论文

基于直接数值模拟数据分析的类-1湍流边界层内层律关系

傅一展, 王铎, 曹博超, 徐弘一*

复旦大学航空航天系, 上海 200433

*联系人, E-mail: Hongyi_Xu@fudan.edu.cn

收稿日期: 2019-03-18; 接受日期: 2019-04-08; 网络出版日期: 2019-05-23

国家自然科学基金重大研究计划(编号: 91434112)、复旦大学航空航天系双一流学科建设资金和上海千人计划启动项目(编号: EZH2126503)资助

摘要 湍流边界层普适统计规律探索一直是湍流研究中的重要课题. 本文根据Schlatter和Örlü给出的零压梯度平板湍流边界层直接数值模拟数据, 对沿流向存在壁面切应力变化的类-1湍流边界层提出再认识的必要性. 首次采用时-空间平均摩擦速度作为尺度描述类-1充分发展湍流边界层内层, 给出了对内层不依赖于雷诺数基于双控制参数的数学表达, 并对其中两个控制参数进行了深刻的物理剖析. 指出该数学表达式可以被视为同时考虑和引入了局部壁面切应力增量(Δ)和线性律适用范围特征量(D)这两个关键影响因子修正, 并进一步验证了此修正对内层描述的准确性和有效性. 研究获得了类-1和类-2湍流边界层内层的统一表达式及其适用范围, 发现在大部分情况下, 特别是当局部壁面切应力偏离时-空间平均壁面切应力时, 内层数学表达式的适用范围在 $d^+ = 8.0$ 以上, 最高可达到 $d^+ \approx 10.0$, 而传统线性律的适用范围则均在 $d^+ = 6.0$ 以下. 明确揭示了其物理机制是内层速度的表达可根据边界层内层特点, 准确描述近壁黏性底层和内层过渡区(非线性增长区)中的速度剖面发展趋势. 此机制的发现为湍流边界层内层律的构建和与外层对数律的衔接, 并为进一步发展完整统一的类-1、2湍流边界层壁面律提供坚实数学物理基础.

关键词 类-1湍流边界层, 零压梯度半无限平板流, 壁面律, 内层律, 直接数值模拟**PACS:** 47.27.E-, 42.27.ek, 42.27.N-, 42.27.nb, 02.60.C-, 02.60.Cb

1 引言

充分发展壁湍流边界层一直是湍流研究中的关键议题. 众所周知, 20世纪初现代流体力学先驱Prandtl^[1]和von Karman^[2]基于对零压梯度平板流动实验数据的

研究, 首先建立了平面壁湍流边界层理论及其统计普适规律, 即著名的von Karman平壁律. 在其后一个多世纪的湍流科学研究和工程应用中发挥了十分重要的作用. 事实上, 湍流边界层的形成受到包括壁面摩擦力、雷诺应力和平均对流等因素的共同影响, 具有较

引用格式: 傅一展, 王铎, 曹博超, 等. 基于直接数值模拟数据分析的类-1湍流边界层内层律关系. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2019, 49: 074702
Fu Y Z, Wang D, Cao B C, et al. Reynolds-number independent inner-layer analytical formulation for type-A turbulent boundary layer based on DNS data (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, 2019, 49: 074702, doi: [10.1360/SSPMA-2019-0082](https://doi.org/10.1360/SSPMA-2019-0082)

为复杂的物理机制^[3,4]. 根据von Karman理论, 如果采用时均局部摩擦速度为特征尺度对流速和长度进行无量纲化, 在非常靠近壁面的区域, 即黏性底层, 可以忽略湍流雷诺应力影响而只保留壁面剪切力对速度的作用, 从而可以将速度剖面表征为一个不依赖于雷诺数的线性函数, 即当今流体力学界所熟知和公认平壁律内层线性关系^[5,6]. 之后人们针对零压梯度半无限大平板、直圆管和槽道湍流等一些比较简单的流动构型, 应用平壁律进行了大量研究^[7-9]. 这些研究则无一例外地验证了平壁律关系对这类简单几何构型湍流边界层的准确性和适用性.

然而, 在此之后在更加复杂壁湍流的研究中, 似乎由于受到传统平壁律研究方法的影响, 而产生了一种思维惯性, 即在采用时均局部摩擦速度为尺度条件下, 速度剖面在内层中($y^+ < 10$)均必须满足简单几何构型湍流中的线性关系($u^+ = y^+$). 而对于此线性律的形成机制、适用范围以及线性律是如何向外层过渡等问题均未给出严格分析和论证.

由于湍流边界层内层速度梯度较大, 其中的精细流动结构探讨对所需分析数据的精确性要求极高, 使得现有的实验数据很难满足要求. 而近年随着计算机能力的增强和湍流直接数值模拟(Direct Numerical Simulation, DNS)研究的进展, 越来越多的壁湍流速度剖面DNS数据则可以满足这一要求^[10-19]. 其中Xu等人^[10-12]基于对方、矩形环管DNS数据的深度分析, 给出了对湍流边界层再认知和有关复杂几何流动壁面律构建的新见解. 根据Cao和Xu^[12]的做法, 首先对于传统湍流边界层根据其速度尺度的分布特征, 即时均局部摩擦速度, 进行了更加科学的分类. 将Prandtl^[1]一般意义下的边界层根据其时均摩擦速度的分布分解为三类^[20], 其定义见下节论述.

对于时均局部壁面切应力(或时均局部摩擦速度)仅为流动展向函数的类-2湍流边界层, 采用了时-空间平均摩擦速度代替时均局部摩擦速度进行无量纲化. 而后通过引入广义抑制和加强函数, 构造了能够统一表征类-2湍流边界层内层的壁面律函数表达式^[12]. 而对于壁面切应力仅为流动方向函数的类-1湍流边界层, 如零压梯度半无限大平板湍流, 该函数表达是否适用, 以及此种表达和传统线性律之间存在何种关联, 及其所适用的边界层厚度则是非常值得关注的问题. 本文则利用由KTH网站所公布的湍流DNS统计数据, 对

以上问题进行逐一解答, 并且尝试进一步给出类-1, 2壁面律表达式中控制参数的深刻物理内涵.

本文采用了Schlatter, Örlü所给出的零压梯度平板湍流DNS数据^[13-17], 对平板流湍流边界内层进行了深入剖析. 选取沿流动方向的10个不同雷诺数速度剖面(每个剖面拥有不同的时均局部摩擦速度), 计算出相应区间上的时-空间平均摩擦速度, 并以此为特征量分析每个局部速度剖面. 提出了对类-1湍流边界内层规律的解析表达以及对壁面律再认识的必要性, 并验证了Xu等人^[10,12]所提出的类-2内层壁面律关系对类-1边界层的适用性与准确度. 在此基础上, 探讨了内层中的两个控制参数对于速度剖面的控制作用及其物理内涵, 并与传统线性律进行比较, 给出了新型壁面律的适用范围, 内层厚度和解析表达式的精确度. 本研究对进一步探索适用于类-1与类-2湍流边界内层所遵循的不依赖于雷诺数的普遍规律, 以及进一步建立完整统一的各类湍流边界层壁面律有重要意义.

2 关于湍流边界层分类和传统平壁律的几点说明

首先, 有必要回顾一下早期半无限大平板湍流边界层数学物理模型, 并将其与更加复杂流动边界层进行一个明确区分, 为湍流边界层研究向复杂几何构型拓展, 并构建其相应普适壁面律打下坚实基础.

边界层概念是Prandtl^[1]于20世纪初针对壁面附近流向速度剖面所提出的一个具有里程碑意义的研究. 历史上Prandtl首先研究的是在半无限大平板零压梯度条件下, 沿流向发展的平板边界层流动, 本文重点讨论其中的湍流边界层部分. 紧随Prandtl的工作, von Karman^[2]也正是在对此类流动的研究中发现了对该流动构型适用于各种雷诺数的平壁律关系. 在以时平均局部壁面切应力(τ_w)所定义的时均局部摩擦速度($u_\tau = \sqrt{\tau_w/\rho}$)为特征速度, 以 ν/u_τ 为特征长度的条件下, 湍流边界层内的时平均流向速度剖面 $u^*(y^*)$ 满足以下平壁律解析关系:

$$u^* = \begin{cases} y^*, & y^* < \delta_i, \\ \frac{1}{\kappa} \ln y^* + C, & y^* \geq \delta_i, \end{cases} \quad (1)$$

其中, $u^*(y^*) = u(y)/u_\tau$, $y^* = yu_\tau/\nu$, y 为垂直壁面

距离.

传统平壁律的数学物理模型基于以下假设. 在无限大平板零压力梯度条件下, 经典处理方法假设时均流为单向剪切流情况, 并忽略控制力中含有沿流向和展向的导数项, 而只保留与壁面垂直方向的导数项, 因而时均流中的剪切力为 $\tau_w - \rho \overline{u'v'}$. 为进一步分析, Boussinesq 建议引入人为假设的涡黏系数 μ_t , 以便把 $\rho \overline{u'v'}$ 改写为时均速度函数, 即早期的湍流本构关系 $\rho \overline{u'v'} = -\mu_t \partial \bar{u} / \partial y$. 经过一系列假设, 湍流边界层时平均流向速度的简化模型方程为 $\partial / \partial y [(\mu + \mu_t) \partial \bar{u} / \partial y] = 0$, 其中 μ, μ_t 分别代表分子黏性和湍流涡黏系数, $\bar{u} = \bar{u}(x, y)$ 为时平均流向速度. 在黏性底层中, 湍流运动较弱而流动的主导项为黏性作用, 即 $\mu_t \approx 0$. 求解时均模型方程, 并取时均局部摩擦速度 ($u_\tau = \sqrt{\tau_w / \rho}$) 为尺度, 即可得到平壁律中的式(1)关系. 而对边界层中的远离壁面区域, 可假设湍流脉动占主导, 即 $\mu_t \gg \mu$. 利用 Prandtl 混合长半经验假设 ($\mu_t = \rho l^2 |\partial \bar{u} / \partial y|$) 和其中长度量与壁面距离成正比 ($l = \kappa y$) 假设, 可求解时平均模型方程, 并以时平均局部摩擦速度为尺度进行无量纲化, 即可得到平壁律中的式(2)关系. 此即湍流边界层理论和平壁律的由来. 明显可见, 平壁律关系并非时均平壁湍流近壁区域的解析解, 因为即使在有关假设成立的条件下, 模型方程中的时均壁面切应力 $\tau_w = \tau_w(x)$ 仍然是一个有待求解的未知量. 此外, 由于采用了时均局部摩擦速度为尺度, 而且未知的时均局部壁面切应力被并入到无量纲尺度中, 使平壁律关系不再依赖于以来流速度所表征的雷诺数, 因此对不同雷诺数的来流具有普适意义. 在此意义下, 式(1)可以被理解为含有单个未知参数的内层普适规律, 即线性律, 而式(2)则是含双参数 (κ, C) 的外层普适规律, 即对数律.

由于类-1湍流边界层沿流向空间方向的无限发展性质, 时均壁面切应力 τ_w 和摩擦速度 u_τ 一般均为流向坐标 (x) 的函数, 因此前式中的 τ_w 和 u_τ 应为指定 x 位置处的局部值. 而由于对垂直于流动展向方向 (z) 所作的壁面无限长假设, 使得时均 τ_w 与 z 无关, 即有 $\tau_w = \rho u_\tau^2(x) = \tau_w(x)$. 该情况对于无限大平板零压力梯度流动适用, 而槽道和圆管流动则可视作类-1湍流边界层之特例, 即 $\tau_w = \text{常数}$.

另外一种边界层为 Cao 和 Xu^[12] 所定义的时均壁面切应力仅沿着流动展向变化之情形, 如 Xu 等人^[10-12] 所考虑的由压力驱动无限长方、矩形环管流动. 由于湍流充分发展, 即流向无限长假设, 时均壁面切应力则仅沿垂直流动方向变化, 并且在角域附近受到湍流驱动二次流影响, 展现出与平板流完全不同的速度尺度特征. 在此情形下, Xu 等人利用时-空平均摩擦速度为尺度, 重新分析和刻画了类-2湍流边界层内层的特性, 并且给出了此类边界层内层所满足的普适统计规律数学表达, 即由双控制参数所构成的类-2湍流边界层内层关系. 作为更一般的流动, 类-3湍流边界层可沿流向方向任意发展, 并且沿流动展向也并非均匀, 此时壁面切应力则应被视为流向与展向坐标的函数.

为讨论方便, 本文将 x 约定为边界层主流方向, y (或 z) 为壁面垂直方向, 而 z (或 y) 为与 x 垂直且与壁面平行的方向, 所讨论的湍流边界层均为充分发展的统计静态, 其时均局部壁面切应力和相应摩擦速度分别记为 τ_w 和 u_τ . 在此约定下, 湍流边界层可系统地划分为如下三类:

类-1边界层:

$$\tau_w = \tau_w(x), \quad (3)$$

类-2边界层:

$$\tau_w = \tau_w(z) \text{ or } \tau_w = \tau_w(y), \quad (4)$$

类-3边界层:

$$\tau_w = \tau_w(x, z) \text{ or } \tau_w = \tau_w(x, y). \quad (5)$$

本文针对以零压力梯度半无限大平板所代表的类-1湍流边界层, 在传统的以时均局部摩擦速度为尺度的分析基础上^[2], 进一步采用时-空间平均摩擦速度为尺度^[12], 重新分析速度剖面并给出其所满足的普适规律解析表达.

半无限大平板流是流体力学研究中一种重要而基础的流动构型. 虽然其几何构型简单, 但却可以展示出丰富的湍流特征, 如发卡涡、拟序结构等. Prandtl 也是根据半无限大平板流研究而提出了边界层概念. 图1(a)展示了半无限大平板流的流动示意图, 随着流动沿 x 方向的发展, 湍流特征越来越明显. 可以观察到上喷下扫作用的增强以及湍涡多尺度结构的形成, 即从 Δ 涡到发卡涡直至演变为涡森林结构, 见图1(b)^[21]. 由湍流脉动所引起的动量交换作用的增强, 使具有相

图 1 (网络版彩图) (a) 半无限大平板湍流边界层示意图; (b) 半无限大平板自然转捩过程(DNS, Liu等人^[21])

Figure 1 (Color online) (a) Schematic drawing of flow on semi-infinite plate; (b) natural flow transition along semi-infinite plate (DNS from Liu et al. [21]).

对较高动量的流体被下扫进入黏性底层, 导致壁面切应力的加强, 同时带来动量边界层厚度的增长. 进而发展出沿流向不断变化的边界层速度剖面.

本文采用Schlatter和Örlü^[13-17]所给出的零压梯度条件下, 光滑平板充分发展湍流边界层的DNS数据. 其中边界层沿主流方向无限发展, 网格分辨率为 $\Delta x^+ = 9$, 而与壁面平行方向的分辨率为 $\Delta z^+ = 4$, 计算域的网格数达到约 8×10^9 . 计算数据的精度足可以分析湍流边界层内、外结构. 首先基于动量边界层厚度 θ 和自由来流速度 u_∞ , 定义雷诺数为 $Re_\theta = \rho u_\infty \theta / \mu$. 沿主流方向在平板上截取10个不同位置的速度剖面数据(其局部动量雷诺数从约667到4000左右), 并在展向上进行平均. 而本文则利用这10组数据对湍流边界层中的流向速度的普适统计规律开展深入分析, 由此达到对类-1湍流边界层深刻再认识的目的.

3 关于类-1湍流边界层速度尺度选取与控制方程分析

在分析速度壁面规律之前, 首先需要探讨适合于

类-1湍流边界层的特征速度, 进而确定描述问题的尺度. 一般而言, 特征速度可以分为两大类: (1) 宏观速度, 如来流速度或最大速度等. 此类速度可以为大尺度涡、二次流或主流速度分布等物理量提供分析尺度; (2) 边界层速度, 如时-空间平均摩擦速度 $\bar{u}_\tau$ 和时均局部摩擦速度 u_τ , 其中 $\bar{u}_\tau = \sqrt{\bar{\tau}_w / \rho}$ 为由壁面切应力 τ_w 沿流动方向积分意义下的均值给出, 即由公式 $\bar{\tau}_w = \int_{l_1}^{l_2} \tau_w(x) dx / (l_2 - l_1)$ 给出, 其中 $[l_1, l_2]$ 为计算域内所需考察分析的平板区间, 当需要考察的范围确定后, $[l_1, l_2]$ 则随之确定. 本文所取的 $[l_1, l_2]$ 为湍流充分发展区域, 即雷诺数从670到4060的区间. 此类摩擦速度可以为研究边界层速度剖面的普适(雷诺不依赖)规律分析提供尺度, 如传统平壁律所采用的便是流动发展方向上的时均局部摩擦速度. 而本文则基于时-空间平均的概念, 采用了时-空间平均摩擦速度为尺度, 其特点为在考察区间 $[l_1, l_2]$ 内的一个常数. 根据该尺度对方程(6)无量纲化可以得到与雷诺数无关的普适物理模型, 即方程(7). 因此, 在基于时-空间平均的第二种摩擦速度引导下, 可以根据DNS结果进行更加精确的定量分析以得到相关普适规律. 在明确了本文研究中的各种速度尺度定义后, 首先对不同边界层速度剖面线, 分别在 $\bar{u}_\tau$ 和 u_τ 尺度下进行细致观察, 以分辨和归纳出其中的共性规律. 与von Karman平壁律研究相似, 为看清近壁附近流向速度的大梯度行为, 研究采用半对数坐标分析. 同时, 类似于传统边界层分析, 为寻找边界层流向速度剖面线的规律, 将分别以 $\bar{u}_\tau$ 和 u_τ 为尺度进行无量纲化, 记为 $u^+ = u / \bar{u}_\tau$ 和 $u^* = u / u_\tau$. 而对应特征速度所定义的无量纲长度则分别记为 d^+ 和 d^* , 表达式为 $d^+ = (\bar{u}_\tau d) / \nu$ 和 $d^* = (u_\tau d) / \nu$. 如前所述, 与流体力学先辈们所采用的简化物理模型相比, 本文的分析将建立在更加精确和完整的湍流边界层控制方程和满足这些方程的DNS数据基础上. 为此首先给出可准确描述零压梯度半无限大平板流的时均及展向平均的有量纲控制方程:

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right) - \left(\frac{\partial \overline{u'u'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} \right). \quad (6)$$

而对此方程选取恰当的速度和长度尺度量, 即以 $\bar{u}_\tau$, $\nu / \bar{u}_\tau$ 分别为速度和长度尺度时, 无量纲后的控制方程可表达为

$$\begin{aligned} & \bar{u}^+ \frac{\partial \bar{u}^+}{\partial x^+} + \bar{v}^+ \frac{\partial \bar{u}^+}{\partial y^+} \\ &= \frac{\partial^2 \bar{u}^+}{\partial x^{+2}} + \frac{\partial^2 \bar{u}^+}{\partial y^{+2}} - \left(\frac{\partial \bar{u}^{+'} \bar{u}^{+'}}{\partial x^+} + \frac{\partial \bar{u}^{+'} \bar{v}^{+'}}{\partial y^+} \right). \end{aligned} \quad (7)$$

在此需要特别指出的是, 此方程在恰当的尺度化后, 不再含有流体力学中常见的流动准则数, 即雷诺数. 因此, 基于该方程分析所得到的相关结论应该是对各种雷诺数普遍适用的普适规律. 这正是Cao和Xu^[12]引入时-空平均摩擦速度进行分析的直接原因和探索普适规律的理论基础. 在此理论中, 时-空平均摩擦速度的取值不依赖流向空间坐标. 而von Karman当年的工作采用的时均局部摩擦速度为流向的分布函数, 即 $\tau_w = \tau_w(x)$, 因此 u_τ 无法直接用作控制方程尺度量进行无量纲化, 得到相关普适方程.

虽然长期以来通过直接求解方程(7)来研究速度边界层是十分困难的, 因为方程中各控制力未知, 特别是与湍流脉动相关的雷诺应力项. 然而近年来借助于DNS数据可以实现对控制方程的细致分析, 进而研究壁湍流速度剖线的普适统计规律, 为湍流边界层的研究提供了新思路. 根据Cao和Xu^[12]对类-2边界层的研究发现, 即使在传统意义上的黏性底层, 即 $d^* \approx 10$ 之内, 控制力中的相关项, 如雷诺切应力和二次流项, 并不能完全忽略. 实际上在非常靠近壁面处, 总合力达到平衡后, 会在 $0 < d^* < 5$ 区间中表现出一个近似常数切应力的特征. 虽然总合力中壁面黏性切应力占主导, 但其他项的影响并不能被完全忽略, 并且随着与壁面的距离增加, 雷诺应力项和表征二次流应力项渐渐取得主导地位. 从DNS给出的数据出发, 研究控制方程中各个控制力可以对边界层进行更深入的刻画. 但因缺少更加详细的数据, 如平均流和雷诺应力导数等, 本文无法对平板流速度边界层控制方程中的各项进行仔细剖析. 但从线性律式(8)在 $d^* \approx 5$ 到 $d^* \approx 10$ 中与DNS速度分布的偏离可以明显看出, 此时除壁面黏性切应力之外, 其他控制力影响已经十分显著, 并开始对速度剖面发展起越来越重要乃至主导作用.

4 基于时-空平均摩擦速度 $\bar{u}_\tau$ 和时均局部摩擦速度 u_τ 为尺度的边界层观察

在进行DNS数据观察之前, 可根据时均局部摩擦速度 u_τ 的取值范围把边界层分为三部分, 即

$0 < u/\bar{u}_\tau < 1.0$, $u/\bar{u}_\tau \approx 1.0$ 和 $u/\bar{u}_\tau > 1.0$. 在各取值范围中选出一个具有代表性的边界层, 在以 $\bar{u}_\tau$ 为尺度的半对数坐标下进行重尺度化并以图2展现, 其中纵坐标为 $u^+ = u/\bar{u}_\tau$, 横坐标为相应的 d^+ . 图2(a)为三个范围内边界层的典型代表, 从中可以看出, $\tau_w/\bar{\tau}_w \geq 1.0$ (低动量雷诺数区域)的边界层内层剖面, 在 $0.0 \leq d^+ \leq 10.0$ 范围内, 均在 $u^+ = d^+$ 线的上方, 而 $0.0 \leq \tau_w/\bar{\tau}_w \leq 1.0$ (高动量雷诺数区域)的内层剖面则均在 $u^+ = d^+$ 线的下方. 图2(b)提供了以时均局部摩擦速度 u_τ 为尺度的三个范围内相应典型速度剖面, 其中的纵坐标为 $u^* = u/u_\tau$, 横坐标为相应的 d^* . 无疑这些动量雷诺数各异的速度剖面在局部摩擦速度尺度条件下高度重合, 这反映了边界层内层的自相似规律特征. 注意图2(a)和(b)的区别仅在于量纲的选取, 此观察表明速度壁面梯度是边界层内层表述的重要控制参数, 边界层内层线分布基本由其壁面梯度所决定. 而对边界层外层速度, 则可以看到速度剖面的半对数线性关系. 综观各类速度边界层内层, 可以看出边界层的多样性, 即不同速度边界层一般具有不同的速度梯度和对线性律的不同适用范围等. 值得注意的是, 根据图2(b)的观察, 每个速度边界层中DNS数据全部落在中性线($u^+ = d^+$)下方. 这是因为壁面切应力在壁面处达到最大后, 由于雷诺应力和惯性项的出现而衰减. 所以DNS求解出的速度剖面永远位于中性线的下方. 值得注意的是, 按照定义有: $d^* = d/(v/u_\tau)$ 和 $d^+ = d/(v/\bar{u}_\tau)$. 所以无量纲长度之间的变换关系为 $d^+ = d/(\bar{u}_\tau/u_\tau)$. 因此线性律 $u^* = d^*$ 在时空平均尺度下可等价地表示为

$$u^+ = d^+ / (\bar{u}_\tau / u_\tau)^2 = (1 \pm \Delta) d^+, \quad (8)$$

此即为以时-空(x方向)平均摩擦速度为尺度的线性律.

以时均局部摩擦速度 u_τ 为尺度对边界层进行观察, 如图2(b)所示, 当局部摩擦速度作为尺度后, 无论对于较大的雷诺数边界层速度剖面还是较小的雷诺数速度剖面, 速度边界层均展现出内层线性律与外层对数律的明显特征. 并且速度剖面在内层、过渡层与对数律外层靠近壁面的部分高度吻合. 值得注意的是, 如果以相对误差0.05 (5%)为界, 内层线性律的保持范围在 $d^* = 0-5$ 之间. 而在 $d^* \approx 30$ 以后, 速度剖面渐渐展

图 2 (a) 时-空间平均摩擦速度为尺度的边界层流向典型速度剖面(u^+); (b) 时均局部摩擦速度为尺度的边界层流向典型速度剖面(u^+); (c) 以时-空间平均壁面切应力为尺度的时均局部壁面切应力(点线)与时-空平均壁面切应力(实线)沿流向分布($\tau_w / \bar{\tau}_w$)

Figure 2 (a) Representative streamwise velocity profiles based on the ensemble-averaged frictional velocity (u^+); (b) representative streamwise velocity profiles based on the local time-averaged frictional velocity (u^+); (c) non-dimensional time-averaged local wall-shear stress (dotted line) and ensemble-averaged wall-shear stress (solid line) along streamwise direction $\tau_w / \bar{\tau}_w$.

现出外层对数律的发展趋势。因此过渡层的无量纲厚度在 $\Delta d^* \approx 25$ 左右, 而关于内层外部过渡层的准确数学表达将在后续的过渡层律研究中分析。由此对于边界层黏性线性层而言, von Karman 壁面律的准确性和适用性毋庸置疑。但是能否对黏性线性层引入某种修正或通过改变无量纲所选用的尺度, 而扩大内层表达适用范围是此研究的目的之一。众所周知, 传统湍流边

界层理论中, 边界层总体被分为了三层, 即黏性底层、过渡区和湍流核心区, 黏性底层的界线通常被认为在 $d^* = 10$ 的位置, 但 DNS 结果却给出在 $d^* \approx 5$ 的地方。

此外, 当采用了恰当的尺度使我们能在无量纲普适控制方程的基础上, 对壁面律的形成机制有一个完整彻底的认知, 从而为工程应用和科学研究带来巨大的价值, 这是本研究的主要目的。图 2(c) 给出了无量纲壁面切应力 ($\tau_w / \bar{\tau}_w$) 沿主流方向的变化, 其中长度的单位为平板计算域的总长度。可以看出, 对于充分发展的湍流区域, 壁面切应力沿流向逐渐变小, 而切应力的变化速率则逐渐变缓。

5 基于 u_τ 尺度的类-1 湍流边界层近壁速度数学表述及验证

在对类-1 速度边界层进行充分观察, 并初步分析了两种尺度下湍流边界层的特点之后, 不难看到, 当时均局部摩擦速度为尺度时, 线性黏性底层的适用范围要远远小于 $d^* \approx 10$ 。为克服以局部摩擦速度为尺度所带来的对内层关系适用范围的限制, 以下分析将基于时-空 (x 方向) 平均摩擦速度为尺度, 进一步探索速度剖面中的普适物理规律。此时可依据 $u / \bar{u}_\tau$ 的取值范围将边界层内层划分为三个部分, 并以式 (9) 的数学表达式进行统一表达。

首先类-1 边界层内层的中性关系 $u^+ = d^+$ (注意不是 von Karman 平壁律中的 $u^* = d^*$) 将内层速度剖面族分成了上、下两部分, 见图 2(a)。其特征分别为 $\tau_w / \bar{\tau}_w \geq 1.0$ 和 $\tau_w / \bar{\tau}_w < 1.0$ 。通过观察可知, 对于 $\tau_w / \bar{\tau}_w \geq 1.0$ 时, 相比于中性分界线 ($u^+ = d^+$), 速度剖面梯度得到一种加强作用, 使其流向速度梯度大于中性线。反之, 当 $\tau_w / \bar{\tau}_w < 1.0$ 时, 速度剖面梯度相对于分界线得到了某种抑制, 使其速度梯度小于中性线。而在近壁附近, 壁面剪切力是影响边界层的绝对主导因素, 此处的速度梯度与壁面处的梯度基本相等, 且在内层区域 ($d^+ < 5$) 中几乎不变 (与 von Karman 壁面律中的内层线性律一致)。据此可以推测对内层曲线族数学表述的探索可转化为寻找一种对分界线速度剖面 (中性线) 起到抑制或加强作用的特征函数。这种特征函数的数学特性为, 在近壁附近表现出线性函数特性, 即其导数基本不变。而在远离壁面后, 则表现出对线性函数

越来越强的加强或抑制效应. 借鉴Xu等人^[10-12]对方、矩形环管的类-2边界层分析, 其基本思想是通过中性线性关系 $u^+ = d^+$ 与广义抑制和加强函数^[12]相互作用, 即

$$u^+(d^+) = d^+(1 \pm \Delta e^{-d^+/D}). \quad (9)$$

对类-2边界层内层进行了更精确数学刻画并取得成功. 在此同样引入以下关系描述类-1内层速度剖面, 定义为

$$\text{对抑制区 } \tau_w / \bar{\tau}_w \leq 1.0, \quad u^+(d^+) = d^+(1 - \Delta e^{-d^+/D}),$$

其中 $0 < \Delta(x^+) < 1$, $1 - \Delta = \tau_w / \bar{\tau}_w$;

$$\text{对加强区 } \tau_w / \bar{\tau}_w \geq 1.0, \quad u^+(d^+) = d^+(1 + \Delta e^{-d^+/D}),$$

其中 $0 < \Delta(x^+) < 1$, $1 + \Delta = \tau_w / \bar{\tau}_w$.

首先对该表达式进行以下函数基本性态分析, 以广义抑制函数为例, 对该表达式求一阶导数:

$$E_n = \|f_2 - f_3\|_n / f_3, E'_n = \|f'_2 - f'_3\|_n / f'_3.$$

在壁面处导数为 $1 - \Delta$, 此时 Δ 为以时-空平均摩擦速度为尺度的壁面切应力相对于中性函数 ($u^+ = d^+$) 的修正量, 而 $1 - \Delta$ 则代表无量纲的壁面剪切力. 从表达式一阶导数的数学属性分析可以看出以下两点. (1) 当 $d^+/D \approx 0$ 时, 该导数趋于 $1 - \Delta$. 此时 $d^+(1 - \Delta e^{-d^+/D}) \approx (1 - \Delta)d^+$, 即边界层内层表达式展现出线性函数特征, 这与 von Karman 平壁律相吻合. (2) 当 $d^+/D \approx 0$ 增大时, 该导数表现出单调递减特征, 此时内层表达式(9)展现出对中性关系越来越强的抑制作用, 这与上述DNS的结果观察相一致. 从物理角度来看, 描述边界层内层需要两个重要参数, 一个刻画壁面切应力大小, 另外一个描述边界层内层厚度. 此即式(9)表达式中引入的 Δ 和 D 两个内层参数的含义. 对于 Δ , 由表达式导数在 $d^+ = 0$ 处的取值可知, 在抑制情况下 ($\tau_w / \bar{\tau}_w < 1.0$) 这是一个可以从 0 到 1 连续变化并表征壁面梯度的物理参量, 其物理意义代表了无量纲时均局部切应力相对于中性情形 ($\tau_w / \bar{\tau}_w = 1.0$) 的减小量. 而对于加强情况 ($\tau_w / \bar{\tau}_w > 1.0$) 这是一个取正值, 并能表征壁面梯度的物理参量, 其物理意义代表了无量纲时均局部切应力相对于中性情形 ($\tau_w / \bar{\tau}_w = 1.0$) 的增加量.

而对于参数 D 的理解, 首先考虑其取值特点. 根据对速度剖线的观察, 不管是抑制还是增强区, DNS 给出

的速度点取值均比线性律式(8)给出的值小. 其原因在于壁面切应力在壁面上达到最大值, 所以对于抑制区而言, 要求 $(1 - \Delta)d^+ \geq d^+(1 - \Delta e^{-d^+/D})$, 即要求 D 取负值. 而对于加强区则要求 $(1 + \Delta)d^+ \geq d^+(1 + \Delta e^{-d^+/D})$, 等价于 D 取正值. 根据 D 的取值特点和速度分布特征, 可作如下分析. 在固定、或已知壁面剪切力的情况下, 定义容忍相对误差 Err 如下:

对抑制区:

$$Err = \left| \frac{d^+(1 - \Delta e^{-d^+/D}) - (1 - \Delta)d^+}{(1 - \Delta)d^+} \right|$$

$$= \frac{\Delta}{1 - \Delta} (e^{-d^+/D} - 1),$$

对加强区:

$$Err = \left| \frac{d^+(1 + \Delta e^{-d^+/D}) - (1 + \Delta)d^+}{(1 + \Delta)d^+} \right| = \frac{\Delta}{1 + \Delta} (1 - e^{-d^+/D}).$$

可以看出 Err 所表达的物理意义为具有抑制或加强作用的边界层内层表达式(9)偏离线性关系的程度. 如果该误差超过某个临界值, 如 0.01 (记为 $Err_{\max}$), 就代表抑制或加强作用开始增长到不可忽略的程度. 于是可以推出对抑制区, 当 $d^+ / -D \geq \ln[(\Delta + (1 - \Delta)Err_{\text{bod}}) / \Delta]$ 时, 抑制效果发挥作用, 速度剖面开始偏离线性关系, 而当 $d^+ / -D < \ln[(\Delta + (1 - \Delta)Err_{\text{bod}}) / \Delta]$ 时, 类-1边界层内层表达式退化为线性关系. 同理对加强区, 当 $d^+ / D \geq -\ln[(\Delta - (1 + \Delta)Err_{\text{bod}}) / \Delta]$ 时, 加强效果发挥作用, 速度剖面开始偏离线性关系, 而当 $d^+ / D < -\ln[(\Delta - (1 + \Delta)Err_{\text{bod}}) / \Delta]$ 时, 类-1边界层内层表达式则退化为线性关系.

此时 D 的物理含义显而易见, 其取值的符号依赖于速度边界层是落在抑制区还是加强区. 而其绝对值大小则为边界层线性律得以成立的厚度特征量, 即线性关系可以保持的范围, D 值越大表明线性底层越厚. 参数 D 的另一个特点是其依赖于参数 Δ , 在参数 Δ 确定时, 即在壁面剪切应力给定条件下, 参数 D 由线性律成立的范围所确定. 对于具有不同参数 Δ 的速度剖面, 即使线性律成立的范围一致, 也不能保证速度剖面拥有相同的 D , 这是因为由 Err 所导出的 d^+ / D 的下限不同所致. 对于黏性底层, 其主导因素为壁面切应力, 而要精确描述黏性底层, 引入另一个控制参数以描述黏性底层厚度也是必要的, 即参数 D 的引入使得底层的线

性律可扩展至 $d^+ \simeq 10$ 的区域.

在提出内层的表达式之后, 可以进一步通过DNS给出的数据来验证此表达式(9)的正确性. 图3(d)展示了5个具有代表性的DNS速度剖线和数学表达式随动量雷诺数的变化. 同时图3(a)–(c)展示了时-空平均摩擦速度($\bar{u}_\tau$)尺度下的线性律关系(黑线), 与DNS所给出的速度剖面(空心点)在半对数坐标下进行对比, 其中纵坐标为 $u^+ = u/\bar{u}_\tau$, 横坐标为 d^+ . 为了图形之间的统一, 所有图中的 Δ 均由下式得到

$$\Delta(x^+) = \frac{\partial u^+}{\partial d^+} \bigg|_{d^+=0} - 1,$$

其中, Δ 为正时表示增强区, Δ 为负则表示抑制区. 根据 $\tau_w/\bar{\tau}_w$ 的三个特征取值范围, 这些图又可以分为三组, 即 $0 \leq \tau_w/\bar{\tau}_w < 1$ ($\Delta < 0$), $\tau_w/\bar{\tau}_w \approx 1$ ($\Delta \approx 0$) 和 $\tau_w/\bar{\tau}_w > 1$ ($\Delta > 0$), 其中点划线和黑实线分别表示传统平壁线性律和本文中提出的内层律, 空心点则表示以时-空间平均摩擦速度为尺度无量纲化后的DNS数据. 菱形点表示边界层中内层开始向过渡层转变的起始点S位置. 图3中另外标明了每组曲线对应的 Re_θ 数, 内层律表达式中 Δ 由DNS数据获得, D 值由最小二乘法拟合得到, S点坐标为 d_{s-DNS}^+ . 利用总切应力的分布特征定义S点位置满足如下导数拐点关系:

$$\frac{\partial^2 u_{DNS}^+(d^+)}{\partial \ln(d^+)^2} \bigg|_{d^+=d_{s-DNS}^+} = 0,$$

其中 u_{DNS}^+ 为DNS给出的速度.

根据 $\tau_w/\bar{\tau}_w$ 的值, 在三个特征范围内各选取了一到两组有代表性的数据进行展示. 从图3中所展示的信息可以看出, 在 Re_θ 数较低时, $\tau_w/\bar{\tau}_w > 1$, 在 Re_θ 达到2000左右时, $\tau_w/\bar{\tau}_w \approx 1$, 当 Re_θ 继续增大, 有 $0 \leq \tau_w/\bar{\tau}_w < 1$. 随着动量雷诺数的不断增大, Δ 的变化范围从0.402变化到-0.145, 体现出了 $\tau_w/\bar{\tau}_w$ 的变化对于中性线性关系由增强到抑制的作用过程. 值得一提的是, 在 $\tau_w/\bar{\tau}_w \approx 1$ 时, 所得到的 Δ 值为0.0183, 十分接近于0, 相应的 D 值也相对变得较小, 为2.85. 此时内层数学表达式(9)退化为线性函数关系式(8).

对于所有计算范围内的动量雷诺数, 速度表达式 $u^+ = d^+[1 + \Delta \exp(-d^+/D)]$ 均位于传统线性律式(8)

曲线的下方, 更好地接近于DNS数据. 并且对于全部考虑的雷诺数, 内层曲线在过渡层转变点S之前, 较DNS曲线的相对误差更小(对于动量雷诺数为3030时最多可以小4倍). 这说明基于式(9)的内层律表达式更好地拟合了边界层内层速度剖面. 在进一步对误差做量化分析中, 分别定义了函数误差的最大和平均范数:

$$(1) \text{ 最大误差: } \left\| E \right\|_{\max} = \max_{0 \leq d^+ \leq d_s^+} \left| E(d^+) \right|,$$

$$(2) \text{ 平均误差: } \left\| E \right\|_{\text{avg}} = \int_0^{d_s^+} |E(x)| dx / d_s^+,$$

其中 $\left\| \cdot \right\|_{\max}$ 描述的是内层转变点S在 d_s^+ 坐标之前所作用函数(E)的最大误差, $\left\| \cdot \right\|_{\text{avg}}$ 描述的是相应函数的平均误差, 而当 $\left\| \cdot \right\|_n$ ($n = \max, \text{avg}$) 作用于相关函数的导数(E')时, 所描述的则是内层转变点之前函数平均导数(切应力)的最大或平均误差. 为了讨论方便, 现定义如下:

$$\text{线性律: } f_1 = (1 \pm \Delta)d^+,$$

$$\text{内层律: } f_2 = d^+(1 \pm \Delta e^{-d^+/D}),$$

$$\text{DNS结果: } f_3 = u_{DNS}^+(d^+),$$

即 f_1 为线性律给出的速度剖面, f_2 为内层数学表达式(9)给出的速度剖面, 简称内层律, 而 f_3 为DNS给出的速度剖面. 以 f_3 为基准, 通过分析 f_1 和 f_2 相对于 f_3 的相对偏差值及其一阶导数的相对偏差值, 对内层律精度给出定量估计. 表1给出了5种具有代表性的边界层DNS速度剖面与线性律式(8)和内层律式(9)的相对误差, 其中的 f' 代表相关一阶导数.

可以看出在转变点S之前, 内层律 f_2 给出的速度剖面与DNS数据之间的平均相对误差在1%–5.5%, 要优于线性律 f_1 给出的相对误差. 在转变点S处, 内层律 f_2 与DNS数据之间的相对误差最大可达到10%左右, 而对于此时线性律 f_1 的相对误差已经达到20%以上. 除了当 Δ 接近于0时, 内层律 f_2 退化成线性律 f_1 时, 线性律 f_1 给出的相对误差接近于内层律 f_2 的误差, 其他情况下线性律给出的速度相对误差均远大于内层律 f_2 的误差, 这说明线性律的适用范围 $d_{s-(\text{linear law})}^+$ 远远低于由 $d_{s-(\text{inner-layer law})}^+$ 所确定的转变点S所辖定范围. 对于这

图 3 以时-空间平均摩擦速度为尺度的边界层内层典型区域DNS速度剖面. (a) $Re_\theta=670$, (b) $Re_\theta=2000$, (c) $Re_\theta=4060$, (d) 典型剖面比较

Figure 3 Representative DNS velocity profiles in the inner layer of Type-A TBL. (a) $Re_\theta=670$, (b) $Re_\theta=2000$, (c) $Re_\theta=4060$, (d) comparison of the five Type-A TBL profiles investigated.

表 1 以DNS结果为标准的式(8)和(9)误差检验

Table 1 Error analyses of eqs. (8) and (9) Benchmarked by DNS results

Re_θ	Δ	$E_n = \ f_2 - f_3\ _n / f_3, E'_n = \ f'_2 - f'_3\ _n / f'_3$ ($n=\max, \text{avg}$)				Re_θ	Δ	$E_n = \ f_1 - f_3\ _n / f_3, E'_n = \ f'_1 - f'_3\ _n / f'_3$ ($n=\max, \text{avg}$)			
		E_{avg}	E'_{avg}	E_{max}	E'_{max}			E_{avg}	E'_{avg}	E_{max}	E'_{max}
677	0.4022	0.0248	0.135	0.0821	0.4768	677	0.4022	0.0621	0.2549	0.206	0.7783
1410	0.1342	0.03	0.1671	0.1104	0.6104	1410	0.1342	0.0627	0.2585	0.2082	0.8312
2000	0.0183	0.0516	0.2393	0.1876	0.9394	2000	0.0183	0.063	0.2592	0.2087	0.9773
3030	-0.0819	0.0143	0.0435	0.0259	0.1577	3030	-0.0819	0.063	0.2593	0.2088	0.8626
4060	-0.1453	0.0171	0.0658	0.0289	0.2429	4060	-0.1453	0.0631	0.2569	0.2081	0.7888

一点, 下节讨论中将有更详细的说明. 以主流速度为切入点, 内层律 f_2 所刻画的速度剖面无论从适用范围、平均误差和最大误差的判据来看均优于传统线性律 f_1 .

而表中的函数导数范数 E'_n 给出了总切应力的平均和最大相对误差. 由表1可以看出, 切应力相对误差普遍比速度偏差更大. 由内层律 f_2 给出的切应力相对平均误差变化范围较大. 在相对较大动量雷诺数的情况下, 切应力相对平均误差较小, 大约在10%以内. 当动量雷诺数相对较小时, 切应力相对平均误差会变大,

但均小于线性律给出的相对误差, 线性律 f_1 给出的平均切应力相对误差则要达到25%以上. 除 Δ 很小的情况外, 对于线性律 f_1 给出的切应力, 其平均和最大切应力相对误差与内层律 f_2 对比, 可相差至约一倍甚至两倍之多. 因此从力的角度来看, 内层律 f_2 对总切应力的刻画准确性要明显优于线性律 f_1 对切应力的描述. 所以本文归纳出的数学表达式(9)对于速度剖面描述的准确性要明显优于线性律式(8). 切应力则以积分的方式对速度产生影响. 除去内层律退化到线性律的情况,

内层律在速度转变点 d_s^+ 处切应力的相对误差最大达到约60%，而对比以线性律所代表的常数壁面切应力的相对误差，此时最大误差已达到约86%，但此时速度偏离的相对误差只有不到10%，这也说明切应力对速度影响的积分累积效应。事实上，无论对于内层律 f_2 ，还是线性律 f_1 所给出的切应力，其与真实切应力转变点要远远早于速度转变点。并且线性律 f_1 给出的常数切应力比内层律 f_2 所给出的切应力适用范围更加狭小，由此看出对于切应力的精确描述更加困难。在边界层控制方程中，各种力项存在着非线性增长的特性，这与Cao和Xu^[12]中对方形环管速度边界层控制力的分析完全类似。根据徐的分析表明，在 $d^+ \approx 10$ 时，由于受到强二次流和几何构型的影响，类-2速度边界层控制方程中的雷诺切应力项和二次流项可能已经达到了和壁面黏性切应力同量级的强度。

为进一步说明内层律 f_2 和线性律 f_1 对雷诺数的不依赖性，本文采用了Eitel-Amor, Schlatter, Örlü^[16]的大涡模拟(LES)数据作相似的误差分析。此组数据所描述的依然为半无限大平板零压梯度湍流边界层，其动量雷诺数 Re_θ 的变化范围约为2240到8183。相对误差的检验由表2给出。

表2给出的误差趋势与表1总体一致。内层律的速度误差和切应力误差均小于线性律给出的误差，这两者在描述切应力时的误差均大于速度误差。在相对比较高动量雷诺数 $Re_\theta = 8183$ 时，线性律给出的平均速度、最大速度、平均切应力和最大切应力的相对误差较内层律给出的对应误差的差距进一步拉大，分别对应1.68%与7.14%，6.50%与29.44%，2.98%与23.25%，

26.55%与106.29%。可以看出两者误差的差距可达四倍之多，造成此现象的原因可以确定是由于线性律的适用范围较小，导致在内层律的转变点S之前，线性律过早地与DNS结果分离，使其在转变点S之内的很大一部分区域里不再适用。与表1所含信息一致，误差结果表明相比于线性律，内层律所描述的速度边界层不仅能在十分靠近壁面时(总切应力表现为常数)，准确地描述速度剖面，并且能在线性律失效时依然能在一定范围内($d_{s-(\text{inner-layer law})}^+ \approx 10$)维持其准确性。对于内层律与线性律所描述的边界层适用范围，将在以下章节进行更详细的讨论。

回顾von Karman平壁律中准则数的处理方式，由于采用了在问题求解前所未知的物理量 u_τ 为尺度，因此 $u^* = d^*$ 关系便不再显含有任何未知量。相对应的，类-1湍流边界层内层律的数学表达式中采用了 $\overline{u}_\tau$ 为尺度，其边界层控制方程变为式(8)。DNS给出的速度剖面即为此方程的数值解。而上述对于误差的分析表明式(9)即为DNS解的近似，所以式(9)为湍流边界层控制方程式(7)在连续意义下的近似解。鉴于控制方程式(7)对雷诺数的不依赖性，式(7)的解只能依赖于边界条件和相关自变量 (x^+, y^+) ，而与雷诺数无关。所以式(9)中的 Δ 和 D ，应仅为 (x^+, y^+) 的函数，而与雷诺数无关。对于具有相同 Δ 和 D 的不同速度边界层，其无量纲化之后的内层速度剖面相同。对于传统von Karman平壁律，雷诺数是以一个未知量的形式被隐含在了速度与长度的尺度中，因此描述沿流向不同速度边界层的速度和长度尺度并不一致。此时平壁律的描述方式可被视为单未知量，或单控制参数的描述方式，并且与本文中

表2 以LES结果为标准的式(8)和(9)误差检验

Table 2 Errors analyses of eqs. (8) and (9) Benchmarked by LES results

Re_θ	Δ	$E_n = \ f_2 - f_3\ _n / f_3, E'_n = \ f'_2 - f'_3\ _n / f'_3$ ($n=\max, \text{avg}$)				Re_θ	Δ	$E_n = \ f_1 - f_3\ _n / f_3, E'_n = \ f'_1 - f'_3\ _n / f'_3$ ($n=\max, \text{avg}$)			
		E_{avg}	E'_{avg}	E_{max}	E'_{max}			E_{avg}	E'_{avg}	E_{max}	E'_{max}
2240	0.1638	0.0319	0.1722	0.1028	0.7658	2240	0.1638	0.0702	0.2926	0.2303	1.0814
3739	0.0562	0.015	0.0746	0.0497	0.3118	3739	0.0221	0.0566	0.2668	0.2044	0.8697
4427	-0.0201	0.0091	0.049	0.0195	0.3627	4427	-0.0201	0.0708	0.2898	0.2302	0.8662
5746	-0.0713	0.0131	0.036	0.0257	0.1411	5746	-0.0713	0.0711	0.2896	0.2302	1.1556
8183	-0.1308	0.0168	0.065	0.0298	0.2655	8183	-0.1308	0.0714	0.2944	0.2325	1.0629

以 $\bar{u}_\tau$ 为速度尺度的单参数线性律式(8)等价. 而对于本文中内层律式(9)的速度边界层而言, 尺度的选取得到了统一, 不同位置上切应力相对于平均切应力的偏差由参数 Δ 确定. 黏性底层厚度则由参数 D 进行描述. 此时的边界层刻画可被视为双控制参数描述方式, 相比于线性律, 内层律增加了一个反映边界层底层厚度的参数 D , 从而更加准确地描述湍流边界层内层的速度剖面变化, 此做法与边界层外层半对数线性律中的双控制参数(κ , C)有异曲同工之处.

6 以 $\bar{u}_\tau$ 和 u_τ 为尺度的类-1湍流边界层内层适用范围对比分析

本节将讨论线性律式(8)与内层律式(9)对近壁速度描述的适用范围. von Karman壁面律中的线性律以局部摩擦速度 u_τ 为尺度描述黏性底层, 所以对类-1沿流向发展的各个速度剖面所使用的长度尺度各不相同. 其好处在于可以找出对各种雷诺数边界层适用的普适规律. 而在上述讨论中, 采用时-空平均摩擦速度 $\bar{u}_\tau$ 为尺度, 其优点在于可以写出不依赖于雷诺数湍流边界层的控制方程, 因而可由此深入开展对边界层内普适规律的形成机制分析, 如Cao和Xu^[12]中所研究的类-2边界层壁面律和本文所探讨的类-1边界层内层律及其适用范围等基础问题.

在此将探讨时-空间平均尺度条件下边界层线性律与内层律的适用范围. 以DNS数据为基准, 设置和定义相对DNS数据5%的相对误差为临界点. 观察DNS速度剖面脱离线性律式(8)和内层律式(9)的临界点位置, 从而分析和看清线性律式(8)和内层律式(9)的最大适用范围. 为此选取了五组具有代表性的数据, 找出其对应的临界点横坐标位置($d_{s-(\text{linear law})}^+$, $d_{s-(\text{inner-layer law})}^+$), 所得结果如图4所示. 其中DNS速度剖面与内层律的临界点($d_{s-(\text{inner-layer law})}^+$)由上三角形点标出. 而与线性律式(8)的临界点($d_{s-(\text{linear law})}^+$)则由下三角形点给出. 对应的速度剖面内层向外层过渡起始点S位置由 $d_{s-\text{DNS}}^+$ 标出.

可以看出当 Δ 偏离0时, 内层律式(9)的适用范围要远优于线性律式(8). 以相对误差5%为界, 对适用范围进行观察, 内层律的适用范围比线性律要大3个以上 $\nu/\bar{u}_\tau$ 的长度. 在 $d^+ \geq 3$ 区域中, 内层律描述速度剖面

的准确性明显优于线性律. 而在 $0 \leq d^+ \leq 3$ 中, 两者对于速度边界层描述的准确性均在5%的相对误差之内. 内层律的适用范围在加强区中接近于内层到外层过渡的起始点S. 当线性律不再适用时, 式(9)仍可给出速度在5%以下的相对误差. 对于抑制区而言, 内层律的适用范围甚至远远超过过渡的起始点S. 此时内层律不仅对内层的速度剖面进行准确的描述, 而且对于一部分外层区域中的速度分布, 内层律依然可以提供准确的预测. 可以观察到对于图4(c)和(d)中的内层律, 其在最大适用范围临界点之后出现了非线性急速下降的情况. 这是因为指数函数的特性决定的, 此时 d^+ 比黏性底层厚度的特征量 D 还要大得多, 其实已经达到外层过渡律的控制范围. 在内外层过渡起始点 $d_{s-(\text{inner-layer law})}^+$ 之前, 内层律不会出现此种状况, 所以这并不影响内层律对速度剖面描述的正确性. 另外一种情况是 Δ 接近于0时, 式(9)退化线性律, 而两者的临界点比较接近. 当 Δ 较大时, 式(9)的适用范围会扩大并且明显优于线性律的适用范围. 随着 Δ 的减小, 式(9)的适用范围会缩小, 直到 $\Delta = 0$ 时与线性律的适用范围重合.

如果以局部摩擦速度尺度衡量适用范围, 可以对过渡起始位置 $d_{s-\text{DNS}}^*$ 、线性律和内层律适用范围临界点 $d_{s-(\text{linear law})}^*$, $d_{s-(\text{inner-layer law})}^*$ 以局部摩擦速度进行重尺度化, 所表现出来分离点和临界点位置如表3所示.

首先对于线性律, 以5%的相对误差为界, 其适用范围在 $d^* = 5.8$ 之内. 这比在工程应用上一般认为的 $d^* \approx 10$ 要低很多. 但是对于不同的动量雷诺数, 线性律给出的偏离起始位置和适用范围十分一致. 这是因为此时速度边界层的相似性所致, 见图2(b). 而对于内层律, 在 Δ 远离0时, 其适用范围均在 $d^* \approx 8.5$ 以上, 一般可达到 $d^* \approx 10$ 左右甚至最高延伸到 $d^* \approx 20$ 的外层过渡区域. 但与线性律不同的是, 此时内层律的适用范围与当地局部时平均壁面切应力和时-空平均壁面切应力的比值有关. 对于壁面切应力变化范围较广, 即所考察的区域较长时, Δ 的变化范围较大. 而对于大部分区域, 式(9)给出的适用范围达到了 $d^* \approx 10$, 因此极大地拓宽了线性律的适用范围. 对比这几组数据发现, 当 Δ 在0.1左右时, 式(9)的适应范围已经可以达到 $d^* \approx 8.5$ 以上, 而此时线性律的适用范围在 $d^* \approx 6.0$ 以下. 对于这10组速度边界层的数据, 其动量雷诺数 Re_θ 的变化范围在670–4060. 在1410到2540范围之外,

图 4 时空平均摩擦速度尺度下内层律与线性律适用范围比较分析. (a) $Re_\theta=670$, (b) $Re_\theta=1410$, (c) $Re_\theta=2000$, (d) $Re_\theta=3270$, (e) $Re_\theta=4060$

Figure 4 Comparisons and analyses of the applicable ranges between inner-layer law and viscous linear law under the scale of time-space averaged frictional velocity. (a) $Re_\theta=670$, (b) $Re_\theta=1410$, (c) $Re_\theta=2000$, (d) $Re_\theta=3270$, (e) $Re_\theta=4060$.

不管动量雷诺数增大还是减小, 其适用范围均可达到 $d^+ \simeq 8.5$ 以上, 甚至接近 $d^+ \simeq 10$ 的水平, 因此内层律的适用范围与线性律相比得到了十分明显的提升.

7 结论

本文基于零压梯度平板湍流DNS和LES数据, 对类-1湍流边界层进行深入分析. 不同于传统壁面律分析中的时均局部摩擦速度尺度, 本文研究采用了时-空间平均摩擦速度尺度, 得到了以下相关结论: (1) 分析

得到了与传统内层线性律 $u^+ = d^+$ 等价的以时-空平均摩擦速度为尺度的内层线性律 $u^+ = (1 \pm \Delta)d^+$, 并指出了该等价关系中单参数控制机理的物理实质; (2) 应用类-2边界层分析中的广义抑制和加强函数, 提出并构建了适用于类-1边界层内层速度剖线的内层律, $u^+(d^+) = d^+ \left(1 \pm \Delta e^{-d^+/D} \right)$, 并指出内层律关系中双控制参数机理和物理实质以及各参数的物理意义; (3) 从速度和切应力的角度, 对比了线性律和内层律的准确性, 明确了线性律和内层律对速度剖面描述的适用范围.

表 3 内层律和线性律的临界点位置对比

Table 3 Comparisons of the critical point locations between inner-layer law and viscous linear law

Re_θ	速度剖面内外层过度起始点 d_{s-DNS}^*	线性律适用范围临界点 $d_{s-(linear\ law)}^*$	内层律适用范围临界点 $d_{s-(inner-layer\ law)}^*$
670	10.54	5.80	9.35
1000	10.46	5.75	9.21
1410	10.47	5.71	8.52
2000	10.42	5.70	6.38
2540	10.45	5.74	13.1893
3270	10.53	5.75	17.8352
4060	10.54	5.71	13.22

研究发现内层律的适用区域远大于线性律. 以DNS数据为基准, 线性律的适用范围通常在 $d^* \simeq 6.0$ 以下, 而内层律的适用范围在 Δ 偏离0时 ($|\Delta| \geq 0.1$) 可以达到 $d^* \simeq 8.0$ 以上, 甚至超过 $d^* = 10$; (4) 通过对边界层控制方程的分析得到了内层律控制参数对于雷诺数的不依赖性质, 为进一步构建统一完整的, 包括内层、过渡层和外层的类-1、类-2乃至类-3湍流速度边界层的普适数学表达奠定了坚实基础.

8 展望

基于研究中的新发现和深度分析, 后续研究可以在以下四个方面展开: (1) 对类-1湍流边界层进一步给出其黏性底层数学表达式的适用范围, 即底层律转变

点 d_s^+ 和 Δ 的准确依赖关系, 并且给出当 $d^* \simeq 8.0$ 时的 Δ 最小值点; (2) 基于双控制参数内层律和外层半对数线性律, 研究类-1边界层过渡区和尾迹区的速度剖面解析表达, 从而给出整个湍流速度边界层, 包括内层、过渡层、对数层和尾迹层的准确解析数学描述; (3) 在时-空平均壁面摩擦速度尺度下, 进一步研究复杂几何构型的类-3湍流速度边界层, 即时均壁面切应力在流向及展向同为相关坐标函数的完整数学表达式, 并试图建立完整的、类别统一的壁湍流速度普适规律数学解析描述; (4) 在研究(3)的基础上, 将各类别的湍流壁面律拓展至传热领域, 更进一步构建流-热统一、类别统一, 包含湍流边界层各个亚层, 如内层、过渡层、半对数层和尾迹层的完整热湍流壁面普适规律数学解析描述.

致谢 本文采用的数据来自于Schlatter和Örlü所公布的零压梯度平板湍流DNS和LES数据(<https://www.mech.kth.se/~ps-chlatt/DATA/README.html>), 作者对数据的无偿共享表示感谢.

参考文献

- 1 Prandtl L. Über die ausgebildete turbulenz. NACA Tech Memo, 1926, 435: 62
- 2 von Karman T. Mechanical Similitude and Turbulence. Technical Report. Washington DC: National Advisory Committee on Aeronautics, 1931
- 3 Bailey S C C, Hultmark M, Monty J P, et al. Obtaining accurate mean velocity measurements in high Reynolds number turbulent boundary layers using Pitot tubes. *J Fluid Mech*, 2013, 715: 642–670
- 4 Mehdi F, Klewicki J C, White C M. Mean momentum balance analysis of rough-wall turbulent boundary layers. *Phys D-Nonlin Phenomena*, 2010, 239: 1329–1337
- 5 Khujadze G, Oberlack M. DNS and scaling laws from new symmetry groups of ZPG turbulent boundary layer flow. *Theor Comput Fluid Dyn*, 2004, 18: 391–411
- 6 Khujadze G, Oberlack M. DNS and new scaling laws of ZPG turbulent boundary layer flow. In: Proceedings of Fifth International Symposium on

- Turbulence and Shear Flow Phenomena. July 30–August 2, 2019. Southampton, 2005. 23–26
- 7 Spalart P R. Direct simulation of a turbulent boundary layer up to $Re_\theta=1410$. *J Fluid Mech*, 2006, 187: 61–98
- 8 Kline S J, Reynolds W C, Schraub F A, et al. The structure of turbulent boundary layers. *J Fluid Mech*, 1967, 30: 741–773
- 9 de Graaff D B, Eaton J K. Reynolds-number scaling of the flat-plate turbulent boundary layer. *J Fluid Mech*, 2000, 422: 319–346
- 10 Xu H Y, Guo J H. Direct numerical simulation of turbulence in square and rectangular annular ducts: Part-I mean flow analyses, Re-understanding fully-developed turbulent boundary layer in duct (in Chinese). *Sci Sin-Phys Mech Astron*, 2013, 43: 634–651 [徐弘一, 郭加宏. 方型和矩型环管湍流直接数值模拟分析: I. 平均流场, 对直管道充分发展湍流边界层的再认识. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2013, 43: 634–651]
- 11 Xu H. Direct numerical simulation of turbulence in a square annular duct. *J Fluid Mech*, 2009, 621: 23–57
- 12 Cao B, Xu H. Re-understanding the law-of-the-wall for wall-bounded turbulence based on in-depth investigation of DNS data. *Acta Mech Sin*, 2018, 34: 793–811
- 13 Schlatter P, Örlü R. Assessment of direct numerical simulation data of turbulent boundary layers. *J Fluid Mech*, 2010, 659: 116–126
- 14 Schlatter P, Örlü R, Li Q, et al. Turbulent boundary layers up to $Re_\theta=2500$ studied through simulation and experiment. *Phys Fluids*, 2009, 21: 051702
- 15 Schlatter P, Li Q, Brethouwer G, et al. Simulations of spatially evolving turbulent boundary layers up to $Re_\theta=4300$. *Int J Heat Fluid Flow*, 2010, 31: 251–261
- 16 Eitel-Amor G, Örlü R, Schlatter P. Simulation and validation of a spatially evolving turbulent boundary layer up to $Re_\theta=8300$. *Int J Heat Fluid Flow*, 2014, 47: 57–69
- 17 Krug D, Philip J, Marusic I. Revisiting the law of the wake in wall turbulence. *J Fluid Mech*, 2016, 811: 421–435
- 18 Marusic I, McKeon B J, Monkewitz P A, et al. Wall-bounded turbulent flows at high Reynolds numbers: Recent advances and key issues. *Phys Fluids*, 2010, 22: 065103
- 19 Wu X, Moin P. Direct numerical simulation of turbulence in a nominally zero-pressure-gradient flat-plate boundary layer. *J Fluid Mech*, 2009, 630: 5
- 20 Xu H Y, Cao B C. Research on the near-wall streamwise velocity of fully-developed turbulence in generic straight duct: re-understanding the von Karman Law-of-the-Wall relations (in Chinese). In: National Proceedings of Fluid Dynamics. Beijing, 2016. 19 [徐弘一, 曹博超. 关于一般直管道充分发展湍流近壁平均流向速度规律讨论: 对冯·卡门平壁律的再认知. 见: 全国流体力学学术会议. 北京, 2016. 19]
- 21 Liu C, Gao Y, Tian S, et al. Rortex—A new vortex vector definition and vorticity tensor and vector decompositions. *Phys Fluids*, 2018, 30: 035103, arXiv: 1802.04099

Reynolds-number independent inner-layer analytical formulation for type-A turbulent boundary layer based on DNS data

FU YiZhan, WANG Duo, CAO BoChao & XU HongYi^{*}

Department of Aeronautics and Astronautics, Fudan University, Shanghai 200433, China

Searching for universal law of turbulent boundary layer (TBL) has been one of the persistent efforts of turbulence research community for the last century. Based on the direct numerical simulation (DNS) data for a zero-pressure-gradient flat-plate TBL from Schlatter and Örlü, the paper pointed out the necessity to reunderstand the conventional TBL theory based on the recent TBL classification proposed by Cao and Xu. Type-A TBL in the classification, as represented by the DNS data, was thoroughly investigated in the inner layer using the velocity scales of both conventional time-averaged local frictional velocity and newly-defined time-space or ensemble-averaged frictional velocity. With the ensemble-averaged frictional velocity as scale, the new mathematical expressions for the inner-layer law were derived by introducing the general damping and enhancing functions. The control parameters in the expressions were found independent on Reynolds number based on the universal governing equation under the ensemble-averaged scales. The physical meanings of the parameters in the law formulation were analyzed and clearly demonstrated that the parameter Δ represented the incremental local wall-shear stress and the parameter D stood for the characteristic length within which the linear viscous law relation was applicable. Comparing to the conventional law-of-the-wall in inner layer, the current law formulation significantly improved the law's predictive accuracy and applicable range. Particularly, when the time-averaged wall-shear stress gets away from the ensemble-averaged wall shear stress, the new inner-layer law is applicable up to a near-wall range of $d^* \cong 10.0$, while the conventional inner-layer law can only perform well within a wall distance of $d^* \cong 6.0$. With these studies, the properties of the general damping and enhancing functions are well understood, which provides a solid physical and mathematical foundation for developing the complete analytical formulations for law-of-the-wall, which are expected to include the inner layer, the transition layer, the semi-log linear layer and the wake layer.

type-A turbulent boundary layer, semi-finite zero-pressure gradient flat-plate flow, law-of-the-wall, inner-layer law, direct numerical simulation

PACS: 47.27.E-, 42.27.ek, 42.27.N-, 42.27.nb, 02.60.C-, 02.60.Cb

doi: [10.1360/SSPMA-2019-0082](https://doi.org/10.1360/SSPMA-2019-0082)