl*, 1973, 44: 384–404
- 10 Pardoux E, Peng S G. Adapted solution of a backward stochastic differential equation. *Systems Control Lett*, 1990, 14: 55–61
- 11 Su Y, Lin L. Semi-parametric estimation for forward-backward stochastic differential equations. *Comm Statist Theory Methods*, 2009, 38: 1759–1775
- 12 Chen X, Lin L. Nonparametric estimation for FBSDEs models with applications in finance. *Comm Statist Theory Methods*, 2010, 39: 2492–2514
- 13 Yong J, Zhou X Y. *Stochastic Controls: Hamiltonian Systems and HJB Equations*. Heidelberg: Springer-Verlag, 1999, 347–354
- 14 Jimenez J C, Ozaki T. An approximate innovation method for the estimation of diffusion processes from discrete data. *J Time Ser Anal*, 2006, 27: 77–97
- 15 Schmetterer L. On the Asymptotic Efficiency of Estimates. London: John Wiley and Sons, 1966, 301–317
- 16 Rao C R. Criteria of estimation in large samples. *Sankhyā Ser A*, 1963, 25: 189–206
- 17 Rohatgi V K, Saleh A K M E. *An Introduction to Probability and Statistics*, 2nd ed. New York: John Wiley and Sons, 2000, 265–266
- 18 Hall P, Heyde C C. *Martingale Limit Theory and its Application*. New York: Academic Press, 1980, 155–159
- 19 Ma J, Protter P, Yong J. Solving forward-backward stochastic differential equations explicitly—A four step scheme. *Probab Theory Related Fields*, 1994, 98: 339–359

Parameter estimation on forward-backward stochastic differential equations

Qizhu Liang & Jie Xiong

Abstract This work aims at parameter estimation for discretely observed forward-backward stochastic differential equations. As the first step, we consider a linear model in this paper. The relationship between the forward and backward state processes is derived and hence the likelihood function with respect to discrete observations is determined. The consistency and asymptotic normality of the maximum likelihood estimator are discussed in details.

Keywords forward-backward stochastic differential equation, maximum likelihood estimation, discrete observations

MSC(2010) 60J60, 62F12

doi: 10.1360/N012017-00256