(p, q) -John 椭球

李晓¹, 王贺军^{1,2}, 周家足^{1,3*}

1. 西南大学数学与统计学院, 重庆 400715;

2. 山东师范大学数学与统计学院, 济南 250358;

3. 武汉科技大学理学院, 武汉 430081

E-mail: lxlixiaolx@163.com, whjsx2009@163.com, zhousjz@swu.edu.cn

收稿日期: 2019-10-16; 接受日期: 2019-12-30; 网络出版日期: 2020-05-19; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11671325) 资助项目

摘要 本文主要研究 (p, q) -John 椭球. 经典的 John 椭球和 L_p John 椭球均是 (p, q) -John 椭球的特殊情形. 首先讨论 (p, q) -John 椭球的充分必要条件和连续性. 得到了关于 (p, q) -John 椭球的不等式和包含关系, 所得到的不等式和包含关系分别类似于 Ball 体积比不等式和 John 包含关系.

关键词 (p, q) -John 椭球 体积比不等式 John 包含关系

MSC (2010) 主题分类 52A40

1 引言

在 Brunn-Minkowski 理论中, 椭球是一个重要的几何研究对象. 经典的 John 椭球由 John^[1] 引入: 给定 n 维 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 中一个凸体 K (具有非空内点的紧凸集), 包含在 K 内部的具有最大体积的唯一椭球称为 John 椭球 JK . John 包含关系^[1] 和 Ball 体积比不等式^[2] 是两个关于 John 椭球的基本不等式. John 包含关系^[1] 如下: 若 K 是一个关于原点对称的凸体, 则

$$K \subseteq \sqrt{n}JK. \quad (1.1)$$

值得注意的是, $\sqrt{n}$ 是关于 Banach-Mazur 距离的最佳上界值. Ball 体积比不等式^[2] 如下: 若 K 是一个关于原点对称的凸体, JK 是 K 的 John 椭球, 则

$$\frac{V(K)}{V(JK)} \leq \frac{2^n}{\omega_n}, \quad (1.2)$$

等号成立当且仅当 K 是超平行体, 其中 $V(\cdot)$ 表示 n 维体积, ω_n 表示单位球 B_2^n 的体积.

不等式 (1.2) 中等号成立的条件由 Barthe^[3] 给出. 关于 John 椭球的更多相关知识可参见文献 [2, 4-7]. Lutwak 等^[8] 引入了新的椭球 $\Gamma_{-2}K$, 其中 K 为包含原点为内点的凸体. 新的椭球 $\Gamma_{-2}K$

英文引用格式: Li X, Wang H J, Zhou J Z. On (p, q) -John ellipsoids (in Chinese). Sci Sin Math, 2021, 51: 343-364, doi: 10.1360/SCM-2019-0639

被称为 LYZ (Lutwak-Yang-Zhang) 椭球. 文献 [8] 给出了 John 包含关系和 Ball 体积比不等式对于 LYZ 椭球仍然成立. 文献 [9–11] 建立了 L_p Brunn-Minkowski 理论, 它是 Brunn-Minkowski 理论的自然推广 (参见文献 [11–17]). Lutwak 等^[18] 提出了 L_p John 椭球. L_p John 椭球包含经典的 John 椭球和 LYZ 椭球.

令 $\mathcal{K}_o^n$ 表示所有包含原点为内点的凸体构成的集合, $\mathcal{S}_o^n$ 表示所有星体构成的集合. Lutwak 等通过解决下面的极值问题定义了 L_p John 椭球:

问题 S_p 设 $0 < p \leq \infty$, $K \in \mathcal{K}_o^n$, 是否存在以原点为中心的椭球 E 可以解决如下条件极值问题:

$$\max \left(\frac{V(E)}{\omega_n} \right)^{\frac{1}{n}} \quad \text{满足} \quad \bar{V}_p(K, E) \leq 1. \quad (1.3)$$

问题 $\bar{S}_p$ 设 $0 < p \leq \infty$, $K \in \mathcal{K}_o^n$, 是否存在以原点为中心的椭球 E 可以解决如下条件极小值问题:

$$\min \bar{V}_p(K, E) \quad \text{满足} \quad \left(\frac{V(E)}{\omega_n} \right)^{\frac{1}{n}} \geq 1, \quad (1.4)$$

其中

$$\bar{V}_p(K, E) = \left(\frac{V_p(K, E)}{V(K)} \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 0 < p < \infty \quad (1.5)$$

是 K 和 E 的标准化 L_p 混合体积, $V_p(K, E)$ 是 K 和 E 的 L_p 混合体积. 若 $p = \infty$, 则

$$\bar{V}_\infty(K, E) = \max \left\{ \frac{h_E(u)}{h_K(u)} : u \in \text{supp} S(K, \cdot) \right\}, \quad (1.6)$$

其中 h_K 和 h_E 分别表示 K 和 E 的支持函数, $S(K, \cdot)$ 是 K 的表面积测度.

Lutwak 等证明了问题 S_p 存在唯一的解. 该唯一的椭球称为 K 的 L_p John 椭球并记为 $E_p K$. 类似地存在唯一的椭球解决问题 $\bar{S}_p$, 该椭球称为 K 的标准化 L_p John 椭球并记为 $\bar{E}_p K$. L_p John 椭球是凸几何中几种基本几何体的统一. 若凸体 K 是关于原点对称的, 则 $E_\infty K$ 就是经典 John 椭球. $E_2 K$ 正是 LYZ 椭球 $\Gamma_{-2} K$. $E_1 K$ 是 Petty 椭球. 标准化 Petty 椭球的概念可参见文献 [19, 20]. 文献 [18] 给出了如下 L_p John 包含关系: 若凸体 K 是关于原点对称的, $2 \leq p \leq \infty$, 则

$$K \subseteq \sqrt{n} E_p K. \quad (1.7)$$

通常, $E_p K$ 不包含在 K 中 (除了 $p = \infty$), 但是对于 $1 \leq p \leq \infty$, 有

$$V(E_p K) \leq V(K). \quad (1.8)$$

文献 [18] 建立了 L_p Ball 体积比不等式: 若凸体 K 是关于原点对称的, 则对于 $0 < p \leq \infty$, 有

$$\frac{V(K)}{V(E_p K)} \leq \frac{2^n}{\omega_n}, \quad (1.9)$$

等号成立当且仅当 K 是超平行体.

Lutwak^[21] 引入了对偶 Brunn-Minkowski 理论. 它是经典的 Brunn-Minkowski 理论的对偶理论^[22]. 后来对偶 Brunn-Minkowski 理论得到了快速发展 (参见文献 [23–25]). Huang 等^[26] 引入了对偶曲率测

度. 对偶曲率测度受到密切关注, 相关进展可参见文献 [27–31]. 最近, Lutwak 等 [32] 定义了 L_p 对偶曲率测度 ((p, q) 阶对偶曲率测度). L_p 表面积测度、 L_p 积分曲率和对偶曲率测度是 (p, q) 阶对偶曲率测度的特殊情形. 文献 [33–36] 研究了相应的 Minkowski 问题. Lutwak 等 [32] 利用 (p, q) 阶对偶曲率测度定义了 L_p 对偶混合体积, 统一了 L_p 混合体积和对偶混合体积. 文献 [32] 给出了关于 L_p 对偶混合体积的 Minkowski 不等式, 以及 L_p Minkowski 不等式的推广. 文献 [37–39] 建立了 Orlicz Brunn-Minkowski 理论, 它是 L_p Brunn-Minkowski 理论的推广. 文献 [40, 41] 建立了对偶 Orlicz Brunn-Minkowski 理论. 文献 [42] 给出了 Orlicz-John 椭球的概念. 从对偶的观点, 文献 [43] 定义了 Orlicz-Legendre 椭球. 经典 John 椭球还以各种方式被推广. Fang 和 Zhou [44] 提出了关于 log-凹函数的 LYZ 椭球. Hu 和 Xiong [45] 研究了 L_0 John 椭球. Li 等 [46] 引入了正弦 (sine) 椭球. Bastero 和 Romance [47] 从对偶 Brunn-Minkowski 理论研究椭球. 关于椭球的相关信息可参见文献 [5, 48–52].

本文的主要目的是把 L_p John 椭球推广到 (p, q) -John 椭球, 通过解决下列极值问题定义 (p, q) -John 椭球:

问题 $S_{p,q}$ 设 $0 < p \leq \infty$, $q \in \mathbb{R}$, $K \in \mathcal{K}_o^n$ 和 $Q \in \mathcal{S}_o^n$, 是否存在以原点为中心的椭球 E 可以解决下面的条件极值问题:

$$\max \left(\frac{V(E)}{\omega_n} \right)^{\frac{1}{n}} \quad \text{满足} \quad \bar{V}_{p,q}(K, E, Q) \leq 1, \quad (1.10)$$

其中 $\bar{V}_{p,q}(K, E, Q) = (\tilde{V}_p(K, E, Q)/\tilde{V}_q(K, Q))^{\frac{1}{p}}$ 和 $\bar{V}_\infty(K, E, Q) = \lim_{p \rightarrow \infty} \bar{V}_p(K, E, Q)$ 表示标准 (p, q) -混合体积.

我们还得到关于 (p, q) -John 椭球的类似于 Ball 体积比不等式和 John 包含关系的不等式. 第 2 节介绍凸几何中的一些基本知识和标准 (p, q) -混合体积的一些性质. 第 3 节通过解决一系列极值问题提出关于 $K \in \mathcal{K}_o^n$ 和 $Q \in \mathcal{S}_o^n$ 的 (p, q) -John 椭球 $E_{p,q}(K, Q)$. 第 4 节讨论 $E_{p,q}(K, Q)$ 关于 p 和 K 的连续性. 第 5 节得到关于 (p, q) -John 椭球的不等式, 该不等式类似于 Ball 体积比不等式. 第 6 节建立关于 (p, q) -John 椭球的包含关系, 该包含关系类似于 John 包含关系.

2 预备知识

本节主要介绍凸几何中的一些基本知识. Schneider 的书 [22] 和 Gruber 的书 [53] 是很好的参考文献. 整篇文章中所有的集合均是定义在 n 维 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 中. 设 $x, y \in \mathbb{R}^n$, 记 $x \cdot y$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的标准内积, $|x| = \sqrt{x \cdot x}$ 为 x 的范数. 当 $x \neq o$ 时, 令 $\langle x \rangle = |x|^{-1}x$. 单位球和单位球面分别记为 B_2^n 和 S^{n-1} . $\det \phi$ 表示 ϕ 的行列式.

设 K 是紧凸集, K 的支持函数, $h(K, \cdot) = h_K : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, 定义为

$$h_K(x) = \max\{x \cdot y : y \in K\}, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (2.1)$$

h_K 是一阶正齐次函数, 即

$$h_K(\lambda x) = \lambda h_K(x), \quad \lambda \geq 0.$$

由支持函数的定义可知, 对于 $\phi \in \text{GL}(n)$, ϕK 的支持函数为

$$h_{\phi K}(x) = h_K(\phi^T x), \quad (2.2)$$

其中 ϕ^T 表示 ϕ 的转置.

若紧凸集具有非空内点, 那么称其为凸体. $\mathcal{K}^n$ 和 $\mathcal{K}_o^n$ 分别表示所有凸体构成的集合和包含原点为内点的所有凸体构成的集合. 凸体 K 和 L 的 Hausdorff 距离定义为

$$d_H(K, L) = \|h_K - h_L\|_\infty = \max_{u \in S^{n-1}} |h_K - h_L|. \quad (2.3)$$

设 $\{K_i\}$ 是凸体序列, K 是凸体, 若当 $i \rightarrow \infty$ 时, 有 $d_H(K_i, K) \rightarrow 0$, 则称序列 $\{K_i\}$ 收敛于 K , 记 $\lim_{i \rightarrow \infty} K_i = K$ 或 $K_i \rightarrow K$.

设 K 是紧集, 若原点与 K 中任意一点的连线所形成的线段仍然包含在 K 中, 则称 K 为 (关于原点) 星形集. 星形集 K 的径向函数, $\rho(K, \cdot) = \rho_K : \mathbb{R}^n \setminus \{o\} \rightarrow \mathbb{R}$, 定义为

$$\rho_K(x) = \max\{\lambda \geq 0 : \lambda x \in K\}, \quad x \neq o. \quad (2.4)$$

显然, ρ_K 是负一阶齐次函数. 设 $\phi \in \text{GL}(n)$, 则 ϕK 的径向函数为

$$\rho_{\phi K}(x) = \rho_K(\phi^{-1}x), \quad x \neq o, \quad (2.5)$$

其中 ϕ^{-1} 表示 ϕ 的逆变换.

若星形集的径向函数是连续正函数, 则称为星体. 用 $\mathcal{S}_o^n$ 表示所有星体构成的集合. 星体 K 和 L ($K, L \in \mathcal{S}_o^n$) 的径向距离定义为

$$\|\rho_K - \rho_L\|_\infty = \max_{u \in S^{n-1}} |\rho_K - \rho_L|. \quad (2.6)$$

设 $\{K_i\}$ 是星体序列, K 是星体, 若当 $i \rightarrow \infty$ 时, 有 $\|\rho_{K_i} - \rho_K\|_\infty \rightarrow 0$, 则称序列 $\{K_i\}$ 收敛于 K , 记 $\lim_{i \rightarrow \infty} K_i = K$ 或 $K_i \rightarrow K$. 若 $K, L \in \mathcal{K}_o^n$, 则 K 和 L 的径向距离等价于 Hausdorff 距离.

设 $K \in \mathcal{S}_o^n$, 则极体 K^* 定义为

$$K^* = \{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot y \leq 1, \text{ 对一切 } y \in K\}. \quad (2.7)$$

若 $K \in \mathcal{K}_o^n$, 则

$$K^{**} = K, \quad (\phi K)^* = \phi^{-t} K^*, \quad \phi \in \text{GL}(n), \quad (2.8)$$

$$\rho_K = \frac{1}{h_{K^*}}, \quad h_K = \frac{1}{\rho_{K^*}}. \quad (2.9)$$

若凸体 K 是关于原点对称的, 则对于任意 $u \in S^{n-1}$, 有

$$h_{K^*}(u) = \max \left\{ \frac{|u \cdot v|}{h_K(v)} : v \in S^{n-1} \right\}. \quad (2.10)$$

设 $\omega \subseteq S^{n-1}$ 为 Borel 集合, 凸体 $K \in \mathcal{K}_o^n$ 的表面积测度 $S(K, \cdot)$ 定义为

$$S(K, \omega) = \mathcal{H}^{n-1}(\mathbf{x}_K(\omega)), \quad (2.11)$$

其中逆球面像 $\mathbf{x}_K(\omega)$ 定义为

$$\mathbf{x}_K(\omega) = \{x \in \partial K : \text{存在 } v \in \omega \text{ 使得 } x \cdot v = h_K(v)\}, \quad (2.12)$$

$\mathcal{H}^{n-1}$ 表示 $n-1$ 维 Hausdorff 测度.

设 $p \in \mathbb{R}$ 和 $K \in \mathcal{K}_o^n$, 则 K 的 L_p 表面积测度 $S_p(K, \cdot)$ [9] 定义为

$$dS_p(K, \cdot) = h_K^{1-p} dS(K, \cdot). \quad (2.13)$$

设 $K, L \in \mathcal{K}_o^n$, 则 K 和 L 的 L_p 混合体积 $V_p(K, L)$ [9] 定义为

$$V_p(K, L) = \frac{1}{n} \int_{S^{n-1}} h_L^p(v) dS_p(K, v). \quad (2.14)$$

对于 $\phi \in \text{GL}(n)$, 有

$$V_p(\phi K, \phi L) = |\det \phi| V_p(K, L). \quad (2.15)$$

设 $q \in \mathbb{R}$, $K \in \mathcal{S}_o^n$ 和 $L \in \mathcal{S}_o^n$ 的 q 阶对偶混合体积 [21] 定义为

$$\tilde{V}_q(K, L) = \frac{1}{n} \int_{S^{n-1}} \rho_K^q(u) \rho_L^{n-q}(u) du. \quad (2.16)$$

设 $K_i, K \in \mathcal{S}_o^n$. 若当 $i \rightarrow \infty$ 时, 有 $K_i \rightarrow K$, 则

$$\tilde{V}_q(K_i, L) \rightarrow \tilde{V}_q(K, L). \quad (2.17)$$

同时,

$$\tilde{V}_q(\alpha K, \beta L) = \alpha^q \beta^{n-q} \tilde{V}_q(K, L), \quad \alpha, \beta > 0, \quad (2.18)$$

$$\tilde{V}_q(\phi K, \phi L) = |\det \phi| \tilde{V}_q(K, L), \quad \phi \in \text{GL}(n). \quad (2.19)$$

记

$$\tilde{V}_q(K) = \tilde{V}_q(K, B_2^n).$$

Lutwak 等 [32] 引入了 L_p 对偶曲率测度. 设 $\eta \subset S^{n-1}$ 为 Borel 集, $K \in \mathcal{K}_o^n$ 和 $Q \in \mathcal{S}_o^n$, 则 q 阶对偶曲率测度 $\tilde{C}_q(K, Q, \cdot)$ 定义为

$$\tilde{C}_q(K, Q, \eta) = \frac{1}{n} \int_{\alpha_K^*(\eta)} \rho_K^q(u) \rho_Q^{n-q}(u) du, \quad q \in \mathbb{R}, \quad (2.20)$$

其中

$$\alpha_K^*(\eta) = \left\{ \frac{x}{|x|} \in S^{n-1} : x \in \partial K, \text{ 存在 } v \in \eta \text{ 使得 } v \cdot x = h_K(v) \right\}. \quad (2.21)$$

由 (2.12) 和 (2.21) 可知,

$$\text{supp} S(K, \cdot) = \text{supp} \tilde{C}_q(K, Q, \cdot), \quad (2.22)$$

其中 supp 表示 Borel 测度的支撑集. 实际上表面积测度 $S(K, \cdot)$ 和 q 阶对偶曲率测度 $\tilde{C}_q(K, Q, \cdot)$ 的支撑集集中在凸体 K 的边界点上具有唯一外法向量的单位法向量构成的集合上.

定义 2.1 设 $p \in \mathbb{R}$, 则 $K \in \mathcal{K}_o^n$ 和 $Q \in \mathcal{S}_o^n$ 的 L_p 对偶曲率测度 $\tilde{C}_{p,q}(K, Q, \cdot)$ 定义为

$$d\tilde{C}_{p,q}(K, Q, \cdot) = h_K^{-p} d\tilde{C}_q(K, Q, \cdot). \quad (2.23)$$

L_p 对偶曲率测度 $C_{p,q}(K, Q, \cdot)$ 又被称为 (p, q) 阶对偶曲率测度. Lutwak 等^[32] 证明了下列引理:

引理 2.1 设 $p, q \in \mathbb{R}$, $K_i \in \mathcal{K}_o^n$ 和 $Q \in \mathcal{S}_o^n$. 若当 $i \rightarrow \infty$ 有 $K_i \rightarrow K_0 \in \mathcal{K}_o^n$, 则测度 $\tilde{C}_{p,q}(K_i, Q, \cdot)$ 弱收敛于 $\tilde{C}_{p,q}(K_0, Q, \cdot)$.

引理 2.2 设 $p \neq 0$ 和 $q \in \mathbb{R}$, 则当 $Q \in \mathcal{S}_o^n$, $K \in \mathcal{K}_o^n$ 和 $\phi \in \text{SL}(n)$, 有

$$\tilde{C}_{p,q}(\phi K, \phi Q, \cdot) = \phi_{p^{-1}}^T \tilde{C}_{p,q}(K, Q, \cdot), \quad (2.24)$$

其中 μ 为任意 Borel 测度, $\phi_{p^{-1}}\mu$ 定义为

$$\int_{S^{n-1}} f(v) d\phi_{p^{-1}}\mu(v) = \int_{S^{n-1}} |\phi^{-1}v|^p f\left(\frac{\phi^{-1}v}{|\phi^{-1}v|}\right) d\mu(v), \quad \text{对任意 Borel 函数 } f.$$

对于任意 $\alpha \in \mathbb{R}$, 令 $\alpha_+ = \max\{\alpha, 0\}$. 设 $p \geq 1$, $q \in \mathbb{R}$ 和 $K, Q \in \mathcal{K}_o^n$, 则紧凸集 $\Pi_{p,q}^+(K, Q)$ ^[35] 的支持函数定义为

$$h(\Pi_{p,q}^+(K, Q), x)^p = \int_{S^{n-1}} (x \cdot u)_+^p d\tilde{C}_{p,q}(K, Q, u), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (2.25)$$

文献 [35] 证明了下列关于 $\Pi_{p,q}^+(K, Q)$ 的引理:

引理 2.3 设 $p \geq 1$, $q \in \mathbb{R}$ 和 $Q \in \mathcal{K}_o^n$. 若 $K, K_i \in \mathcal{K}_o^n$ 且测度 $\tilde{C}_{p,q}(K_i, Q, \cdot)$ 弱收敛于 $\tilde{C}_{p,q}(K, Q, \cdot)$, 则存在常数 $c > 0$ 和正整数 $N \in \mathbb{N}$, 使得对于一切 $u \in S^{n-1}$ 和 $i > N$, 有

$$h(\Pi_{p,q}^+(K_i, Q), u) \geq c. \quad (2.26)$$

Lutwak 等^[32] 定义了 L_p 对偶混合体积, 它统一了 L_p 混合体积和对偶混合体积.

定义 2.2 设 $p, q \in \mathbb{R}$. 凸体 $K, L \in \mathcal{K}_o^n$ 关于 $Q \in \mathcal{S}_o^n$ 的 L_p 对偶混合体积 $\tilde{V}_{p,q}(K, L, Q)$ 定义为

$$\tilde{V}_{p,q}(K, L, Q) = \int_{S^{n-1}} h_L^p(v) d\tilde{C}_{p,q}(K, Q, v). \quad (2.27)$$

L_p 对偶混合体积也被称为 (p, q) -混合体积.

令 σ_K 表示外法向量不唯一的 K 的边界点的集合且 $\omega_K = \{\langle x \rangle : x \in \sigma_K\}$. 于是, L_p 对偶混合体积 $\tilde{V}_{p,q}(K, L, Q)$ 可以写成如下积分表达式:

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{p,q}(K, L, Q) &= \int_{S^{n-1}} h_L^p(v) h_K^{-p}(v) d\tilde{C}_q(K, Q, v) \\ &= \frac{1}{n} \int_{S^{n-1}} \left(\frac{h_L}{h_K}\right)^p (\alpha_K(v)) \left(\frac{\rho_K}{\rho_Q}\right)^q (v) \rho_Q^n(v) dv, \end{aligned} \quad (2.28)$$

其中 $\alpha_K : S^{n-1} \setminus \omega_K \rightarrow S^{n-1}$ 定义为

$$\alpha_K(\omega) = \{v \in S^{n-1} : \text{存在 } u \in \omega \text{ 使得 } v \cdot \rho_K(u)u = h_K(v)\}.$$

由 (2.28), 可得

$$\tilde{V}_{p,q}(\alpha K, \beta L, \gamma Q) = \alpha^{q-p} \beta^p \gamma^{n-q} \tilde{V}_{p,q}(K, L, Q), \quad \alpha, \beta, \gamma > 0. \quad (2.29)$$

文献 [32] 给出了下列性质:

$$\tilde{V}_{p,q}(\phi K, \phi L, \phi Q) = |\det \phi| \tilde{V}_{p,q}(K, L, Q), \quad \phi \in \text{GL}(n), \quad (2.30)$$

$$\tilde{V}_{p,q}(K, L, K) = V_p(K, L) \quad \text{和} \quad \tilde{V}_{p,n}(K, L, Q) = V_p(K, L), \quad (2.31)$$

$$\tilde{V}_{p,q}(K, K, Q) = \tilde{V}_q(K, Q) \quad \text{和} \quad \tilde{V}_{0,q}(K, L, Q) = \tilde{V}_q(K, L). \quad (2.32)$$

L_p 对偶混合体积的连续性在文献 [35] 中给出.

引理 2.4 设 $p, q \in \mathbb{R}$, $Q \in \mathcal{S}_o^n$, $K_i, K \in \mathcal{K}_o^n$ 和 $L_i, L \in \mathcal{K}_o^n$. 若当 $i \rightarrow \infty$ 时有 $K_i \rightarrow K$ 且 $L_i \rightarrow L$, 那么

$$\tilde{V}_{p,q}(K_i, L_i, Q) \rightarrow \tilde{V}_{p,q}(K, L, Q). \quad (2.33)$$

由 (2.27) 和 (2.23), 我们定义了标准 L_p 对偶混合体积 (标准 (p, q) -混合体积).

定义 2.3 设 $q \in \mathbb{R}$. 若 $p > 0$, 凸体 $K, L \in \mathcal{K}_o^n$ 关于星体 $Q \in \mathcal{S}_o^n$ 的标准 L_p 对偶混合体积 (标准 (p, q) -混合体积) $\bar{V}_{p,q}(K, L, Q)$ 定义为

$$\bar{V}_{p,q}(K, L, Q) = \left(\frac{\tilde{V}_{p,q}(K, L, Q)}{\tilde{V}_q(K, Q)} \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{1}{\tilde{V}_q(K, Q)} \int_{S^{n-1}} \left(\frac{h_L(v)}{h_K(v)} \right)^p d\tilde{C}_q(K, Q, v) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

若 $p = \infty$, 定义

$$\bar{V}_{\infty,q}(K, L, Q) = \max \left\{ \frac{h_L(u)}{h_K(u)} : u \in \text{supp } \tilde{C}_q(K, Q, \cdot) \right\}.$$

由定义 2.3 可得

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \bar{V}_{p,q}(K, L, Q) = \bar{V}_{\infty,q}(K, L, Q), \quad (2.34)$$

$$\lim_{p \rightarrow p_o} \bar{V}_{p,q}(K, L, Q) = \bar{V}_{p_o,q}(K, L, Q), \quad p, p_o \in (0, \infty]. \quad (2.35)$$

由 (1.6) 和 (2.22), 可得

$$\bar{V}_{\infty,q}(K, L, Q) = \bar{V}_{\infty}(K, L). \quad (2.36)$$

利用 (1.5) 和 (2.31), 有

$$\bar{V}_{p,q}(K, L, K) = \bar{V}_p(K, L) \quad \text{和} \quad \bar{V}_{p,n}(K, L, Q) = \bar{V}_p(K, L). \quad (2.37)$$

注意到测度 $d\tilde{C}_q(K, Q, \cdot)/\tilde{V}_q(K, Q)$ 在 $\text{supp } \tilde{C}_q(K, Q, \cdot)$ 是一个概率测度. 根据 Jensen 不等式可知,

$$\bar{V}_{p_1,q}(K, L, Q) \leq \bar{V}_{p_2,q}(K, L, Q), \quad 0 < p_1 < p_2 \leq \infty, \quad (2.38)$$

等号成立当且仅当 h_L/h_K 在集合 $\text{supp } \tilde{C}_q(K, Q, \cdot)$ 上是一个常函数.

设 $p \in (0, \infty]$, $K_i, K_o \in \mathcal{K}_o^n$ 和 $L_i, L_o \in \mathcal{K}_o^n$. 若当 $i \rightarrow \infty$ 时有 $K_i \rightarrow K_o$ 且 $L_i \rightarrow L_o$, 则由引理 2.4、(2.17) 和定义 2.3 可知,

$$\bar{V}_{p,q}(K_i, L_i, Q) \rightarrow \bar{V}_{p,q}(K_o, L_o, Q). \quad (2.39)$$

对于 $p \in (0, \infty]$, 由 (2.18)、(2.29)、(2.19) 和 (2.30), 可得

$$\bar{V}_{p,q}(\alpha K, \beta L, \gamma Q) = \frac{\beta}{\alpha} \bar{V}_{p,q}(K, L, Q), \quad \alpha, \beta, \gamma > 0, \quad (2.40)$$

$$\bar{V}_{p,q}(\phi K, \phi L, \phi Q) = \bar{V}_{p,q}(K, L, Q), \quad \phi \in \text{GL}(n). \quad (2.41)$$

下列引理表明了标准 L_p 对偶混合体积的有界性:

引理 2.5 设 $p \in [1, \infty]$ 和 $q \in \mathbb{R}$. 若 $K, L, L_o \in \mathcal{K}_o^n$ 和 $Q \in \mathcal{S}_o^n$, 则

$$|\bar{V}_{p,q}(K, L, Q) - \bar{V}_{p,q}(K, L_o, Q)| \leq \frac{\|h_L - h_{L_o}\|_\infty}{\min_{u \in S^{n-1}} h_K(u)}. \quad (2.42)$$

证明 对于 $p \in [1, \infty)$, 有

$$\begin{aligned} |\bar{V}_{p,q}(K, L, Q) - \bar{V}_{p,q}(K, L_o, Q)| &\leq \left(\frac{1}{\tilde{V}_q(K, Q)} \int_{S^{n-1}} \left| \frac{h_L(v)}{h_K(v)} - \frac{h_{L_o}(v)}{h_K(v)} \right|^p d\tilde{C}_q(K, Q, v) \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\frac{1}{\tilde{V}_q(K, Q)} \int_{S^{n-1}} \left| \frac{1}{h_K(v)} \right|^p d\tilde{C}_q(K, Q, v) \right)^{\frac{1}{p}} \|h_L - h_{L_o}\|_\infty \\ &\leq \frac{\|h_L - h_{L_o}\|_\infty}{\min_{u \in S^{n-1}} h_K(u)}. \end{aligned}$$

当 $p = \infty$ 时可由上式当 $p \rightarrow \infty$ 时取极限得到. $\square$

3 (p, q) -John 椭球

以原点为中心的所有椭球构成的集合记作 $\mathcal{E}_o^n$. 我们考虑下列极值问题:

问题 $S_{p,q}$ 设 $0 < p \leq \infty$, $q \in \mathbb{R}$, $K \in \mathcal{K}_o^n$ 和 $Q \in \mathcal{S}_o^n$, 是否存在以原点为中心的椭球 E 可以解决下面的条件极值问题:

$$\max \left(\frac{V(E)}{\omega_n} \right)^{\frac{1}{n}} \quad \text{满足} \quad \bar{V}_{p,q}(K, E, Q) \leq 1. \quad (3.1)$$

问题 $\bar{S}_{p,q}$ 设 $0 < p \leq \infty$, $q \in \mathbb{R}$, $K \in \mathcal{K}_o^n$ 和 $Q \in \mathcal{S}_o^n$, 是否存在以原点为中心的椭球 E 可以解决下面的条件极值问题:

$$\min \bar{V}_{p,q}(K, E, Q) \quad \text{满足} \quad \left(\frac{V(E)}{\omega_n} \right)^{\frac{1}{n}} \geq 1. \quad (3.2)$$

定理 3.1 问题 $S_{p,q}$ 存在解.

证明 我们仅需要证明 $0 < p < \infty$. 设椭球 $E \in \mathcal{E}_o^n$ 中的最长直径为 d_E , 于是存在一个方向 $v_E \in S^{n-1}$ 使得对于一切 $v \in S^{n-1}$ 有 $d_E |v_E \cdot v|/2 \leq h_E(v)$. 由 (2.27) 可知,

$$\left(\frac{d_E}{2} \right)^p \min_{u \in S^{n-1}} \int_{S^{n-1}} |u \cdot v|^p d\tilde{C}_{p,q}(K, Q, v) \leq \int_{S^{n-1}} h_E^p(v) d\tilde{C}_{p,q}(K, Q, v) = \tilde{V}_{p,q}(K, E, Q).$$

令 $\tilde{\mathcal{E}} = \{E \in \mathcal{E}_o^n : \bar{V}_{p,q}(K, E, Q) \leq 1\}$, 则由上式可得对于一切 $E \in \tilde{\mathcal{E}}$ 有

$$\left(\frac{d_E}{2} \right)^p \min_{u \in S^{n-1}} \int_{S^{n-1}} |u \cdot v|^p d\tilde{C}_{p,q}(K, Q, v) \leq \tilde{V}_q(K, Q).$$

于是集合 $\tilde{\mathcal{E}}$ 在度量空间 $(\mathcal{E}_o^n, d_H)$ 是有界的. 根据 (2.39), $\bar{V}_{p,q}(K, \cdot, Q)$ 是连续的. 因此集合 $\tilde{\mathcal{E}}$ 是闭集. 根据 Blaschke 选择定理, 满足问题 $S_{p,q}$ 条件的椭球所构成的最大值序列是一致有界的并且都存在一个收敛子列, 其收敛极限仍属于集合 $\tilde{\mathcal{E}}$. 故问题 $S_{p,q}$ 存在解. $\square$

当 $p = \infty$ 时, 由 (2.36) 可知问题 $S_{\infty,q}$ 等价于问题 S_∞ . Lutwak 等^[18] 证明了问题 S_∞ 的解的存在性和唯一性. 当 $0 < p < \infty$ 时, 若在 (3.1) 中令 $q = n$ 或 $Q = K$, 则由 (2.37) 可知问题 $S_{p,q}$ 等价于问题 S_p .

引理 3.1 设 $0 < p \leq \infty$, $q \in \mathbb{R}$, $K \in \mathcal{K}_o^n$ 和 $Q \in \mathcal{S}_o^n$.

(1) 问题 $S_{p,q}$ 等价于

$$\max \left(\frac{V(E)}{\omega_n} \right)^{\frac{1}{n}} \quad \text{满足} \quad \bar{V}_{p,q}(K, E, Q) = 1;$$

(2) 问题 $\bar{S}_{p,q}$ 等价于

$$\min \bar{V}_{p,q}(K, E, Q) \quad \text{满足} \quad \left(\frac{V(E)}{\omega_n} \right)^{\frac{1}{n}} = 1.$$

证明 (1) 我们用反证法讨论. 设 E_M 是问题 $S_{p,q}$ 的解且 $\bar{V}_{p,q}(K, E_M, Q) < 1$. 由 (2.40) 可知,

$$\bar{V}_{p,q}(K, E_M, Q)^{-1} E_M \in \{E \in \mathcal{E}_o^n : \bar{V}_{p,q}(K, E, Q) \leq 1\}.$$

但是

$$V(\bar{V}_{p,q}(K, E_M, Q)^{-1} E_M)^{\frac{1}{n}} = \bar{V}_{p,q}(K, E_M, Q)^{-1} V(E_M)^{\frac{1}{n}} > V(E_M)^{\frac{1}{n}}.$$

这与假设 E_M 是问题 $S_{p,q}$ 的解相矛盾.

(2) 设 E_m 是问题 $\bar{S}_{p,q}$ 的解且 $(V(E_m)/\omega_n)^{\frac{1}{n}} > 1$. 于是,

$$\left(\frac{\omega_n}{V(E_m)} \right)^{\frac{1}{n}} E_m \in \left\{ E \in \mathcal{E}_o^n : \left(\frac{V(E)}{\omega_n} \right)^{\frac{1}{n}} \geq 1 \right\}.$$

但是

$$\bar{V}_{p,q}\left(K, \left(\frac{\omega_n}{V(E_m)} \right)^{\frac{1}{n}} E_m, Q\right) = \left(\frac{\omega_n}{V(E_m)} \right)^{\frac{1}{n}} \bar{V}_{p,q}(K, E_m, Q) < \bar{V}_{p,q}(K, E_m, Q).$$

这与假设 E_m 是问题 $\bar{S}_{p,q}$ 的解相矛盾. □

引理 3.2 设 $0 < p \leq \infty$, $q \in \mathbb{R}$, $K \in \mathcal{K}_o^n$ 和 $Q \in \mathcal{S}_o^n$.

(1) 若 E_M 是问题 $S_{p,q}$ 的解, 则

$$\left(\frac{\omega_n}{V(E_M)} \right)^{\frac{1}{n}} E_M$$

是问题 $\bar{S}_{p,q}$ 的解.

(2) 若 E_m 是问题 $\bar{S}_{p,q}$ 的解, 则

$$\bar{V}_{p,q}(K, E_m, Q)^{-1} E_m$$

是问题 $S_{p,q}$ 的解.

证明 (1) 设 $E \in \{E \in \mathcal{E}_o^n : V(E) \geq \omega_n\}$, 由 (2.40) 可知,

$$\bar{V}_{p,q}(K, E, Q)^{-1} E \in \{E \in \mathcal{E}_o^n : \bar{V}_{p,q}(K, E, Q) \leq 1\}.$$

因为 E_M 是问题 $S_{p,q}$ 的解, 所以,

$$V(E_M) \geq V(\bar{V}_{p,q}(K, E, Q)^{-1} E) \quad \text{且} \quad \bar{V}_{p,q}(K, E_M, Q) \leq 1. \quad (3.3)$$

又由 (3.3), 可得

$$\bar{V}_{p,q}(K, E, Q) \geq \left(\frac{V(E)}{V(E_M)} \right)^{\frac{1}{n}} \geq \left(\frac{\omega_n}{V(E_M)} \right)^{\frac{1}{n}} \geq \bar{V}_{p,q} \left(K, \left(\frac{\omega_n}{V(E_M)} \right)^{\frac{1}{n}} E_M, Q \right).$$

上式表明 $(\omega_n/V(E_M))^{\frac{1}{n}} E_M$ 是问题 $\bar{S}_{p,q}$ 的解.

(2) 设 $E \in \{E \in \mathcal{E}_o^n : \bar{V}_{p,q}(K, E, Q) \leq 1\}$, 于是,

$$\left(\frac{\omega_n}{V(E)} \right)^{\frac{1}{n}} E \in \left\{ E \in \mathcal{E}_o^n : \left(\frac{V(E)}{\omega_n} \right)^{\frac{1}{n}} \geq 1 \right\}.$$

因为 E_m 是问题 $\bar{S}_{p,q}$ 的解, 所以,

$$\bar{V}_{p,q}(K, E_m, Q) \leq \bar{V}_{p,q} \left(K, \left(\frac{\omega_n}{V(E)} \right)^{\frac{1}{n}} E, Q \right) \quad \text{且} \quad V(E_m) \geq \omega_n. \quad (3.4)$$

由 (3.4) 和 (2.40), 可得

$$\bar{V}_{p,q}(K, E_m, Q)^{-1} V(E_m)^{\frac{1}{n}} \geq \bar{V}_{p,q}(K, E, Q)^{-1} V(E)^{\frac{1}{n}} \geq V(E)^{\frac{1}{n}}.$$

上式表明 $\bar{V}_{p,q}(K, E_m, Q)^{-1} E_m$ 是问题 $S_{p,q}$ 的解. □

引理 3.3 设 $p > 0, q \in \mathbb{R}, K \in \mathcal{K}_o^n$ 和 $Q \in \mathcal{S}_o^n$. 若 $\phi \in \text{GL}(n)$, 则

$$\frac{1}{n} \tilde{V}_{p,q}(\phi^{-1}K, B_2^n, \phi^{-1}Q) |x|^2 = \int_{S^{n-1}} |x \cdot v|^2 d\tilde{C}_{p,q}(\phi^{-1}K, \phi^{-1}Q, v), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

当且仅当

$$\frac{1}{n} \tilde{V}_{p,q}(K, \phi B_2^n, Q) h_{(\phi B_2^n)^*}^2(x) = \int_{S^{n-1}} |x \cdot v|^2 h_{\phi B_2^n}^{p-2}(v) d\tilde{C}_{p,q}(K, Q, v), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

证明 首先由 (2.30)、(2.2) 和 (2.8) 可得对于任意 $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\frac{1}{n} \tilde{V}_{p,q}(K, \phi B_2^n, Q) h_{(\phi B_2^n)^*}^2(x) = \int_{S^{n-1}} |x \cdot v|^2 h_{\phi B_2^n}^{p-2}(v) d\tilde{C}_{p,q}(K, Q, v)$$

等价于

$$\frac{1}{n} |\det \phi| \tilde{V}_{p,q}(\phi^{-1}K, B_2^n, \phi^{-1}Q) h_{B_2^{n*}}^2(\phi^{-1}x) = \int_{S^{n-1}} |x \cdot v|^2 h_{B_2^n}^{p-2}(\phi^T v) d\tilde{C}_{p,q}(K, Q, v).$$

又由引理 2.2, 上式等价于

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} |\det \phi| \tilde{V}_{p,q}(\phi^{-1}K, B_2^n, \phi^{-1}Q) |x|^2 &= |\det \phi| \frac{1}{n} \tilde{V}_{p,q}(\phi^{-1}K, B_2^n, \phi^{-1}Q) h_{B_2^{n*}}^2(x) \\ &= \int_{S^{n-1}} |\phi x \cdot v|^2 h_{B_2^n}^{p-2}(\phi^T v) d\tilde{C}_{p,q}(K, Q, v) \\ &= \int_{S^{n-1}} |x \cdot \phi^T v|^2 |\phi^T v|^{p-2} d\tilde{C}_{p,q}(K, Q, v) \\ &= \int_{S^{n-1}} |x \cdot \langle \phi^T v \rangle|^2 |\phi^T v|^p d\tilde{C}_{p,q}(K, Q, v) \\ &= \int_{S^{n-1}} |x \cdot v|^2 d\phi_{p^{-1}}^{-T} \tilde{C}_{p,q}(K, Q, v) \\ &= |\det \phi| \int_{S^{n-1}} |x \cdot v|^2 d\tilde{C}_{p,q}(\phi^{-1}K, \phi^{-1}Q, v). \end{aligned}$$

证毕. □

下面给出问题 $\bar{S}_{p,q}$ 的解的充分必要条件.

定理 3.2 设 $p > 0, q \in \mathbb{R}, K \in \mathcal{K}_o^n$ 和 $Q \in \mathcal{S}_o^n$, 则问题 $\bar{S}_{p,q}$ 有唯一解. 椭球 E 是问题 $\bar{S}_{p,q}$ 的解当且仅当对于任意 $x \in \mathbb{R}^n$ 有

$$\frac{1}{n} \tilde{V}_{p,q}(K, E, Q) h_{E^*}^2(x) = \int_{S^{n-1}} |x \cdot v|^2 h_E^{p-2}(v) d\tilde{C}_{p,q}(K, Q, v).$$

证明 首先讨论必要性. 倘若 E 是问题 $\bar{S}_{p,q}$ 的解, 则

$$\frac{1}{n} \tilde{V}_{p,q}(K, E, Q) h_{E^*}^2(x) = \int_{S^{n-1}} |x \cdot v|^2 h_E^{p-2}(v) d\tilde{C}_{p,q}(K, Q, v), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

由引理 3.3 和 (2.30), 不妨假设 $E = B_2^n$.

设 $P \in \text{GL}(n)$. 选择 $\varepsilon_0 > 0$ 充分小使得 $I + \varepsilon P$ 对于一切 $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ 而言是可逆的. 定义 $P_\varepsilon \in \text{SL}(n)$ 为

$$P_\varepsilon = (\det(I + \varepsilon P))^{-\frac{1}{n}} (I + \varepsilon P), \quad \varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0).$$

令 $E_\varepsilon = P_\varepsilon^T B_2^n$. 于是有 $V(E_\varepsilon) = \omega_n$ 和 $h_{E_\varepsilon}(u) = |P_\varepsilon u|$. 因为 B_2^n 是问题 $\bar{S}_{p,q}$ 的解, 所以对于一切 $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$, 有

$$\tilde{V}_{p,q}(K, E_0, Q) \leq \tilde{V}_{p,q}(K, E_\varepsilon, Q).$$

因此,

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \int_{S^{n-1}} |P_\varepsilon u|^p d\tilde{C}_{p,q}(K, Q, u) = 0.$$

上式等价于

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \int_{S^{n-1}} (\det(I + \varepsilon P))^{-\frac{p}{n}} (u \cdot u + 2\varepsilon u \cdot Pu + \varepsilon^2 Pu \cdot Pu)^{\frac{p}{2}} d\tilde{C}_{p,q}(K, Q, u) = 0. \quad (3.5)$$

因为

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \det(I + \varepsilon P) = \text{trace}(P)$$

和被积项关于 ε 是光滑的, 结合 (2.27) 和 (3.5), 故

$$\int_{S^{n-1}} (u \cdot Pu) d\tilde{C}_{p,q}(K, Q, u) = \frac{1}{n} \tilde{V}_{p,q}(K, B_2^n, Q) \text{trace}(P). \quad (3.6)$$

设 $x \in \mathbb{R}^n \setminus o$, 令 $P = x \otimes x$, 其中 $x \otimes x$ 表示秩为 1 的线性算子: $y \mapsto (x \cdot y)x$, 则可得

$$\text{trace}(x \otimes x) = |x|^2 \quad \text{和} \quad u \cdot (x \otimes x)u = |x \cdot u|^2. \quad (3.7)$$

结合 (3.6) 和 (3.7), 可得

$$\int_{S^{n-1}} |u \cdot x|^2 d\tilde{C}_{p,q}(K, Q, u) = \frac{1}{n} \tilde{V}_{p,q}(K, B_2^n, Q) |x|^2, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

反过来证明充分性. 假设对于一切 $x \in \mathbb{R}^n$, 有

$$\frac{1}{n} \tilde{V}_{p,q}(K, B_2^n, Q) h_{B_2^{n*}}^2(x) = \int_{S^{n-1}} |x \cdot v|^2 h_{B_2^n}^{p-2}(v) d\tilde{C}_{p,q}(K, Q, v). \quad (3.8)$$

由引理 3.1, 我们只需证明对于一切 $E \in \{E \in \mathcal{E}_o^n : V(E) = \omega_n\}$, 有

$$\tilde{V}_{p,q}(K, E, Q) \geq \tilde{V}_{p,q}(K, B_2^n, Q),$$

等号成立当且仅当 $E = B_2^n$. 令 $E = TB_2^n$, 其中 T 是一个正定矩阵且 $\det T = 1$. 于是只需证明

$$\left(\frac{1}{\tilde{V}_{p,q}(K, B_2^n, Q)} \int_{S^{n-1}} |Tu|^p d\tilde{C}_{p,q}(K, Q, u) \right)^{\frac{1}{p}} \geq 1, \quad (3.9)$$

等号成立当且仅当对于一切 $u \in S^{n-1}$ 有 $|Tu| = 1$.

由 Jensen 不等式可得

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\tilde{V}_{p,q}(K, B_2^n, Q)} \int_{S^{n-1}} |Tu|^p d\tilde{C}_{p,q}(K, Q, u) \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \geq \exp \left(\frac{1}{\tilde{V}_{p,q}(K, B_2^n, Q)} \int_{S^{n-1}} \log |Tu| d\tilde{C}_{p,q}(K, Q, u) \right), \end{aligned} \quad (3.10)$$

等号成立当且仅当存在常数 $c > 0$ 使得对于一切 $u \in \text{supp} \tilde{C}_{p,q}(K, Q, \cdot)$ 有 $|Tu| = c$. 为了证明 (3.9) 成立, 我们需要证明

$$\int_{S^{n-1}} \log |Tu| d\tilde{C}_{p,q}(K, Q, u) \geq 0. \quad (3.11)$$

记 $T = O^T D O$, 其中 O 是正交矩阵, D 是对角阵, 且 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 为 D 的特征值, $e_1, \dots, e_n$ 是其对应的标准正交特征向量. 因为 $\det T = 1$, 故 $\prod_{i=1}^n \lambda_i = 1$. 又由 O 是正交矩阵和引理 2.2, 可得

$$\begin{aligned} \int_{S^{n-1}} \log |Tu| d\tilde{C}_{p,q}(K, Q, u) &= \int_{S^{n-1}} \log |O^T D O u| d\tilde{C}_{p,q}(K, Q, u) \\ &= \int_{S^{n-1}} |O^{-T} u|^p \log |D \langle O^{-T} u \rangle| d\tilde{C}_{p,q}(K, Q, u), \\ &= \int_{S^{n-1}} \log |Du| dO_{p-1}^T d\tilde{C}_{p,q}(K, Q, u) \\ &= \int_{S^{n-1}} \log |Du| d\tilde{C}_{p,q}(OK, OQ, u). \end{aligned}$$

由引理 3.3 和假设 (3.8) 可得, 对于一切 $i \in \{1, \dots, n\}$, 有

$$\frac{1}{n} \tilde{V}_{p,q}(OK, B_2^n, OQ) |e_i|^2 = \int_{S^{n-1}} |e_i \cdot u|^2 d\tilde{C}_{p,q}(OK, OQ, u). \quad (3.12)$$

根据 D 是对角阵, 以及 (3.12) 和 $\log$ 函数的凹性, 可得

$$\begin{aligned} \int_{S^{n-1}} \log |Tu| d\tilde{C}_{p,q}(K, Q, u) &= \frac{1}{2} \int_{S^{n-1}} \log \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 |u \cdot e_i|^2 \right) d\tilde{C}_{p,q}(OK, OQ, u) \\ &\geq \sum_{i=1}^n \log \lambda_i \int_{S^{n-1}} |u \cdot e_i|^2 d\tilde{C}_{p,q}(OK, OQ, u) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n} \tilde{V}_{p,q}(OK, B_2^n, OQ) \sum_{i=1}^n \log \lambda_i \\
&= \frac{1}{n} \tilde{V}_{p,q}(OK, B_2^n, OQ) \log \prod_{i=1}^n \lambda_i = 0,
\end{aligned}$$

等号成立当 $|u \cdot e_{i_1}|, \dots, |u \cdot e_{i_N}| \neq 0$ 意味着 $\lambda_{i_1} = \dots = \lambda_{i_N}$, 其中 $u \in \text{supp} \tilde{C}_{p,q}(OK, OQ, \cdot)$. 于是, 当 $|u \cdot e_i| \neq 0$, $|Du| = \lambda_i$, 其中 $u \in \text{supp} \tilde{C}_{p,q}(OK, OQ, \cdot)$.

(3.10) 中的等号成立使得 $|Tu| = c$, 其中 $u \in \text{supp} \tilde{C}_{p,q}(K, Q, \cdot)$. 上述结论暗示着 $|Du| = c$, 其中 $u \in \text{supp} \tilde{C}_{p,q}(OK, OQ, \cdot)$. 因为测度 $\text{supp} \tilde{C}_{p,q}(OK, OQ, \cdot)$ 不集中在 S^{n-1} 上任意一个 $n-1$ 维的子空间上, 所以对于一切 i , 有 $\lambda_i = c$. 又因为 $\prod_{i=1}^n \lambda_i = 1$, 故对于一切 i , 有 $\lambda_i = 1$. 于是, (3.9) 中等号成立意味着 $D = I$ 和 $T = I$. $\square$

由定理 3.2 和引理 3.2 可得到下述定理:

定理 3.3 设 $p > 0$, $q \in \mathbb{R}$, $K \in \mathcal{K}_o^n$ 和 $Q \in \mathcal{S}_o^n$, 则问题 $S_{p,q}$ 有唯一解. 椭球 E 是问题 $S_{p,q}$ 的解当且仅当对于任意 $x \in \mathbb{R}^n$ 有

$$\frac{1}{n} \tilde{V}_q(K, Q) h_{E^*}^2(x) = \int_{S^{n-1}} |x \cdot v|^2 h_E^{p-2}(v) d\tilde{C}_{p,q}(K, Q, v).$$

由定理 3.2 和 3.3, 我们给出了 (p, q) -John 椭球的定义.

定义 3.1 设 $0 < p \leq \infty$, $q \in \mathbb{R}$, $K \in \mathcal{K}_o^n$ 和 $Q \in \mathcal{S}_o^n$. 在所有以原点为中心的椭球中, 可以解决下面的条件极值问题:

$$\max \left(\frac{V(E)}{\omega_n} \right)^{\frac{1}{n}} \quad \text{满足} \quad \bar{V}_{p,q}(K, E, Q) \leq 1 \quad (3.13)$$

的唯一椭球被称为 (p, q) -John 椭球, 记为 $E_{p,q}(K, Q)$.

设 $0 < p \leq \infty$, $q \in \mathbb{R}$, $K \in \mathcal{K}_o^n$ 和 $Q \in \mathcal{S}_o^n$. 在所有以原点为中心的椭球中, 可以解决下面的条件极值问题:

$$\min \bar{V}_{p,q}(K, E, Q) \quad \text{满足} \quad \left(\frac{V(E)}{\omega_n} \right)^{\frac{1}{n}} \geq 1 \quad (3.14)$$

的唯一椭球被称为标准化 (p, q) -John 椭球, 记为 $\bar{E}_{p,q}(K, Q)$.

引理 3.4 设 $0 < p \leq \infty$, $q \in \mathbb{R}$, $K \in \mathcal{K}_o^n$ 和 $Q \in \mathcal{S}_o^n$, 则对于 $\phi \in \text{GL}(n)$, 有

$$E_{p,q}(\phi K, \phi Q) = \phi E_{p,q}(K, Q). \quad (3.15)$$

证明 按照定义 3.1 和 (2.41), 可得

$$\bar{V}_{p,q}(\phi K, \phi E_{p,q}(K, Q), \phi Q) = \bar{V}_{p,q}(K, E_{p,q}(K, Q), Q) \leq 1.$$

于是,

$$V(E_{p,q}(\phi K, \phi Q)) \geq V(\phi E_{p,q}(K, Q)). \quad (3.16)$$

类似地, 有

$$\bar{V}_{p,q}(K, \phi^{-1} E_{p,q}(\phi K, \phi Q), Q) = \bar{V}_{p,q}(\phi K, E_{p,q}(\phi K, \phi Q), \phi Q) \leq 1.$$

因此,

$$V(E_{p,q}(K, Q)) \geq V(\phi^{-1}E_{p,q}(\phi K, \phi Q)). \quad (3.17)$$

由 (3.16) 和 (3.17) 可知 $V(E_{p,q}(\phi K, \phi Q)) = V(\phi E_{p,q}(K, Q))$. 因为

$$\phi E_{p,q}(K, Q) \in \{E \in \mathcal{E}_o^n : \bar{V}_{p,q}(\phi K, E, \phi Q) \leq 1\},$$

所以, 从问题 $S_{p,q}(K, Q)$ 的解的唯一性可得 $E_{p,q}(\phi K, \phi Q) = \phi E_{p,q}(K, Q)$. $\square$

显然, 由 (2.31) 知 $\bar{V}_{p,q}(B_2^n, E, B_2^n) = \bar{V}_p(B_2^n, E)$, 所以 $E_{p,q}(B_2^n, B_2^n) = E_p(B_2^n) = B_2^n$. 由上述引理 3.4 可知, 若 E 是一个以原点为中心的椭球, 则 $E_{p,q}(E, E) = E$.

4 连续性

接下来讨论 $E_{p,q}(K, Q)$ 关于 p 和 K 的连续性. 首先给出 $\bar{E}_{p,q}(K, Q)$ 的有界性.

引理 4.1 设 $Q \in \mathcal{S}_o^n$ 和 $q \in \mathbb{R}$. 若 $0 < p \leq \infty$ 和 $rB_2^n \subseteq K \subseteq RB_2^n$, 则

$$\bar{E}_{p,q}(K, Q) \subseteq mB_2^n,$$

其中 $m = (\max\{R^q, r^q\} \tilde{V}_q(B_2^n, Q) / (rc))^{\max\{\frac{1}{p}, 1\}}$.

证明 设 $0 < p \leq \infty$. 令 R_p 表示 $\bar{E}_{p,q}(K, Q)$ 的最长半径, 则存在一个单位向量 $u_p \in S^{n-1}$, 使得对于一切 $v \in S^{n-1}$, 有

$$R_p |u_p \cdot v| \leq h_{\bar{E}_{p,q}(K, Q)}(v).$$

按照定义 3.1 和 (2.27), 可得当 $0 < p < \infty$ 时, 有

$$\begin{aligned} \bar{V}_{p,q}(K, B_2^n, Q) &\geq \bar{V}_{p,q}(K, \bar{E}_{p,q}(K, Q), Q) \\ &\geq \left(\frac{(R_p)^p}{\tilde{V}_q(K, Q)} \int_{S^{n-1}} |u_p \cdot v|^p d\tilde{C}_{p,q}(K, Q, v) \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

因测度 $\tilde{C}_{1,q}(K, Q, \cdot)$ 不能集中在一个闭半球面上, 故存在常数 $c > 0$ 使得对于一切 $u \in S^{n-1}$, 有

$$\int_{S^{n-1}} |u \cdot v| d\tilde{C}_{1,q}(K, Q, v) \geq c. \quad (4.2)$$

当 $1 \leq p < \infty$ 时, 由 (2.38)、(4.1)、Jensen 不等式和 (4.2), 可得

$$\begin{aligned} \frac{\bar{V}_{\infty,q}(K, B_2^n, Q)}{R_p} &\geq \frac{\bar{V}_{p,q}(K, B_2^n, Q)}{R_p} \\ &\geq \left(\frac{1}{\tilde{V}_q(K, Q)} \int_{S^{n-1}} \left(\frac{|u_p \cdot v|}{h_K(v)} \right)^p d\tilde{C}_q(K, Q, v) \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\geq \frac{1}{\tilde{V}_q(K, Q)} \int_{S^{n-1}} |u_p \cdot v| d\tilde{C}_{1,q}(K, Q, v) \\ &\geq \frac{c}{\tilde{V}_q(K, Q)}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

当 $p = \infty$ 时, 按照定义 3.1、(2.38) 和 (2.27), 可得当 $1 \leq p_1 < \infty$ 时, 有

$$\begin{aligned}\bar{V}_{\infty,q}(K, B_2^n, Q) &\geq \bar{V}_{\infty,q}(K, \bar{E}_{\infty,q}(K, Q), Q) \\ &\geq \bar{V}_{p_1,q}(K, \bar{E}_{\infty,q}(K, Q), Q) \\ &\geq \left(\frac{(R_\infty)^{p_1}}{\tilde{V}_q(K, Q)} \int_{S^{n-1}} |u_\infty \cdot v|^{p_1} d\tilde{C}_{p_1,q}(K, Q, v) \right)^{\frac{1}{p_1}}.\end{aligned}\quad (4.4)$$

与 (4.3) 相似, 对 (4.4) 应用 Jensen 不等式和 (4.2), 可得

$$\frac{\bar{V}_{\infty,q}(K, B_2^n, Q)}{R_\infty} \geq \frac{c}{\tilde{V}_q(K, Q)}.\quad (4.5)$$

当 $0 < p < 1$ 时, 由 $rB_2^n \subseteq K$ 可得

$$\begin{aligned}\frac{\bar{V}_{\infty,q}(K, B_2^n, Q)}{R_p} &\geq \frac{\bar{V}_{p,q}(K, B_2^n, Q)}{R_p} \\ &\geq \left(\frac{1}{\tilde{V}_q(K, Q)} \int_{S^{n-1}} |u_p \cdot v|^p d\tilde{C}_{p,q}(K, Q, v) \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\geq \left(\frac{r^{1-p}}{\tilde{V}_q(K, Q)} \int_{S^{n-1}} |u_p \cdot v| d\tilde{C}_{1,q}(K, Q, v) \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\geq \left(\frac{r^{1-p}c}{\tilde{V}_q(K, Q)} \right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}\quad (4.6)$$

因此, 由 (4.3)、(4.5) 和 (4.6) 可知, 当 $0 < p \leq \infty$ 时, 有

$$\frac{\bar{V}_{\infty,q}(K, B_2^n, Q)}{R_p} \geq \frac{1}{r} \left(\frac{rc}{\tilde{V}_q(K, Q)} \right)^{\max\{\frac{1}{p}, 1\}}.\quad (4.7)$$

又由 $rB_2^n \subseteq K$ 可知,

$$\bar{V}_{\infty,q}(K, B_2^n, Q) = \max \left\{ \frac{1}{h_K(u)} : u \in \text{supp } \tilde{C}_q(K, Q, \cdot) \right\} \leq \frac{1}{r}.$$

于是,

$$R_p \leq \left(\max\{R^q, r^q\} \frac{\tilde{V}_q(B_2^n, Q)}{rc} \right)^{\max\{\frac{1}{p}, 1\}}.$$

证毕. $\square$

设 $Q \in \mathcal{S}_o^n$ 和 $q \in \mathbb{R}$. 若 $p_i, p_o \in (0, \infty]$ 且 $p_i \rightarrow p_o$, $K_j, K_o \in \mathcal{K}_o^n$ 且 $K_j \rightarrow K_o$, 则由引理 2.3 可得存在常数 $c > 0$ 使得对于一切 j , 有

$$\int_{S^{n-1}} |u \cdot v| d\tilde{C}_{1,q}(K_j, Q, v) \geq c, \quad u \in S^{n-1}.\quad (4.8)$$

因此, 由 (4.8) 和引理 4.1 可得存在常数 M 使得紧集 $\mathcal{E}_M = \{E \in \mathcal{E}_o^n : V(E) = \omega_n \text{ 且 } E \subseteq MB_2^n\}$, 包含所有的椭球 $\bar{E}_{p_i,q}(K_j, Q)$.

下述引理对于证明 $E_{p,q}(K, Q)$ 的连续性是必不可少的.

引理 4.2 设 $Q \in \mathcal{S}_o^n$, $q \in \mathbb{R}$, $p_i, p_o \in (0, \infty]$ 和 $K_j, K_o \in \mathcal{K}_o^n$. 若当 $i, j \rightarrow \infty$ 时, 有 $p_i \rightarrow p_o$ 且 $K_j \rightarrow K_o$, 则当 $E \in \mathcal{E}_M$ 时,

$$\lim_{i, j \rightarrow \infty} \bar{V}_{p_i, q}(K_j, E, Q) = \bar{V}_{p_o, q}(K_o, E, Q)$$

是一致的.

证明 由 $K_j \rightarrow K_o$, 则存在常数 $a > 0$ 和 $b > 0$ 使得

$$K_j, K_o \in \{K \in \mathcal{K}_o^n : aB_2^n \subseteq K \subseteq bB_2^n\}.$$

类似地, 存在 $\delta > 0$ 使得

$$p_i, p_o \in \{p \in \mathbb{R} : p_o - \delta \leq p \leq p_o + \delta\}.$$

由引理 2.4 和 (2.28), $\tilde{V}_{p, q}(K, E, Q)$ 关于 p 、 K 和 E 是连续的. 若 $p_i \in (0, 1]$, 因为集合 $\{K \in \mathcal{K}_o^n : aB_2^n \subseteq K \subseteq bB_2^n\}$ 、 $\{p \in \mathbb{R} : p_o - \delta \leq p \leq p_o + \delta\}$ 和 $\mathcal{E}_M$ 都是紧集, 所以关于 p_i 和 K_j 的函数列 $\tilde{V}_{p_i, q}(K_j, \cdot, Q)$ 在集合 $\mathcal{E}_M$ 上是等度连续的. 另一方面, 当 $p_i \in (1, \infty]$ 时, 引理 2.5 表明了关于 p_i 和 K_j 的函数列 $\bar{V}_{p_i, q}(K_j, \cdot, Q)$ 在集合 $\mathcal{E}_M$ 是等度连续的. 由 Arzela-Ascoli 定理, 该引理可得证. $\square$

引理 4.3 设 $Q \in \mathcal{S}_o^n$, $q \in \mathbb{R}$, $p_i, p_o \in (0, \infty]$ 和 $K_j, K_o \in \mathcal{K}_o^n$. 若当 $i, j \rightarrow \infty$ 时, 有 $p_i \rightarrow p_o$ 且 $K_j \rightarrow K_o$, 则

$$\lim_{i, j \rightarrow \infty} \bar{V}_{p_i, q}(K_j, \bar{E}_{p_i, q}(K_j, Q), Q) = \bar{V}_{p_o, q}(K_o, \bar{E}_{p_o, q}(K_o, Q), Q).$$

证明 按照 $\bar{E}_{p, q}(K, Q)$ 的定义, 由引理 4.2、(2.35) 和 (2.39), 可得

$$\begin{aligned} \lim_{i, j \rightarrow \infty} \bar{V}_{p_i, q}(K_j, \bar{E}_{p_i, q}(K_j, Q), Q) &= \lim_{i, j \rightarrow \infty} \min_{V(E)=\omega_n} \bar{V}_{p_i, q}(K_j, E, Q) \\ &= \min_{V(E)=\omega_n} \lim_{i, j \rightarrow \infty} \bar{V}_{p_i, q}(K_j, E, Q) \\ &= \min_{V(E)=\omega_n} \bar{V}_{p_o, q}(K_o, E, Q) \\ &= \bar{V}_{p_o, q}(K_o, \bar{E}_{p_o, q}(K_o, Q), Q). \end{aligned}$$

证毕. $\square$

引理 4.4 设 $Q \in \mathcal{S}_o^n$, $q \in \mathbb{R}$, $p_i, p_o \in (0, \infty]$ 和 $K_j, K_o \in \mathcal{K}_o^n$. 若当 $i, j \rightarrow \infty$ 时, 有 $p_i \rightarrow p_o$ 且 $K_j \rightarrow K_o$, 则

$$\lim_{i, j \rightarrow \infty} \bar{E}_{p_i, q}(K_j, Q) = \bar{E}_{p_o, q}(K_o, Q).$$

证明 由引理 4.1、集合 $\mathcal{E}_M$ 的紧性和 Blaschke 选择定理, 可假设 $\{\bar{E}_{p_i, q}(K_j, Q)\}$ 的收敛子列, 仍记为 $\{\bar{E}_{p_i, q}(K_j, Q)\}$, 当 $i, j \rightarrow \infty$ 时其极限为

$$E \neq \bar{E}_{p_o, q}(K_o, Q).$$

根据 $\bar{E}_{p, q}(K, Q)$ 的唯一性、(2.39) 和引理 4.2, 可得

$$\bar{V}_{p_o, q}(K_o, \bar{E}_{p_o, q}(K_o, Q), Q) < \bar{V}_{p_o, q}(K_o, E, Q)$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{i,j \rightarrow \infty} \bar{V}_{p_o,q}(K, \bar{E}_{p_i,q}(K_j, Q), Q) \\
&= \lim_{i,j \rightarrow \infty} \bar{V}_{p_i,q}(K_j, \bar{E}_{p_i,q}(K_j, Q), Q).
\end{aligned}$$

上式与引理 4.3 相矛盾. $\square$

因为 $E_{p,q}(K, Q) = \bar{V}_{p,q}(K, \bar{E}_{p,q}(K, Q), Q)^{-1} \bar{E}_{p,q}(K, Q)$, 所以得到下述定理:

定理 4.1 设 $Q \in \mathcal{S}_o^n$, $q \in \mathbb{R}$, $p_i, p_o \in (0, \infty]$ 和 $K_j, K_o \in \mathcal{K}_o^n$. 若当 $i, j \rightarrow \infty$ 时, 有 $p_i \rightarrow p_o$ 且 $K_j \rightarrow K_o$, 则 $\lim_{i,j \rightarrow \infty} E_{p_i,q}(K_j, Q) = E_{p_o,q}(K_o, Q)$.

5 体积比不等式

本节主要建立关于 (p, q) -John 椭球的 Ball 体积比不等式.

引理 5.1 设 $0 < p_1 \leq p_2 \leq \infty$, $q \in \mathbb{R}$, $K \in \mathcal{K}_o^n$ 和 $Q \in \mathcal{S}_o^n$, 则

$$V(E_{p_1,q}(K, Q)) \geq V(E_{p_2,q}(K, Q)).$$

证明 设 $0 < p_2 < \infty$. 由 (2.38) 和 (2.34), 可得

$$\bar{V}_{p_1,q}(K, L, Q) \leq \bar{V}_{p_2,q}(K, L, Q) \leq \lim_{p \rightarrow \infty} \bar{V}_{p,q}(K, L, Q) = \bar{V}_{\infty,q}(K, L, Q).$$

于是,

$$\begin{aligned}
\{E \in \mathcal{E}_o^n : \bar{V}_{\infty,q}(K, E, Q) \leq 1\} &\subseteq \{E \in \mathcal{E}_o^n : \bar{V}_{p_2,q}(K, E, Q) \leq 1\} \\
&\subseteq \{E \in \mathcal{E}_o^n : \bar{V}_{p_1,q}(K, E, Q) \leq 1\}.
\end{aligned}$$

由上述的包含关系和定义 3.1, 该引理得证. $\square$

下面这个例子是关于多面体的 (p, q) -对偶曲率测度的 (参见文献 [32]).

例 5.1 设 $p, q \in \mathbb{R}$ 和 $Q \in \mathcal{S}_o^n$. 令 $P \in \mathcal{K}_o^n$ 是一个多面体, 其外法向量为 $v_1, \dots, v_m$, Δ_i 表示一个锥, 其顶点为原点, 底面为多面体 P 的一个面, 该面的外法向量为 v_i . 由 (2.21), 可得

$$\alpha_P^*(v_i) = S^{n-1} \cap \Delta_i.$$

若 $\eta \subset S^{n-1}$ 是一个 Borel 集合且 $\{v_1, \dots, v_m\} \cap \eta = \emptyset$, 则 $\alpha_P^*(\eta)$ 是一个关于球面 Lebesgue 测度的零测度集. 因此, (p, q) -对偶曲率测度 $\tilde{C}_{p,q}(P, Q, \cdot)$ 是离散的且集中在 $\{v_1, \dots, v_m\}$. 于是,

$$\tilde{C}_{p,q}(P, Q, \cdot) = \sum_{i=1}^m c_i \delta_{v_i},$$

其中 δ_{v_i} 表示集中在 v_i 方向上的 delta 测度且

$$c_i = \frac{1}{n} h_P^{-p}(v_i) \int_{S^{n-1} \cap \Delta_i} \rho_P^q(u) \rho_Q^{n-q}(u) du.$$

定理 5.1 设 $0 < p \leq \infty$, $q \in \mathbb{R}$ 和 $Q \in \mathcal{S}_o^n$. 若 K 是一个关于原点对称的凸体, 则

$$V(K) \leq \frac{2^n}{\omega_n} V(E_{p,q}(K, Q)). \quad (5.1)$$

如果等号成立, 则 K 是一个超平行体. 相反地, 若 K 是一个超平行体, 且 Q 与 K 互为膨胀或 $Q = B_2^n$, 则等号成立.

证明 由 (2.36) 可知问题 $S_{\infty, q}(K, Q)$ 等价于问题 $S_{\infty}(K)$. 于是,

$$E_{\infty, q}(K, Q) = E_{\infty}(K).$$

因为 K 是一个关于原点对称的凸体, 由引理 5.1 和 (1.9), 可得

$$V(K) \leq \frac{2^n}{\omega_n} V(E_{\infty, q}(K, Q)) \leq \frac{2^n}{\omega_n} V(E_{p, q}(K, Q)). \quad (5.2)$$

在不等式 (5.2) 中第一个等号成立当且仅当 K 是一个超平行体. 若在不等式 (5.1) 中等号成立, 则意味着不等式 (5.2) 中第一个等号成立. 故 K 是一个超平行体.

相反地, 由引理 3.4 知上述不等式 (5.2) 是 $GL(n)$ - 不变的, 不妨假设 $K = [-1, 1]^n$, 其外法向量为 $\pm e_1, \dots, \pm e_n$, 记 $v_1 = e_1, \dots, v_n = e_n, v_{n+1} = -e_1, \dots, v_{2n} = -e_n$, 则 $V(K) = 2^n$. 令 Δ_i 表示一个锥, 其顶点为原点, 底面为多面体 K 的面, 该面的外法向量为 v_i . 由例 5.1, 可得

$$\tilde{C}_{p, q}(K, Q, \cdot) = \sum_{i=1}^{2n} c_i \delta_{v_i},$$

其中 δ_{v_i} 表示集中在 v_i 方向上的 delta 测度且

$$c_i = \frac{1}{n} h_K^{-p}(v_i) \int_{S^{n-1} \cap \Delta_i} \rho_K^q(u) \rho_Q^{n-q}(u) du.$$

若 K 和 Q 互为膨胀或 $Q = B_2^n$, 由 $K = [-1, 1]^n$, 可得 $c_1 = \dots = c_{2n} =: c$. 于是,

$$\begin{aligned} \int_{S^{n-1}} |x \cdot v|^2 d\tilde{C}_{p, q}(K, Q, v) &= \sum_{i=1}^n |x \cdot v_i|^2 \tilde{C}_{p, q}(K, Q, v_i) + \sum_{i=1}^n |x \cdot v_{i+n}|^2 \tilde{C}_{p, q}(K, Q, v_{i+n}) \\ &= \sum_{i=1}^n |x \cdot v_i|^2 c + \sum_{i=1}^n |-x \cdot v_i|^2 c \\ &= 2|x|^2 c. \end{aligned}$$

因为

$$\frac{1}{n} \tilde{V}_{p, q}(K, B_2^n, Q) = \frac{1}{n} \tilde{C}_{p, q}(K, Q, S^{n-1}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{2n} c_i = 2c,$$

所以,

$$\frac{1}{n} \tilde{V}_{p, q}(K, B_2^n, Q) |x|^2 = \int_{S^{n-1}} |x \cdot v|^2 d\tilde{C}_{p, q}(K, Q, v).$$

由定理 3.2 可知, $\bar{E}_{p, q}(K, Q) = B_2^n$. 又由引理 3.2, 可得

$$E_{p, q}(K, Q) = \bar{V}_{p, q}(K, \bar{E}_{p, q}(K, Q), Q)^{-1} \bar{E}_{p, q}(K, Q) = B_2^n.$$

故在不等式 (5.1) 中等号成立. □

6 John 包含关系

本节讨论关于 (p, q) -John 椭球的 John 包含关系.

定义 6.1 设 $q \in \mathbb{R}$, $Q \in \mathcal{S}_o^n$ 和 $K \in \mathcal{K}_o^n$. 当 $p > 0$ 时, 星体 $\Gamma_{-p,q}(K, Q)$ 定义为

$$\rho_{\Gamma_{-p,q}(K,Q)}(u)^{-p} = \frac{n}{\tilde{V}_q(K, Q)} \int_{S^{n-1}} |u \cdot v|^p d\tilde{C}_{p,q}(K, Q, v), \quad u \in S^{n-1}. \quad (6.1)$$

当 $p = \infty$ 时, 星体 $\Gamma_{-\infty,q}(K, Q)$ 定义为

$$\Gamma_{-\infty,q}(K, Q) = \lim_{p \rightarrow \infty} \Gamma_{-p,q}(K, Q). \quad (6.2)$$

显然, 当 $p \geq 1$ 时, 星体 $\Gamma_{-p,q}(K, Q)$ 为凸体. 当 $p > 0$ 时, 由 (2.23), 可得 (6.1) 等价于

$$n^{-\frac{1}{p}} \rho_{\Gamma_{-p,q}(K,Q)}(u)^{-1} = \left(\frac{1}{\tilde{V}_q(K, Q)} \int_{S^{n-1}} \left(\frac{|u \cdot v|}{h_K(v)} \right)^p d\tilde{C}_q(K, Q, v) \right)^{\frac{1}{p}}, \quad u \in S^{n-1}.$$

于是, 由 (6.2) 可得

$$\rho_{\Gamma_{-\infty,q}(K,Q)}(u)^{-1} = \max \left\{ \frac{|u \cdot v|}{h_K(v)} : v \in \text{supp } \tilde{C}_q(K, Q, \cdot) \right\}.$$

当 K 是关于原点对称的凸体时, 由 (2.22) 和 (2.10) 可知, $\Gamma_{-\infty,q}(K, Q) = K$.

引理 6.1 设 $0 < p \leq \infty$, $q \in \mathbb{R}$, $Q \in \mathcal{S}_o^n$ 和 $K \in \mathcal{K}_o^n$, 则

$$\Gamma_{-p,q}(\phi K, \phi Q) = \phi \Gamma_{-p,q}(K, Q), \quad \phi \in \text{GL}(n).$$

证明 首先, 考虑 $0 < p < \infty$. 由 (6.1)、引理 2.2 和 (2.19), 可得

$$\begin{aligned} \rho_{\Gamma_{-p,q}(\phi K, \phi Q)}(u)^{-p} &= \frac{n}{\tilde{V}_q(\phi K, \phi Q)} \int_{S^{n-1}} |u \cdot v|^p d\tilde{C}_{p,q}(\phi K, \phi Q, v) \\ &= \frac{n}{\tilde{V}_q(K, Q)} \int_{S^{n-1}} |u \cdot v|^p d\phi_{p-1}^T \tilde{C}_{p,q}(K, Q, v) \\ &= \frac{n}{\tilde{V}_q(K, Q)} \int_{S^{n-1}} |u \cdot \phi^{-T} v|^p d\tilde{C}_{p,q}(K, Q, v) \\ &= \rho_{\Gamma_{-p,q}(K,Q)}(\phi^{-1} u)^{-p} \\ &= \rho_{\phi \Gamma_{-p,q}(K,Q)}(u)^{-p}. \end{aligned}$$

因此, $\Gamma_{-p,q}(\phi K, \phi Q) = \phi \Gamma_{-p,q}(K, Q)$.

当 $p = \infty$ 时, 该结论可由上述式子和 (6.2) 得到. □

引理 6.2 设 $q \in \mathbb{R}$, $Q \in \mathcal{S}_o^n$ 和 $K \in \mathcal{K}_o^n$, 则

$$\begin{aligned} E_{p,q}(K, Q) &\supseteq \Gamma_{-p,q}(K, Q), \quad 0 < p < 2, \\ E_{p,q}(K, Q) &\subseteq \Gamma_{-p,q}(K, Q), \quad 2 < p \leq \infty. \end{aligned}$$

证明 根据引理 3.4 和 6.1, 我们只需证明当 $E_{p,q}(K, Q) = B_2^n$ 时包含关系成立即可.

当 $0 < p < 2$ 时, 由 (6.1) 和定理 3.3 可得对于任意 $u \in S^{n-1}$, 有

$$\begin{aligned} \rho_{\Gamma_{-p,q}(K,Q)}(u)^{-p} &= \frac{n}{\widetilde{V}_q(K,Q)} \int_{S^{n-1}} |u \cdot v|^p d\widetilde{C}_{p,q}(K,Q,v) \\ &\geq \frac{n}{\widetilde{V}_q(K,Q)} \int_{S^{n-1}} |u \cdot v|^2 d\widetilde{C}_{p,q}(K,Q,v) \\ &= 1. \end{aligned}$$

上式表明

$$\Gamma_{-p,q}(K,Q) \subseteq B_2^n = E_{p,q}(K,Q). \quad (6.3)$$

当 $2 < p < \infty$ 时, 此时的包含关系与 (6.3) 相反, 即 $E_{p,q}(K,Q) \subseteq \Gamma_{-p,q}(K,Q)$.

当 $p = \infty$ 时, 该包含关系可根据定理 4.1、(6.2) 和上述情形得到. $\square$

注意到由 (6.1) 和定理 3.3 可得 $E_{2,q}(K,Q) = \Gamma_{-2,q}(K,Q)$.

定理 6.1 设 $q \in \mathbb{R}$, $Q \in \mathcal{S}_o^n$ 和 $K \in \mathcal{K}_o^n$, 则

$$\begin{aligned} \Gamma_{-p_1,q}(K,Q) &\supseteq n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_1}} E_{p_2,q}(K,Q), \quad 0 < p_1 \leq p_2 \leq 2, \\ \Gamma_{-p_1,q}(K,Q) &\subseteq n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_1}} E_{p_2,q}(K,Q), \quad 2 \leq p_2 \leq p_1 \leq \infty. \end{aligned}$$

证明 按照引理 3.4 和 6.1, 我们只需证明当 $E_{p,q}(K,Q) = B_2^n$ 时包含关系成立即可. 于是由引理 3.1 和定义 3.1 可得

$$\widetilde{V}_{p_2,q}(K, B_2^n, Q) = \widetilde{V}_q(K, Q). \quad (6.4)$$

当 $0 < p_1 \leq p_2 \leq 2$ 时, 由 (6.1)、(2.23)、Jensen 不等式、(6.4) 和定理 3.3 可知, 对于任意 $u \in S^{n-1}$,

$$\begin{aligned} \rho_{\Gamma_{-p_1,q}(K,Q)}(u)^{-1} &= n^{\frac{1}{p_1}} \left(\frac{1}{\widetilde{V}_q(K,Q)} \int_{S^{n-1}} \left(\frac{|u \cdot v|}{h_K(v)} \right)^{p_1} d\widetilde{C}_q(K,Q,v) \right)^{\frac{1}{p_1}} \\ &\leq n^{\frac{1}{p_1}} \left(\frac{1}{\widetilde{V}_q(K,Q)} \int_{S^{n-1}} \left(\frac{|u \cdot v|}{h_K(v)} \right)^{p_2} d\widetilde{C}_q(K,Q,v) \right)^{\frac{1}{p_2}} \\ &= n^{\frac{1}{p_1}} \left(\frac{1}{\widetilde{V}_{p_2,q}(K, B_2^n, Q)} \int_{S^{n-1}} |u \cdot v|^{p_2} d\widetilde{C}_{p_2,q}(K,Q,v) \right)^{\frac{1}{p_2}} \\ &\leq n^{\frac{1}{p_1}} \left(\frac{1}{\widetilde{V}_{p_2,q}(K, B_2^n, Q)} \int_{S^{n-1}} |u \cdot v|^2 d\widetilde{C}_{p_2,q}(K,Q,v) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= n^{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

因此,

$$\Gamma_{-p_1,q}(K,Q) \supseteq n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_1}} E_{p_2,q}(K,Q).$$

当 $2 \leq p_2 \leq p_1 < \infty$ 时, 此时的包含关系与上述的包含关系相反, 即

$$\Gamma_{-p_1,q}(K,Q) \subseteq n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_1}} E_{p_2,q}(K,Q). \quad (6.5)$$

当 $p_1 = \infty$ 时, 该包含关系可根据定理 4.1、(6.2) 和 (6.5) 得到. $\square$

因为当 K 是一个关于原点对称的凸体时有 $\Gamma_{-\infty,q}(K, Q) = K$, 所以可以得到关于 (p, q) -John 椭球的 John 包含关系.

定理 6.2 设 $q \in \mathbb{R}$ 和 $Q \in \mathcal{S}_o^n$. 若 K 是一个关于原点对称的凸体, $2 \leq p \leq \infty$, 则

$$K \subseteq \sqrt{n}E_{p,q}(K, Q).$$

致谢 作者衷心感谢三位审稿人对本文的认真审阅和提出的评论与建议.

参考文献

- 1 John F. Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions. In: Studies and Essays Presented to R. Courant on His 60th Birthday. New York: Interscience Publishers, 1948, 187–204
- 2 Ball K. Volume ratios and a reverse isoperimetric inequality. J Lond Math Soc (2), 1991, s2-44: 351–359
- 3 Barthe F. On a reverse form of the Brascamp-Lieb inequality. Invent Math, 1998, 134: 335–361
- 4 Ball K. Ellipsoids of maximal volume in convex bodies. Geom Dedicata, 1992, 41: 241–250
- 5 Lewis D. Ellipsoids defined by Banach ideal norms. Mathematika, 1979, 26: 18–29
- 6 Ludwig M. Ellipsoids and matrix-valued valuations. Duke Math J, 2003, 119: 159–188
- 7 Pisier G. The Volume of Convex Bodies and Banach Geometry. Cambridge: Cambridge University Press, 1989
- 8 Lutwak E, Yang D, Zhang G. A new ellipsoid associated with convex bodies. Duke Math J, 2000, 104: 375–390
- 9 Lutwak E. The Brunn-Minkowski-Firey theory I: Mixed volumes and the Minkowski problem. J Differential Geom, 1993, 38: 131–150
- 10 Lutwak E. The Brunn-Minkowski-Firey theory II: Affine and geominimal surface areas. Adv Math, 1996, 118: 244–294
- 11 Firey W. p -means of convex bodies. Math Scand, 1962, 10: 17–24
- 12 Haberl C. L_p intersection bodies. Adv Math, 2008, 217: 2599–2624
- 13 Haberl C, Schuster F. General L_p affine isoperimetric inequalities. J Differential Geom, 2009, 83: 1–26
- 14 Hu C, Ma X, Shen C. On the Christoffel-Minkowski problem of Firey's p -sum. Calc Var Partial Differential Equations, 2004, 21: 137–155
- 15 Lutwak E, Yang D, Zhang G. L_p affine isoperimetric inequalities. J Differential Geom, 2000, 56: 111–132
- 16 Schütt C, Werner E. Surface bodies and p -affine surface area. Adv Math, 2004, 187: 98–145
- 17 Wu D, Zhou J. The LYZ centroid conjecture for star bodies. Sci China Math, 2018, 61: 1273–1286
- 18 Lutwak E, Yang D, Zhang G. L_p John ellipsoids. Proc Lond Math Soc (3), 2005, 90: 497–520
- 19 Giannopoulos A, Papadimitrakis M. Isotropic surface area measures. Mathematika, 1999, 46: 1–13
- 20 Petty C. Surface area of a convex body under affine transformations. Proc Amer Math Soc, 1961, 12: 824–828
- 21 Lutwak E. Dual mixed volumes. Pacific J Math, 1975, 58: 531–538
- 22 Schneider R. Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory, 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2014
- 23 Lutwak E. Intersection bodies and dual mixed volumes. Adv Math, 1988, 71: 232–261
- 24 Zhang G. Dual kinematic formulas. Trans Amer Math Soc, 1999, 351: 985–995
- 25 Zhang G. Centered bodies and dual mixed volumes. Trans Amer Math Soc, 1994, 345: 777–801
- 26 Huang Y, Lutwak E, Yang D, et al. Geometric measures in the dual Brunn-Minkowski theory and their associated Minkowski problems. Acta Math, 2016, 216: 325–388
- 27 Böröczky K, Henk M, Pollehn H. Subspace concentration of dual curvature measures of symmetric convex bodies. J Differential Geom, 2018, 109: 411–429
- 28 Wang H, Fang N, Zhou J. Continuity of the solution to the dual Minkowski problem for negative indices. Proc Amer Math Soc, 2019, 147: 1299–1312
- 29 Wang H, Fang N, Zhou J. Continuity of the solution to the even logarithmic Minkowski problem in the plane. Sci China Math, 2019, 62: 1419–1428
- 30 Zhao Y. The dual Minkowski problem for negative indices. Calc Var Partial Differential Equations, 2017, 56: 18
- 31 Zhao Y. Existence of solutions to the even dual Minkowski problem. J Differential Geom, 2018, 110: 543–572
- 32 Lutwak E, Yang D, Zhang G. L_p dual curvature measures. Adv Math, 2018, 329: 85–132
- 33 Chen C, Huang Y, Zhao Y. Smooth solutions to the L_p dual Minkowski problem. Math Ann, 2019, 373: 953–976
- 34 Huang Y, Zhao Y. On the L_p dual Minkowski problem. Adv Math, 2018, 332: 57–84
- 35 Li X, Wang H, Zhou J. (p, q) -mixed geominimal surface area and (p, q) -mixed affine surface area. J Math Anal Appl, 2019, 475: 1472–1492

- 36 Böröczky K, Fodor F. The L_p dual Minkowski problem for $p > 1$ and $q > 0$. J Differential Equations, 2019, 266: 7980–8033
- 37 Haberl C, Lutwak E, Yang D, et al. The even Orlicz Minkowski problem. Adv Math, 2010, 224: 2485–2510
- 38 Lutwak E, Yang D, Zhang G. Orlicz projection bodies. Adv Math, 2010, 223: 220–242
- 39 Lutwak E, Yang D, Zhang G. Orlicz centroid bodies. J Differential Geom, 2010, 84: 365–387
- 40 Gardner R, Hug D, Weil W, et al. The dual Orlicz-Brunn-Minkowski theory. J Math Anal Appl, 2015, 430: 810–829
- 41 Zhu B, Zhou J, Xu W. Dual Orlicz-Brunn-Minkowski theory. Adv Math, 2014, 264: 700–725
- 42 Zou D, Xiong G. Orlicz-John ellipsoids. Adv Math, 2014, 265: 132–168
- 43 Zou D, Xiong G. Orlicz-Legendre ellipsoids. J Geom Anal, 2016, 26: 2474–2502
- 44 Fang N, Zhou J. LYZ ellipsoid and Petty projection body for log-concave functions. Adv Math, 2018, 340: 914–959
- 45 Hu J, Xiong G. The logarithmic John ellipsoid. Geom Dedicata, 2018, 197: 33–48
- 46 Li A, Huang Q, Xi D. New sine ellipsoids and related volume inequalities. Adv Math, 2019, 353: 281–311
- 47 Bastero J, Romance M. Positions of convex bodies associated to extremal problems and isotropic measures. Adv Math, 2004, 184: 64–88
- 48 Fang N, Xu W, Zhou J, et al. The sharp convex mixed Lorentz-Sobolev inequality. Adv Appl Math, 2019, 111: 101936
- 49 Hu J, Xiong G, Zou D. On mixed L_p John ellipsoids. Adv Geom, 2019, 19: 297–312
- 50 Klartag B. On John-type ellipsoids. In: Geometric Aspects of Functional Analysis. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1850. Berlin: Springer, 2004, 149–158
- 51 Zou D, Xiong G. Convex bodies with identical John and LYZ ellipsoids. Int Math Res Not IMRN, 2018, 2018: 470–491
- 52 Zou D, Xiong G. New affine inequalities and projection mean ellipsoids. Calc Var Partial Differential Equations, 2019, 58: 44
- 53 Gruber P. Convex and Discrete Geometry. Heidelberg-Berlin: Springer, 2007

On (p, q) -John ellipsoids

Xiao Li, Hejun Wang & Jiazuo Zhou

Abstract In this paper, the (p, q) -John ellipsoids are introduced and characterized. The classical John ellipsoid and the L_p John ellipsoids are special cases of the (p, q) -John ellipsoids. The continuity of the (p, q) -John ellipsoids is investigated. Analogues of Ball’s volume-ratio inequality and John’s inclusion for the (p, q) -John ellipsoids are established.

Keywords (p, q) -John ellipsoids, volume-ratio inequality, John’s inclusion

MSC(2010) 52A40

doi: 10.1360/SCM-2019-0639