剖分与条件逆像熵的变分原理

严可颂, 曾凡平*

广西财经学院信息与统计学院, 南宁 530003

E-mail: ksyang@mail.ustc.edu.cn, fpzeng@gxu.edu.cn

收稿日期: 2016-06-12; 接受日期: 2018-04-02; 网络出版日期: 2018-11-01; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11401288 和 11761012)、广西高校中青年教师基础能力提升 (批准号: KY2016YB405)、广西高等学校中青年骨干教师培育计划、广西财经学院数量经济重点实验室 (批准号: 2016YBKT02) 和跨境电商重点实验室资助项目

摘要 本文对非逆映射引入了两个新的类熵不变量: 剖分逆像熵和条件逆像熵, 得到了它们与测度条件熵之间的变分原理. 具体地, 设 (X, T) 为一个拓扑动力系统, ξ 为 X 的一个可测剖分. 如果 $T^{-1}\xi \preceq \xi$, 则 $h_{\text{top}}(T | [\xi]^-) \geq \sup_{\mu \in \mathcal{M}(X, T)} h_{\mu}(T | [\xi]^-)$. 进一步, 如果 $[\xi]^-$ 可以由 X 的一个上半连续剖分所生成, 则 $h_{\text{top}}(T | [\xi]^-) = \sup_{\mu \in \mathcal{M}(X, T)} h_{\mu}(T | [\xi]^-)$. 作为应用, 本文讨论了逆像熵的相对化, 并且得到 Cheng-Newhouse 逆像熵的其他公式.

关键词 逆像熵 测度条件熵 变分原理 非逆映射

MSC (2010) 主题分类 37A35, 37B40

1 引言

本文中, 一个拓扑动力系统是指二元组 (X, T) , 其中 (X, d) 是一个紧致度量空间, $T: X \rightarrow X$ 为 X 上的一个连续满射, 这里 d 为 X 上的度量.

众所周知, 测度熵和拓扑熵是目前人们理解动力系统复杂性的重要工具. 1958 年, Kolmogorov^[1] 借鉴 Shannon 信息论中思想首先在经典遍历论中引入了测度熵的概念 (参见文献 [2]). 1965 年, Adler 等^[3] 在拓扑动力系统中引入了拓扑熵的概念. 随后, Dinaburg^[4] 和 Bowen^[5] 使用分离集和张成集给出了拓扑熵的两个等价定义. 一般而言, 拓扑熵反映了拓扑动力系统中轨道的极大指数增长率, 而测度熵反映了保测系统中有限剖分在迭代下信息的极大损失程度.

拓扑熵与测度熵之间一个重要的关系是经典的变分原理. 更多有关这方面的介绍, 参见专著 [6]. 给定一个拓扑动力系统 (X, T) , Goodwyn^[7] 证明了不等式 $h_{\mu}(T) \leq h_{\text{top}}(T)$, 其中 $h_{\mu}(T)$ 表示 X 上 T -不变 Borel 概率测度 μ 的测度熵, $h_{\text{top}}(T)$ 表示 (X, T) 的拓扑熵. 随后, Goodman^[8] 证明了 $\sup_{\mu} h_{\mu}(T) \geq h_{\text{top}}(T)$, 其中上确界取遍 X 上所有 T -不变 Borel 概率测度, 从而完成了经典的拓扑熵变分原理. 关于 $\mathbb{Z}_+^d$ -作用的变分原理, Misiurewicz^[9] 给出了一个简洁的证明. 至此之后, 在拓扑与测

英文引用格式: Yan K S, Zeng F P. Variational principles of partial pre-image entropy and conditional pre-image entropy (in Chinese). Sci Sin Math, 2019, 49: 681–698, doi: 10.1360/SCM-2016-0381

度意义下定义新的熵不变量并讨论它们之间的关系成为动力系统研究的一个重要专题, 引起了人们的广泛关注. 例如, 关于局部化版本的变分原理, 可参见文献 [10–13]; 关于更大群作用的变分原理, 可参见文献 [14–19].

众所周知, 如果讨论的映射 T 为可逆的, 则 T 与其逆映射 T^{-1} 具有相同的拓扑熵. 但是, 如果映射 T 不为可逆的, 其逆为一个集值映射, 从而导致点 $x \in X$ 的迭代逆像集 $T^{-n}(x) = \{z \in X : T^n z = x\}$ 通常不再是一个单点集. 因此, 对不可逆映射通过不同方式理解“过程延展到过去”, 便产生了一系列新的类熵不变量.

1991 年, Langevin 和 Walczak [20] 将“逆”视为一种关系, 并对这个关系建立了一个熵的概念 (类似于 Ghys 等 [21] 讨论的叶状结构的熵). 它基于通过点的“原像树”的结构来区分不同的点, 称之为逆像关系熵. 更多关于逆像关系熵的讨论, 可参见文献 [22, 23]. 随后, 一系列基于不可逆映射逆像结构的重要类熵不变量被引入, 并且建立了它们与拓扑熵之间的联系. 例如, 逐点逆像熵、逆像分支熵 [23–26]、划分逆像熵和捆绑逆像熵 [27] 等.

下面简要回顾 Hurley [25] 对不可逆映射引入的两个熵不变量. Hurley 考虑的熵不变量主要着眼于单个点的逆像集的极大扩散率, 在文献 [23] 中称之为逐点逆像熵. 这两个逆像熵的定义区别在于上确界选取的位置不同, 具体如下:

$$h_p(T) := \sup_{x \in X} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log s(n, \epsilon, T, T^{-n}(x)),$$

$$h_m(T) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \sup_{x \in X} s(n, \epsilon, T, T^{-n}(x)),$$

其中 $s(n, \epsilon, T, K)$ 表示子集 $K \subset X$ 的所有 (n, ϵ) -分离集的最大基数 (具体定义见第 2.3 小节).

这里有一个自然的问题: 逐点逆像熵 $h_p(T)$ 或 $h_m(T)$ 是否具有类似于拓扑熵的变分原理? 为了解决这个问题, 人们试图找到逐点逆像熵一个合适的测度化版本的对应. 然而, 令人遗憾的是这一问题至今仍未得到解决. 2005 年, Cheng 和 Newhouse [28] 及 Cheng [29] 从拓扑和测度两方面引入了两类新的“逆像熵”不变量, 并证明了它们之间的变分原理. 一方面, Cheng 和 Newhouse 通过微调逐点逆像熵 $h_m(T)$ 的定义, 引入了拓扑逆像熵 $h_{\text{pre}}(T)$ 的概念. 确切地,

$$h_{\text{pre}}(T) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \sup_{k \geq n, x \in X} s(n, \epsilon, T, T^{-k}(x)).$$

另一方面, 通过考虑 T 的过去行为, 文献 [28] 中引入了一类测度不变量. 这个合适的量可以简单地看作 T 相对于无限过去 σ -代数 $\mathcal{B}^-$ 的测度条件熵, 其中

$$\mathcal{B}^- := \bigcap_{n=0}^{\infty} T^{-n} \mathcal{B}(X),$$

其中 $\mathcal{B}(X)$ 为 X 上的 Borel σ -代数. Cheng 和 Newhouse 称它为测度逆像熵, 并记为 $h_{\text{pre}, \mu}(T)$, 其中 μ 为一个 T -不变的 Borel 概率测度. 文献 [28] 中的结果表明, Cheng-Newhouse 拓扑逆像熵具有如下变分原理:

$$h_{\text{pre}}(T) = \sup_{\mu} h_{\text{pre}, \mu}(T),$$

其中上确界取遍 X 上所有 T -不变 Borel 概率测度. 最后, 顺便提一下, 相关专题在文献 [30] 中从压的观点出发进行了讨论.

不难看出, 逐点逆像熵和 Cheng-Newhouse 逆像熵满足下列不等式:

$$h_p(T) \leq h_m(T) \leq h_{\text{pre}}(T) \leq h_{\text{top}}(T).$$

此外, Hurley^[25] 建立了关于逐点逆像熵、分支逆像熵和拓扑熵的一个十分优美的不等式. 对于一般情形, 文献 [31] 中构造的例子说明 $h_p(T) < h_m(T)$ 可以成立. 一个自然的问题: 是否 Cheng-Newhouse 逆像熵可以满足如下等式:

$$h_{\text{pre}}(T) = \sup_{x \in X} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \sup_{k \geq n} s(n, \epsilon, T, T^{-k}(x))?$$

另一方面, 注意到, 对每个 $x \in X$ 和正整数 k , $T^{-k}(x)$ 为 X 中的闭子集, 且映射 $x \mapsto T^{-k}(x)$ 为 X 到 2^X 上的上半连续映射, 其中 2^X 表示 X 上所有非空闭子集构成的集合, 并赋予 Hausdorff 度量. 不难验证, 对 X 的任意开覆盖 $\mathcal{U}$, 函数 $x \mapsto \log N(\mathcal{U} | T^{-k}(x))$ 是上半连续的, 其中 $N(\mathcal{U} | K)$ 表示 $\mathcal{U}$ 中覆盖子集 $K \subset X$ 的所有子覆盖的最小基数. 给定正整数 n , 定义 $F_n : X \rightarrow [0, N(\mathcal{U})]$ 为

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \log \sup_{k \geq n} N\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\mathcal{U} \middle| T^{-k}(x)\right),$$

并记 $F(x) = \limsup_{n \rightarrow \infty} F_n(x)$. 因此, F_n 和 F 均为 X 上的 Borel 可测有界函数. 我们提出如下问题: 下列等式是否成立:

$$\begin{aligned} h_{\text{pre}}(T) &= \sup_{\mu} \int_X \sup_{\text{开覆盖 } \mathcal{U}} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \sup_{k \geq n} N\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\mathcal{U} \middle| T^{-k}(x)\right) d\mu(x) \\ &= \sup_{\mu} \sup_{\text{开覆盖 } \mathcal{U}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_X \log \sup_{k \geq n} N\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\mathcal{U} \middle| T^{-k}(x)\right) d\mu(x)? \end{aligned}$$

在一定条件下, 本文对上面提出的两个问题给出了肯定的回答 (推论 5.6). 首先, 沿用文献 [27] 中的想法, 我们引入了一个新不变量: 剖分逆像熵, 作为经典拓扑熵和 Cheng-Newhouse 逆像熵的推广. 我们建立了剖分逆像熵与测度条件熵之间的变分原理 (定理 4.1). 此外, 我们讨论了不可逆系统逆像熵的相对化, 并得到了相对逆像熵的若干等价刻画 (定理 5.4 和 5.5).

2 剖分逆像熵

本节沿用文献 [27] 中的思想, 对不可逆映射引入一个新的类熵不变量: 剖分逆像熵, 并且对它的一些基本性质进行了讨论.

2.1 符号与基本概念

给定一个拓扑动力系统 (X, T) , 记 $\mathcal{B}(X)$ 为 X 中 Borel 子集全体构成的 Borel σ -代数. 如果 X 中一族 Borel 子集的并集为 X , 则称它们构成 X 的一个覆盖; 如果 X 的一个覆盖由开集构成, 则称它为 X 的一个开覆盖; 如果 X 的一个覆盖由互不相交的集合构成, 则称它为 X 的一个剖分. 我们分别记 X 的有限覆盖、有限开覆盖和有限剖分全体为 $\mathcal{C}_X$ 、 $\mathcal{C}_X^o$ 和 $\mathcal{P}_X$.

对 X 的两个覆盖 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$, 如果 $\mathcal{U}$ 中的任意元素都包含在 $\mathcal{V}$ 的某个元素内, 则称 $\mathcal{U}$ 比 $\mathcal{V}$ 细 (记为 $\mathcal{U} \succeq \mathcal{V}$ 或 $\mathcal{V} \preceq \mathcal{U}$). 记 $\mathcal{U} \vee \mathcal{V} = \{U \cap V : U \in \mathcal{U}, V \in \mathcal{V}\}$. 显然, $\mathcal{U} \vee \mathcal{V} \succeq \mathcal{U}$ 且 $\mathcal{U} \vee \mathcal{V} \succeq \mathcal{V}$.

2.2 剖分逆像熵: 开覆盖定义

给定 $\mathcal{U} \in \mathcal{C}_X$. 对两个非负整数 M 和 N , 如果 $M \leq N$, 则记 $\mathcal{U}_M^N = \bigvee_{n=M}^N T^{-n}\mathcal{U}$. 对子集 $K \subset X$, 定义 $N(\mathcal{U} | K)$ 为 $\mathcal{U}$ 中覆盖 K 的所有子覆盖的最小基数. 如果 $K = X$, 则将 $N(\mathcal{U} | K)$ 简记为 $N(\mathcal{U})$. 设 ξ 为 X 的一个剖分, 则 ξ 相对于 $\mathcal{U}$ 的剖分逆像熵定义为

$$h_{\text{top}}(T, \mathcal{U} | [\xi]^-) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \sup_{k \geq n, A \in \xi} N(\mathcal{U}_0^{n-1} | T^{-k}(A)). \quad (2.1)$$

进一步, ξ 的剖分逆像熵定义为

$$h_{\text{top}}(T | [\xi]^-) := \sup_{\mathcal{U} \in \mathcal{C}_X^o} h_{\text{top}}(T, \mathcal{U} | [\xi]^-). \quad (2.2)$$

注 2.1 不难验证, 如果 $\xi = \{X\}$ 为平凡剖分, 则 $h_{\text{top}}(T | [\xi]^-) = h_{\text{top}}(T)$; 如果 $\xi = \{\{x\} : x \in X\}$ 为点剖分, 则 $h_{\text{top}}(T | [\xi]^-) = h_{\text{pre}}(T)$.

引理 2.2 设 (X, T) 为一个拓扑动力系统, ξ_1 和 ξ_2 为 X 的两个剖分. 如果 $\xi_1 \succeq \xi_2$, 则以下不等式成立:

$$h_p(T) \leq h_m(T) \leq h_{\text{pre}}(T) \leq h_{\text{top}}(T | [\xi_1]^-) \leq h_{\text{top}}(T | [\xi_2]^-) \leq h_{\text{top}}(T). \quad (2.3)$$

下面给出剖分逆像熵的一个基本性质.

定理 2.3 (幂规则) 设 (X, T) 为一个拓扑动力系统, ξ 为 X 的一个剖分, 则对任意 $m \in \mathbb{N}$, 有

$$h_{\text{top}}(T^m | [\xi]^-) = m \cdot h_{\text{top}}(T | [\xi]^-). \quad (2.4)$$

证明 首先, 对任意给定的 $\mathcal{U} \in \mathcal{C}_X^o$, 有

$$\begin{aligned} h_{\text{top}}\left(T^m, \bigvee_{i=0}^{m-1} T^{-i}\mathcal{U} \middle| [\xi]^- \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \sup_{k \geq n, A \in \xi} N\left(\bigvee_{j=0}^{n-1} T^{-mj} \left(\bigvee_{i=0}^{m-1} T^{-i}\mathcal{U}\right) \middle| T^{-km}(A)\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \sup_{k \geq n, A \in \xi} N\left(\bigvee_{i=0}^{mn-1} T^{-i}\mathcal{U} \middle| T^{-km}(A)\right) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{mn} \log \sup_{k \geq mn, A \in \xi} N\left(\bigvee_{i=0}^{mn-1} T^{-i}\mathcal{U} \middle| T^{-k}(A)\right) \\ &= m \cdot h_{\text{top}}(T, \mathcal{U} | [\xi]^-). \end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned} h_{\text{top}}(T^m | [\xi]^-) &= \sup_{\mathcal{U} \in \mathcal{C}_X^o} h_{\text{top}}\left(T^m, \bigvee_{i=0}^{m-1} T^{-i}\mathcal{U} \middle| [\xi]^- \right) \\ &\leq m \cdot \sup_{\mathcal{U} \in \mathcal{C}_X^o} h_{\text{top}}(T, \mathcal{U} | [\xi]^-) = m \cdot h_{\text{top}}(T | [\xi]^-). \end{aligned}$$

下面证明相反方向不等式也成立. 给定 $\mathcal{U} \in \mathcal{C}_X^o$. 设 ϵ 为 $\mathcal{U}$ 的一个 Lebesgue 数. 由 T 的一致连续性可知, 存在 $\delta > 0$ 使得 $d(x, y) < \delta$ 蕴含 $d(T^i x, T^i y) < \epsilon$, $\forall 0 \leq i \leq m-1$. 设 $A \in \xi$. 对 $n \in \mathbb{N}$ 及

$k \geq n$, 我们可以选择 $0 \leq l_1, l_2 < m$ 使得 $k = k_1 m - l_1$ 和 $n + l_1 = n_1 m - l_2$. 设 F 为 X 的一个有限子集且满足

$$\bigcup_{x \in F} \bigcap_{i=0}^{n_1-1} T^{-mi} B(T^{mi} x, \delta) \supset T^{-k_1 m}(A), \quad (2.5)$$

其中 $B(T^{mi} x, \delta) = \{y \in X : d(T^{mi} x, y) < \delta\}$.

断言 2.4 $\bigcup_{x \in T^{l_1}(F)} \bigcap_{i=0}^{n-1} T^{-i} B(T^i x, \epsilon) \supset T^{-k}(A)$.

证明 对 $y \in T^{-k}(A)$, 存在 $y_1 \in T^{-k_1 m}(A)$ 使得 $T^{l_1} y_1 = y$. 由 (2.5) 知, 存在 $x_1 \in F$ 满足 $d(T^{mi} y_1, T^{mi} x_1) < \delta$ 对所有 $0 \leq i \leq n_1 - 1$ 成立. 这说明了 $d(T^i x_1, T^i y_1) < \epsilon$ 对任意 $0 \leq i \leq n_1 m - 1$ 成立. 记 $x = T^{l_1} x_1$, 则 $x \in T^{l_1}(F)$ 且 $d(T^i x, T^i y) < \epsilon$ 对所有 $0 \leq i \leq n - 1$ 成立. 这说明

$$y \in \bigcup_{x \in T^{l_1}(F)} \bigcap_{i=0}^{n-1} T^{-i} B(T^i x, \epsilon).$$

断言证毕. □

设 $\mathcal{U}_\epsilon$ 为 X 中半径为 ϵ 的开球构成的开覆盖. 由上述讨论可知,

$$N\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i} \mathcal{U} \middle| T^{-k}(A)\right) \leq N\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i} \mathcal{U}_\epsilon \middle| T^{-k}(A)\right) \leq N\left(\bigvee_{i=0}^{n_1-1} T^{-mi} \mathcal{U}_\delta \middle| T^{-k_1 m}(A)\right).$$

由此可知,

$$\begin{aligned} m \cdot h_{\text{top}}(T, \mathcal{U} \mid [\xi]^-) &= m \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \sup_{k \geq n, A \in \xi} N\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i} \mathcal{U} \middle| T^{-k}(A)\right) \\ &\leq \lim_{n_1 \rightarrow \infty} \left(\frac{n_1 m}{n_1 m - l_1 - l_2} \cdot \frac{1}{n_1} \log \sup_{k_1 \geq n_1, A \in \xi} N\left(\bigvee_{i=0}^{n_1-1} T^{-mi} \mathcal{U}_\delta \middle| T^{-k_1 m}(A)\right) \right) \\ &= h_{\text{top}}(T^m, \mathcal{U}_\delta \mid [\xi]^-) \leq h_{\text{top}}(T^m \mid [\xi]^-). \end{aligned}$$

由 $\mathcal{U}$ 的任意性, 可得 $m \cdot h_{\text{top}}(T \mid [\xi]^-) \leq h_{\text{top}}(T^m \mid [\xi]^-)$. □

2.3 剖分逆像熵: 分离集与生成集定义

设 K 为 X 的一个非空子集. 对任意的 $\epsilon > 0$ 及 $n \in \mathbb{N}$, K 的子集 E 称为 K 的 (n, ϵ) -分离集, 如果任意 $x, y \in E$, $x \neq y$ 蕴含 $d_n(x, y) \geq \epsilon$, 其中

$$d_n(x, y) := \max_{0 \leq i \leq n-1} d(T^i x, T^i y).$$

X 的子集 F 称为 K 的 (n, ϵ) -张成集, 若对任意 $x \in K$, 都存在 $y \in F$ 使得 $d_n(x, y) < \epsilon$. 记 $s(n, \epsilon, T, K)$ 为 K 的所有 (n, ϵ) -分离集的最大基数; 相应地, 记 $r(n, \epsilon, T, K)$ 为 K 的所有 (n, ϵ) -张成集的最小基数.

由 X 的紧致性可知, $s(n, \epsilon, T, K)$ 和 $r(n, \epsilon, T, K)$ 均为有限的. 直接根据定义可得, 如果 $\epsilon_1 < \epsilon_2$, 则 $s(n, \epsilon_1, T, K) \geq s(n, \epsilon_2, T, K)$, $r(n, \epsilon_1, T, K) \geq r(n, \epsilon_2, T, K)$.

设 ξ 为 X 的一个剖分. 对 $\epsilon > 0$, 定义

$$h_{\text{sep}}(T, \epsilon \mid [\xi]^-) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \sup_{k \geq n, A \in \xi} s(n, \epsilon, T, T^{-k}(A)),$$

$$h_{\text{span}}(T, \epsilon | [\xi]^-) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \sup_{k \geq n, A \in \xi} r(n, \epsilon, T, T^{-k}(A)).$$

进一步, 采用分离集和生成集定义剖分 ξ 的逆像熵如下:

$$h_{\text{sep}}(T | [\xi]^-) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} h_{\text{sep}}(T, \epsilon | [\xi]^-) \quad \text{及} \quad h_{\text{span}}(T | [\xi]^-) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} h_{\text{span}}(T, \epsilon | [\xi]^-).$$

以下结果建立了开覆盖、分离集和生成集所定义的剖分逆像熵之间的联系.

引理 2.5 设 (X, T) 为一个拓扑动力系统, ξ 为 X 的一个剖分, 则有

$$h_{\text{top}}(T | [\xi]^-) = h_{\text{sep}}(T | [\xi]^-) = h_{\text{span}}(T | [\xi]^-). \quad (2.6)$$

证明 引理的证明可以借鉴经典拓扑熵的思想与技巧. 为了完整性, 我们在这里简要概括证明思路. 利用标准的处理技巧 (参见文献 [6, 第 173 页]), 对任意 X 的子集 K 及 $n \in \mathbb{N}$, 有如下性质成立:

- (1) 对任意的 $\epsilon > 0$, 有 $r(n, \epsilon, T, K) \leq s(n, \epsilon, T, K) \leq r(n, \epsilon/2, T, K)$;
- (2) 对任意的 $n \in \mathbb{N}$ 及满足 Lebesgue 数为 2δ 的开覆盖 $\mathcal{U} \in \mathcal{C}_X^o$, 有 $N(\mathcal{U}_0^{n-1} | K) \leq r(n, \delta, T, K)$;
- (3) 对任意满足 $\text{diam}(\mathcal{U}) < \epsilon$ 的 $\mathcal{U} \in \mathcal{C}_X^o$, 有 $s(n, \epsilon, T, K) \leq N(\mathcal{U}_0^{n-1} | K)$.

接下来, 结合剖分逆像熵的定义及以上结论, 我们不难验证 (2.6) 成立. $\square$

3 条件测度熵

本节简要回顾拓扑动力系统中条件测度熵的定义, 以及我们在后续讨论中需要用到的一些基本性质. 更加详细的介绍可参见文献 [6, 32–34].

3.1 条件测度熵

设 (X, T) 为一个拓扑动力系统. 我们分别用 $\mathcal{M}(X)$ 、 $\mathcal{M}(X, T)$ 和 $\mathcal{M}^e(X, T)$ 表示 X 的所有 Borel 概率测度、 T -不变 Borel 概率测度和遍历的 T -不变 Borel 概率测度全体构成的集合. 一个熟知的事实是在赋予弱*-拓扑下, $\mathcal{M}(X)$ 和 $\mathcal{M}(X, T)$ 都为凸的紧致可度量空间, 并且 $\mathcal{M}^e(X, T)$ 为 $\mathcal{M}(X)$ 的一个非空 G_δ -子集 (参见文献 [6, 第 6 章]).

给定 $\alpha \in \mathcal{P}_X$ 、 $\mu \in \mathcal{M}(X)$ 和子 σ -代数 $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(X)$, 定义

$$H_\mu(\alpha | \mathcal{A}) = \sum_{A \in \alpha} \int_X -E(1_A | \mathcal{A}) \log E(1_A | \mathcal{A}) d\mu, \quad (3.1)$$

其中 $E(1_A | \mathcal{A})$ 表示 A 的特征函数 1_A 关于 $\mathcal{A}$ 的条件期望. 一个基本的事实: $H_\mu(\alpha | \mathcal{A})$ 关于 α 递增, 并且关于 $\mathcal{A}$ 递减, 可参见专著 [6, 32]. 记 $\mathcal{N} = \{\emptyset, X\}$, 定义

$$H_\mu(\alpha) := H_\mu(\alpha | \mathcal{N}) = - \sum_{A \in \alpha} \mu(A) \log \mu(A). \quad (3.2)$$

不难验证, $H_\mu(\alpha | \beta) = H_\mu(\alpha \vee \beta) - H_\mu(\beta)$ 对任意的 $\alpha, \beta \in \mathcal{P}_X$ 成立. 更一般地, 对子 σ -代数 $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(X)$, 我们也有

$$H_\mu(\alpha \vee \beta | \mathcal{A}) = H_\mu(\beta | \mathcal{A}) + H_\mu(\alpha | \beta \vee \mathcal{A}). \quad (3.3)$$

以下引理中结论是熟知的, 可参见 Walters 的专著 [6, 定理 4.7].

引理 3.1 设 (X, T) 为一个拓扑动力系统, $\mu \in \mathcal{M}(X)$, $\alpha \in \mathcal{P}_X$. 如果 $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \dots$ 为一个递增的子 σ -代数序列且满足 $\mathcal{F}_n \nearrow \mathcal{F}$ (或者 $\mathcal{F}_1 \supseteq \mathcal{F}_2 \supseteq \dots$ 为一个递减的子 σ -代数序列满足 $\mathcal{F}_n \searrow \mathcal{F}$), 则 $H_\mu(\alpha | \mathcal{F}_n) \searrow H_\mu(\alpha | \mathcal{F})$ (或者 $H_\mu(\alpha | \mathcal{F}_n) \nearrow H_\mu(\alpha | \mathcal{F})$).

如果 $\mu \in \mathcal{M}(X, T)$ 且 $\mathcal{A}$ 为 X 的一个 T -不变子 σ -代数 (即 $T^{-1}\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}$), 不难验证对任意的 $\alpha \in \mathcal{P}_X$, $a_n = H_\mu(\alpha_0^{n-1} | \mathcal{A})$ 为一个非负的次可加序列, 即 $a_{n+m} \leq a_n + a_m$ 对所有的正整数 n 和 m 成立. 众所周知,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \inf_{n \geq 1} \frac{a_n}{n}.$$

因此, α 关于 $\mathcal{A}$ 的条件熵定义为

$$h_\mu(T, \alpha | \mathcal{A}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H_\mu(\alpha_0^{n-1} | \mathcal{A}) = \inf_{n \geq 1} \frac{1}{n} H_\mu(\alpha_0^{n-1} | \mathcal{A}). \quad (3.4)$$

进一步, 系统 (X, T, μ) 关于 $\mathcal{A}$ 的条件测度熵定义为

$$h_\mu(T | \mathcal{A}) = \sup_{\alpha \in \mathcal{P}_X} h_\mu(T, \alpha | \mathcal{A}). \quad (3.5)$$

注意到, 如果 $\mathcal{N}$ 为平凡子 σ -代数, 则条件测度熵还原为经典的测度熵, 这时将 $h_\mu(T, \alpha | \mathcal{N})$ 和 $h_\mu(T | \mathcal{N})$ 简记为 $h_\mu(T, \alpha)$ 和 $h_\mu(T)$.

引理 3.2 (幂规则^[6]) 设 (X, T) 为一个拓扑动力系统及 $\mu \in \mathcal{M}(X, T)$. 如果 $\mathcal{A}$ 为一个子 σ -代数满足 $T^{-1}\mathcal{A} = \mathcal{A}$, 则对任意的 $m \in \mathbb{N}$, 都有

$$h_\mu(T^m | \mathcal{A}) = m \cdot h_\mu(T | \mathcal{A}). \quad (3.6)$$

引理 3.3^[6] 设 (X, T) 为一个拓扑动力系统, $\mathcal{A}$ 为一个 T -不变子 σ -代数. 如果 $\mu \in \mathcal{M}(X, T)$, 则对任意的 $\alpha, \beta \in \mathcal{P}_X$, 有

$$h_\mu(T, \alpha | \mathcal{A}) \leq h_\mu(T, \beta | \mathcal{A}) + H_\mu(\alpha | \beta). \quad (3.7)$$

3.2 测度剖分逆像熵

设 (X, T) 为一个拓扑动力系统. 如果 $(\alpha_i : i \in I)$ 为 X 的可数个有限剖分, 则剖分 $\alpha = \bigvee_{i \in I} \alpha_i$ 称为可测剖分. 设 ξ 为 X 的一个可测剖分, 定义 $[\xi]$ 为 ξ 生成的 σ -代数. 记 $[\xi]^{-k} = T^{-k}[\xi]$, 则关于 ξ 的无限过去 σ -代数定义为

$$[\xi]^- = \bigcap_{k=0}^{\infty} [\xi]^{-k} = \bigcap_{k=0}^{\infty} T^{-k}[\xi].$$

如果 ξ 为 X 的一个 T -不变剖分 (即 $T^{-1}\xi \preceq \xi$), 容易验证 $T^{-1}[\xi] \subseteq [\xi]$ 且 $T^{-1}[\xi]^- = [\xi]^-$. 此时, 对 $\alpha \in \mathcal{P}_X$ 及 $\mu \in \mathcal{M}(X, T)$, α 关于 ξ 的测度剖分逆像熵定义为

$$h_\mu(T, \alpha | [\xi]^-) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H_\mu(\alpha_0^{n-1} | [\xi]^-) = \inf_{n \geq 1} \frac{1}{n} H_\mu(\alpha_0^{n-1} | [\xi]^-). \quad (3.8)$$

进一步, 系统 (X, T, μ) 关于 ξ 的测度剖分逆像熵定义为

$$h_\mu(T | [\xi]^-) = \sup_{\alpha \in \mathcal{P}_X} h_\mu(T, \alpha | [\xi]^-). \quad (3.9)$$

4 剖分逆像熵的变分原理

本节将建立拓扑剖分逆像熵与测度剖分逆像熵之间的联系. 首先, 拓扑空间 Z 的一个剖分 ζ 称为上半连续的, 若 $D \in \zeta$, U 为 Z 的一个满足 $D \subset U$ 的开集, 则存在 Z 的开集 V 满足 $D \subset V$ 使得如果 $A \in \zeta$ 且 $A \cap V \neq \emptyset$, 则 $A \subset U$. 注意到, 如果 ζ 为紧致度量空间 X 上的上半连续剖分, 则 ξ 为 X 的一个闭剖分, 并且商空间 $X|_{\zeta}$ 为一个紧致度量空间. 更多这方面的详细介绍, 可参见专著 [35, 第 3 章].

定理 4.1 (剖分逆像熵的变分原理) 设 (X, T) 为一个拓扑动力系统, ξ 为 X 的一个可测剖分. 如果 $T^{-1}\xi \preceq \xi$, 则

$$h_{\text{top}}(T | [\xi]^-) \geq \sup_{\mu \in \mathcal{M}(X, T)} h_{\mu}(T | [\xi]^-). \quad (4.1)$$

进一步, 如果 $[\xi]^-$ 可以由 X 的一个上半连续剖分所生成, 则

$$h_{\text{top}}(T | [\xi]^-) = \sup_{\mu \in \mathcal{M}(X, T)} h_{\mu}(T | [\xi]^-). \quad (4.2)$$

定理 4.1 的一个直接推论如下:

推论 4.2 设 (X, T) 为一个拓扑动力系统, 则

(1) (拓扑熵的变分原理 [7, 8])

$$h_{\text{top}}(T) = \sup_{\mu \in \mathcal{M}(X, T)} h_{\mu}(T).$$

(2) (Cheng-Newhouse 逆像熵的变分原理 [28]) 如果 $\mathcal{B}^-$ 可以由 X 的一个上半连续剖分所生成, 则

$$h_{\text{pre}}(T) = \sup_{\mu \in \mathcal{M}(X, T)} h_{\text{pre}, \mu}(T).$$

4.1 一些引理

为证明定理 4.1, 我们需要一些引理. 首先, 简单回顾 Lebesgue 空间的测度分解. 设 ζ 为 Lebesgue 空间 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ 的一个可测剖分, 并记 $X|_{\zeta}$ 为因子空间. 设因子映射 $\pi: X \rightarrow X|_{\zeta}$ 定义为 $\pi(x) = C$, 其中 $x \in C \in \zeta$, 则 μ 可以关于 ζ 作如下测度分解:

$$\mu(A) = \int_{X|_{\zeta}} \mu_C(A \cap C) d\nu, \quad (4.3)$$

其中 μ_C 为 C 上的条件测度, $\nu = \pi\mu$.

以下两个结论是平凡的, 因此省略掉它们的详细证明.

引理 4.3 设 ζ 为 Lebesgue 空间 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ 的一个可测剖分. 如果 $\nu = \pi\mu$ 和 $\mu = \int_{X|_{\zeta}} \mu_C d\nu(C)$ 为 μ 关于 ζ 的测度分解, 则对任意的 $\alpha \in \mathcal{P}_X$, 有

$$H_{\mu}(\alpha | [\zeta]) = \int_{X|_{\zeta}} H_{\mu_C}(\alpha) d\nu(C). \quad (4.4)$$

引理 4.4 设 (X, T) 为一个拓扑动力系统. 如果 $\eta = \{B_0, B_1, \dots, B_k\}$ 为 X 的一个有限剖分, 则 $\mathcal{U} = \{B_0 \cup B_1, \dots, B_0 \cup B_k\}$ 为 X 的一个有限覆盖, 且对任意的 $n \in \mathbb{N}$ 及 X 的子集 K , 都有

$$N(\eta_0^{n-1} | K) \leq N(\mathcal{U}_0^{n-1} | K) \cdot 2^n. \quad (4.5)$$

4.2 定理 4.1 的证明

我们将沿用拓扑熵的经典变分原理^[6,9]的思想证明定理 4.1.

(1) 设 $\mu \in \mathcal{M}(X, T)$. 下面证明如下结论:

$$h_\mu(T | [\xi]^-) \leq h_{\text{top}}(T | [\xi]^-). \quad (4.6)$$

给定 $\alpha = \{A_1, \dots, A_s\} \in \mathcal{P}_X$ 及 $0 < \epsilon < \frac{1}{s \cdot \log s}$. 由 μ 的正则性可知, 存在紧致子集 $B_j \subset A_j$ ($1 \leq j \leq s$) 使得 $\mu(A_j \setminus B_j) < \epsilon$. 设 $\beta = \{B_0, B_1, \dots, B_s\}$, 其中 $B_0 = X \setminus \bigcup_{j=1}^s B_j$, 则有 $\beta \in \mathcal{P}_X$, $\mu(B_0) < s \cdot \epsilon$ 及

$$\begin{aligned} H_\mu(\alpha | \beta) &= - \sum_{i=0}^s \mu(B_i) \sum_{j=1}^s \frac{\mu(B_i \cap A_j)}{\mu(B_i)} \log \frac{\mu(B_i \cap A_j)}{\mu(B_i)} \\ &= -\mu(B_0) \sum_{j=1}^s \frac{\mu(B_0 \cap A_j)}{\mu(B_0)} \log \frac{\mu(B_0 \cap A_j)}{\mu(B_0)} \quad \left(\text{由于 } \frac{\mu(B_i \cap A_j)}{\mu(B_i)} = 0 \text{ 或 } 1, \forall i \neq 0 \right) \\ &\leq \mu(B_0) \log s < \epsilon \cdot s \log s < 1. \end{aligned}$$

此外, 还有 $\mathcal{U} = \{B_0 \cup B_1, \dots, B_0 \cup B_s\} \in \mathcal{C}_X^o$. 设 $n \in \mathbb{N}$, $k \geq n$. 如果 $\pi: X \rightarrow X|_{T^{-k}\xi}$ 为因子映射且 $\mu = \int_{X|_{T^{-k}\xi}} \mu_C d\pi\mu(C)$ 为 μ 关于 $T^{-k}\xi$ 的测度分解, 则由引理 4.3 和 4.4 可得

$$\begin{aligned} H_\mu(\beta_0^{n-1} | T^{-k}[\xi]) &= \int_{X|_{T^{-k}\xi}} H_{\mu_C}(\beta_0^{n-1}) d\pi\mu \\ &\leq \log \sup_{A \in \xi} N(\beta_0^{n-1} | T^{-k}(A)) \\ &\leq \log \left(\sup_{k \geq n, A \in \xi} N(\mathcal{U}_0^{n-1} | T^{-k}(A)) \cdot 2^n \right). \end{aligned}$$

令 $k \rightarrow \infty$, 再除以 n 并令 $n \rightarrow \infty$, 可得

$$h_\mu(T, \beta | [\xi]^-) \leq h_{\text{top}}(T, \mathcal{U} | [\xi]^-) + \log 2 \leq h_{\text{top}}(T | [\xi]^-) + \log 2.$$

这说明

$$h_\mu(T, \alpha | [\xi]^-) \leq h_\mu(T, \beta | [\xi]^-) + H_\mu(\alpha | \beta) \leq h_{\text{top}}(T | [\xi]^-) + \log 2 + 1.$$

由 α 的任意性可知, $h_\mu(T | [\xi]^-) \leq h_{\text{top}}(T | [\xi]^-) + \log 2 + 1$ 对任意的 $\mu \in \mathcal{M}(X, T)$ 成立. 注意到, 此不等式对所有的 T^n 都成立, 这蕴含了

$$n \cdot h_\mu(T | [\xi]^-) \leq n \cdot h_{\text{top}}(T | [\xi]^-) + \log 2 + 1, \quad \forall n.$$

因此,

$$h_\mu(T | [\xi]^-) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(h_{\text{top}}(T | [\xi]^-) + \frac{\log 2 + 1}{n} \right) = h_{\text{top}}(T | [\xi]^-),$$

即 (4.6) 成立.

(2) 设 $[\xi]^-$ 可以由 X 的一个上半连续剖分生成. 给定 $\epsilon > 0$. 下面证明存在 $\mu \in \mathcal{M}(X, T)$ 使得 $h_\mu(T | [\xi]^-) \geq h_{\text{sep}}(T, \epsilon | [\xi]^-)$, 这蕴含了

$$\sup_{\mu \in \mathcal{M}(X, T)} h_\mu(T | [\xi]^-) \geq h_{\text{top}}(T | [\xi]^-). \quad (4.7)$$

选取序列 $n_i \rightarrow \infty$, $k_i \geq n_i$ 及 $A_i \in \xi$ 满足

$$h_{\text{sep}}(T, \epsilon | [\xi]^-) = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{n_i} \log s(n_i, \epsilon, T, T^{-k_i}(A_i)).$$

设 E_i 为 $T^{-k_i}(A_i)$ 的一个具有基数为 $s(n_i, \epsilon, T, T^{-k_i}(A_i))$ 的 (n_i, ϵ) - 分离集. 令 $\sigma_i \in \mathcal{M}(X)$ 为均匀分布在 E_i 中各点上的原子测度, 即

$$\sigma_i = \frac{1}{|E_i|} \sum_{x \in E_i} \delta_x,$$

其中 δ_x 表示相对于点 x 的 Dirac 测度. 定义测度 $\mu_i \in \mathcal{M}(X)$ 如下:

$$\mu_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=0}^{n_i-1} \sigma_i \circ T^{-j}.$$

由 $\mathcal{M}(X)$ 的紧致性可知, $(\mu_i)_{i=1}^\infty$ 存在极限点. 不失一般性, 不妨假设 $\mu_i \rightarrow \mu$. 容易验证, $\mu \in \mathcal{M}(X, T)$ (参见文献 [6, 定理 6.9]). 接下来将证明 $h_\mu(T | [\xi]^-) \geq h_{\text{sep}}(T, \epsilon | [\xi]^-)$.

我们选取 X 的一个有限 Borel 剖分 β 使得对每个 $B \in \beta$ 都有 $\mu(\partial B) = 0$ 且 $\text{diam}(\beta) < \epsilon$. 对任意的 $k \geq 0$, 记 $[\xi]^k$ 为 $T^{-k}[\xi]$ 的 μ - 完备化. 由 $T^{-1}\xi \preceq \xi$ 可知,

$$[\xi]^0 \supset [\xi]^1 \supset [\xi]^2 \supset \cdots$$

令 $[\xi]^\infty = \bigcap_{k=0}^\infty [\xi]^k$, 则 $[\xi]^- \subset [\xi]^\infty$ 且对任意的 $l \in \mathbb{N}$, 都有 $T^{-l}[\xi]^k \subset [\xi]^{k+l}$.

引理 4.5 如果 $\alpha \in \mathcal{P}_X$ 满足对任意的 $A \in \alpha$, 有 $\mu(\partial A) = 0$, 则

$$H_\mu(\alpha | [\xi]^-) \geq \limsup_{i \rightarrow \infty} H_{\mu_i}(\alpha | [\xi]^\infty), \quad (4.8)$$

并且

$$H_{\mu_i}(\alpha | [\xi]^{k_i}) \geq \frac{1}{n_i} \sum_{j=0}^{n_i-1} H_{\sigma_i \circ T^{-j}}(\alpha). \quad (4.9)$$

证明 由于 $[\xi]^-$ 可以由 X 的一个上半连续剖分生成, 所以可以找到一个递增的有限剖分序列 $\beta_1 \preceq \beta_2 \preceq \cdots$ 使得 $[\xi]^- = \bigvee_{j=1}^\infty \beta_j$ 且每个 β_j 均满足 $\mu(\partial D) = 0, \forall D \in \beta_j$. 注意到, $\alpha \vee \beta_j$ 和 β_j 中的每个元素都满足边界的 μ - 测度为 0. 从而, 对任意的 $j \geq 1$, 有

$$H_\mu(\alpha \vee \beta_j) = \lim_{i \rightarrow \infty} H_{\mu_i}(\alpha \vee \beta_j) \quad \text{及} \quad H_\mu(\beta_j) = \lim_{i \rightarrow \infty} H_{\mu_i}(\beta_j).$$

由此可知, 对任意的 $j \geq 1$, 都有

$$\begin{aligned} H_\mu(\alpha | \beta_j) &= H_\mu(\alpha \vee \beta_j) - H_\mu(\beta_j) \quad (\text{利用 (3.3)}) \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} (H_{\mu_i}(\alpha \vee \beta_j) - H_{\mu_i}(\beta_j)) \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} H_{\mu_i}(\alpha | \beta_j) \geq \limsup_{i \rightarrow \infty} H_{\mu_i}(\alpha | [\xi]^-) \quad (\text{因为 } \beta_j \subset [\xi]^-). \end{aligned}$$

由于 $[\xi]^- \subset [\xi]^\infty$, 可得

$$H_\mu(\alpha | [\xi]^-) = \lim_{j \rightarrow \infty} H_\mu(\alpha | \beta_j) \geq \limsup_{i \rightarrow \infty} H_{\mu_i}(\alpha | [\xi]^-),$$

以及对任意的 $i \geq 1$, 有 $H_{\mu_i}(\alpha | [\xi]^-) \geq H_{\mu_i}(\alpha | [\xi]^\infty)$. 故 (4.8) 成立.

下面证明 (4.9). 首先, 注意到测度 μ_i 支撑在集合

$$Y = \bigcup_{l=0}^{n_i-1} T^{-k_i+l}(A_i).$$

设 $0 \leq \kappa < n_i$ 为最小的整数满足存在 $0 < t < n_i - \kappa$ 使得 $T^{-k_i+\kappa+t}(A_i) \subset T^{-k_i+\kappa}(A_i)$, 并设 τ 为满足这一条件的最小正整数 (如果这样的 κ 不存在, 则记 $\kappa = n_i, \tau = 0$). 不难看出,

$$\zeta = \{T^{-k_i+l}(A_i) : 0 \leq l < \kappa + \tau\}$$

为 Y 的一个有限剖分. 设 $\mu_{i,C}$ 为 μ_i 在 C 上的条件测度.

对任意的 $\kappa \leq l < \kappa + \tau$, 记 $D(l) = \{t \in [\kappa, n_i) : t - l\}$, $d(l)$ 表示 $D(l)$ 的基数, 则对任意的 $0 \leq l < \kappa$, 测度 $\sigma_i \circ T^{-l}$ 支撑在集合 $T^{-k_i+l}(A_i)$ 上. 由此可知,

$$\mu_i(T^{-k_i+l}(A_i)) = \frac{1}{n_i} \quad \text{且} \quad \mu_{i,T^{-k_i+l}(A_i)} = \sigma_i \circ T^{-l}.$$

此外, 对任意的 $\kappa \leq l < \kappa + \tau$ 和 $s \in D(l)$, 测度 $\sigma_i \circ T^{-s}$ 支撑在集合 $T^{-k_i+l}(A_i)$ 上. 由此可知,

$$\mu_i(T^{-k_i+l}(A_i)) = \frac{d(l)}{n_i} \quad \text{且} \quad \mu_{i,T^{-k_i+l}(A_i)} = \frac{1}{d(l)} \sum_{s \in D(l)} \sigma_i \circ T^{-s}.$$

由于 $t \mapsto -t \log t$ 为凹函数, 可得

$$\begin{aligned} H_{\mu_i}(\alpha | [\xi]^{k_i}) &= H_{\mu_i}(\alpha | \zeta) = \sum_{C \in \zeta} H_{\mu_i,C}(\alpha | C) \cdot \mu_i(C) \\ &= \frac{1}{n_i} \sum_{0 \leq l < \kappa} H_{\mu_{i,T^{-k_i+l}(A_i)}}(\alpha) + \sum_{\kappa \leq l < \kappa + \tau} \frac{d(l)}{n_i} H_{\mu_{i,T^{-k_i+l}(A_i)}}(\alpha) \\ &\geq \frac{1}{n_i} \sum_{0 \leq l < \kappa} H_{\sigma_i \circ T^{-l}}(\alpha) + \frac{1}{n_i} \sum_{\kappa \leq l < \kappa + \tau} \sum_{s \in D(l)} H_{\sigma_i \circ T^{-s}}(\alpha) \\ &= \frac{1}{n_i} \sum_{l=0}^{n_i-1} H_{\sigma_i \circ T^{-l}}(\alpha). \end{aligned}$$

完成 (4.9) 的证明. □

下面继续证明定理 4.1. 对任意的 $i \in \mathbb{N}$, 由 $\beta_0^{n_i-1}$ 中每个元素至多含有 E_i 中一个元素可知,

$$H_{\sigma_i}(\beta_0^{n_i-1}) = \log s(n_i, \epsilon, T, T^{-k_i}(A_i)).$$

固定自然数 q 和 n_i , 满足 $1 < q < n_i$. 对 $0 \leq j \leq q-1$, 定义 $a(j) = \lfloor (n_i - q)/q \rfloor$, 其中 $\lfloor b \rfloor$ 表示 $b > 0$ 的整数部分, 则对任意给定的 $0 \leq j \leq q-1$, 有

$$\beta_0^{n_i-1} = \beta_0^{j-1} \vee \left(\bigvee_{r=0}^{a(j)-1} T^{-(rq+j)} \beta_0^{q-1} \right) \vee \beta_{j+a(j)q}^{n_i-1}.$$

由此可得

$$H_{\sigma_i}(\beta_0^{n_i-1}) \leq H_{\sigma_i}(\beta_0^{j-1}) + H_{\sigma_i} \left(\bigvee_{r=0}^{a(j)-1} T^{-(rq+j)} \beta_0^{q-1} \right) + H_{\sigma_i}(\beta_{j+a(j)q}^{n_i-1})$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \sum_{r=0}^{a(j)-1} H_{\sigma_i}(T^{-(rq+j)}\beta_0^{q-1}) + 2q \cdot \log |\beta| \\
 &= \sum_{r=0}^{a(j)-1} H_{\sigma_i \circ T^{-(rq+j)}}(\beta_0^{q-1}) + 2q \cdot \log |\beta|.
 \end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{n_i} \log s(n_i, \epsilon, T, T^{-k_i}(A_i)) &= \frac{1}{n_i} H_{\sigma_i}(\beta_0^{n_i-1}) \\
 &\leq \frac{1}{n_i} \left(\frac{1}{q} \sum_{j=0}^{q-1} \sum_{r=0}^{a(j)-1} H_{\sigma_i \circ T^{-(rq+j)}}(\beta_0^{q-1}) + 2q \cdot \log |\beta| \right) \\
 &= \frac{1}{q} \left(\frac{1}{n_i} \sum_{j=0}^{n_i-1} H_{\sigma_i \circ T^{-j}}(\beta_0^{q-1}) \right) + \frac{2q}{n_i} \cdot \log |\beta| \\
 &\leq \frac{1}{q} H_{\mu_i}(\beta_0^{q-1} \mid [\xi]^{k_i}) + \frac{2q}{n_i} \cdot \log |\beta| \quad (\text{利用 (4.9)}) \\
 &\leq \frac{1}{q} H_{\mu_i}(\beta_0^{q-1} \mid [\xi]^\infty) + \frac{2q}{n_i} \cdot \log |\beta|.
 \end{aligned}$$

令 $i \rightarrow \infty$, 再利用 (4.8), 有

$$\begin{aligned}
 h_{\text{sep}}(T, \epsilon \mid [\xi]^-) &= \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{n_i} \log s(n_i, \epsilon, T, T^{-k_i}(A_i)) \\
 &\leq \limsup_{i \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{q} H_{\mu_i}(\beta_0^{q-1} \mid [\xi]^\infty) + \frac{2q}{n_i} \cdot \log |\beta| \right) \\
 &= \frac{1}{q} \cdot \limsup_{i \rightarrow \infty} H_{\mu_i}(\beta_0^{q-1} \mid [\xi]^\infty) \\
 &\leq \frac{1}{q} H_\mu(\beta_0^{q-1} \mid [\xi]^-) \quad (\text{利用 (4.8)}).
 \end{aligned}$$

由 q 的任意性可知, $h_{\text{sep}}(T, \epsilon \mid [\xi]^-) \leq h_\mu(T, \beta \mid [\xi]^-) \leq h_\mu(T \mid [\xi]^-)$. □

根据定理 4.1 和拓扑熵的经典变分原理, 我们可得下面的推论.

推论 4.6 设 (X, T) 为一个拓扑动力系统, ξ 为一个满足 $T^{-1}\xi \preceq \xi$ 的可测剖分. 如果

$$[\xi]^- = \bigcap_{n=0}^{\infty} T^{-n}[\xi] = \{\emptyset, X\},$$

则

$$h_{\text{top}}(T \mid [\xi]^-) = h_{\text{top}}(T).$$

例 4.7 考虑单边符号空间

$$X = \{0, 1, \dots, k-1\}^{\mathbb{N}} = \{(x_i)_{i=1}^{\infty} : x_i \in Y, \forall i \in \mathbb{N}\},$$

其中 $Y = \{0, 1, \dots, k-1\}$, $k > 1$. 我们赋予 Y 离散拓扑及 X 取乘积拓扑, 则 X 为一个紧致度量空间. 移位映射 $\sigma : X \rightarrow X$ 定义为

$$x = (x_i)_{i=1}^{\infty} \mapsto \sigma(x) = (x_{i+1})_{i=1}^{\infty}.$$

显然, σ 为一个连续的满射. 动力系统 (X, σ) 称为满移位. 对 $n > 0$ 及 $a_j \in Y, \forall j = 1, 2, \dots, n$, 定义 X 中的柱形集为

$$[a_1, a_2, \dots, a_n] = \{x \in X : x_j = a_j, \forall j = 1, 2, \dots, n\}.$$

所有柱形集构成的集合为一个生成 X 上 Borel σ -代数 $\mathcal{B}(X)$ 的半代数. 令 $\alpha = \{[0], [1], \dots, [k-1]\}$, 则 α 为一个有限剖分且 $\bigvee_{i=0}^{\infty} \sigma^{-i}\alpha = \mathcal{B}(X)$. 注意到, $\bigvee_{i=n}^{\infty} \sigma^{-i}\alpha$ 中的原子具有如下形式:

$$A_n = \{x \in X : x_k = a_k, \forall k > n\}.$$

由此可得, $\bigcap_{n=0}^{\infty} T^{-n}\mathcal{B}(X) = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigvee_{i=n}^{\infty} \sigma^{-i}\alpha = \{\emptyset, X\}$. 因此, 对 X 中任意满足 $\sigma^{-1}\xi \preceq \xi$ 的可测剖分 ξ , 都有 $[\xi]^- = \{\emptyset, X\}$. 故 $h_{\text{top}}(\sigma | [\xi]^-) = h_{\text{top}}(\sigma)$.

4.3 扩张同胚

设 (X, T) 为一个可逆拓扑动力系统. 同胚 T 称为扩张的, 如果存在 $\delta > 0$ 使得 $d(T^n(x), T^n(y)) \leq \delta$ ($\forall n \in \mathbb{Z}$) 蕴含 $x = y$. 称 δ 为 T 的一个扩张常数.

引理 4.8 (参见文献 [6, 定理 5.25]) 设 (X, T) 为一个扩张系统, δ 为 T 的一个扩张常数. 如果有限 Borel 剖分 α 满足 $\text{diam}(A) < \delta, \forall A \in \alpha$, 则 $\bigvee_{n=-\infty}^{\infty} T^{-n}\alpha = \mathcal{B}(X)$.

定理 4.9 设 (X, T) 为一个扩张系统, δ 为 T 的一个扩张常数. 如果有限 Borel 剖分 α 满足 $\text{diam}(A) < \delta, \forall A \in \alpha$, 则

$$h_{\text{top}}(T | [\alpha_1^\infty]^-) = h_{\text{top}}(T),$$

其中 α_1^∞ 表示可测剖分 $\bigvee_{i=1}^{\infty} T^{-i}\alpha$.

证明 显然, $h_{\text{top}}(T | [\alpha_1^\infty]^-) \leq h_{\text{top}}(T)$. 由引理 4.8 知, $\bigvee_{n=-\infty}^{\infty} T^{-n}\alpha = \mathcal{B}(X)$. 由此可得, 对任意的 $\mu \in \mathcal{M}(X, T)$, α 都为可逆保测系统 $(X, \mathcal{B}(X), \mu, T)$ 的一个生成子. 一个熟知的结论是

$$P_\mu(T) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigvee_{i=n}^{\infty} T^{-i}\alpha = [\alpha_1^\infty]^- , \quad h_\mu(T) = h_\mu(T | P_\mu(T)),$$

其中 $P_\mu(T)$ 为 $(X, \mathcal{B}(X), \mu, T)$ 的 Pinsker σ -代数 (参见文献 [33]). 因此, 由 (4.1), 有

$$h_{\text{top}}(T | [\alpha_1^\infty]^-) \geq \sup_{\mu \in \mathcal{M}(X, T)} h_\mu(T | [\alpha_1^\infty]^-) = \sup_{\mu \in \mathcal{M}(X, T)} h_\mu(T) = h_{\text{top}}(T).$$

完成定理的证明. □

5 条件逆像熵和纤维逆像熵

本节从相对化的观点出发讨论逆像熵.

5.1 因子与扩充

设 (X, T) 和 (Y, S) 为两个拓扑动力系统. 一个连续映射 $\pi: X \rightarrow Y$ 称为从 (X, T) 到 (Y, S) 的同态或因子映射, 如果它为满射且 $\pi \circ T = S \circ \pi$. 这种情形下, 称 (X, T) 为 (Y, S) 的扩充或者 (Y, S) 为 (X, T) 的因子. 如果 π 还是一个单射, 则称它为一个同构.

注 5.1 因子映射 $\pi : (X, T) \rightarrow (Y, S)$ 定义了 X 上的一个 T -不变闭剖分 $\xi_\pi = \{\pi^{-1}(y) : y \in Y\}$. 另一方面, X 上的一个不变闭剖分 ξ 诱导了一个因子系统 $(Y, T) = (X |_\xi, T)$, 因子映射 $\pi : (X, T) \rightarrow (Y, T)$ 定义为 $\pi(x) = C$, 其中 $x \in C \in \xi$.

设 $\pi : (X, T) \rightarrow (Y, S)$ 为两个拓扑动力系统间的因子映射, $\mu \in \mathcal{M}(X)$, 则 μ 可以关于 Y 测度分解为

$$\mu = \int_Y \mu_y d\nu(y),$$

其中 $\nu = \pi\mu$, $\mu_y \in \mathcal{M}(X)$, $\mu_y(\pi^{-1}(y)) = 1$ 对 ν -几乎处处的 $y \in Y$ 成立. 这样的分解可以用下列性质 (5.1) 和 (5.2) 刻画 (参见文献 [36]):

$$\begin{aligned} \forall f \in L^1(X, \mathcal{B}(X), \mu), \quad f \in L^1(X, \mathcal{B}(X), \mu_y) \text{ 对 } \nu\text{-几乎处处的 } y \in Y \text{ 成立,} \\ \text{且映射 } y \mapsto \int_X f(x) d\mu_y(x) \in L^1(Y, \mathcal{B}(Y), \nu); \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$\forall f \in L^1(X, \mathcal{B}(X), \mu), \quad E(f | Y)(y) = \int_X f d\mu_y \text{ 对 } \nu\text{-几乎处处的 } y \in Y \text{ 成立,} \quad (5.2)$$

其中 $E(f | Y) \circ \pi = E(f | \pi^{-1}\mathcal{B}(Y))$ 表示 f 关于 $\pi^{-1}\mathcal{B}(Y)$ 的条件期望. 由上述性质可知, 对任意 $f \in L^1(X, \mathcal{B}(X), \mu)$, 有

$$\int_Y \left(\int_X f d\mu_y \right) d\nu(y) = \int_X f d\mu.$$

5.2 拓扑条件逆像熵

设 $\pi : (X, T) \rightarrow (Y, S)$ 为两个拓扑动力系统间的因子映射. 对 $y \in Y$, 记 $[y] = \pi^{-1}(y)$. 容易验证, $\xi_\pi = \{[y] : y \in Y\}$ 构成了 X 上的一个 T -不变的闭剖分. 因此, (X, T) 相对于 (Y, S) 的拓扑条件逆像熵定义为

$$h_{\text{pre}}(T | Y) := h_{\text{top}}(T | [\xi_\pi]^-) = \sup_{\mathcal{U} \in \mathcal{C}_X^o} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \sup_{k \geq n, y \in Y} N(\mathcal{U}_0^{n-1} | T^{-k}([y])).$$

如果 (Y, S) 为平凡系统, 则 $h_{\text{pre}}(T | Y)$ 还原成为标准的拓扑熵; 如果 π 为一个同构, 则 $h_{\text{pre}}(T | Y)$ 还原成为 Cheng-Newhouse 逆像熵.

下面的结果是定理 4.1 的一个直接推论.

定理 5.2 设 $\pi : (X, T) \rightarrow (Y, S)$ 为两个拓扑动力系统间的因子映射. 如果 $\bigcap_{n=0}^\infty S^{-n}\mathcal{B}(Y)$ 可以被 Y 上的一个上半连续剖分所生成, 则

$$h_{\text{pre}}(T | Y) = \sup_{\mu \in \mathcal{M}(X, T)} h_\mu(T | [\xi_\pi]^-). \quad (5.3)$$

设 $\pi : (X, T) \rightarrow (Y, S)$ 为两个拓扑动力系统间的因子映射, $\mu \in \mathcal{M}(X, T)$, $\nu = \pi\mu$. 对 $n \in \mathbb{N}$ 和 $\mathcal{U} \in \mathcal{C}_X^o$, 定义 $F_n : Y \rightarrow [0, \log N(\mathcal{U})]$ 为

$$F_n(y) = \frac{1}{n} \log \sup_{k \geq n} N(\mathcal{U}_0^{n-1} | T^{-k}([y])) = \frac{1}{n} \sup_{k \geq n} \log N(\mathcal{U}_0^{n-1} | T^{-k}([y])).$$

注意到, 对每个 $y \in Y$ 及正整数 k , $T^{-k}([y])$ 为 X 中的闭子集, 且映射 $y \mapsto T^{-k}([y])$ 为 Y 到 2^X 的上半连续映射, 其中 2^X 表示 X 上所有非空闭子集构成的集合, 并赋予 Hausdorff 度量 (参见文献 [32,

第 7 章]). 不难验证, 对任意的 $k \in \mathbb{N}$, 函数 $y \mapsto \log N(\mathcal{U}_0^{n-1} | T^{-k}([y]))$ 为上半连续的. 因此, F_n 为 Y 上的 Borel 可测有界函数. 从而, $\mathcal{U}$ 关于 ν 的条件逆像熵定义为

$$h_{\text{pre}}(T, \mathcal{U} | \nu) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_Y \log \sup_{k \geq n} N(\mathcal{U}_0^{n-1} | T^{-k}([y])) d\nu(y). \quad (5.4)$$

进一步, 系统 (X, T) 关于 ν 的拓扑条件逆像熵定义为

$$h_{\text{pre}}(T | \nu) = \sup_{\mathcal{U} \in \mathcal{C}_X^o} h_{\text{pre}}(T, \mathcal{U} | \nu). \quad (5.5)$$

类似于定理 2.3 的证明, 我们可得下面的引理:

引理 5.3 对任意正整数 m , 有 $h_{\text{pre}}(T^m | \nu) = m \cdot h_{\text{pre}}(T | \nu)$.

以下结论可以看作是拓扑条件逆像熵另外一种形式的变分原理.

定理 5.4 设 $\pi: (X, T) \rightarrow (Y, S)$ 为两个拓扑动力系统间的因子映射. 如果 $\bigcap_{n=0}^{\infty} S^{-n} \mathcal{B}(Y)$ 可以被 Y 上的一个上半连续剖分所生成, 则

$$h_{\text{pre}}(T | Y) = \sup_{\nu \in \mathcal{M}(Y, S)} h_{\text{pre}}(T | \nu). \quad (5.6)$$

证明 由定理 5.2 可知, 我们仅需证明对任意 $\mu \in \mathcal{M}(X, T)$, $\nu = \pi\mu$, 有

$$h_{\mu}(T | [\xi_{\pi}]^{-}) \leq h_{\text{pre}}(T | \nu). \quad (5.7)$$

给定 $\alpha = \{A_1, \dots, A_s\} \in \mathcal{P}_X$ 及 $0 < \epsilon < \frac{1}{s \cdot \log s}$. 由于 μ 具有正则性, 因此存在紧致子集 $B_j \subset A_j$ ($1 \leq j \leq s$) 使得 $\mu(A_j \setminus B_j) < \epsilon$. 设 $\beta = \{B_0, B_1, \dots, B_s\}$, 其中 $B_0 = X \setminus \bigcup_{j=1}^s B_j$, 则有 $\beta \in \mathcal{P}_X$, $H_{\mu}(\alpha | \beta) < 1$ 且 $\mathcal{U} = \{B_0 \cup B_1, \dots, B_0 \cup B_s\} \in \mathcal{C}_X^o$. 设 $\mu = \int_Y \mu_y d\nu(y)$ 为 μ 关于 ν 的测度分解. 对 $y \in Y$ 及 $k \geq n \in \mathbb{N}$, 如果 $\pi_k: X \rightarrow X |_{T^{-k}\xi_{\pi}}$ 为从 X 到商空间 $X |_{T^{-k}\xi_{\pi}}$ 的因子映射, 以及 $\mu_y = \int_{X |_{T^{-k}\xi_{\pi}}} \mu_{y,C} d\pi_k \mu_y$ 为 μ_y 关于 $X |_{T^{-k}\xi_{\pi}}$ 的测度分解, 则根据引理 4.3 和 4.4, 有

$$\begin{aligned} H_{\mu_y}(\beta_0^{n-1} | T^{-k}[\xi_{\pi}]) &= \int_{X |_{T^{-k}\xi_{\pi}}} H_{\mu_y, C}(\beta_0^{n-1}) d\pi_k \mu_y \\ &= \log N(\beta_0^{n-1} | T^{-k}(\pi^{-1}(S^k y))) \\ &\leq \log(N(\mathcal{U}_0^{n-1} | T^{-k}(\pi^{-1}(S^k y))) \cdot 2^n) \\ &\leq n \cdot (F_n(S^k y) + \log 2). \end{aligned}$$

这蕴含了

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} H_{\mu}(\beta_0^{n-1} | T^{-k}[\xi_{\pi}]) &= \int_Y \frac{1}{n} H_{\mu_y}(\beta_0^{n-1} | T^{-k}[\xi_{\pi}]) d\nu(y) \\ &\leq \int_Y F_n(S^k y) d\nu(y) + \log 2 \\ &= \int_Y F_n(y) d\nu(y) + \log 2. \end{aligned}$$

令 $k \rightarrow \infty$, 再令 $n \rightarrow \infty$, 可得

$$h_{\mu}(T, \beta | [\xi_{\pi}]^{-}) \leq h_{\text{pre}}(T, \mathcal{U} | \nu) + \log 2 \leq h_{\text{pre}}(T | \nu) + \log 2.$$

这蕴含了

$$h_\mu(T, \alpha \mid [\xi_\pi^-]) \leq h_\mu(T, \beta \mid [\xi_\pi^-]) + H_\mu(\alpha \mid \beta) \leq h_{\text{pre}}(T \mid \nu) + \log 2 + 1.$$

由 α 的任意性可知, $h_\mu(T \mid [\xi_\pi^-]) \leq h_{\text{pre}}(T \mid \nu) + \log 2 + 1$ 对任意的 $\mu \in \mathcal{M}(X, T)$ 成立. 注意到, 上面的不等式对所有 T^n 也成立, 从而可得

$$n \cdot h_\mu(T \mid [\xi_\pi^-]) \leq n \cdot h_{\text{pre}}(T \mid \nu) + \log 2 + 1.$$

因此,

$$h_\mu(T \mid [\xi_\pi^-]) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(h_{\text{pre}}(T \mid \nu) + \frac{\log 2 + 1}{n} \right) = h_{\text{pre}}(T \mid \nu).$$

也就是说, (5.7) 成立. $\square$

5.3 拓扑纤维逆像熵

设 $\pi : (X, T) \rightarrow (Y, S)$ 为两个拓扑动力系统间的因子映射. 对任意的 $y \in Y$ 和 $\mathcal{U} \in \mathcal{C}_X^o$, 记

$$h_{\text{pre}}(T, \mathcal{U} \mid y) := \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \sup_{k \geq n} N(\mathcal{U}_0^{n-1} \mid T^{-k}([y])).$$

进一步, (X, T) 关于 y 的拓扑纤维逆像熵定义为

$$h_{\text{pre}}(T \mid y) := \sup_{\mathcal{U} \in \mathcal{C}_X^o} h_{\text{pre}}(T, \mathcal{U} \mid y).$$

接下来将建立拓扑纤维逆像熵与拓扑条件逆像熵之间的联系. 具体地, 我们有下面的定理:

定理 5.5 设 $\pi : (X, T) \rightarrow (Y, S)$ 为两个拓扑动力系统间的因子映射. 如果 $\bigcap_{n=0}^{\infty} S^{-n} \mathcal{B}(Y)$ 可以被 Y 上的一个上半连续剖分所生成, 则

$$h_{\text{pre}}(T \mid Y) = \sup_{y \in Y} h_{\text{pre}}(T \mid y) = \sup_{\nu \in \mathcal{M}(Y, S)} \int_Y h_{\text{pre}}(T \mid y) d\nu(y). \quad (5.8)$$

证明 由定理 5.4 可知, 我们仅需证明对任意 $\nu \in \mathcal{M}(Y, S)$, 有

$$h_{\text{pre}}(T \mid \nu) \leq \int_Y h_{\text{pre}}(T \mid y) d\nu(y). \quad (5.9)$$

给定 $\nu \in \mathcal{M}(Y, S)$. 对 $\mathcal{U} \in \mathcal{C}_X^o$ 和 $n \in \mathbb{N}$, 定义 $F_n : Y \rightarrow [0, \log N(\mathcal{U})]$ 为

$$F_n(y) = \frac{1}{n} \log \sup_{k \geq n} N(\mathcal{U}_0^{n-1} \mid T^{-k}[y]).$$

可知 F_n 为一个 Borel 可测的有界函数. 注意到, 对任意 $y \in Y$, 有 $h_{\text{pre}}(T, \mathcal{U} \mid y) = \limsup_{n \rightarrow \infty} F_n(y)$. 从而可得 $y \mapsto h_{\text{pre}}(T, \mathcal{U} \mid y)$ 和 $y \mapsto h_{\text{pre}}(T \mid y)$ 都为 Y 上的 Borel 可测函数. 因此,

$$\begin{aligned} h_{\text{pre}}(T, \mathcal{U} \mid \nu) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_Y F_n(y) d\nu(y) \\ &\leq \int_Y \limsup_{n \rightarrow \infty} F_n(y) d\nu(y) = \int_Y h_{\text{pre}}(T, \mathcal{U} \mid y) d\nu(y) \\ &\leq \int_Y h_{\text{pre}}(T \mid y) d\nu(y). \end{aligned}$$

由 $\mathcal{U}$ 的任意性可知, (5.9) 成立. $\square$

最后可得下面的推论:

推论 5.6 设 (X, T) 为一个拓扑动力系统. 如果 $\bigcap_{n=0}^{\infty} T^{-n}\mathcal{B}(X)$ 可以被 X 上的一个上半连续剖分所生成, 则

$$\begin{aligned} h_{\text{pre}}(T) &= \sup_{x \in X} \sup_{\mathcal{U} \in \mathcal{C}_X^o} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \sup_{k \geq n} N(\mathcal{U}_0^{n-1} \mid T^{-k}(x)) \\ &= \sup_{\mu \in \mathcal{M}(X, T)} \int_X \sup_{\mathcal{U} \in \mathcal{C}_X^o} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \sup_{k \geq n} N(\mathcal{U}_0^{n-1} \mid T^{-k}(x)) d\mu(x) \\ &= \sup_{\mu \in \mathcal{M}(X, T)} \sup_{\mathcal{U} \in \mathcal{C}_X^o} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_X \log \sup_{k \geq n} N(\mathcal{U}_0^{n-1} \mid T^{-k}(x)) d\mu(x). \end{aligned}$$

致谢 感谢审稿人及主编对本文提出的宝贵意见和建议.

参考文献

- 1 Kolmogorov A N. A new metric invariant of transient dynamical systems and automorphisms of Lebesgue spaces (in Russian). Dokl Akad Nauk, 1958, 119: 861–864
- 2 Sinai J. On the concept of entropy for a dynamic system (in Russian). Dokl Akad Nauk, 1959, 124: 768–771
- 3 Adler R L, Konheim A G, McAndrew M H. Topological entropy. Trans Amer Math Soc, 1965, 114: 309–319
- 4 Dinaburg E I. A correlation between topological entropy and metric entropy (in Russian). Dokl Akad Nauk, 1970, 190: 19–22
- 5 Bowen R. Entropy for group endomorphisms and homogeneous spaces. Trans Amer Math Soc, 1971, 153: 401–414
- 6 Walters P. An Introduction to Ergodic Theory. Graduate Texts in Mathematics, vol. 79. New York: Springer-Verlag, 1982
- 7 Goodwyn L W. Topological entropy bounds measure-theoretic entropy. Proc Amer Math Soc, 1969, 23: 679–688
- 8 Goodman T N T. Relating topological entropy and measure entropy. Bull Lond Math Soc, 1971, 3: 176–180
- 9 Misiurewicz M. A short proof of the variational principle for a $\mathbb{Z}_+^N$ action on a compact space. Asterisque, 1976, 40: 147–187
- 10 Huang W, Maass A, Romagnoli P P, et al. Entropy pairs and a local Abramov formula for a measure theoretical entropy of open covers. Ergodic Theory Dynam Systems, 2004, 24: 1127–1153
- 11 Huang W, Ye X. A local variational relation and applications. Israel J Math, 2006, 151: 237–279
- 12 Huang W, Ye X, Zhang G. A local variational principle for conditional entropy. Ergodic Theory Dynam Systems, 2006, 26: 219–245
- 13 Romagnoli P P. A local variational principle for the topological entropy. Ergodic Theory Dynam Systems, 2003, 23: 1601–1610
- 14 Huang W, Ye X, Zhang G. Local entropy theory for a countable discrete amenable group action. J Funct Anal, 2011, 261: 1028–1082
- 15 Liang B, Yan K. Topological pressure for sub-additive potentials of amenable group actions. J Funct Anal, 2012, 262: 584–601
- 16 Ollagnier J M. Ergodic Theory and Statistical Mechanics. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1115. Berlin: Springer-Verlag, 1985
- 17 Ollagnier J M, Pinchon D. The variational principle. Studia Math, 1982, 72: 151–159
- 18 Stepin A M, Tagi-Zade A T. Variational characterization of topological pressure of the amenable groups of transformations (in Russian). Dokl Akad Nauk, 1980, 254: 545–549
- 19 Yan K. Conditional entropy and fiber entropy for amenable group actions. J Differential Equations, 2015, 259: 3004–3031
- 20 Langevin R, Walczak P. Entropie d’une dynamique. C R Math Acad Sci Paris, 1991, 312: 141–144
- 21 Ghys E, Langevin R, Walczak P. Entropie geometrique des feuilletages. Acta Math, 1988, 160: 105–142
- 22 Langevin R, Przytycki F. Entropie de l’image inverse d’une application. Bull Soc Math France, 1992, 120: 237–250
- 23 Nitecki Z, Przytycki F. Preimage entropy for mappings. Internat J Bifur Chaos, 1999, 9: 1815–1843
- 24 Biś A. Entropies of a semigroup of maps. Discrete Contin Dyn Syst, 2004, 11: 639–648
- 25 Hurley M. On topological entropy of maps. Ergodic Theory Dynam Systems, 1995, 15: 557–568
- 26 Nitecki Z. Topological entropy and the preimage structure of maps. Real Anal Exchange, 2003, 29: 7–39

- 27 Zeng F. Partial entropy bundle-like entropy and topological entropy. In: Dynamical Systems. Proceeding of the International Conference in Honor of Professor Liao Shantao. Singapore: World Scientific, 1999, 329–333
- 28 Cheng W, Newhouse S. Pre-image entropy. Ergodic Theory Dynam Systems, 2005, 25: 1091–1113
- 29 Cheng W. Two-point pre-image entropy. Discrete Contin Dyn Syst, 2007, 17: 107–119
- 30 Zeng F, Yan K, Zhang G. Pre-image pressure and invariant measures. Ergodic Theory Dynam Systems, 2007, 27: 1037–1052
- 31 Fiebig D, Fiebig U, Nitecki Z. Entropy and preimage sets. Ergodic Theory Dynam Systems, 2003, 23: 1785–1806
- 32 Petersen K. Ergodic Theory. Cambridge: Cambridge University Press, 1981
- 33 Glasner E. Ergodic Theory via Joinings. Mathematical Surveys and Monographs, vol. 101. Providence: Amer Math Soc, 2003
- 34 叶向东, 黄文, 邵松. 拓扑动力系统概论. 北京: 科学出版社, 2008
- 35 Nadler S B. Continuum Theory: An Introduction. Pure and Applied Mathematics, vol. 158. New York: Marcel Dekker, 1992
- 36 Einsiedler M, Ward T. Ergodic Theory with a View Towards Number Theory. Graduate Texts in Mathematics, vol. 259. London: Springer-Verlag, 2011

Variational principles of partial pre-image entropy and conditional pre-image entropy

Kesong Yan & Fanping Zeng

Abstract In this paper, we define and study two entropy-like invariants for non-invertible map, which are called partial pre-image entropy and conditional pre-image entropy, respectively, and prove some variational principles for them. More precisely, let (X, T) be a topological dynamical system and ξ be a measurable partition of X with $T^{-1}\xi \preceq \xi$. Then $h_{\text{top}}(T \mid [\xi]^-) \geq \sup_{\mu \in \mathcal{M}(X, T)} h_{\mu}(T \mid [\xi]^-)$. Moreover, if $[\xi]^-$ can be generated by a upper semi-continuous partition of X , then $h_{\text{top}}(T \mid [\xi]^-) = \sup_{\mu \in \mathcal{M}(X, T)} h_{\mu}(T \mid [\xi]^-)$. As an application, we study the relativization of pre-image entropy and obtain other formulas about Cheng-Newhouse pre-image entropy.

Keywords pre-image entropy, conditional measure-theoretic entropy, variational principle, non-invertible map

MSC(2010) 37A35, 37B40

doi: 10.1360/SCM-2016-0381