球几何区域上 Helmholtz 传输特征值问题 有效的谱 Galerkin 逼近

谭婷, 安静*

贵州师范大学数学科学学院, 贵阳 550025

E-mail: yezitangting@163.com, aj154@163.com

收稿日期: 2017-10-23; 接受日期: 2018-06-12; 网络出版日期: 2018-11-09; * 通信作者

贵州省科学技术基金 (批准号: 黔科合基础 [2017]1124) 和国家自然科学基金 (批准号: 11661022) 资助项目

摘要 本文提出球几何区域上 Helmholtz 传输特征值问题基于 Legendre-Galerkin 逼近的一种有效的谱方法. 首先, 通过球坐标变换和球调和函数展开, 将原问题化为一系列等价的一维广义特征值问题. 然后, 针对每个一维广义特征值问题建立相应的弱形式和离散格式, 并利用紧算子的谱理论证明特征值和特征函数的误差估计. 特别地, 对于实心的球形区域, 需要克服由球坐标变换引入的极点奇性这一困难. 因此, 本文推导了相应的极条件, 并根据极条件引入带权的 Sobolev 空间, 从而建立了每个一维广义特征值问题相应的弱形式和离散格式. 最后给出一些数值例子, 数值结果表明算法的有效性和理论结果的正确性.

关键词 Helmholtz 传输特征值 Legendre-Galerkin 逼近 极条件 误差估计 球几何

MSC (2010) 主题分类 65N25, 65N30

1 引言

内部传输问题首先在文献 [1] 中引入, 它在声波的逆传输理论中扮演着重要的角色 (参见文献 [2]). 由于传输特征值能够被可测量的远场数据所确定 (参见文献 [3, 4]), 因此, 传输特征值可以用来估计散射物体材料的性质 (参见文献 [2, 4–8]). 有界非均匀介质 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$) 中声波散射的内部传输特征值问题为: 寻找 $k \in \mathbb{C}$, $\psi, \psi_0 \in L^2(\Omega)$, $\psi - \psi_0 \in H^2(\Omega)$, 使得

$$\Delta\psi + k^2 n(x)\psi = 0, \quad \text{在 } \Omega \text{ 内}, \quad (1.1)$$

$$\Delta\psi_0 + k^2 \psi_0 = 0, \quad \text{在 } \Omega \text{ 内}, \quad (1.2)$$

$$\psi - \psi_0 = 0, \quad \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}, \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\nu} - \frac{\partial\psi_0}{\partial\nu} = 0, \quad \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}, \quad (1.4)$$

英文引用格式: Tan T, An J. An efficient spectral Galerkin approximation to a Helmholtz transmission eigenvalue problem in spherical geometries (in Chinese). Sci Sin Math, 2019, 49: 731–750, doi: 10.1360/SCM-2017-0722

其中 ν 为边界 $\partial\Omega$ 的单位外法向量, $n(x) > 0$ 为折射率. 若存在 $k \neq 0$, 使得问题 (1.1)–(1.4) 存在一对非平凡解 (ψ, ψ_0) , 则称之为传输特征值^[9, 10]. 内部传输问题是一个有界区域上的边界值问题, 它不能被偏微分方程中一些已有的理论所覆盖, 但它在逆散射理论的唯一性和重构方面具有重要的理论意义. 很多学者研究了传输特征值的存在性, 因为它可以用来探测折射率 $n(x)$ 的上下界^[3, 6, 11–13]. 近年来, 人们致力于发展一些有效的数值方法来计算传输特征值. 文献 [9] 首先提出了三种有限元方法, 包括 Agyris、连续和混合有限元方法. 随后, 各种各样的有限元方法被提出 (参见文献 [10, 14–19]). 然而, 它们都是基于低阶的有限元方法. 因此, 如果要获得高精度的数值解, 将花费大量的计算时间和内存容量, 特别是对于一些特殊的区域, 如三维球形区域. 另外, 一些谱方法也相继被提出 (参见文献 [20–23]). 特别地, 文献 [20] 提出了一种有效的谱元方法来计算二维径向分层介质中的 Helmholtz 传输特征值问题, 而在文献 [20] 中采用的方法是基于二阶格式的, 并且近似特征值的误差估计没有直接地给出. 虽然已经有很多数值方法计算传输特征值问题, 但据我们所知, 关于球几何区域上 Helmholtz 传输特征值问题的谱 Galerkin 逼近的报道很少.

本文的目的是提出球几何区域上 Helmholtz 传输特征值问题基于 Legendre-Galerkin 逼近的一种有效的谱方法. 首先, 通过球坐标变换和球调和函数展开, 将原问题化为一系列等价的一维广义特征值问题. 然后, 针对每个一维广义特征值问题建立了相应的弱形式和离散格式, 并利用紧算子的谱理论证明了特征值和特征函数的误差估计. 特别地, 对于实心的球形区域, 需要克服由球坐标变换引入的极点奇性这一困难. 因此, 我们推导了相应的极条件, 并根据极条件引入了带权的 Sobolev 空间, 从而建立了每个一维广义特征值问题相应的弱形式和离散格式. 最后, 我们给出了一些数值例子, 数值结果表明了算法的有效性和理论结果的正确性.

本文第 2 节推导降维格式和相应的广义特征值问题. 第 3 节推导逼近特征值和特征函数的误差估计. 第 4 节详细地给出算法的有效实现. 第 5 节给出一些数值例子.

2 降维格式及相应的广义特征值问题

定义 $H_0^2(\Omega) = \{u \in H^2(\Omega) : u|_{\partial\Omega} = 0, \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial\Omega} = 0\}$. 令 $u = \psi - \psi_0 \in H_0^2(\Omega)$. 由 (1.1) 和 (1.2) 可得

$$(\Delta + k^2)u = -k^2(n(x) - 1)\psi. \quad (2.1)$$

将方程 (2.1) 的两边同时除以 $n(x) - 1$, 再将算子 $\Delta + k^2n(x)$ 分别作用于方程两边, 可得到

$$(\Delta + k^2n(x))\frac{1}{n(x) - 1}(\Delta + k^2)u = 0,$$

则 (1.1)–(1.4) 等价于下面的 4 阶特征值问题:

$$(\Delta + k^2n(x))\frac{1}{n(x) - 1}(\Delta + k^2)u = 0, \quad \text{在 } \Omega \text{ 内}, \quad (2.2)$$

$$u|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial\Omega} = 0. \quad (2.3)$$

因此, 方程 (2.2) 和 (2.3) 的弱形式为: 寻找 $(k^2 \neq 0, u) \in \mathbb{C} \times H_0^2(\Omega)$, 使得

$$\int_{\Omega} \frac{1}{n(x) - 1}(\Delta u + k^2u)(\Delta \bar{v} + k^2n(x)\bar{v})dx = 0, \quad \forall v \in H_0^2(\Omega). \quad (2.4)$$

本文将专注于 Ω 为球形区域的情形, 即 $\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : R_1 < |\mathbf{x}| < R_2\}$, 其中

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3), \quad |\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

由球坐标变换有

$$x_1 = r \sin \theta \cos \phi, \quad x_2 = r \sin \theta \sin \phi, \quad x_3 = r \cos \theta.$$

定义微分算子

$$Lv = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \Delta_S v, \quad (2.5)$$

其中

$$\Delta_S = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}.$$

令

$$\begin{aligned} \tilde{u}(r, \theta, \phi) &= u(r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta), \\ \tilde{v}(r, \theta, \phi) &= v(r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta), \\ \tilde{n}(r, \theta, \phi) &= n(r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta), \end{aligned}$$

则 (2.4) 可化为

$$\int_{R_1}^{R_2} r^2 dr \int_S \frac{1}{\tilde{n} - 1} (L\tilde{u} + k^2 \tilde{u})(L\tilde{v} + k^2 \tilde{n} \tilde{v}) dS = 0, \quad (2.6)$$

其中 S 表示单位球面.

由文献 [24] 可知, 球调和函数 $\{Y_l^m\}$ 是算子 Δ_S 的特征函数, 即

$$\Delta_S Y_l^m = -l(l+1)Y_l^m, \quad l \geq 0, \quad |m| \leq l, \quad (2.7)$$

并且构成了 $L^2(S)$ 的一组正交基函数, 即

$$\int_S Y_l^m Y_{l'}^{m'} dS = \delta_{ll'} \delta_{mm'}. \quad (2.8)$$

令

$$\tilde{u}(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{|m|=0}^l u_l^m Y_l^m, \quad \tilde{v}(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{|m|=0}^l v_l^m Y_l^m.$$

假设折射率 $n(x)$ 是一个径向函数, 即 $\tilde{n}(r, \theta, \phi) = \tilde{n}_0(r)$, 则由 (2.7) 和球调和函数 $\{Y_l^m\}$ 的正交性 (2.8) 可知, (2.6) 可化为一系列的等价的一维特征值问题:

$$\int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{\tilde{n}_0 - 1} (\tilde{L}_l + k_l^2) u_l^m (\tilde{L}_l + k_l^2 \tilde{n}_0) \bar{v}_l^m r^2 dr = 0, \quad l \geq 0, \quad |m| \leq l, \quad (2.9)$$

其中

$$\tilde{L}_l v = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial v}{\partial r} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} v.$$

令

$$r = \frac{R_2 - R_1}{2}t + \frac{R_1 + R_2}{2}, \quad \psi_l^m(t) = u_l^m(r), \quad \phi_l^m(t) = v_l^m(r), \quad n_0(t) = \tilde{n}_0(r),$$

$$L_l v = \frac{1}{(\frac{R_2 - R_1}{2}t + \frac{R_1 + R_2}{2})^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\left(\frac{R_2 - R_1}{2}t + \frac{R_1 + R_2}{2} \right)^2 \frac{\partial v}{\partial t} \right) \left(\frac{2}{R_2 - R_1} \right)^2 - \frac{l(l+1)}{(\frac{R_2 - R_1}{2}t + \frac{R_1 + R_2}{2})^2} v,$$

则 (2.9) 可化为

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{n_0 - 1} (L_l + k_l^2) \psi_l^m (L_l + k_l^2 n_0) \bar{\phi}_l^m \left(\frac{R_2 - R_1}{2}t + \frac{R_1 + R_2}{2} \right)^2 dt = 0. \quad (2.10)$$

首先, 考虑 $R_1 = 0$ 的情形. 由于球坐标变换引入了极点奇性, 为了 (2.10) 解的适定性, ψ_l^m 的极条件 (ϕ_l^m 的极条件类似) 应该被强加, 即

$$l(l+1)\psi_l^m(-1) = 0. \quad (2.11)$$

定义带权的 Sobolev 空间:

$$H_{0,l}^2(I) := \left\{ u : \int_I |L_l u|^2 (t+1)^2 dt < \infty, l(l+1)u(-1) = u(1) = u'(1) = 0 \right\}$$

和相应的范数:

$$\|u\|_{2,l,I} = \left(\int_I |L_l u|^2 (t+1)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.12)$$

其中 $I = (-1, 1)$, 则 (2.10) 等价的弱形式为: 寻找 $(k_l^2, \psi_l^m \neq 0) \in \mathbb{C} \times H_{0,l}^2(I)$, 使得

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{n_0 - 1} (L_l + k_l^2) \psi_l^m (L_l + k_l^2 n_0) \bar{\phi}_l^m (t+1)^2 dt = 0, \quad \forall \phi_l^m \in H_{0,l}^2(I). \quad (2.13)$$

当 $n_0 > 1$ 时, 定义

$$A_{\tau_l}(\psi_l^m, \phi_l^m) := \int_I \frac{1}{n_0 - 1} (L_l + \tau_l) \psi_l^m (L_l + \tau_l) \bar{\phi}_l^m (t+1)^2 dt + \tau_l^2 \int_I \psi_l^m \bar{\phi}_l^m (t+1)^2 dt;$$

当 $n_0 < 1$ 时, 定义

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{\tau_l}(\psi_l^m, \phi_l^m) &:= \int_I \frac{1}{1 - n_0} (L_l + \tau_l n_0) \psi_l^m (L_l + \tau_l n_0) \bar{\phi}_l^m (t+1)^2 dt + \tau_l^2 \int_I n_0 \psi_l^m \bar{\phi}_l^m (t+1)^2 dt \\ &= \int_I \frac{n_0}{1 - n_0} (L_l + \tau_l) \psi_l^m (L_l + \tau_l) \bar{\phi}_l^m (t+1)^2 dt + \int_I L_l \psi_l^m L_l \bar{\phi}_l^m (t+1)^2 dt, \end{aligned}$$

其中 $\tau_l = k_l^2$. 令

$$B(\psi_l^m, \phi_l^m) := \frac{4}{R_2^2} \int_I [(\psi_l^m)'(\bar{\phi}_l^m)'(t+1)^2 + l(l+1)\psi_l^m \bar{\phi}_l^m] dt,$$

则 (2.13) 可重写为

$$A_{\tau_l}(\psi_l^m, \phi_l^m) - \tau_l B(\psi_l^m, \phi_l^m) = 0, \quad \forall \phi_l^m \in H_{0,l}^2(I), \quad (2.14)$$

或者

$$\tilde{A}_{\tau_l}(\psi_l^m, \phi_l^m) - \tau_l B(\psi_l^m, \phi_l^m) = 0, \quad \forall \phi_l^m \in H_{0,l}^2(I). \quad (2.15)$$

(2.13) 相应的广义特征值问题为: 寻找 $(\lambda(\tau_l), \psi_l^m \neq 0) \in \mathbb{C} \times H_{0,l}^2(I)$, 使得

$$A_{\tau_l}(\psi_l^m, \phi_l^m) - \lambda(\tau_l) B(\psi_l^m, \phi_l^m) = 0, \quad \forall \phi_l^m \in H_{0,l}^2(I), \quad (2.16)$$

或者

$$\tilde{A}_{\tau_l}(\psi_l^m, \phi_l^m) - \lambda(\tau_l) B(\psi_l^m, \phi_l^m) = 0, \quad \forall \phi_l^m \in H_{0,l}^2(I), \quad (2.17)$$

其中 $\lambda(\tau_l)$ 为 τ_l 的连续函数. 由 (2.14) 和 (2.15) 可知, 传输特征值为 $f(\tau_l) = \lambda(\tau_l) - \tau_l = 0$ 的根. 令 P_N 为次数小于等于 N 的多项式空间, $X_N(l) = P_N \cap H_{0,l}^2(I)$, 则 (2.16) 的离散格式为: 寻找 $(\lambda_N(\tau_l), \psi_{lN}^m) \in \mathbb{C} \times X_N(l)$, 使得

$$A_{\tau_l}(\psi_{lN}^m, \phi_{lN}^m) - \lambda_N(\tau_l) B(\psi_{lN}^m, \phi_{lN}^m) = 0, \quad \forall \phi_{lN}^m \in X_N(l). \quad (2.18)$$

(2.17) 的离散格式为: 寻找 $(\lambda_N(\tau_l), \psi_{lN}^m) \in \mathbb{C} \times X_N(l)$, 使得

$$\tilde{A}_{\tau_l}(\psi_{lN}^m, \phi_{lN}^m) - \lambda_N(\tau_l) B(\psi_{lN}^m, \phi_{lN}^m) = 0, \quad \forall \phi_{lN}^m \in X_N(l). \quad (2.19)$$

当 $R_1 > 0$ 时, 定义通常的 Sobolev 空间:

$$H_0^2(I) = \{u : u, u', u'' \in L^2(I), u(\pm 1) = u'(\pm 1) = 0\}$$

和相应的范数:

$$\|u\|_{2,I} = \left(\int_I u^2 + (u')^2 + (u'')^2 dt \right)^{\frac{1}{2}},$$

则 (2.10) 的弱形式为: 寻找 $(k_l^2, \psi_l^m \neq 0) \in \mathbb{C} \times H_0^2(I)$, 使得

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{n_0 - 1} (L_l + k_l^2) \psi_l^m (L_l + k_l^2 n_0) \bar{\phi}_l^m r^2 dt = 0, \quad \forall \phi_l^m \in H_0^2(I). \quad (2.20)$$

类似地, 当 $n_0 > 1$ 时, 定义

$$A_{\tau_l}(\psi_l^m, \phi_l^m) := \int_I \frac{1}{n_0 - 1} (L_l + \tau_l) \psi_l^m (L_l + \tau_l) \bar{\phi}_l^m r^2 dt + \tau_l^2 \int_I \psi_l^m \bar{\phi}_l^m r^2 dt;$$

当 $n_0 < 1$ 时, 定义

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{\tau_l}(\psi_l^m, \phi_l^m) &:= \int_I \frac{1}{1 - n_0} (L_l + \tau_l n_0) \psi_l^m (L_l + \tau_l n_0) \bar{\phi}_l^m r^2 dt + \tau_l^2 \int_I n_0 \psi_l^m \bar{\phi}_l^m r^2 dt \\ &= \int_I \frac{n_0}{1 - n_0} (L_l + \tau_l) \psi_l^m (L_l + \tau_l) \bar{\phi}_l^m r^2 dt + \int_I L_l \psi_l^m L_l \bar{\phi}_l^m r^2 dt. \end{aligned}$$

令

$$B(\psi_l^m, \phi_l^m) := \int_I \frac{4}{(R_2 - R_1)^2} r^2 (\psi_l^m)' (\bar{\phi}_l^m)' + l(l+1) \psi_l^m \bar{\phi}_l^m dt,$$

则 (2.20) 可重写为

$$A_{\tau_l}(\psi_l^m, \phi_l^m) - \tau_l B(\psi_l^m, \phi_l^m) = 0, \quad \forall \phi_l^m \in H_0^2(I), \quad (2.21)$$

或者

$$\tilde{A}_{\tau_l}(\psi_l^m, \phi_l^m) - \tau_l B(\psi_l^m, \phi_l^m) = 0, \quad \forall \phi_l^m \in H_0^2(I). \quad (2.22)$$

(2.20) 相应的广义特征值问题为: 寻找 $(\lambda(\tau_l), \psi_l^m \neq 0) \in \mathbb{C} \times H_0^2(I)$, 使得

$$A_{\tau_l}(\psi_l^m, \phi_l^m) - \lambda(\tau_l) B(\psi_l^m, \phi_l^m), \quad \forall \phi_l^m \in H_0^2(I), \quad (2.23)$$

或者

$$\tilde{A}_{\tau_l}(\psi_l^m, \phi_l^m) - \lambda(\tau_l) B(\psi_l^m, \phi_l^m) = 0, \quad \forall \phi_l^m \in H_0^2(I), \quad (2.24)$$

其中 $\lambda(\tau_l)$ 为 τ_l 的连续函数. 由 (2.21) 和 (2.22) 可知, 传输特征值为 $f(\tau_l) = \lambda(\tau_l) - \tau_l = 0$ 的根.

令 $\mathcal{X}_N = P_N \cap H_0^2(I)$, 则 (2.23) 的离散格式为: 寻找 $(\lambda_N(\tau_l), \psi_{lN}^m) \in \mathbb{C} \times \mathcal{X}_N$, 使得

$$A_{\tau_l}(\psi_{lN}^m, \phi_{lN}^m) - \lambda_N(\tau_l) B(\psi_{lN}^m, \phi_{lN}^m) = 0, \quad \forall \phi_{lN}^m \in \mathcal{X}_N. \quad (2.25)$$

(2.24) 的离散格式为: 寻找 $(\lambda_N(\tau_l), \psi_{lN}^m) \in \mathbb{C} \times \mathcal{X}_N$, 使得

$$\tilde{A}_{\tau_l}(\psi_{lN}^m, \phi_{lN}^m) - \lambda_N(\tau_l) B(\psi_{lN}^m, \phi_{lN}^m) = 0, \quad \forall \phi_{lN}^m \in \mathcal{X}_N. \quad (2.26)$$

注 2.1 本文仅仅考虑了折射率 $n(x)$ 是一个径向函数的情形, 即 $\tilde{n}(r, \theta, \phi) = \tilde{n}_0(r)$. 事实上, 对于一般的情形也能够类似地处理. 例如, 对于 $n(x)$ 能够用一些球调和函数展开的情形, 即

$$n(x) = \sum_{lm} b_{lm}(r) Y_l^m,$$

其中 l 和 m 为一些较小的正整数. 首先, 我们对弱形式 (2.6) 中的 $\tilde{u}(r, \theta, \phi)$ 和 $\tilde{v}(r, \theta, \phi)$ 利用球调和函数展开, 即

$$\tilde{u}(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{|m|=0}^l u_l^m Y_l^m, \quad \tilde{v}(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{|m|=0}^l v_l^m Y_l^m.$$

然后取

$$\tilde{u}_N^M(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^M \sum_{|m|=0}^l u_{Nl}^m Y_l^m \quad \text{和} \quad \tilde{v}_N^M(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^M \sum_{|m|=0}^l v_{Nl}^m Y_l^m \quad (2.27)$$

分别为 $\tilde{u}(r, \theta, \phi)$ 和 $\tilde{v}(r, \theta, \phi)$ 的逼近解, 将表达式 (2.27) 代入 (2.6) 中, 则可得到弱形式 (2.6) 相应的离散格式. 通过选择适当的基函数和利用数值积分, 将离散格式转化为相应的矩阵形式. 注意到, 在计算质量矩阵和刚度矩阵元素的过程中, 在 r 和 θ 方向, 分别通过变换 $r = \frac{R_2 - R_1}{2}t + \frac{R_1 + R_2}{2}$ 和 $\theta = \frac{s+1}{2}\pi$ 后, 再利用 Legendre-Gauss-Lobatto 积分进行计算. 由于 ϕ 是 2π 周期的, 在 ϕ 方向可利用 Fourier 数值积分进行计算. 最后, 通过利用 MATLAB 软件编程, 便可计算出逼近特征值和相应的特征向量.

3 误差估计

为了简洁起见, 我们仅对 $R_1 > 0$ 的情形给出误差分析. 对于 $R_1 = 0$ 的情形能够类似地推导. 我们用 $a \lesssim b$ 表示 $a \leq Cb$, 其中 C 为独立于 N 的正常数, 在不同的地方值不一定相同.

引理 3.1 对于 $u \in H_0^2(I)$, 下列不等式成立:

$$\|u\|_{2,I} \lesssim \left(\int_I |L_l u|^2 r^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \lesssim \|u\|_{2,I}.$$

证明 由于

$$\begin{aligned} \int_I |L_l u|^2 r^2 dt &= \int_I \left| \left(\frac{2}{R_2 - R_1} \right)^2 r u_{tt} + 2 \frac{2}{R_2 - R_1} u_t - \frac{l(l+1)}{r} u \right|^2 dt \\ &= \int_I \left| \left(\frac{2}{R_2 - R_1} \right)^4 r^2 |u_{tt}|^2 + 2 \left(\frac{2}{R_2 - R_1} \right)^2 (l(l+1) + 1) |u_t|^2 \right. \\ &\quad \left. + l(l+1)(2 + l(l+1)) \frac{|u|^2}{r^2} \right| dt, \end{aligned}$$

则由 $0 < R_1 < r < R_2$ 和 Poincaré 不等式可得到 $\|u\|_{2,I} \lesssim (\int_I |L_l u|^2 r^2 dt)^{\frac{1}{2}} \lesssim \|u\|_{2,I}$. $\square$

定理 3.1 令 $n_0 \in L^\infty(I)$ 满足

$$1 + \alpha \leq n_{0*} \leq n_0 \leq n_0^* < \infty \quad \text{或者} \quad 0 < n_{0*} \leq n_0 \leq n_0^* < 1 - \beta,$$

其中 α 和 β 为正的常数, 则 A_{τ_l} (或 $\tilde{A}_{\tau_l}$) 为定义在 $H_0^2(I) \times H_0^2(I)$ 上的正定连续的双线性形式, 即

$$A_{\tau_l}(u, u) \gtrsim \|u\|_{2,I}^2 \quad \text{或} \quad \tilde{A}_{\tau_l}(u, u) \gtrsim \|u\|_{2,I}^2, \quad (3.1)$$

$$|A_{\tau_l}(u, v)| \lesssim \|u\|_{2,I} \|v\|_{2,I} \quad \text{或} \quad |\tilde{A}_{\tau_l}(u, v)| \lesssim \|u\|_{2,I} \|v\|_{2,I}, \quad (3.2)$$

其中 $n_{0*} = \inf_I(n_0)$, $n_0^* = \sup_I(n_0)$.

证明 我们仅对 $1 + \alpha \leq n_{0*} \leq n_0 \leq n_0^* < \infty$ 的情形给出证明. 对于 $0 < n_{0*} \leq n_0 \leq n_0^* < 1 - \beta$ 的情形能够类似地推导. 由引理 3.1, 有

$$\begin{aligned} A_{\tau_l}(u, u) &= \int_I \frac{1}{n_0 - 1} |(L_l + \tau_l)u|^2 r^2 dt + \tau_l^2 \int_I |u|^2 r^2 dt \\ &\geq \frac{1}{n_0^* - 1} \int_I |(L_l + \tau_l)u|^2 r^2 dt + \tau_l^2 \int_I |u|^2 r^2 dt \\ &\geq \frac{1}{n_0^* - 1} \left(\int_I |L_l u|^2 r^2 dt - 2\tau_l \left(\int_I |L_l u|^2 r^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_I |u|^2 r^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} + \tau_l^2 \int_I |u|^2 r^2 dt \right) \\ &\quad + \tau_l^2 \int_I |u|^2 r^2 dt \\ &= \varepsilon \left(\tau_l \left(\int_I |u|^2 r^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{\varepsilon(n_0^* - 1)} \left(\int_I |L_l u|^2 r^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2 \\ &\quad + \left(\frac{1}{n_0^* - 1} - \frac{1}{\varepsilon(n_0^* - 1)^2} \right) \int_I |L_l u|^2 r^2 dt + \left(1 + \frac{1}{n_0^* - 1} - \varepsilon \right) (\tau_l)^2 \int_I |u|^2 r^2 dt \\ &\geq \left(\frac{1}{n_0^* - 1} - \frac{1}{\varepsilon(n_0^* - 1)^2} \right) \int_I |L_l u|^2 r^2 dt \gtrsim \|u\|_{2,I}^2, \end{aligned}$$

其中 $\frac{1}{n_0^*-1} < \varepsilon < \frac{1}{n_0^*-1} + 1$;

$$\begin{aligned}
 |A_{\tau_l}(u, v)| &= \left| \int_I \frac{1}{n_0 - 1} (L_l + \tau_l) u (L_l + \tau_l) \bar{v} r^2 dt + \tau_l^2 \int_I u \bar{v} r^2 dt \right| \\
 &= \left| \int_I \frac{1}{n_0 - 1} L_l u L_l \bar{v} r^2 dt + \tau_l \int_I \frac{1}{n_0 - 1} u L_l \bar{v} r^2 dt + \tau_l \int_I \frac{1}{n_0 - 1} L_l u \bar{v} r^2 dt \right. \\
 &\quad \left. + \tau_l^2 \int_I \frac{1}{n_0 - 1} u \bar{v} r^2 dt + \tau_l^2 \int_I u \bar{v} r^2 dt \right| \\
 &\leq \frac{1}{\alpha} \left(\int_I |L_l u|^2 r^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_I |L_l v|^2 r^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\alpha} \tau_l \left(\int_I |L_l u|^2 r^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_I |v|^2 r^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\quad + \frac{1}{\alpha} \tau_l \left(\int_I |u|^2 r^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_I |L_l v|^2 r^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\alpha} \tau_l^2 \left(\int_I |u|^2 r^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_I |v|^2 r^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\quad + \tau_l^2 \left(\int_I |u|^2 r^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_I |v|^2 r^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{2}{\alpha} \tau_l + \tau_l^2 \left(\frac{1}{\alpha} + 1 \right) \right) \left(\int_I |L_l u|^2 r^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_I |L_l v|^2 r^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\lesssim \|u\|_{2,I} \|v\|_{2,I}.
 \end{aligned}$$

证毕. □

类似于定理 3.1 的证明, 我们下面的定理:

定理 3.2 $B(u, v)$ 为定义在 $H_0^1(I) \times H_0^1(I)$ 上的连续正定的双线性形式, 即

$$\begin{aligned}
 |B(u, v)| &\lesssim \|u\|_{1,I} \|v\|_{1,I}, \\
 B(u, u) &\gtrsim \|u\|_{1,I}^2,
 \end{aligned}$$

其中 $H_0^1(I) = \{u : u, u' \in L^2(I), u(\pm 1) = 0\}$ 表示通常的 Sobolev 空间, 相应的范数为

$$\|u\|_{1,I} = \left(\int_I u^2 + (u')^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

由定理 3.1、3.2 和 Lax-Milgram 引理, 我们可以定义算子 $T : H_0^2(I) \rightarrow H_0^2(I)$, 使得

$$A_{\tau_l}(T\psi_l^m, \phi_l^m) = B(\psi_l^m, \phi_l^m), \quad \forall \phi_l^m \in H_0^2(I). \quad (3.3)$$

由 $H_0^2(I)$ 紧嵌入 $H_0^1(I)$ 可知, T 是一个自共轭的紧算子. 因此, (2.23) 等价的算子形式为

$$T\psi_l^m = \frac{1}{\lambda(\tau_l)} \psi_l^m. \quad (3.4)$$

类似地, 由定理 3.1、3.2 和 Lax-Milgram 引理, 我们可以定义算子 $T_N : H_0^2(I) \rightarrow \mathcal{X}_N$, 使得

$$A_{\tau_l}(T_N \psi_l^m, \phi_{lN}^m) = B(\psi_l^m, \phi_{lN}^m), \quad \forall \phi_{lN}^m \in \mathcal{X}_N. \quad (3.5)$$

显然, $T_N : H_0^2(I) \rightarrow \mathcal{X}_N$ 是一个有限秩算子. 因此, (2.25) 等价的算子形式为

$$T\psi_{lN}^m = \frac{1}{\lambda_N(\tau_l)} \psi_{lN}^m. \quad (3.6)$$

定义投影算子 $\Pi_N^{2,0} : H_0^2(I) \rightarrow \mathcal{X}_N$, 使得

$$A_{\tau_l}(\psi_l^m - \Pi_N^{2,0} \psi_l^m, \phi_{lN}^m) = 0, \quad \forall \psi_l^m \in H_0^2(I), \quad \phi_{lN}^m \in \mathcal{X}_N. \quad (3.7)$$

引理 3.2 令 T 和 T_N 分别为由 (3.3) 和 (3.5) 定义的有界线性算子, 则有

$$T_N = \Pi_N^{2,0} T.$$

证明 对于 $\forall \psi_l^m \in H_0^2(I)$, $\phi_{lN}^m \in \mathcal{X}_N$, 有

$$A_{\tau_l}(\Pi_N^{2,0} T \psi_l^m - T_N \psi_l^m, \phi_{lN}^m) = A_{\tau_l}(\Pi_N^{2,0} T \psi_l^m - T \psi_l^m, \phi_{lN}^m) + A_{\tau_l}(T \psi_l^m - T_N \psi_l^m, \phi_{lN}^m) = 0. \quad (3.8)$$

在 (3.8) 中取 $\phi_{lN}^m = \Pi_N^{2,0} T \psi_l^m - T_N \psi_l^m$, 可得

$$A_{\tau_l}(\Pi_N^{2,0} T \psi_l^m - T_N \psi_l^m, \Pi_N^{2,0} T \psi_l^m - T_N \psi_l^m) = 0.$$

由定理 3.1, 有 $T_N = \Pi_N^{2,0} T$. □

显然,

$$T_N|_{\mathcal{X}_N} : \mathcal{X}_N \rightarrow \mathcal{X}_N.$$

引理 3.3 令 $(\lambda(\tau_l), \psi_l^m)$ 和 $(\lambda_N(\tau_l), \psi_{lN}^m)$ 分别为 (2.23) 和 (2.25) 的特征对, 则有

$$\lambda_N(\tau_l) - \lambda(\tau_l) = \frac{A_{\tau_l}(\psi_{lN}^m - \psi_l^m, \psi_{lN}^m - \psi_l^m)}{B(\psi_{lN}^m, \psi_{lN}^m)} - \lambda(\tau_l) \frac{B(\psi_{lN}^m - \psi_l^m, \psi_{lN}^m - \psi_l^m)}{B(\psi_{lN}^m, \psi_{lN}^m)}. \quad (3.9)$$

证明 由方程 (2.23) 和 (2.25) 有

$$\begin{aligned} & A_{\tau_l}(\psi_{lN}^m - \psi_l^m, \psi_{lN}^m - \psi_l^m) - \lambda(\tau_l) B(\psi_{lN}^m - \psi_l^m, \psi_{lN}^m - \psi_l^m) \\ &= A_{\tau_l}(\psi_{lN}^m, \psi_{lN}^m) - 2A_{\tau_l}(\psi_{lN}^m, \psi_l^m) + A_{\tau_l}(\psi_l^m, \psi_l^m) \\ &\quad - \lambda(\tau_l) B(\psi_{lN}^m, \psi_{lN}^m) + 2\lambda(\tau_l) B(\psi_{lN}^m, \psi_l^m) - \lambda(\tau_l) B(\psi_l^m, \psi_l^m) \\ &= \lambda_N(\tau_l) B(\psi_{lN}^m, \psi_{lN}^m) - 2\lambda(\tau_l) B(\psi_{lN}^m, \psi_l^m) + \lambda(\tau_l) B(\psi_l^m, \psi_l^m) \\ &\quad - \lambda(\tau_l) B(\psi_{lN}^m, \psi_{lN}^m) + 2\lambda(\tau_l) B(\psi_{lN}^m, \psi_l^m) - \lambda(\tau_l) B(\psi_l^m, \psi_l^m) \\ &= \lambda_N(\tau_l) B(\psi_{lN}^m, \psi_{lN}^m) - \lambda(\tau_l) B(\psi_{lN}^m, \psi_{lN}^m) \\ &= (\lambda_N(\tau_l) - \lambda(\tau_l)) B(\psi_{lN}^m, \psi_{lN}^m). \end{aligned}$$

在上面方程两边同时除以 $B(\psi_{lN}^m, \psi_{lN}^m)$, 便可得到

$$\lambda_N(\tau_l) - \lambda(\tau_l) = \frac{A_{\tau_l}(\psi_{lN}^m - \psi_l^m, \psi_{lN}^m - \psi_l^m)}{B(\psi_{lN}^m, \psi_{lN}^m)} - \lambda(\tau_l) \frac{B(\psi_{lN}^m - \psi_l^m, \psi_{lN}^m - \psi_l^m)}{B(\psi_{lN}^m, \psi_{lN}^m)}.$$

证明完毕. □

令

$$\eta_N = \sup_{\psi_l^m \in H_0^2(I), \|\psi_l^m\|_{A_{\tau_l}}=1} \inf_{\phi_{lN}^m \in \mathcal{X}_N} \|T \psi_l^m - \phi_{lN}^m\|_{A_{\tau_l}}, \quad (3.10)$$

其中 $\|\psi_l^m\|_{A_{\tau_l}} = \sqrt{A_{\tau_l}(\psi_l^m, \psi_l^m)}$. 显然, $\eta_N \rightarrow 0$ ($N \rightarrow \infty$).

定理 3.3 假设 $\eta_N \rightarrow 0$ ($N \rightarrow \infty$), 则有

$$\|T - T_N\|_{A_{\tau_l}} \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty). \quad (3.11)$$

证明 由算子范数的定义有

$$\begin{aligned}
 \|T - T_N\|_{A_{\tau_l}} &= \sup_{\psi_l^m \in H_0^2(I), \|\psi_l^m\|_{A_{\tau_l}}=1} \|(T - T_N)\psi_l^m\|_{A_{\tau_l}} \\
 &= \sup_{\psi_l^m \in H_0^2(I), \|\psi_l^m\|_{A_{\tau_l}}=1} \|T\psi_l^m - \Pi_N^{2,0}T\psi_l^m\|_{A_{\tau_l}} \\
 &= \sup_{\psi_l^m \in H_0^2(I), \|\psi_l^m\|_{A_{\tau_l}}=1} \inf_{\phi_{lN}^m \in \mathcal{X}_N} \|T\psi_l^m - \phi_{lN}^m\|_{A_{\tau_l}} \\
 &= \eta_N \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty).
 \end{aligned}$$

证毕. $\square$

令 $M(\lambda(\tau_l))$ 表示 (2.23) 中相应于特征值 $\lambda(\tau_l)$ 的特征函数空间, $M(\lambda_N(\tau_l))$ 表示 (2.25) 中相应于特征值 $\lambda_N(\tau_l)$ 的特征函数空间.

定理 3.4 令 $(\lambda(\tau_l), \psi_l^m)$ 和 $(\lambda_N(\tau_l), \psi_{lN}^m)$ 分别为 (2.23) 和 (2.25) 的特征对, 则有

$$\|\psi_l^m - \psi_{lN}^m\|_{A_{\tau_l}} \leq \sup_{\psi_l^m \in M(\lambda(\tau_l)), \|\psi_l^m\|_{A_{\tau_l}}=1} \frac{C}{\lambda(\tau_l)} \|\psi_l^m - \Pi_N^{2,0}\psi_l^m\|_{A_{\tau_l}}, \quad (3.12)$$

$$\lambda_N(\tau_l) - \lambda(\tau_l) \leq \sup_{\psi_l^m \in M(\lambda(\tau_l)), \|\psi_l^m\|_{A_{\tau_l}}=1} \frac{C}{\lambda(\tau_l)} \|\psi_l^m - \Pi_N^{2,0}\psi_l^m\|_{A_{\tau_l}}^2. \quad (3.13)$$

证明 由定理 3.3 可知, $\|T - T_N\|_{A_{\tau_l}} \rightarrow 0$ ($N \rightarrow \infty$). 因此, 根据文献 [25, 定理 7.4] 可得

$$\|\psi_l^m - \psi_{lN}^m\|_{A_{\tau_l}} \leq C \|(T - T_N)|_{M(\lambda(\tau_l))}\|_{A_{\tau_l}}. \quad (3.14)$$

对于 $\psi_l^m \in M(\lambda(\tau_l))$, $\|\psi_l^m\|_{A_{\tau_l}} = 1$, 则有

$$\begin{aligned}
 \|(T - T_N)\psi_l^m\|_{A_{\tau_l}} &= \|T\psi_l^m - \Pi_N^{2,0}T\psi_l^m\|_{A_{\tau_l}} = \frac{1}{\lambda(\tau_l)} \|\psi_l^m - \Pi_N^{2,0}\psi_l^m\|_{A_{\tau_l}}, \\
 \|(T - T_N)|_{M(\lambda(\tau_l))}\|_{A_{\tau_l}} &= \sup_{\psi_l^m \in M(\lambda(\tau_l)), \|\psi_l^m\|_{A_{\tau_l}}=1} \|(T - T_N)\psi_l^m\|_{A_{\tau_l}}.
 \end{aligned}$$

由上面两个等式及 (3.14) 可得到 (3.12). 令 $\psi_{lN}^m \in M(\lambda_N(\tau_l))$, $\|\psi_{lN}^m\|_{A_{\tau_l}} = 1$, 则有

$$B(\psi_{lN}^m, \psi_{lN}^m) = \frac{1}{\lambda_N(\tau_l)} \|\psi_{lN}^m\|_{A_{\tau_l}}^2 = \frac{1}{\lambda_N(\tau_l)}.$$

由引理 3.3, 有

$$\lambda_N(\tau_l) - \lambda(\tau_l) \leq \frac{\|\psi_l^m - \psi_{lN}^m\|_{A_{\tau_l}}^2}{B(\psi_{lN}^m, \psi_{lN}^m)} = \lambda_N(\tau_l) \|\psi_l^m - \psi_{lN}^m\|_{A_{\tau_l}}^2.$$

结合 (3.12) 可得到 (3.13). $\square$

我们用 $\omega^{\alpha,\beta}(t) = (1-t)^\alpha(1+t)^\beta$ 表示指标为 (α, β) 的 Jacobi 权函数, 引入非一致带权 Sobolev 空间:

$$H_{\omega^{\alpha,\beta},*}^s(I) := \{u : \partial_t^k u \in L_{\omega^{\alpha+k,\beta+k}}, 0 \leq k \leq s\},$$

相应的内积和范数分别为

$$(u, v)_{s, \omega^{\alpha, \beta}, * } = \sum_{k=0}^s (\partial_t^k u, \partial_t^k v)_{\omega^{\alpha+k, \beta+k}}, \quad \|u\|_{s, \omega^{\alpha, \beta}, * } = (u, u)_{s, \omega^{\alpha, \beta}, * }^{\frac{1}{2}}.$$

定义正交投影 $\pi_{N, \omega^{-2, -2}} : L_{\omega^{-2, -2}}^2(I) \rightarrow P_N^{-2, -2}$, 使得

$$(u - \pi_{N, \omega^{-2, -2}} u, v_N)_{\omega^{-2, -2}} = 0, \quad \forall v_N \in P_N^{-2, -2},$$

其中

$$P_N^{-2, -2} = \{\phi \in P_N : \phi(\pm 1) = \phi'(\pm 1) = 0\}.$$

由文献 [26, 定理 1.8.2], 我们下面的引理:

引理 3.4 对于 $u \in H_{\omega^{-2, -2}, *}^s(I)$, 下面的不等式成立:

$$\|\partial_t^2(\pi_{N, \omega^{-2, -2}} u - u)\| \lesssim N^{2-s} \|\partial_t^s u\|_{\omega^{-2+s, -2+s}}.$$

由于

$$\begin{aligned} (\partial_t^2(u - \pi_{N, \omega^{-2, -2}} u), \partial_t^2 v_N) &= (u - \pi_{N, \omega^{-2, -2}} u, \partial_t^4 v_N) \\ &= (u - \pi_{N, \omega^{-2, -2}} u, \omega^{2, 2} \partial_t^4 v_N)_{\omega^{-2, -2}} \\ &= 0, \quad \forall v_N \in \mathcal{X}_N, \end{aligned}$$

则 $\pi_{N, \omega^{-2, -2}}$ 是从 $H_0^2(I)$ 到 $\mathcal{X}_N$ 的正交投影.

定理 3.5 对于 $u \in H_{\omega^{-2, -2}, *}^s(I) \cap H_0^2(I)$ ($s \geq 2$), 下面的不等式成立:

$$\|\pi_{N, \omega^{-2, -2}} u - u\|_{2, I} \lesssim N^{2-s} \|\partial_t^s u\|_{\omega^{-2+s, -2+s}}.$$

证明 由 Poincaré 不等式有

$$\|\pi_{N, \omega^{-2, -2}} u - u\|_{2, I} \lesssim |\pi_{N, \omega^{-2, -2}} u - u|_{2, I} = \|\partial_t^2(\pi_{N, \omega^{-2, -2}} u - u)\|.$$

由引理 3.4 可得

$$\|\pi_{N, \omega^{-2, -2}} u - u\|_{2, I} \lesssim \|\partial_t^2(\pi_{N, \omega^{-2, -2}} u - u)\| \lesssim N^{2-s} \|\partial_t^s u\|_{\omega^{-2+s, -2+s}}.$$

证毕. □

定理 3.6 令 $(\lambda(\tau_l), \psi_l^m)$ 和 $(\lambda_N(\tau_l), \psi_{lN}^m)$ 分别为 (2.23) 和 (2.25) 的特征对. 若 $\psi_l^m \in H_{\omega^{-2, -2}, *}^s(I) \cap H_0^2(I)$, 则对于 $2 \leq s \leq N+1$, 有

$$\|\psi_l^m - \psi_{lN}^m\|_{A_{\tau_l}} \leq \sup_{\psi_l^m \in M(\lambda(\tau_l)), \|\psi_l^m\|_{A_{\tau_l}}=1} \frac{C}{\lambda(\tau_l)} N^{2-s} \|\partial_t^s \psi_l^m\|_{\omega^{-2+s, -2+s}}, \quad (3.15)$$

$$\lambda_N(\tau_l) - \lambda(\tau_l) \leq \sup_{\psi_l^m \in M(\lambda(\tau_l)), \|\psi_l^m\|_{A_{\tau_l}}=1} \frac{C}{\lambda(\tau_l)} N^{2(2-s)} \|\partial_t^s \psi_l^m\|_{\omega^{-2+s, -2+s}}^2. \quad (3.16)$$

证明 对 $\forall \phi_{lN}^m \in \mathcal{X}_N$, 由 (3.7) 可得

$$\begin{aligned} \|\psi_l^m - \Pi_N^{2,0} \psi_l^m\|_{A_{\tau_l}}^2 &= A_{\tau_l}(\psi_l^m - \Pi_N^{2,0} \psi_l^m, \psi_l^m - \Pi_N^{2,0} \psi_l^m) \\ &= A_{\tau_l}(\psi_l^m - \Pi_N^{2,0} \psi_l^m, \psi_l^m - \phi_{lN}^m) \\ &\leq \left(\int_I \frac{1}{n_0 - 1} |(L_l + \tau_l)(\psi_l^m - \Pi_N^{2,0} \psi_l^m)|^2 r^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \times \left(\int_I \frac{1}{n_0 - 1} |(L_l + \tau_l)(\psi_l^m - \phi_{lN}^m)|^2 r^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \left(\tau_l^2 \int_I |\psi_l^m - \Pi_N^{2,0} \psi_l^m|^2 r^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\tau_l^2 \int_I |\psi_l^m - \phi_{lN}^m|^2 r^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式可得到

$$\begin{aligned} \|\psi_l^m - \Pi_N^{2,0} \psi_l^m\|_{A_{\tau_l}}^2 &\leq \left(\int_I \frac{1}{n_0 - 1} |(L_l + \tau_l)(\psi_l^m - \Pi_N^{2,0} \psi_l^m)|^2 r^2 dt + \tau_l^2 \int_I |\psi_l^m - \Pi_N^{2,0} \psi_l^m|^2 r^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \times \left(\int_I \frac{1}{n_0 - 1} |(L_l + \tau_l)(\psi_l^m - \phi_{lN}^m)|^2 r^2 dt + \tau_l^2 \int_I |\psi_l^m - \phi_{lN}^m|^2 r^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|\psi_l^m - \Pi_N^{2,0} \psi_l^m\|_{A_{\tau_l}} \|\psi_l^m - \phi_{lN}^m\|_{A_{\tau_l}}, \end{aligned}$$

则有

$$\|\psi_l^m - \Pi_N^{2,0} \psi_l^m\|_{A_{\tau_l}} \leq \|\psi_l^m - \phi_{lN}^m\|_{A_{\tau_l}}. \quad (3.17)$$

由 (3.17) 和定理 3.1, 我们能推导出

$$\begin{aligned} \|\psi_l^m - \Pi_N^{2,0} \psi_l^m\|_{A_{\tau_l}}^2 &= A_{\tau_l}(\psi_l^m - \Pi_N^{2,0} \psi_l^m, \psi_l^m - \Pi_N^{2,0} \psi_l^m) \\ &= \inf_{\phi_{lN}^m \in \mathcal{X}_N} A_{\tau_l}(\psi_l^m - \phi_{lN}^m, \psi_l^m - \phi_{lN}^m) \\ &\lesssim \inf_{\phi_{lN}^m \in \mathcal{X}_N} \|\psi_l^m - \phi_{lN}^m\|_{2,I}^2 \\ &\lesssim \|\pi_{N,\omega^{-2},-2} \psi_l^m - \psi_l^m\|_{2,I}^2. \end{aligned}$$

结合定理 3.4 和 3.5 便可得到 (3.15) 和 (3.16). □

4 算法的有效实现

本节给出求解问题 (2.18) 和 (2.25) 的一种有效的算法. 令

$$\begin{aligned} \phi_i(t) &= (1 - t^2)(L_i(t) - L_{i+2}(t)), \quad i = 0, \dots, N-4, \\ \phi_{N-3}(t) &= \frac{1}{4}(t+1)(1-t)^2, \quad \phi_{N-2}(t) = \frac{1}{4}(1-t)^2, \end{aligned}$$

其中 $L_i(t)$ 是 i 次 Legendre 多项式, 则有

$$X_N(l) = \text{span}\{\phi_0(t), \dots, \phi_{N-2}(t)\}, \quad l = 0,$$

$$X_N(l) = \text{span}\{\phi_0(t), \dots, \phi_{N-3}(t)\}, \quad l \geq 1,$$

$$\mathcal{X}_N = \text{span}\{\phi_0(t), \dots, \phi_{N-4}(t)\}.$$

当 $R_1 = 0$ 和 $l \geq 1$ 时, 我们将寻找

$$\psi_{lN}^m = \sum_{i=0}^{N-3} \psi_i^l \phi_i, \quad (4.1)$$

满足 (2.18), 其中 ψ_i^l ($0 \leq i \leq N-3$) 为未知系数. 将表达式 (4.1) 代入 (2.18), 取 ϕ_{lN}^m 遍历 $X_N(l)$ 中的基函数, 则可得到下面的线性特征系统:

$$A_l U^l = \lambda_N(\tau_l) B_l U^l, \quad (4.2)$$

其中

$$A_l = (a_{ij}^l), \quad B_l = (b_{ij}^l), \quad U^l = (\psi_0^l, \dots, \psi_{N-3}^l)^T,$$

$$a_{ij}^l = A_{\tau_l}(\phi_j, \phi_i), \quad b_{ij}^l = B(\phi_j, \phi_i).$$

当 $R_1 = 0$ 和 $l = 0$ 时, 我们将寻找

$$\psi_{0N}^m = \sum_{i=0}^{N-2} \psi_i^0 \phi_i, \quad (4.3)$$

满足 (2.18), 其中 ψ_i^0 ($0 \leq i \leq N-2$) 为未知系数. 将表达式 (4.3) 代入 (2.18), 取 ϕ_{0N}^m 遍历 $X_N(0)$ 的基函数, 则可得到下面的线性特征系统:

$$A_0 U^0 = \lambda_N(\tau_0) B_0 U^0, \quad (4.4)$$

其中

$$A_0 = (a_{ij}^0), \quad B_0 = (b_{ij}^0), \quad U^0 = (\psi_0^0, \dots, \psi_{N-2}^0)^T,$$

$$a_{ij}^0 = A_{\tau_0}(\phi_j, \phi_i), \quad b_{ij}^0 = B(\phi_j, \phi_i).$$

令

$$a_{ij} = \int_I (t+1)^2 \phi_j'' \phi_i'' dt, \quad b_{ij} = \int_I \phi_j' \phi_i' dt,$$

$$c_{ij} = \int_I (t+1)^2 \phi_j' \phi_i' dt, \quad d_{ij} = \int_I (t+1)^2 \phi_j \phi_i dt,$$

$$e_{ij} = \int_I \frac{1}{(t+1)^2} \phi_j \phi_i dt, \quad f_{ij} = \int_I \phi_j \phi_i dt.$$

定理 4.1 对于 $l = 0$ 和相应的基函数 $\phi_0(t), \dots, \phi_{N-2}(t)$, 有

$$a_{ij} = b_{ij} = 0 \quad (0 \leq i, j \leq N-4, \quad |i-j| > 4),$$

$$a_{N-3,k} = a_{k,N-3} = b_{N-3,k} = b_{k,N-3} = 0 \quad (4 \leq k \leq N-4),$$

$$a_{N-2,k} = a_{k,N-2} = b_{N-2,k} = b_{k,N-2} = 0 \quad (3 \leq k \leq N-4),$$

$$\begin{aligned}
 c_{ij} &= 0 \quad (0 \leq i, j \leq N-4, \quad |i-j| > 6), \\
 c_{N-3,k} &= c_{k,N-3} = 0 \quad (6 \leq k \leq N-4), \\
 c_{N-2,k} &= c_{k,N-2} = 0 \quad (5 \leq k \leq N-4), \\
 d_{ij} &= 0 \quad (0 \leq i, j \leq N-4, \quad |i-j| > 8), \\
 d_{N-3,k} &= d_{k,N-3} = 0 \quad (8 \leq k \leq N-4), \\
 d_{N-2,k} &= d_{k,N-2} = 0 \quad (7 \leq k \leq N-4).
 \end{aligned}$$

对于 $l \geq 1$ 和相应的基函数 $\phi_0(t), \dots, \phi_{N-3}(t)$, 有

$$\begin{aligned}
 a_{ij} &= b_{ij} = e_{ij} = 0 \quad (0 \leq i, j \leq N-4, \quad |i-j| > 4), \\
 a_{N-3,k} &= a_{k,N-3} = b_{N-3,k} = b_{k,N-3} = e_{N-3,k} = e_{k,N-3} = 0 \quad (4 \leq k \leq N-4), \\
 c_{ij} &= f_{ij} = 0 \quad (0 \leq i, j \leq N-4, \quad |i-j| > 6), \\
 c_{N-3,k} &= c_{k,N-3} = f_{N-3,k} = f_{k,N-3} = 0 \quad (6 \leq k \leq N-4), \\
 d_{ij} &= 0 \quad (0 \leq i, j \leq N-4, \quad |i-j| > 8), \\
 d_{N-3,k} &= d_{k,N-3} = 0 \quad (8 \leq k \leq N-4).
 \end{aligned}$$

证明 为了简单起见, 我们仅仅对 $l \geq 1$ 的情形进行证明. 对于 $l \geq 0$ 的情形, 我们能够类似地推导. 由于 $a_{ij} = a_{ji}$, 则仅仅需要考虑 $i \geq j$ 的情形. 由

$$a_{ij} = \int_I (t+1)^2 \phi_i'' \phi_j'' dt = - \int_I \phi_i' ((t+1)^2 \phi_j'')' dt = \int_I \phi_i ((t+1)^2 \phi_j'')'' dt,$$

以及 $(1-t^2)((t+1)^2 \phi_j'')''$ 的次数小于等于 $j+4$, 则有 $a_{ij} = 0$ ($0 \leq i, j \leq N-4, |i-j| > 4$). 由于 $(1-t^2)((t+1)^2 \phi_{N-3}'')''$ 为 3 次多项式, 则当 $4 \leq k \leq N-4$ 时, $a_{N-3,k} = a_{k,N-3} = 0$. 类似地, 我们可以证明

$$\begin{aligned}
 b_{ij} &= 0 \quad (0 \leq i, j \leq N-4, \quad |i-j| > 4), \\
 b_{N-3,k} &= b_{k,N-3} = 0 \quad (4 \leq k \leq N-4), \\
 c_{ij} &= f_{ij} = 0 \quad (0 \leq i, j \leq N-4, \quad |i-j| > 6), \\
 c_{N-3,k} &= c_{k,N-3} = f_{N-3,k} = f_{k,N-3} = 0 \quad (6 \leq k \leq N-4), \\
 d_{ij} &= 0 \quad (0 \leq i, j \leq N-4, \quad |i-j| > 8), \\
 d_{N-3,k} &= d_{k,N-3} = 0 \quad (8 \leq k \leq N-4).
 \end{aligned}$$

由于

$$\int_I \frac{1}{(t+1)^2} \phi_i \phi_j dt = \int_I (L_i - L_{i+2}) \left((1-t) \frac{\phi_j}{t+1} \right) dt,$$

以及 $(1-t) \frac{\phi_i}{t+1}$ 是一个次数小于等于 $j+4$ 的多项式, 则 $e_{ij} = 0$ ($0 \leq i, j \leq N-4, |i-j| > 4$). 由于 $(1-t) \frac{\phi_{N-3}}{t+1}$ 为 3 次多项式, 则 $e_{N-3,k} = e_{k,N-3} = 0$ ($4 \leq k \leq N-4$). $\square$

由定理 4.1 知, 当 n 为常数时, 在方程 (4.2) 和 (4.4) 中的刚度矩阵 A_l ($l \geq 1$) 和 A_0 及质量矩阵 B_l ($l \geq 1$) 和 B_0 都是稀疏的. 因此, 直接或迭代特征求解器可以有效地应用. 对于变系数 n 情形, 由于人

们大多只关心前几个最小的特征值, 我们可以利用预条件方法和移位反幂法有效地求解 (4.2) 和 (4.4) (参见文献 [27]), 而这只需对不同的右端项 f (或者 $\tilde{f}$) 反复地求解下列方程:

$$(A_l - \lambda_a(\tau_l)B_l)U^l = f \quad (\text{或者 } (A_0 - \lambda_a(\tau_0)B_0)U^0 = \tilde{f}), \quad (4.5)$$

其中 $\lambda_a(\tau_l)$ 和 $\lambda_a(\tau_0)$ 分别为传输特征值 $\lambda_N(\tau_l)$ 和 $\lambda_N(\tau_0)$ 的近似值. 上述方程组可以用 Schur 补方法有效求解 (参见文献 [28]).

对于 $R_1 > 0$ 的情形, 我们将寻找

$$\psi_{lN}^m = \sum_{i=0}^{N-4} \psi_i^l \phi_i, \quad (4.6)$$

满足 (2.25), 其中 ψ_i^l ($0 \leq i \leq N-4$) 为未知系数. 将表达式 (4.6) 代入 (2.25), 取 ϕ_{lN}^m 遍历 $\mathcal{X}_N$ 中的基函数, 则可得到下面的线性特征系统:

$$\mathcal{A}_l \mathcal{U}^l = \lambda_N(\tau_l) \mathcal{B}_l \mathcal{U}^l, \quad (4.7)$$

其中

$$\mathcal{A}_l = (\tilde{a}_{ij}^l), \quad \mathcal{B}_l = (\tilde{b}_{ij}^l), \quad \mathcal{U}^l = (\psi_0^l, \dots, \psi_{N-4}^l)^T, \quad \tilde{a}_{ij}^l = A_{\tau_l}(\phi_j, \phi_i), \quad \tilde{b}_{ij}^l = B(\phi_j, \phi_i).$$

类似于 $R_1 = 0$ 的推导, 对于常数 n 的情形, 刚度矩阵 $\mathcal{A}_l$ 和质量矩阵 $\mathcal{B}_l$ 都是稀疏的. 对于变系数 n 的情形, 也可以利用预条件方法和移位反幂法有效地求解 (4.7). 为了简洁起见, 我们省略了这些细节.

注 4.1 当 $n(x)$ 趋于 1 时, 重构格式 (2.6) 中的系数 $1/(n(x) - 1)$ 将变得奇异. 如果在整个区域上用数值积分计算质量矩阵和刚度矩阵的元素, 会导致数值精度的衰减, 甚至导致失真的数值结果, 从而得到较低精度甚至错误的数值解. 因此, 我们需要一些局部加密技术来提高数值解的精度. 例如, 当折射率 $n(x)$ 为一个径向函数时, 即 $\tilde{n}(r, \theta, \phi) = \tilde{n}_0(r)$, 我们首先在 $\tilde{n}_0(r)$ 趋于 0 的区域附近局部加密, 然后使用谱元法来计算传输特征值. 对于其他情形, 我们可以使用类似的方法.

5 数值实验

为了表明数值解的收敛性和算法的有效性, 我们将进行一系列的数值实验. 我们将在 MATLAB 2015B 中操作我们的程序.

例 5.1 (均匀介质) 取 $R_1 = 0$, $R_2 = \frac{1}{2}$, $n(x) = 8$, $l = 0, 1, 2$. 对于不同的 l 和 N , 前 4 个特征值的数值结果在表 1–3 中列出.

为了进一步表明算法的精度和有效性, 取 $N = 60$ 时的数值解作为参考解, 对于不同的 N , 在图 1

表 1 对于 $l = 0$ 和不同的 N , 前 4 个特征值的数值结果

N	k_{0N}^1	k_{0N}^2	k_{0N}^3	k_{0N}^4
10	3.359494615862621	7.416430430408338	10.088539162484516	14.864967816438135
15	3.359494615856713	7.416364478351209	10.081212364617912	14.216507408939171
20	3.359494615856718	7.416364478346569	10.081212327323772	14.216090056897734
25	3.359494615856717	7.416364478346557	10.081212327323334	14.216090055108339
30	3.359494615856711	7.416364478346559	10.081212327323771	14.216090055108422

表 2 对于 $l = 1$ 和不同的 N , 前 4 个特征值的数值结果

N	k_{1N}^1	k_{1N}^2	k_{1N}^3	k_{1N}^4
10	4.203341321276699	6.723607948143712	10.884627934217011	14.102035045626730
15	4.203341320163511	6.723607345696495	10.877372284764936	13.454037185957016
20	4.203341320164679	6.723607345695759	10.877371645089708	13.454019386174133
25	4.203341320163513	6.723607345695086	10.877371645089045	13.454019385573808
30	4.203341320164681	6.723607345694849	10.877371645089706	13.454019385573869

表 3 对于 $l = 2$ 和不同的 N , 前 4 个特征值的数值结果

N	k_{2N}^1	k_{2N}^2	k_{2N}^3	k_{2N}^4
10	5.048162618676381	7.561338823322685	10.160349494200679	14.882926953670825
15	5.048162609836491	7.561277186585196	10.150121945120599	14.262828339708928
20	5.048162609836491	7.561277186577113	10.150121897452411	14.262436061427518
25	5.048162609836491	7.561277186577427	10.150121897452385	14.262436059466765
30	5.048162609836491	7.561277186577113	10.150121897452401	14.262436059466749

图 1 当 (a) $l = 0$; (b) $l = 1$; (c) $l = 2$ 时, 数值解与参考解之间的误差

中给出了逼近特征值 λ_{lN}^i ($l = 0, 1, 2; i = 1, 2, 3, 4$) 与参考解之间的误差. 从表 1-3 和图 1 知, 当 $N \geq 25$ 时, 特征值到达至少 10 位有效数字的精度.

例 5.2 (非均匀介质) 取 $R_1 = 0, R_2 = \frac{1}{2}, n(x) = 8 + 4|x|, l = 0, 1, 2$. 对于不同的 l 和 N , 前 4 个特征值的数值结果在表 4-6 中列出.

类似地, 取 $N = 60$ 时的数值解作为参考解, 对于不同的 N , 在图 2 中给出了逼近特征值 λ_{lN}^i ($l = 0, 1, 2; i = 1, 2, 3, 4$) 与参考解之间的误差. 从表 4-6 和图 2 知, 当 $N \geq 25$ 时, 特征值到达至少 10 位有效数字的精度.

例 5.3 ($R_1 > 0$ 的情形) 取

$$R_1 = \frac{1}{2}, \quad R_2 = 1, \quad n(x) = 16, \quad 8 + 4|x|, \quad l = 0.$$

对于不同的 l 和 N , 前 4 个特征值的数值结果在表 7 和 8 中列出.

再一次, 取 $N = 60$ 时的数值解作为参考解, 对于 $n(x) = 16, n(x) = 8 + 4|x|$ 和不同的 N , 在图 3 中给出了逼近特征值 λ_{lN}^i ($i = 1, 2, 3, 4$) 与参考解之间的误差. 从表 7、8 和图 3 知, 当 $N \geq 25$ 时, 特征值到达至少 11 位有效数字的精度.

表 4 对于 $l = 0$ 和不同的 N , 前 4 个特征值的数值结果

N	k_{0N}^1	k_{0N}^2	k_{0N}^3	k_{0N}^4
10	3.134659865810986	6.031679757236431	9.429492885832406	13.472489102373959
15	3.134659865797209	6.031655800085252	9.427298520895189	12.891728961267772
20	3.134659865797151	6.031655800054631	9.427298450768351	12.890661192659442
25	3.134659865797151	6.031655800043270	9.427298450768328	12.890661185817711
30	3.134659865797150	6.031655800124267	9.427298450768348	12.890661185439928

表 5 对于 $l = 1$ 和不同的 N , 前 4 个特征值的数值结果

N	k_{1N}^1	k_{1N}^2	k_{1N}^3	k_{1N}^4
10	3.919406497127552	6.254715839946469	10.115069242251181	12.991317805948370
15	3.919406496906641	6.254711848591414	10.097176321303445	12.554045014186446
20	3.919406496906623	6.254711848590047	10.097176198406512	12.553985333381123
25	3.919406496906746	6.254711848590049	10.097176198406292	12.553985333305436
30	3.919406496907681	6.254711848590302	10.097176198406311	12.553985333305485

表 6 对于 $l = 2$ 和不同的 N , 前 4 个特征值的数值结果

N	k_{2N}^1	k_{2N}^2	k_{2N}^3	k_{2N}^4
10	4.692551352609666	7.050498992254983	9.381766017235075	13.662792358690435
15	4.692551344534304	7.050416053524945	9.379446320953200	13.307955940368815
20	4.692551344534213	7.050416053512183	9.379446254811613	13.307452225026658
25	4.692551344535305	7.050416053512682	9.379446254440365	13.307452223521727
30	4.692551344534301	7.050416053512177	9.379446254440376	13.307452223521727

图 2 当 (a) $l = 0$, $n(x) = 8 + 4|x|$; (b) $l = 1$, $n(x) = 8 + 4|x|$; (c) $l = 2$, $n(x) = 8 + 4|x|$ 时, 数值解与参考解之间的误差

表 7 当 $l = 0$, $n(x) = 16$ 和不同的 N , 前 4 个特征值的数值结果

N	k_{0N}^1	k_{0N}^2	k_{0N}^3	k_{0N}^4
10	3.421748849500152	4.601069567839275	8.083269608893300	9.430627083437974
15	3.421748732168135	4.601047966045580	7.965326043544696	9.144804744255183
20	3.421748732164378	4.601047966043727	7.965322648318847	9.144621882635409
25	3.421748732167207	4.601047966043727	7.965322648311974	9.144621882190551
30	3.421748732168136	4.601047966043729	7.965322648315444	9.144621882190565

表 8 当 $l = 0$, $n(x) = 8 + 4|x|$ 和不同的 N , 前 4 个特征值的数值结果

N	k_{0N}^1	k_{0N}^2	k_{0N}^3	k_{0N}^4
10	4.455285207538473	5.626776120160003	10.246824811945709	11.584164627240014
15	4.455285149600885	5.626713562231944	9.922975818908103	11.247536366018577
20	4.455285149602724	5.626713562231486	9.922973970393805	11.247060223626205
25	4.455285149600878	5.626713562231470	9.922973970362245	11.247060223272348
30	4.455285149602552	5.626713562231468	9.922973970362227	11.247060223272374

图 3 当 (a) $l = 0$, $n(x) = 16$; (b) $l = 0$, $n(x) = 8 + 4|x|$ 时, 数值解与参考解之间的误差

致谢 作者感谢审稿人对本文提出的修改意见.

参考文献

- Colton D, Monk P. The inverse scattering problem for time-harmonic acoustic waves in an inhomogeneous medium. *Quart J Mech Appl Math*, 1988, 41: 97–125
- Colton D, Päiväranta L, Sylvester J. The interior transmission problem. *Inverse Probl Imaging*, 2007, 1: 13–28
- Cakoni F, Haddar F. On the existence of transmission eigenvalues in an inhomogeneous medium. *Appl Anal*, 2009, 88: 475–493
- Cakoni F, Çayören M, Colton D. Transmission eigenvalues and the nondestructive testing of dielectrics. *Inverse Problems*, 2008, 24: 065016
- Cakoni F, Gintides D, Haddar H. The existence of an infinite discrete set of transmission eigenvalues. *SIAM J Math Anal*, 2010, 42: 237–255
- Cakoni F, Colton D, Haddar H. On the determination of Dirichlet or transmission eigenvalues from far field data. *Comptes Rendus Math*, 2010, 348: 379–383
- Cakoni F, Colton D, Monk P. On the use of transmission eigenvalues to estimate the index of refraction from far field data. *Inverse Problems*, 2007, 23: 507–522
- Cakoni F, Colton D, Monk P, et al. The inverse electromagnetic scattering problem for anisotropic media. *Inverse Problems*, 2010, 26: 074004
- Colton D, Monk P, Sun J.G. Analytical and computational methods for transmission eigenvalues. *Inverse Problems*, 2010, 26: 045011
- Sun J G, Zhou A. *Finite Element Methods for Eigenvalue Problems*. Boca Raton-London-New York: CRC Press, 2016
- Rynne B P, Sleeman B D. The interior transmission problem and inverse scattering from inhomogeneous media. *SIAM J Math Anal*, 1991, 22: 1755–1762
- Päiväranta L, Sylvester J. Transmission eigenvalues. *SIAM J Math Anal*, 2008, 40: 738–753
- Kirsch A. On the existence of transmission eigenvalues. *Inverse Probl Imaging*, 2009, 3: 155–172
- Ji X, Sun J G, Turner T. Algorithm 922: A mixed finite element method for Helmholtz transmission eigenvalues. *ACM Trans Math Software*, 2012, 38: 29
- Ji X, Sun J, Xie H. A multigrid method for Helmholtz transmission eigenvalue problems. *J Sci Comput*, 2014, 60: 276–294
- Sun J G. Iterative methods for transmission eigenvalues. *SIAM J Numer Anal*, 2011, 49: 1860–1874
- Cakoni F, Monk P, Sun J G. Error analysis for the finite element approximation of transmission eigenvalues. *Comput Methods Appl Math*, 2014, 14: 419–427
- Yang Y, Bi H, Li H, et al. Mixed methods for the Helmholtz transmission eigenvalues. *SIAM J Sci Comput*, 2016, 38: A1383–A1403
- Ji X, Xi Y, Xie H. Nonconforming finite element method for the transmission eigenvalue problem. *Adv Appl Math Mech*, 2017, 9: 92–103

- 20 An J, Shen J. A spectral-element method for transmission eigenvalue problems. *J Sci Comput*, 2013, 57: 670–688
- 21 An J, Shen J. Spectral approximation to a transmission eigenvalue problem and its applications to an inverse problem. *Comput Math Appl*, 2015, 69: 1132–1143
- 22 An J. A Legendre-Galerkin spectral approximation and estimation of the index of refraction for transmission eigenvalues. *Appl Numer Math*, 2016, 108: 171–184
- 23 An J, Shen J. Efficient spectral methods for transmission eigenvalues and estimation of the index of refraction. *J Math Study*, 2014, 47: 1–20
- 24 Ma L, Shen J, Wang L L. Spectral approximation of time-harmonic Maxwell equations in three-dimensional exterior domains. *Int J Numer Anal Model*, 2015, 12: 1–18
- 25 Babuška I, Osborn J. Eigenvalue problems. *Handb Numer Anal*, 1991, 2: 641–787
- 26 Shen J, Tang T. *Spectral and High-Order Methods with Applications*. Beijing: Science Press, 2006
- 27 Golub G. H, van Loan C. F. *Matrix Computations*. Baltimore: The John Hopkins University Press, 1989
- 28 Kwan Y, Shen J. An efficient direct parallel spectral-element solver for separable elliptic problems. *J Comput Phys*, 2007, 225: 1721–1735

An efficient spectral Galerkin approximation to a Helmholtz transmission eigenvalue problem in spherical geometries

Ting Tan & Jing An

Abstract In this paper, we present an efficient spectral method based on Legendre-Galerkin approximation for the Helmholtz transmission eigenvalue problem in spherical geometries. By means of the spherical coordinate transformation and spherical harmonic expansion, we decompose the original problem into a sequence of equivalent one-dimensional generalized eigenvalue problems. Then we establish corresponding weak forms and discrete schemes for each one-dimensional generalized eigenvalue problem. Especially for the case of solid spherical domain, we need to deal with singularities introduced by spherical coordinate transformation. In order to overcome the difficulty, we derive the pole conditions and introduce the weighted Sobolev space according to pole conditions. The corresponding weak forms and discrete schemes are also established according to the weighted Sobolev space. In addition, we prove the error estimates of eigenvalues and eigenfunctions by using the spectral theory of compact operators for each one-dimensional generalized eigenvalue problems. We also provide some numerical experiments to demonstrate the validity of the algorithm and the correctness of the theoretical results.

Keywords Helmholtz transmission eigenvalues, Legendre-Galerkin approximation, pole condition, error estimation, spherical geometries

MSC(2010) 65N25, 65N30

doi: 10.1360/SCM-2017-0722