基于增益矩阵的二阶集群系统鲁棒分布式立体编队控制

徐扬, 罗德林^{*}, 周路鹏, 邵将, 尤延铖

厦门大学航空航天学院, 厦门 361102

^{*} E-mail: luodelin1204@xmu.edu.cn

收稿日期: 2019-07-26; 接受日期: 2019-09-05; 网络版发表日期: 2020-02-20

国家自然科学基金(批准号: 61673327)、航空电子系统综合技术重点实验室和航空科学基金(编号: 20185568005)资助项目

摘要 本文研究解决了在三维空间内针对二阶集群系统的鲁棒分布式编队生成与保持控制问题, 所设计的基于增益矩阵的控制方法仅需测量局部坐标系下智能体间的相对位置信息而不依赖于交互通信. 首先设计了二阶集群系统的立体编队生成控制策略, 通过构造李雅普诺夫函数证明了全局稳定性, 并利用凸优化求解得出增益矩阵. 所设计的生成控制律对扰动、输入饱和等具有较好的鲁棒性, 同时在生成过程中引入了启发式的避碰算法. 在此基础上, 设计了带有期望距离的编队保持控制策略, 使得集群系统能够保持固定大小的队形. 然后, 将所设计的控制律进行改进, 拓展并应用于领航者-跟随者网络下的二阶集群系统立体编队控制. 最后, 通过相关的仿真实验验证了理论结果的正确性.

关键词 分布式编队控制, 二阶集群系统, 鲁棒性, 避碰, 领航者-跟随者网络

1 引言

近年来, 技术的进步使得人们能够通过部署大规模的智能体如无人机、无人车等组成集群系统, 来执行环境测绘^[1]及监察^[2]、货物运输^[3]、对象操纵^[4-6]等任务. 在这些实际应用中, 集群系统能够自主实现所需的编队队形是构建更复杂的机动和导航策略的基础. 关于集群系统的编队控制, 目前已有大量的研究工作^[7], 其主要的研究内容可以分为队形生成、队形保持、队形切换、编队避障、自适应等.

集群系统的编队控制策略主要分为两种: 集中式

编队控制策略和分布式编队控制策略. 随着执行任务的复杂化, 所需部署的智能体个数也需不断增加. 由于受到通信带宽的限制, 智能体间的通信带宽会逐渐趋于饱和, 这使得传统的集中式控制方法变得越来越不实用. 另外在一些场合, 如室内、水下、深空中, GPS位置测量可能会失效, 导致智能体获取不到其他智能体在全局坐标系里的状态信息, 这时也不能采用集中式的编队控制方法. 此外, 集中式控制具有缺乏对通信丢失、硬件故障、对通信信号的干扰或欺骗等恶意攻击的恢复能力以及对全局测量的鲁棒性等缺点. 基于这些缺陷, 分布式的编队控制策略得到了广泛

引用格式: 徐扬, 罗德林, 周路鹏, 等. 基于增益矩阵的二阶集群系统鲁棒分布式立体编队控制. 中国科学: 技术科学, 2020, 50: 461-474
Xu Y, Luo D L, Zhou L P, et al. A gain matrix approach for robust distributed 3D formation control with second order swarm systems (in Chinese). Sci Sin Tech, 2020, 50: 461-474, doi: 10.1360/SST-2019-0258

的关注与研究. 通过将局部控制律分配给单个智能体, 确保了从智能体的集体行为中产生期望的几何形状. 分布式的编队控制可以应用到很多场合, 与集中式编队控制相比, 分布式控制策略大大降低了对智能体通讯能力的要求, 具有更好的可扩展性、自然的并行计算能力、对通信损耗和硬件故障的恢复能力、对不确定性和缺乏全局测量信息的鲁棒性等优点.

在生物学上, 集群所指的是一种智能体依靠局部感知和相互作用而自主决定运动状态, 并由单个智能体局部行为构成多智能体全局行为的协同方式^[8]. 因此, 分布式编队控制的研究更适用于集群系统. 现有文献中关于集群系统的编队控制方法主要有基于行为法的编队控制、基于虚拟结构的编队控制、基于人工势场法的编队控制、基于图论法的编队控制以及基于领航者-跟随者法的编队控制^[9]. 目前, 这几种研究方法已经逐步地融合在一起, 难以绝对地进行区分. 特别地, 基于图论法的编队控制可以借鉴成熟的图论理论来建立智能体间的感知拓扑图, 设计编队控制律, 将代数与几何完美地结合起来, 近年来受到专家学者的广泛关注, 逐步地融合了其他几种方法, 成为研究编队控制的主流方法.

尽管近年来有关集群系统编队控制的研究取得了不少的成果, 但也存在很多亟需解决的问题^[9], 比如立体编队控制问题, 具有强非线性模型的编队控制问题, 异构集群系统的编队控制问题, 通信、感知约束条件下的编队控制问题, 集群系统编队控制系统实例研究等. 因此, 通过开展对集群系统立体编队控制的研究, 能够为多个智能体在实际中协同执行复杂任务时的编队提供一定的参考意义.

现有的大多数文献中, 关于集群系统的编队控制问题提出了一系列的假设或需要一些限制条件: 文献^[10,11]在编队过程中需要用到全局坐标系里的位置信息; 文献^[12,13]中要求智能体期望的航向相同; 文献^[14,15]中需要智能体间进行内部通信; 文献^[16]中假设智能体间的感知拓扑图为完全图. 此外有一类编队控制策略不需要这些假设条件, 就能够使智能体自主地实现所需的编队队形. 文献^[17]中给出了一种基于距离的编队控制策略, 文献^[18,19]提供了基于方位的编队控制策略. 文献^[20-22]中则研究了基于质心坐标的编队控制策略, 与基于距离以及基于方位编队控制策略不同的是, 在基于质心坐标的编队控制策略中,

智能体的期望队形是通过它们之间的距离以及智能体与邻居之间所张成的方位角来定义的. 由于常见的传感器, 如激光扫描仪、雷达、声呐和立体相机, 可以提供角度和距离的测量, 这项编队策略的重点是编队队形的结构. 基于图拉普拉斯矩阵的编队控制又可以归类为一种新型的编队控制策略, 编队队形最终能够收敛至所设计的拉普拉斯矩阵的核空间之内, 而不需要在控制律内引入编队偏置向量, 典型的方法有基于边拉普拉斯矩阵^[23]以及基于符号拉普拉斯矩阵^[24,25]的编队控制策略, 这类策略重视的是特殊的拉普拉斯矩阵构型所带来的新的性质.

不同于先前解决编队控制问题所涉及的单一研究方法, 本文旨在结合图论、矩阵论、凸优化理论及李雅普诺夫稳定性理论中的相关知识, 主要的研究特色可以归纳如下:

- (1) 针对立体空间内运动的二阶动力学模型, 提出一种基于增益矩阵的集群系统编队控制策略, 并利用半正定规划算法对增益矩阵进行求取;
- (2) 设计编队生成和保持控制律使得集群系统在只需要测量智能体间的相对位置信息、内部不需要通信的情况下就能够收敛到并保持期望的立体队形;
- (3) 提出编队控制律能够在集群系统受到扰动以及输入饱和限制时, 具备一定的鲁棒性, 并且利用启发式算法解决编队生成中的避碰问题;
- (4) 在编队保持控制策略中, 引入距离约束函数, 保证集群系统编队能够维持期望的固定大小的立体队形;
- (5) 将无领航者的编队控制律扩展到领航者-跟随者网络下的立体编队控制问题, 设计跟随者的分布式控制律保证集群系统的立体编队的稳定性.

2 问题描述

2.1 图论基础

本文利用图的顶点和边来表示集群系统中的智能体和它们之间的通讯拓扑关系. 定义一个无向图 $\mathcal{G}=(\mathcal{V}, \mathcal{E})$, 其中点集 $\mathcal{V}:=\mathbb{N}_m$, 边集 $\mathcal{E} \subseteq \{(i, j): i, j \in \mathcal{V}, i \neq j\}$, 图中的每个顶点代表一个智能体. 如果顶点 $i \in \mathcal{V}$ 和顶点 $j \in \mathcal{V}$ 之间存在一条边, 则表示智能体 i 和 j 能够从它们的局部坐标系里获得彼此的相对位置信息. 这种情况下, 称智能体 i 和 j 为邻居, 并用集合 $\mathcal{N}_i:=\{j \in \mathcal{V}: (i, j) \in \mathcal{E}\}$ 来表示智

能体 i 的邻居集合. 对于一个顶点序列 $P=v_1, v_2, \dots, v_k$, 如果每一对相邻的顶点 v_i 和 v_{i+1} 之间都存在一条边, 则称该无向图是连通的.

图 $\mathcal{G}$ 的邻接矩阵 $\mathbf{M}=[m_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 定义如式(1): 当 $(j, i) \in \mathcal{E}$ 时, $m_{ij}=1$; 当 $(j, i) \notin \mathcal{E}$ 时, $m_{ij}=0$. 除非特别说明, 否则不允许有自身边存在($m_{ii}=0$), 且当图 $\mathcal{G}$ 为无向图时, 对于所有的 $i \neq j$, 有 $m_{ij}=m_{ji}$.

$$\mathbf{M}(i, j) = \begin{cases} 1, & \text{if } (j, i) \in \mathcal{E}, i \neq j, \\ 0, & \text{if } (j, i) \notin \mathcal{E}, i \neq j, \\ 0, & \text{if } i = j. \end{cases} \quad (1)$$

本文中用邻接矩阵 $\mathbf{M}$ 来表示智能体的拓扑结构, 取 $m_{ij}=1$ 时表示智能体 i 和 j 为邻居, $m_{ij}=0$ 时表示智能体 i 和 j 不能获取彼此的信息.

图 $\mathcal{G}$ 的拉普拉斯矩阵一般用 $\mathbf{L}=[l_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 表示, 定义如式(2): 对于 $j \in \mathcal{N}_i$, $l_{ij}=-m_{ij}$, $i \neq j$; 对于 $j \notin \mathcal{N}_i$, $l_{ij}=0$, $i \neq j$, 对角线元素 $l_{ii} = \sum_{j=1, j \neq i}^n m_{ij}$.

$$\mathbf{L}(i, j) = \begin{cases} -m_{ij}, & \text{if } i \neq j \text{ and } j \in \mathcal{N}_i, \\ 0, & \text{if } i \neq j \text{ and } j \notin \mathcal{N}_i, \\ \sum_{j=1, j \neq i}^n m_{ij}, & \text{if } i = j. \end{cases} \quad (2)$$

对于一个无向图, 矩阵 $\mathbf{L}$ 是对称半正定的, 并且由于 $\mathbf{L}$ 的各行元素之和为0, 0是 $\mathbf{L}$ 的一个特征值, 其对应的特征向量是元素均为1的 n 维列向量 $\mathbf{1}_n \in \mathbb{R}^n$.

2.2 问题模型

考虑包含具有二阶动力学模型的 $n \in \mathbb{N}^+$ 个智能体的集群系统, 单个智能体 i 的动力学表示为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}_i &= \mathbf{v}_i, \\ \dot{\mathbf{v}}_i &= \mathbf{u}_i, \end{aligned} \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad (3)$$

其中, $\mathbf{q}_i := [x_i, y_i, z_i]^T \in \mathbb{R}^3$ 表示智能体 i 在全局坐标系里的位置, $\mathbf{v}_i := [v_{ix}, v_{iy}, v_{iz}]^T \in \mathbb{R}^3$ 表示智能体 i 的速度, $\mathbf{u}_i \in \mathbb{R}^3$ 则表示智能体 i 的控制输入.

令 $\mathbf{q} := [\mathbf{q}_1^T, \mathbf{q}_2^T, \dots, \mathbf{q}_n^T]^T \in \mathbb{R}^{3n}$, $\mathbf{v} := [\mathbf{v}_1^T, \mathbf{v}_2^T, \dots, \mathbf{v}_n^T]^T \in \mathbb{R}^{3n}$, $\mathbf{u} := [\mathbf{u}_1^T, \mathbf{u}_2^T, \dots, \mathbf{u}_n^T]^T \in \mathbb{R}^{3n}$ 分别表示系统的聚合位置向量、聚合速度向量以及聚合控制向量, 则整个

系统的动力学方程可以表示为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}} &= \mathbf{v}, \\ \dot{\mathbf{v}} &= \mathbf{u}, \end{aligned} \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (4)$$

本文的主要目标是针对式(4)所示的二阶集群系统, 设计相应的分布式控制律, 使得每个智能体在只需获得其邻居智能体相对位置信息的情况下, 构造出增益矩阵, 并保证整个编队收敛到期望的立体队形, 同时考虑避碰、队形的保持控制等问题, 最后将所设计的控制律进行改进, 应用到领航者-跟随者网络下的编队控制, 使得跟随者跟随领航者形成期望的立体队形. 本文中假设智能体间的感知拓扑为无向刚性图, 期望的立体队形是物理可行的.

3 二阶集群系统立体编队生成控制

3.1 控制律设计

为了使智能体收敛到期望的立体队形, 智能体 i 的控制律设计为

$$\mathbf{u}_i = k_0 \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \mathbf{A}_{ij}(\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i) - k_1 \mathbf{v}_i, \quad (5)$$

其中, $\mathbf{A}_{ij} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ 为待求的增益矩阵, $\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i$ 表示智能体 j 在智能体 i 局部坐标系里的位置, $k_0, k_1 \in \mathbb{R}$ 为常量控制增益. 给定增益矩阵的形式:

$$\mathbf{A}_{ij} = \begin{bmatrix} a_{ij} & -b_{ij} & 0 \\ b_{ij} & a_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & c_{ij} \end{bmatrix}, \quad a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} \in \mathbb{R}. \quad (6)$$

假设智能体局部坐标系的 z 轴和全局坐标系的 z 轴对齐, 由 $\mathbf{A}_{ij}$ 的可交换性, 可知用智能体间局部坐标系下的 $\mathbf{q}_i$ 和 $\mathbf{q}_j$ 表示的闭环动力学方程和全局坐标表示的相同, 并且局部坐标系并不需要沿着 x - y 平面方向对齐^[26]. 因此, 所设计的控制律是分布式的, 编队过程中, 每个智能体只需要知道其邻居智能体的相对位置信息.

则系统的闭环动力学方程可以表示为

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{v}} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_{3n} \\ k_0 \mathbf{A} & -k_1 \mathbf{I}_{3n} \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{A}}} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix}, \quad (7)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\sum_{j=2}^n \mathbf{A}_{1j} & \mathbf{A}_{12} & \cdots & \mathbf{A}_{1n} \\ \mathbf{A}_{21} & -\sum_{j=2}^n \mathbf{A}_{2j} & \cdots & \mathbf{A}_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}_{n1} & \mathbf{A}_{n2} & \cdots & -\sum_{j=1}^{n-1} \mathbf{A}_{nj} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3n \times 3n}, \quad (8)$$

其中, 对于 $j \notin \mathcal{N}_i$, $\mathbf{A}_{ij} = 0$. 注意到矩阵 $\mathbf{A}$ 的 3×3 对角块是同一行其余块的负和, 矩阵 $\mathbf{A}$ 为块拉普拉斯结构. 因而, 向量

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_x &= [1, 0, 0, 1, 0, 0, \dots, 1, 0, 0]^T \in \mathbb{R}^{3n}, \\ \mathbf{1}_y &= [0, 1, 0, 0, 1, 0, \dots, 0, 1, 0]^T \in \mathbb{R}^{3n}, \\ \mathbf{1}_z &= [0, 0, 1, 0, 0, 1, \dots, 0, 0, 1]^T \in \mathbb{R}^{3n} \end{aligned} \quad (9)$$

在 $\mathbf{A}$ 的核空间内.

3.2 稳定性证明

引理1^[26] 假设矩阵 $\mathbf{A}$ 的所有非零特征根均具有负实部, 那么系统 $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{A}\mathbf{q}$ 的所有运动轨迹指数收敛到 $\mathbf{A}$ 的核.

令 $\mathbf{q}^* \in \mathbb{R}^{3n}$ 表示智能体期望队形的位置向量, $\mathbf{q}^* \in \mathbb{R}^{3n}$ 表示期望队形的位置向量绕 z 轴旋转 90° 得到的位置向量, $\bar{\mathbf{q}}_i^* \in \mathbb{R}^{3n}$ 表示期望的位置向量在 x - y 平面上的投影. 即

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^* &= [\mathbf{q}_1^{*T}, \mathbf{q}_2^{*T}, \dots, \mathbf{q}_n^{*T}]^T \in \mathbb{R}^{3n}, \\ \bar{\mathbf{q}}^* &= [\bar{\mathbf{q}}_1^{*T}, \bar{\mathbf{q}}_2^{*T}, \dots, \bar{\mathbf{q}}_n^{*T}]^T \in \mathbb{R}^{3n}, \\ \bar{\mathbf{q}}^* &= [\bar{\mathbf{q}}_1^{*T}, \bar{\mathbf{q}}_2^{*T}, \dots, \bar{\mathbf{q}}_n^{*T}]^T \in \mathbb{R}^{3n}. \end{aligned} \quad (10)$$

则有如下定理.

定理1 对于具有二阶动力学式(3)和控制律式(5)的三维集群系统, 如果满足以下两个条件:

- (1) 向量 $\mathbf{1}_x$, $\mathbf{1}_y$, $\mathbf{1}_z$, $\mathbf{q}^*$, $\bar{\mathbf{q}}^*$, $\bar{\mathbf{q}}_i^*$ 构成 $\mathbf{A}$ 的核空间的一组基;
- (2) 系统矩阵 $\mathbf{A}$ 的非零特征根, 即对于 $\mathbf{A}$ 的所有特征值 $\mu \in \sigma(\mathbf{A})$, 二次方程 $\lambda^2 + k_1\lambda - k_0\mu = 0$ 的所有非零根均具有负实部.

则智能体全局收敛到期望的立体队形(包含绕 z 轴的旋转、平移, 沿着 z 轴方向的缩放以及沿着 x - y 平面方向的缩放).

证明 由条件(2)可知系统矩阵 $\mathbf{A}$ 的非零特征根均具有负实部, 系统矩阵 $\mathbf{A}$ 为稳定的状态矩阵, 由引理1可知系统的状态向量 $[\mathbf{q}^T, \mathbf{v}^T]^T$ 能够收敛到系统矩阵 $\mathbf{A}$ 的核. 即

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_{3n} \\ k_0\mathbf{A} & -k_1\mathbf{I}_{3n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad (11)$$

$$\begin{cases} \mathbf{v} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{A}\mathbf{q} = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (12)$$

因而, $\mathbf{q}$ 收敛到 $\mathbf{A}$ 的核空间, 而 $\mathbf{A}$ 的核空间即期望的位置向量关于 z 轴的旋转、平移, 沿着 z 轴方向的缩放以及沿着 x - y 平面的缩放等, 即智能体全局收敛到期望的立体队形.

注1 文献[20, 定理3.2]中研究了满足定理1中条件的对称矩阵 $\mathbf{A}$ 存在的拓扑条件: 感知拓扑为无向刚性图. 本文中假设给定的所有感知拓扑都满足这个条件.

3.3 增益矩阵 $\mathbf{A}$ 的优化求解

针对具有刚性通讯拓扑的集群系统立体编队控制, Fathian 等人在文献[26]中给出了二维空间内的集群系统增益矩阵 $\mathbf{A}$ 的优化求解算法, 如表1所示, 本文将改进并应用到三维空间, 该方法能够极大化系统对扰动、测量误差等的鲁棒性.

在后续的仿真实验中, 可以使用 MATLAB 中的 CVX^[27] 工具箱来求解满足条件的稳定的增益矩阵 $\mathbf{A}$.

注2 由于求出的增益矩阵 $\mathbf{A}$ 为对称矩阵, 因此在实际设计控制律时, 只需选取控制增益 $k_0, k_1 > 0$ 即可. 在接下来的性质分析中, 均假设控制增益 $k_0, k_1 > 0$.

3.4 鲁棒性分析

3.4.1 系统扰动的鲁棒性

引理2 令 $\mathbf{R} \in \text{SO}(3)$ 表示关于单位正规旋转坐标系 $[x, y, z]^T \in \mathbb{R}^3$ 旋转 $\theta \in [-\pi, \pi]$ 弧度角的旋转矩阵. 如果 $|\theta| < \frac{\pi}{2}$, 则矩阵 $\mathbf{R} + \mathbf{R}^T$ 为正定矩阵.

证明 矩阵 $\mathbf{R}$ 可以表示成

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} c + x^2\alpha & xy\alpha - zs & xz\alpha + ys \\ yx\alpha + zs & c + y^2\alpha & yz\alpha - xs \\ zx\alpha - ys & zy\alpha + xs & c + z^2\alpha \end{bmatrix}, \quad (13)$$

表 1 增益矩阵 **A** 的优化求解算法**Table 1** Algorithm for optimal calculation of gain matrix **A**算法1: 增益矩阵 **A** 的优化求解输入: 期望队形坐标 $\mathbf{q}^* \in \mathbb{R}^{3n}$.输出: 增益矩阵 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3n \times 3n}$.步骤1: 令 $\mathbf{N} = [\mathbf{q}^*, \bar{\mathbf{q}}^*, \bar{\mathbf{q}}^*, \mathbf{1}_x, \mathbf{1}_y, \mathbf{1}_z]$.步骤2: 对 $\mathbf{N}$ 进行奇异值分解, 得到 $\mathbf{N} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T$.步骤3: 令 $\mathbf{Q}$ 为 $\mathbf{U}$ 的后 $3n-6$ 列向量组成的矩阵.

步骤4: 使用SDP求解器求解式
$$\mathbf{A} = \underset{a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}}{\operatorname{argmax}} \quad \lambda_{\min}(-\bar{\mathbf{A}})$$
 所述的半正定规划问题.

其中, $\alpha_i = 1 - c_i$, c_i 和 s_i 分别为 $\cos\theta_i$, $\sin\theta_i$ 的简写. 因此,

$$\mathbf{R} + \mathbf{R}^T = 2\alpha \begin{bmatrix} \beta + x^2 & xy & xz \\ yx & \beta + y^2 & yz \\ zx & zy & \beta + z^2 \end{bmatrix}, \quad (14)$$

其中, $\beta := \frac{c}{1-c}$. 注意到 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, 通过直接计算可以得到 $\mathbf{R} + \mathbf{R}^T$ 的特征值为 $\{2\alpha, 2\alpha, 2\alpha\beta\}$. 由 $|\alpha| < \frac{\pi}{2}$, 可知 $\alpha, \beta > 0$, 从而矩阵 $\mathbf{R} + \mathbf{R}^T$ 为正定矩阵.

所设计的控制律对扰动具有较好的鲁棒性.

定理2 考虑满足定理1条件的增益矩阵 $\mathbf{A}$, 令 $\mathbf{R}_i \in \text{SO}(3)$ 表示关于任意坐标轴旋转 θ_i 弧度角的旋转矩阵, $c_i \in \mathbb{R}^+$. 如果对任意小的 $\varepsilon > 0$, 有 $c_i \geq \varepsilon$, $\theta_i \in \left[-\frac{\pi}{2} + \varepsilon, \frac{\pi}{2} - \varepsilon\right]$, 则存在扰动控制:

$$\mathbf{u}_i = c_i \mathbf{R}_i \left[k_0 \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \mathbf{A}_{ij} (\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i) - k_1 \mathbf{v}_i \right]. \quad (15)$$

因而, 智能体全局收敛到期望的立体队形(包含关于 z 轴的旋转、平移, 沿着 z 轴方向的缩放以及沿着 x - y 平面的缩放).

证明 旋转矩阵 $\mathbf{R}_i$ 可以表示成

$$\mathbf{R}_i = \begin{bmatrix} c_i + x_i^2 \alpha_i & x_i y_i \alpha_i - z_i s_i & x_i z_i \alpha_i + y_i s_i \\ y_i x_i \alpha_i + z_i s_i & c_i + y_i^2 \alpha_i & y_i z_i \alpha_i - x_i s_i \\ z_i x_i \alpha_i - y_i s_i & z_i y_i \alpha_i + x_i s_i & c_i + z_i^2 \alpha_i \end{bmatrix}, \quad (16)$$

$$\theta_i \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

其中,

$$x_i = \frac{u_{ix}}{\|\mathbf{u}_i\|}, y_i = \frac{u_{iy}}{\|\mathbf{u}_i\|}, z_i = \frac{u_{iz}}{\|\mathbf{u}_i\|}, \quad (17)$$

$\alpha_i = 1 - c_i$, 而 c_i, s_i 分别为 $\cos\theta_i, \sin\theta_i$ 的简写.

加入扰动后系统的控制律:

$$\mathbf{u} = \mathbf{C}\mathbf{R}(k_0 \mathbf{A}\mathbf{q} - k_1 \mathbf{v}), \quad (18)$$

其中, $\mathbf{C} = \text{diag}(c_1 \mathbf{I}_3, c_2 \mathbf{I}_3, \dots, c_n \mathbf{I}_3) \in \mathbb{R}^{3n \times 3n}$, $\mathbf{R} = \text{diag}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \dots, \mathbf{R}_n) \in \mathbb{R}^{3n \times 3n}$ 为块对角矩阵. 则系统的闭环动力学方程可以写成

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}} &= \mathbf{v}, \\ \dot{\mathbf{v}} &= \mathbf{C}\mathbf{R}(k_0 \mathbf{A}\mathbf{q} - k_1 \mathbf{v}). \end{aligned} \quad (19)$$

定义一个备选李雅普诺夫函数:

$$V_1 = -k_0 \mathbf{q}^T \mathbf{A}\mathbf{q} + \frac{1}{2} \mathbf{v}^T \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{R} + \mathbf{R}^T) \mathbf{v}. \quad (20)$$

由 $\mathbf{A}$ 为半负定矩阵, 及引理2可知 $V_1 \geq 0$, 注意到 $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$, $\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{I}_{3n}$, 则 V_1 沿着系统(19)运动轨迹的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= -2k_0 \mathbf{q}^T \mathbf{A}\mathbf{v} + \dot{\mathbf{v}}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{R}\mathbf{v} + \mathbf{v}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{R}^T \dot{\mathbf{v}} \\ &= -2k_0 \mathbf{q}^T \mathbf{A}\mathbf{v} + (k_0 \mathbf{q}^T \mathbf{A} \mathbf{R}^T \mathbf{C} - k_1 \mathbf{v}^T \mathbf{R}^T \mathbf{C}) \mathbf{C}^{-1} \mathbf{R}\mathbf{v} \\ &\quad + \mathbf{v}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{R}^T (k_0 \mathbf{C} \mathbf{R} \mathbf{A}\mathbf{q} - k_1 \mathbf{C} \mathbf{R}\mathbf{v}) \\ &= -2k_0 \mathbf{q}^T \mathbf{A}\mathbf{v} + 2k_0 \mathbf{q}^T \mathbf{A}\mathbf{v} - 2k_1 \mathbf{v}^T \mathbf{v} \\ &= -2k_1 \mathbf{v}^T \mathbf{v} \leq 0. \end{aligned} \quad (21)$$

从而可知系统是稳定的, 由 $\dot{V}_1 = 0$, 可知 $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, 又由 $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$, 可知 $\mathbf{R}\mathbf{A}\mathbf{q} = \mathbf{0}$. 而矩阵 $\mathbf{R}$ 列满秩, 从而可知 $\mathbf{A}\mathbf{q} = \mathbf{0}$. 由李雅普诺夫稳定性理论及拉萨尔不变性定理可知, $\mathbf{q}$ 收敛到最大不变集 $\{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{3n} \mid \mathbf{A}\mathbf{q} \equiv \mathbf{0}\}$, 即 $\mathbf{A}$ 的核空间, 从而可知智能体能够收敛到期望的立体队形.

由定理2可知, 所设计的控制律对扰动具有较好的鲁棒性. 因此, 可以在编队策略中加入一个启发式的旋转智能体 i 的控制向量 $\mathbf{u}_i$ 的避碰算法. 图1描述了当智能体1可能会与邻居智能体发生碰撞时, 通过旋转控制向量 $\mathbf{u}_1$ 使其不与预先定义的碰撞区域相交, 即可避免发生碰撞. 由于控制向量 $\mathbf{u}_1$ 与智能体3的安全区域有交集, 为了达到避碰, 智能体1需要向包含以 $\mathbf{u}_1$ 作为法向量的平面(图1中通过智能体1的灰色平面)的上半开空间的任意方向移动, 而表2中给出了相应的避碰算法.

3.4.2 系统对输入饱和的鲁棒性

实际上一个智能体的加速度不可能为任意大的数

图 1 (网络版彩图)旋转智能体1的控制向量 $\mathbf{u}_1$ 避免与智能体3的碰撞

Figure 1 (Color online) Rotating the control vector $\mathbf{u}_1$ of the agent 1 to avoid collision between the agent 3.

表 2 避碰算法

Table 2 Algorithm for collision avoidance

算法2: 避碰算法
输入: 预期的控制量 $\mathbf{u}_i \in \mathbb{R}^3$, 碰撞球半径 $r \in \mathbb{R}$, 激活阈值 $d \in \mathbb{R}$, $d \geq r$.
输出: 修改后的控制量 $\mathbf{u}'_i \in \mathbb{R}^3$.
步骤1: 对于每个距离在 d 之内的邻居智能体, 以其为中心建立半径为 r 的碰撞球区域.
步骤2: 找出 $ \theta $ 最小的旋转矩阵 $\mathbf{R}(\theta) \in \text{SO}(3)$, 使得 $\mathbf{R}\mathbf{u}_i$ 与碰撞球区域不相交.
步骤3: 如果步骤2不可行或者求得的 $ \theta \geq 90^\circ$, 设置控制量 $\mathbf{u}'_i = \mathbf{0}$, 否则设置 $\mathbf{u}'_i = \mathbf{R}(\theta)\mathbf{u}_i$.

值, 因而智能体的控制输入有一个饱和值, 但这并不会影响智能体收敛到期望的立体队形.

引理3^[26] 一组切换动力系统 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}_i(\mathbf{x})$, $i=1, 2, \dots, N$. 令 $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 表示一个正定, 连续可微, 且径向有界的函数. 如果有 $\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}_i(\mathbf{x}) < 0, \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \forall i$, 则此切换系统全局一致渐近稳定.

推论1^[28] 引理3可以拓展到一个具有零集 $Z := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : V(\mathbf{x}) = 0\}$ 的半正定的函数 V , 在这种情况下, 如果有 $\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}_i(\mathbf{x}) < 0, \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \forall i$, 则系统的所有运动轨迹全局一致渐近收敛到 Z .

定理3 考虑具有二阶动力学式(3)的集群系统, 同时假定 $u_{\max} > 0$ 为一个正实数. 如果 $\mathbf{u}_i$ 会达到饱和, 即 $|\mathbf{u}_i| \leq u_{\max}$, 则在控制律式(5)下, 集群系统依然能够收敛到期望的立体队形.

证明 为了建立输入饱和的模型, 定义对角矩阵 $\mathbf{S} = \text{diag}(s_{11}\mathbf{I}_3, s_{22}\mathbf{I}_3, \dots, s_{nn}\mathbf{I}_3) \in \mathbb{R}^{3n \times 3n}$, 其对角线元素为

$$s_{ii} = \begin{cases} 1, & \text{if } |\mathbf{u}_i| \leq u_{\max}, \\ \frac{u_{\max}}{|\mathbf{u}_i|}, & \text{if } |\mathbf{u}_i| > u_{\max}. \end{cases} \quad (22)$$

如图2所示, $\mathbf{S}$ 的对角线元素可以看成关于控制输入 $\mathbf{u}_i$ 的饱和函数.

从而具有饱和输入的闭环动力学方程为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}} &= \mathbf{v}, \\ \dot{\mathbf{v}} &= \mathbf{S}(k_0 \mathbf{A} \mathbf{q} - k_1 \mathbf{v}). \end{aligned} \quad (23)$$

系统式(23)可以理解为一组切换动力系统, 其解在Filippov意义上有明确的定义. 为了便于分析, 当控制输入量的模 $|\mathbf{u}_i| > u_{\max}$ 时, 相当于将输入饱和建模成输入量 $\mathbf{u}_i$ 乘以一个正的比例缩小因子 s_{ii} , 且满足 $0 < s_{ii} < 1$, 智能体 i 实际的控制输入变为 $s_{ii}\mathbf{u}_i$. 从而由引理3、推论1及定理2可知, 输入饱和并不会影响集群系统收敛到期望的队形.

4 二阶集群系统立体编队保持控制

4.1 控制律设计

在编队生成期望的立体队形后, 进一步为了保持队形大小的固定, 可以使用下面的控制律:

$$\mathbf{u}_i = k_0 \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \mathbf{A}_{ij}(\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i) + \varepsilon * f(d_{ij} - d_{ij}^*)(\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i) - k_1 \mathbf{v}_i, \quad (24)$$

其中, $\mathbf{A}_{ij}$ 的定义和式(6)相同, $d_{ij} = \|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i\|$, $d_{ij}^* = \|\mathbf{q}_j^* - \mathbf{q}_i^*\|$, $\varepsilon > 0$ 为增益, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 为有界函数, 且对于 $x \neq 0$, $x f(x) > 0$, $f(0) = 0$. 可以选择 $f: x \mapsto \frac{1}{k} \arctan(x)$ 或者 $f: x \mapsto \frac{1}{k} \tanh(x)$, 其中 $k > 0$ 为任意常量. 函数 f 的作用是当邻居智能体的距离大于期望值时, 将其距离拉近, 小于时则使其远离. 从而可以得到系统的闭环动力学方程:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{v}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_{3n} \\ k_0 \mathbf{A} + \varepsilon \mathbf{F} & -k_1 \mathbf{I}_{3n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix}, \quad (25)$$

其中, 增益矩阵 $\mathbf{A}$ 可以利用算法1求解得到, $F(q): \mathbb{R}^{3n} \rightarrow \mathbb{R}^{3n}$ 的定义为

图 2 (网络版彩图)输入饱和鲁棒性分析曲线. (a) 矩阵 $\mathbf{S}$ 对角线上的第 i 个元素与控制输入关系曲线; (b) 输入饱和和对控制输入的影响曲线

Figure 2 (Color online) Analysis curves for robustness of input saturations. (a) Relationship curve between the i th element in diagonal of matrix $\mathbf{S}$ and control inputs; (b) relationship curve between saturations and control inputs.

$$\mathbf{F}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} -\sum_{j \neq 1} \mathbf{F}_{1j} & \mathbf{F}_{12} & \cdots & \mathbf{F}_{1n} \\ \mathbf{F}_{21} & -\sum_{j \neq 2} \mathbf{F}_{2j} & \cdots & \mathbf{F}_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{F}_{n1} & \mathbf{F}_{n2} & \cdots & \mathbf{F}_{nn} \end{bmatrix}. \quad (26)$$

3×3 的非对角块元素定义为

$$\mathbf{F}_{ij} = \begin{cases} f(d_{ij} - d_{ij}^*) \mathbf{I}_3, & \text{if } j \in \mathcal{N}_i, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (27)$$

4.2 稳定性证明

引理4^[29] 考虑奇异摄动系统:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{z}, \varepsilon), \\ \varepsilon \dot{\mathbf{z}} &= \mathbf{g}(t, \mathbf{x}, \mathbf{z}, \varepsilon), \end{aligned} \quad (28)$$

其中, $\mathbf{x} \in B^r \subset \mathbb{R}^n$, B^r 代表关于原点半径为 r 的球, $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m$. 如果对于所有的 $(t, \mathbf{x}, \varepsilon) \in [0, \infty) \times B^r \times [0, \varepsilon_0]$, 以下几个条件均满足:

- (1) $f(t, 0, 0, \varepsilon) = 0$, 且 $g(t, 0, 0, \varepsilon) = 0$;
- (2) 方程 $g(t, \mathbf{x}, \mathbf{z}, \varepsilon) = 0$ 有一个孤立根 $\mathbf{z} = h(t, \mathbf{x})$, 并且 $h(t, 0) = 0$;
- (3) 对于 $\mathbf{z} = h(t, \mathbf{x}) \in B_\rho \subset \mathbb{R}^m$, 函数 f, g, h 以及它们的二阶偏导数均有界;
- (4) 退化系统 $\dot{\mathbf{x}} = f(t, \mathbf{x}, h(t, \mathbf{x}), 0)$ 的原点是指数稳定的;

(5) 边界层系统 $\frac{dy}{d\tau} = g(t, \mathbf{x}, y + h(t, \mathbf{x}), 0)$, $\tau = \varepsilon t$ 的原点是指数稳定的, 和 $(t, \mathbf{x})$ 一致.

则存在 $\varepsilon^* > 0$, 对于所有的 $\varepsilon < \varepsilon^*$, 系统式(28)的原点是指数稳定的.

定理4 考虑具有动力学式(3)和控制律式(24)的二阶集群系统, 如果设计的增益矩阵 $\mathbf{A}$ 对称且满足定理1中的条件, 则存在 $\varepsilon^* > 0$, 使得对于所有的 $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$, 则期望的队形(包含绕 z 轴的旋转、平移)是一个几乎全局指数稳定的平衡点.

证明 令 $\mathbf{N} = [\mathbf{q}^*, \bar{\mathbf{q}}^*, \bar{\mathbf{q}}^*, \mathbf{1}_x, \mathbf{1}_y, \mathbf{1}_z] \in \mathbb{R}^{3n \times 6}$ 为矩阵 $\mathbf{A}$ 的核空间里的一组基底, 并对矩阵 $\mathbf{N}$ 进行奇异值分解, 得到 $\mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T = \mathbf{N}$, 其中,

$$\mathbf{U} = [\bar{\mathbf{Q}}, \mathbf{Q}] \in \mathbb{R}^{3n \times 3n}. \quad (29)$$

矩阵 $\bar{\mathbf{Q}} \in \mathbb{R}^{3n \times 6}$ 中的每一列表示矩阵 $\mathbf{A}$ 的核空间里的一组正交向量, 特别地, $\bar{\mathbf{Q}}$ 可以取为 $\bar{\mathbf{Q}} = [\bar{\mathbf{Q}}_1, \bar{\mathbf{Q}}_2]$,

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{Q}}_1 &:= \left[\frac{\mathbf{q}^*}{\|\mathbf{q}^*\|}, \frac{\bar{\mathbf{q}}^*}{\|\bar{\mathbf{q}}^*\|}, \frac{\bar{\mathbf{q}}^*}{\|\bar{\mathbf{q}}^*\|} \right] \in \mathbb{R}^{3n \times 3}, \\ \bar{\mathbf{Q}}_2 &= [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3] \in \mathbb{R}^{3n \times 3}, \end{aligned} \quad (30)$$

其中, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \mathbb{R}^{3n}$ 是 $\mathbf{1}_x, \mathbf{1}_y, \mathbf{1}_z$ 张成的向量空间里相互正交的单位向量, 并且都和 $\bar{\mathbf{Q}}_1$ 正交.

矩阵 $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{3n \times (3n-6)}$ 由矩阵 $\mathbf{U}$ 的后 $3n-6$ 列组成, 其中每一列为矩阵 $\bar{\mathbf{Q}}$ 的正交补空间里的一组正交向量. 考虑坐标变换: $\mathbf{p} = \mathbf{U}^T \mathbf{q}$, 令 $\mathbf{p} = [\mathbf{p}_1^T, \mathbf{p}_2^T]^T$, 其中 $\mathbf{p}_1 \in \mathbb{R}^6$ 表示 $\mathbf{p}$ 的前6个元素, $\mathbf{p}_2 \in \mathbb{R}^{3n-6}$ 表示 $\mathbf{p}$ 的其余元素. 则在新坐标系下, 得到的闭环动力学方程为

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_1 \\ \dot{\mathbf{p}}_2 \end{bmatrix} &= k_0 \mathbf{U}^T \mathbf{A} \mathbf{U} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \end{bmatrix} \\ &\quad + \varepsilon \mathbf{U}^T \mathbf{F} \mathbf{U} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \end{bmatrix} - k_1 \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_1 \\ \dot{\mathbf{p}}_2 \end{bmatrix} \\ &= k_0 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \end{bmatrix} \\ &\quad + \varepsilon \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{Q}}^T \mathbf{F} \bar{\mathbf{Q}} & \bar{\mathbf{Q}}^T \mathbf{F} \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q}^T \mathbf{F} \bar{\mathbf{Q}} & \mathbf{Q}^T \mathbf{F} \mathbf{Q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \end{bmatrix} - k_1 \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_1 \\ \dot{\mathbf{p}}_2 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (31)$$

其中, $\mathbf{F}$ 为 $\mathbf{F}(\mathbf{q})$ 的简写. 由于 $\mathbf{F}$ 具有块拉普拉斯结构, 故 $\mathbf{F} \mathbf{1}_x = \mathbf{F} \mathbf{1}_y = \mathbf{F} \mathbf{1}_z = \mathbf{0}$, 从而有

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{Q}}^T \mathbf{F} \bar{\mathbf{Q}} &= \begin{bmatrix} \lambda \mathbf{I}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}, \\ \bar{\mathbf{Q}}^T \mathbf{F} \mathbf{Q} &= \begin{bmatrix} \mathbf{H}^T \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times (3n-6)},\end{aligned}\quad (32)$$

其中, $\lambda(\mathbf{p}): \mathbb{R}^{3n} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{H}(\mathbf{p}): \mathbb{R}^{3n} \rightarrow \mathbb{R}^{3n \times 3}$ 定义为

$$\lambda = \frac{1}{\|\mathbf{q}^*\|^2} \mathbf{q}^{*T} \mathbf{F} \mathbf{q}^* = \frac{1}{\|\bar{\mathbf{q}}^*\|^2} \bar{\mathbf{q}}^{*T} \mathbf{F} \bar{\mathbf{q}}^* = \frac{1}{\|\bar{\mathbf{q}}^*\|^2} \bar{\mathbf{q}}^{*T} \mathbf{F} \bar{\mathbf{q}}^*, \quad (33)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{Q}^T \mathbf{F} \bar{\mathbf{Q}}_1. \quad (34)$$

又令 $\mathbf{p}_1 = [\mathbf{p}_{11}^T, \mathbf{p}_{12}^T]^T$, $\mathbf{p}_{11}, \mathbf{p}_{12} \in \mathbb{R}^3$. 将式(32)代入式(31)中可得

$$\begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{p}}_{11} \\ \ddot{\mathbf{p}}_{12} \end{bmatrix} = \varepsilon \begin{bmatrix} \lambda \mathbf{I}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{11} \\ \mathbf{p}_{12} \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} \mathbf{H}^T \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{p}_2 - k_1 \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_{11} \\ \dot{\mathbf{p}}_{12} \end{bmatrix}, \quad (35)$$

$$\ddot{\mathbf{p}}_2 = \varepsilon \begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{11} \\ \mathbf{p}_{12} \end{bmatrix} + \mathbf{G} \mathbf{p}_2 - k_1 \dot{\mathbf{p}}_2,$$

其中, $\mathbf{G}$ 定义为

$$\mathbf{G} = k_0 \mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q} + \varepsilon \mathbf{Q}^T \mathbf{F} \mathbf{Q}. \quad (36)$$

由于 $\mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q}$ 为负定, $\|\mathbf{F}\|$ 有界, 对于足够小的 ε , $\mathbf{G}$ 仍然为负定矩阵. 由式(35)可得 $\ddot{\mathbf{p}}_{12} = -k_1 \dot{\mathbf{p}}_{12}$, $\dot{\mathbf{p}}_{12} \rightarrow \mathbf{0}$, $\mathbf{p}_{12} \rightarrow \mathbf{p}_{12}^*$, $\mathbf{p}_{12}^*$ 为常数. 从而可得剩余的动力学方程:

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{p}}_{11} &= \varepsilon \lambda \mathbf{p}_{11} + \varepsilon \mathbf{H}^T \mathbf{p}_2 - k_1 \dot{\mathbf{p}}_{11}, \\ \ddot{\mathbf{p}}_2 &= \varepsilon \mathbf{H} \mathbf{p}_{11} + \mathbf{G} \mathbf{p}_2 - k_1 \dot{\mathbf{p}}_2.\end{aligned}\quad (37)$$

令 $\tau = \varepsilon t$, 则有 $\frac{d}{dt} = \varepsilon \frac{d}{d\tau}$, $\frac{d^2}{dt^2} = \varepsilon^2 \frac{d^2}{d\tau^2}$, 则式(37)可以表示成

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{p}}_2 &= \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{H} \mathbf{p}_{11} + \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbf{G} \mathbf{p}_2 - \frac{k_1}{\varepsilon} \dot{\mathbf{p}}_2, \\ \varepsilon \ddot{\mathbf{p}}_{11} &= \lambda \mathbf{p}_{11} + \mathbf{H}^T \mathbf{p}_2 - k_1 \dot{\mathbf{p}}_{11},\end{aligned}\quad (38)$$

其中, $\dot{\mathbf{p}}_{11}, \dot{\mathbf{p}}_2$ 表示对时间 τ 的微分.

令 $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_2 \\ \dot{\mathbf{p}}_2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{11} \\ \dot{\mathbf{p}}_{11} \end{bmatrix}$, 则式(38)可以表示成

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_{3n-6} \\ \frac{\mathbf{G}}{\varepsilon^2} & -\frac{k_1}{\varepsilon} \mathbf{I}_{3n-6} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \frac{\mathbf{H}}{\varepsilon} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{z}, \quad (39)$$

$$\varepsilon \dot{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_3 \\ \lambda \mathbf{I}_3 & -k_1 \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} \mathbf{z} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{H}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

可以看出系统式(38)为奇异摄动系统, 因此可以

使用引理4对其进行分析. 在使用引理4之前, 需做如下说明. (1) 这里的分析是基于期望队形对应的位置向量平衡点(包括平衡点绕 z 轴的旋转、平移)以及智能体最终的速度, 并不是引理4中的原点. 但这并不会影响分析, 因为只需做一个简单的变换 $\bar{\mathbf{q}} = \mathbf{q} - \mathbf{q}^*$, 便可以把平衡点移到原点. (2) 原点 $\mathbf{q} = \mathbf{0}$, $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ 为系统式(25)的一个平衡点. 通过在这个平衡点附近线性化系统式(25), 可以发现这个平衡点是不稳定的.

在期望的队形处 $\mathbf{q} = \mathbf{q}^*$, $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, 由 $\mathbf{p} = \mathbf{U}^T \mathbf{q}$ 可知, $\mathbf{p}_{11} = \mathbf{p}_{11}^* = \bar{\mathbf{Q}}_1^T \mathbf{q}^*$, $\dot{\mathbf{p}}_{11} = \mathbf{0}$, $\mathbf{p}_2 = \mathbf{Q}^T \mathbf{q}^* = \mathbf{0}$, $\dot{\mathbf{p}}_2 = \mathbf{0}$, 并且由式(27)可知 $\mathbf{F} = \mathbf{0}$. 根据这些, 下面说明系统式(39)满足引理4中的条件:

(1) 由于在期望的队形处 $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, 由式(33)和(34)可知

$$\lambda = 0, \mathbf{H} = \mathbf{0}. \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{11}^* \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \text{ 为系统式(39)的一个平衡点;}$$

(2) 在式(39)中令 $\varepsilon = 0$, 得到似稳态方程

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_3 \\ \lambda \mathbf{I}_3 & -k_1 \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} \mathbf{z} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{H}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0}, \text{ 求解得到似稳态方程唯一}$$

$$\text{的孤立根: } \mathbf{z} = h(t, \mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\frac{\mathbf{H}^T}{\lambda} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{x}, \lambda \neq 0, \text{ 且 } h(t, 0) = \mathbf{0};$$

(3) 通过直接计算可以看出对于所有的 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{6n-12}$, $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^6$, 式(39)等式右边的二阶导数均有界;

$$(4) \text{ 在式(39)中令 } \varepsilon = 0, \mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\frac{\mathbf{H}^T}{\lambda} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{x}, \text{ 得到 } \mathbf{G} \mathbf{p}_2 = \mathbf{0},$$

由于 $\mathbf{G}$ 为负定矩阵, 故 $\mathbf{p}_2 = \mathbf{0}$, $\dot{\mathbf{p}}_2 = \mathbf{0}$, 退化系统 $\dot{\mathbf{x}} = f(t, \mathbf{x}, h(t, \mathbf{x}), 0)$ 在 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 处指数稳定;

(5) 在式(39)中令 $\varepsilon = 0$, 得到边界层系统:

$$\dot{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} -\frac{\mathbf{H}^T}{\lambda} & \mathbf{0} \\ \left(1 + \frac{k_1}{\lambda}\right) \mathbf{H}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_{3n-6} \\ \lambda \mathbf{I} & -k_1 \mathbf{I}_{3n-6} \end{bmatrix} \mathbf{y}. \quad (40)$$

注意到 $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$ 表明智能体达到期望的队形.

将 $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$ 代入式(40)得到

$$\dot{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_{3n-6} \\ \mathbf{0} & -k_1 \mathbf{I}_{3n-6} \end{bmatrix} \mathbf{y}. \quad (41)$$

不难看出 $\mathbf{y}=\mathbf{0}$ 为边界层系统的一个全局指数稳定平衡点.

又假设 $\mathbf{p}_{11}=\sigma\mathbf{p}_{11}^*$, 其中 $\sigma>0$ 为队形的大小. 因而有

$$\begin{cases} d_{ij}-d_{ij}^*<0, & \text{if } \sigma<1, \\ d_{ij}-d_{ij}^*=0, & \text{if } \sigma=1, \\ d_{ij}-d_{ij}^*>0, & \text{if } \sigma>1. \end{cases} \quad (42)$$

从 $\mathbf{F}$ 和 λ 的定义及 $\sigma=\frac{\|\mathbf{p}_{11}\|}{\|\mathbf{p}_{11}^*\|}$ 可知

$$\begin{cases} \lambda>0, & \text{if } \|\mathbf{p}_{11}\|<\|\mathbf{p}_{11}^*\|, \\ \lambda=0, & \text{if } \|\mathbf{p}_{11}\|=\|\mathbf{p}_{11}^*\|, \\ \lambda<0, & \text{if } \|\mathbf{p}_{11}\|>\|\mathbf{p}_{11}^*\|. \end{cases} \quad (43)$$

式(43)表明预期的队形 $\mathbf{p}_{11}=\mathbf{p}_{11}^*$ 为稳定的平衡点, 此时 $\lambda=0$, $\mathbf{H}^T=\mathbf{0}$. 通过直接计算, 可知 λ 在 $\sigma=1$ 处的斜率为负数, 如图3所示, 因此 $\mathbf{p}_{11}=\mathbf{p}_{11}^*$ 几乎全局指数稳定.

因此, 由引理4可知, 对于足够小的 ε , 期望的队形是系统式(25)的一个指数稳定的平衡点. 又因为系统式(25)在原点处存在一个不稳定的平衡点, 故这种指数稳定性几乎是全局的.

注3 实际上只要取 $\varepsilon<\left|\frac{\lambda_{\max}}{\mu_{\max}}\right|$ 即可, 其中 $\mu_{\max}=2(n-1)f_{\max}$, $f_{\max}$ 表示函数 f 的一个上界, $\lambda_{\max}$ 表示矩阵 $\mathbf{A}$ 的最大非零特征值.

5 领航者-跟随者网络下的二阶集群系统立体编队控制

领航者-跟随者网络下的集群系统编队中, 领航者指的是多智能体在编队航行过程中控制整个编队行进路线的那部分智能体, 领航者的运动轨迹或运动方程一般可以通过航迹规划预先给定, 跟随者通过控制其与领航者之间的角度和距离, 保持期望的编队队形.

5.1 控制律设计

在本节中, 考虑从具有无向感知拓扑的二阶集群系统中选取 $n\geq 2$ 个智能体作为领航者, 领航者静止在目标位置, 剩余 n_f 个智能体作为跟随者, 跟随者跟随领航者形成特定的立体队形.

在所设计的二阶集群系统编队保持控制律式(24)

图3 (网络版彩图) λ 数值与 $\|\mathbf{p}_{11}\|$ 的关系曲线

Figure 3 (Color online) Relationship curve between the value λ with $\|\mathbf{p}_{11}\|$.

的基础上, 考虑将智能体 i 的控制律设计为

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_i &= \mathbf{0}, \quad i=1, 2, \dots, n_\ell, \\ \mathbf{u}_i &= \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \mathbf{L}_{ij}(\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i) + \varepsilon^* f(d_{ij} - d_{ij}^*)(\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i) - \gamma \mathbf{v}_i, \quad (44) \\ i &= n - n_f + 1, \dots, n, \end{aligned}$$

其中, $n_\ell + n_f = n$, ε 和 γ 为增益.

系统的闭环动力学方程可以表示成

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{v}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_{3n} \\ \mathbf{L} + \varepsilon \mathbf{F} & -\gamma \mathbf{I}_{3n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix}, \quad (45)$$

其中,

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3n_\ell \times 3n_\ell} & \mathbf{0}_{3n_\ell \times 3n_f} \\ \mathbf{L}_{f\ell} & \mathbf{L}_{ff} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3n \times 3n}. \quad (46)$$

而 $\mathbf{L}$ 和3.1节中的增益矩阵 $\mathbf{A}$ 定义相同, $\mathbf{F}$ 和4.2节中的 $\mathbf{F}$ 定义相同, 均具有块拉普拉斯结构.

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3n_\ell \times 3n_\ell} & \mathbf{0}_{3n_\ell \times 3n_f} \\ \mathbf{F}_{f\ell} & \mathbf{F}_{ff} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3n \times 3n}. \quad (47)$$

5.2 稳定性证明

定理5 考虑具有动力学式(3)和控制律式(44)的二阶集群系统, 如果设计的增益矩阵 $\mathbf{L}$ 满足定理1中的条件(1), 并且 $\mathbf{L}_{ff}$ 为对称负定矩阵, 则存在 $\varepsilon^*>0$, $\gamma^*>0$ 使得对于所有的 $0<\varepsilon<\varepsilon^*$, $\gamma>\gamma^*$, 期望的编队队形是一个几乎全局指数稳定的平衡点, 即跟随者能够跟随领航者达到期望的队形.

证明 令 $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q} - \mathbf{q}^*$, $\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{v} - \mathbf{v}^*$, 分别表示编队过程中的状态误差向量, 其中 $\mathbf{q}^*$, $\mathbf{v}^*$ 分别表示智能体的期望

位置向量与速度向量, $\mathbf{v}^* = \mathbf{0}$. 从而有

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\mathbf{q}}} &= \tilde{\mathbf{v}}, \\ \dot{\tilde{\mathbf{v}}} &= (\mathbf{L} + \varepsilon \mathbf{F})(\tilde{\mathbf{q}} + \mathbf{q}^*) - \gamma \tilde{\mathbf{v}}.\end{aligned}\quad (48)$$

易知 $\tilde{\mathbf{q}}$ 和 $\tilde{\mathbf{v}}$ 的前 $3n_\ell$ 个元素均为0, 令 $\tilde{\mathbf{q}}_F$ 和 $\tilde{\mathbf{v}}_F$ 分别表示向量 $\tilde{\mathbf{q}}$ 和 $\tilde{\mathbf{v}}$ 的后 $3n_f$ 个元素, $\mathbf{q}_L^*$ 和 $\mathbf{q}_F^*$ 分别表示 $\mathbf{q}^*$ 的前 $3n_\ell$ 个元素和后 $3n_f$ 个元素, 则式(48)可以写成

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_F &= \tilde{\mathbf{v}}_F, \\ \dot{\tilde{\mathbf{v}}}_F &= (\mathbf{L}_{ff} + \varepsilon \mathbf{F}_{ff})\tilde{\mathbf{q}}_F + \varepsilon(\mathbf{F}_{fL}\mathbf{q}_L^* + \mathbf{F}_{fF}\mathbf{q}_F^*) - \gamma \tilde{\mathbf{v}}_F.\end{aligned}\quad (49)$$

注意到 $\mathbf{L}_{ff}$ 为负定矩阵, $\|\mathbf{F}_{ff}\|$ 有界, 则存在足够小的 ε^* , 当 $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$ 时, $\mathbf{L}_{ff} + \varepsilon \mathbf{F}_{ff}$ 仍然为负定矩阵.

定义一个备选李雅普诺夫函数:

$$V_2 = -\frac{1}{2}\tilde{\mathbf{q}}_F^T(\mathbf{L}_{ff} + \varepsilon \mathbf{F}_{ff})\tilde{\mathbf{q}}_F + \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{v}}_F^T\tilde{\mathbf{v}}_F \geq 0. \quad (50)$$

对 V_2 求导可得

$$\begin{aligned}\dot{V}_2 &= -\tilde{\mathbf{q}}_F^T(\mathbf{L}_{ff} + \varepsilon \mathbf{F}_{ff})\tilde{\mathbf{v}}_F + \tilde{\mathbf{v}}_F^T[(\mathbf{L}_{ff} + \varepsilon \mathbf{F}_{ff})\tilde{\mathbf{q}}_F \\ &\quad + \varepsilon(\mathbf{F}_{fL}\mathbf{q}_L^* + \mathbf{F}_{fF}\mathbf{q}_F^*) - \gamma \tilde{\mathbf{v}}_F].\end{aligned}\quad (51)$$

而 $\mathbf{L}_{ff}$, $\mathbf{F}_{ff}$ 为对称矩阵, 故:

$$\begin{aligned}\dot{V}_2 &= \tilde{\mathbf{v}}_F^T[\varepsilon(\mathbf{F}_{fL}\mathbf{q}_L^* + \mathbf{F}_{fF}\mathbf{q}_F^*) - \gamma \tilde{\mathbf{v}}_F] \\ &= \varepsilon \tilde{\mathbf{v}}_F^T(\mathbf{F}_{fL}\mathbf{q}_L^* + \mathbf{F}_{fF}\mathbf{q}_F^*) - \gamma \tilde{\mathbf{v}}_F^T\tilde{\mathbf{v}}_F \\ &\leq \varepsilon \|\tilde{\mathbf{v}}_F\|(\|\mathbf{F}_{fL}\|\|\mathbf{q}_L^*\| + \|\mathbf{F}_{fF}\|\|\mathbf{q}_F^*\|) - \gamma \|\tilde{\mathbf{v}}_F\|^2 \\ &= \|\tilde{\mathbf{v}}_F\|_2[\varepsilon(\|\mathbf{F}_{fL}\|\|\mathbf{q}_L^*\| + \|\mathbf{F}_{fF}\|\|\mathbf{q}_F^*\|) - \gamma \|\tilde{\mathbf{v}}_F\|].\end{aligned}\quad (52)$$

由于 $\|\mathbf{F}_{fL}\|$ 和 $\|\mathbf{F}_{fF}\|$ 有界, $\|\mathbf{q}_L^*\|$ 和 $\|\mathbf{q}_F^*\|$ 为已知, 且当达到期望队形时 $\|\mathbf{F}_{fL}\| = 0$, $\|\mathbf{F}_{fF}\| = 0$, 结合4.2节中对编队保持控制策略的分析可知, 存在足够小的 ε^* 及足够大的 γ^* , 使得当 $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$, $\gamma > \gamma^*$ 时, $\dot{V}_2 \leq 0$ 恒成立. 再由拉萨尔不变性定理可知, $\tilde{\mathbf{q}}_F \rightarrow \mathbf{0}$, $\tilde{\mathbf{v}}_F \rightarrow \mathbf{0}$, 因而 $\mathbf{q}_F \rightarrow \mathbf{q}_F^*$, $\mathbf{v}_F \rightarrow \mathbf{0}$, 即 $\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{q}^*$, $\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{0}$, 即跟随者跟随领航者达到期望的立体队形.

5.3 增益矩阵L的优化求解

结合定理5中对系统的稳定性分析, 进一步设计了领航者-跟随者网络下增益矩阵L的优化求解算法, 如表3所示.

表3 领航者-跟随者网络下增益矩阵L的优化求解算法

Table 3 Algorithm for optimal calculation of gain matrix L under leader-follower networks

算法3: 领航者-跟随者网络下增益矩阵L的优化求解

输入: 期望队形坐标 $\mathbf{q}^*$.

输出: 增益矩阵 $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{3n \times 3n}$.

步骤1: 令 $\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3n_\ell \times 3n_\ell} & \mathbf{0}_{3n_\ell \times 3n_f} \\ \mathbf{L}_{fL} & \mathbf{L}_{ff} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3n \times 3n}$, 其中 $\mathbf{L}_{ff}$ 为对称负定矩阵.

步骤2: 令 $\mathbf{N} = [\mathbf{q}^*, \mathbf{q}^*, \bar{\mathbf{q}}^*, \mathbf{1}_x, \mathbf{1}_y, \mathbf{1}_z] \in \mathbb{R}^{3n \times 6}$.

步骤3: 使用SDP求解器求解式 $\mathbf{L} = \underset{a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}}{\operatorname{argmax}} \lambda_{\min}(-\mathbf{L}_{ff})$ 所述的半正定规划问题. subject to $\mathbf{L}\mathbf{N} = \mathbf{0}$

正定规划问题.

6 仿真实验及分析

6.1 二阶集群系统立体编队控制仿真

本节将对于二阶集群系统立体编队控制进行仿真验证, 选取5个二阶积分器模型的智能体, 将其分别编号为1, 2, ..., 5, 并且假定5个智能体的期望队形为金字塔队形. 实验采用所设计的控制律式(24), 将智能体的队形大小固定并且加入避碰算法2, 给定激活阈值 $d=5$, 安全半径 $r=2$, 控制增益 $k_0=k_1=\varepsilon=1$, 所有智能体的初始速度为0, 随机设置5个智能体的全局初始位置为

$$\mathbf{q}_0 = \begin{bmatrix} 12.9329 & 8.2202 & 10.2059 & 1.1734 & 0.7176 \\ 6.6439 & 8.5029 & 5.5707 & 6.8453 & 11.0739 \\ 3.0000 & 4.0000 & 5.0000 & 6.0000 & 8.0000 \end{bmatrix}.$$

给定5个智能体的预期金字塔队形为

$$\mathbf{q}_s = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \times 7.5.$$

给定5个智能体的拓扑结构:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

根据给定的拓扑结构, 首先可以使用MATLAB CVX凸优化工具箱利用算法1求解得出增益矩阵A. 图4给出了5个智能体分别在 $t=0, 3, 6$ s以及15 s时刻达到期望队形并保持的仿真过程, 图5(a)给出了仿真过程中智能体间的距离变化曲线, 图中平行于x轴的线表示

图 4 (网络版彩图) 5 个智能体形成金字塔队形仿真过程
Figure 4 (Color online) Evolutionary trajectories of 5 agents to form a pyramid shape.

图 5 (网络版彩图) 智能体间的距离(a)和误差(b)变化曲线
Figure 5 (Color online) Distances between neighboring agents. (a) Distance curves; (b) distance error curves.

安全半径 $r=2$, 图 5(b) 显示了智能体间的距离与期望距离之间的误差变化曲线. 结合图 4 和 5 可以看出, 初始时刻 $t=0$ s 智能体位于随机位置, 此后直至约 $t=5$ s 时间段金字塔队形初步形成, $t=5\sim 10$ s 时间段智能体在小范围进行移动, 而 $t=10$ s 之后金字塔队形能够稳定保

持, 且智能体间距离误差保持为 0. 通过观察仿真结果, 发现智能体编队最终收敛到了期望的金字塔队形, 队形的大小满足了期望的固定值, 并且在编队过程中智能体间没有发生碰撞, 整个仿真实验验证了所设计的编队控制律式(24)和避碰算法 2 的正确性和有效性.

6.2 领航者-跟随者网络下的二阶集群系统立体编队控制仿真

本节将对于领航者-跟随者网络下的二阶集群系统立体编队控制进行仿真验证, 假设领航者和跟随者均为二阶积分器模型, 其中 $n=8$ 个领航者, 整个仿真过程中分别静止在立方体的 8 个顶点上, 另外 $n_f=5$ 个跟随者初始速度均被设置为 0, 最终期望跟随者编队形成一个包含在领航者立方体队形内的金字塔队形. 仿真采用跟随者的编队控制律式(44), 设定的控制增益为 $\varepsilon=1, \gamma=1$.

假设 8 个领航者一直分别保持静止在相应的全局位置:

$$\mathbf{q}_{t0} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 12 & 12 & 4 & 4 & 12 & 12 \\ 12 & 4 & 4 & 12 & 12 & 4 & 4 & 12 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 12 & 12 & 12 & 12 \end{bmatrix}$$

给定 5 个跟随者的全局初始位置为

$$\mathbf{q}_{f0} = \begin{bmatrix} 0.0000 & 2.6734 & 8.7934 & 13.2534 & 4.5600 \\ 2.3000 & 15.2500 & 0.2879 & 2.7665 & 6.7820 \\ 10.2675 & 12.2665 & 2.7500 & 13.2500 & 14.2476 \end{bmatrix}$$

设定领航者与跟随者间的拓扑结构为完全图, 而跟随者间的拓扑结构如仿真图 6 中所示, 利用所设计的算法 3, 使用 MATLAB CVX 凸优化工具箱可以求解得到增益矩阵 $\mathbf{L}$. 图 6 给出了在给定 8 个领航者的立方体编队之后, 5 个跟随者分别在 $t=0, 5, 10$ 以及 15 s 时刻收敛到立方体内部形成期望的金字塔队形并保持的仿真过程. 而图 7 中显示了智能体间的距离与期望距离之间的误差变化曲线, 距离误差在 $t=10$ s 左右收敛并保持为零, 曲线共有 48 条, 故在此忽略标注. 结合图 6 和 7 可以看出, 初始时刻 $t=0$ s 跟随者位于随机位置, 此后直至约 $t=5$ s 时间段跟随者编队在立方体内部的金字塔队形初步形成, $t=5\sim 10$ s 时间段智能体在小范围进行移动, 而 $t=10$ s 之后金字塔队形能够稳定保持. 可以观察得出跟随者编队最终收敛并保持到了期望的包含在领航者立方体内部的金字塔队形, 所设计的编队控制律式

图6 (网络版彩图)5个跟随者跟踪8个领航者形成金字塔队形仿真过程

Figure 6 (Color online) Evolutionary trajectories of 5 followers tracking 8 leaders to form a pyramid shape.

(44)的正确性和有效性得到了证实.

7 总结

假设集群系统中相对位置信息可知, 且内部无相互通信, 本文提出了一种基于增益矩阵的分布式编队控制策略, 使得二阶动力学系统编队在立体空间内,

图7 (网络版彩图)智能体间的距离误差变化曲线

Figure 7 (Color online) Curves of distance errors between neighboring agents.

能够生成与保持. 首先, 设计的半正定规划算法能够对增益矩阵进行优化求解; 提出的编队控制律对扰动、饱和输入等具有较好的鲁棒性. 其次, 采用启发式的避碰算法, 使得避免智能体在收敛到期望队形的过程中相互之间的碰撞; 利用带有距离约束的编队保持控制策略, 使得整个编队能够保持固定大小的队形. 最后, 将控制律扩展至领航者-跟随者网络, 使得跟随者能够跟随领航者达到预期的编队队形. 结合文献[30]中的改进梯度控制律, 本文所提出的编队控制策略能够进一步应用于独轮车(unicycle)、前轮驱动车(front-wheel drive car)、后轮驱动车(rear-wheel drive car)等非完整约束动力学模型.

致谢 感谢Aerospace Controls Laboratory at the Massachusetts Institute of Technology的Dr. Kaveh Fathian对于本文研究方法给予的探讨和支持.

参考文献

- 1 Keller J, Thakur D, Likhachev M, et al. Coordinated path planning for fixed-wing UAS conducting persistent surveillance missions. *IEEE Trans Automat Sci Eng*, 2017, 14: 17–24
- 2 Thomas J, Welde J, Loianno G, et al. Autonomous flight for detection, localization, and tracking of moving targets with a small quadrotor. *IEEE Robot Autom Lett*, 2017, 2: 1762–1769
- 3 Dorling K, Heinrichs J, Messier G G, et al. Vehicle routing problems for drone delivery. *IEEE Trans Syst Man Cybern Syst*, 2017, 47: 70–85
- 4 Wang Z, Schwager M. Kinematic multi-robot manipulation with no communication using force feedback. In: 2016 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA). Stockholm, 2016. 427–432
- 5 Saldana D, Gabrich B, Whitzer M, et al. A decentralized algorithm for assembling structures with modular robots. In: 2017 IEEE International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS). Vancouver, 2017. 2736–2743
- 6 Bähnmann R, Schindler D, Kamel M, et al. A decentralized multi-agent unmanned aerial system to search, pick up, and relocate objects. In: 2017 IEEE International Symposium on Safety, Security and Rescue Robotics (SSRR). Shanghai, 2017. 123–128
- 7 Oh K K, Park M C, Ahn H S. A survey of multi-agent formation control. *Automatica*, 2017, 53: 424–440

- 8 Shen D, Wei R X, Ru C J. Digital-pheromone-based control method for UAV swarm search (in Chinese). *J Syst Eng Electron*, 2013, 35: 591–596 [沈东, 魏瑞轩, 茹常剑. 基于数字信息素的无人机集群搜索操控方法. *系统工程与电子技术*, 2013, 35: 591–596]
- 9 Wang X K, Li X, Zheng Z Q. Survey of developments on multi-agent formation control related problems (in Chinese). *Control Decision*, 2013, 28: 1601–1613 [王祥科, 李迅, 郑志强. 多智能体系统编队控制相关问题研究综述. *控制与决策*, 2013, 28: 1601–1613]
- 10 Hyun N P, Vela P A, Verriest E I. Collision free and permutation invariant formation control using the root locus principle. In: *IEEE 2016 American Control Conference (ACC)*. Boston, 2016. 2572–2577
- 11 Motoyama T, Cai K. Top-down synthesis of multi-agent formation control: An eigenstructure assignment based approach. In: *IEEE 2017 American Control Conference (ACC)*. Seattle, 2017. 259–264
- 12 Montijano E, Zhou D, Schwager M, et al. Distributed formation control without a global reference frame. In: *2014 IEEE American Control Conference (ACC)*. Portland, 2014. 3862–3867
- 13 Zhao S Y, Zelazo D. Bearing rigidity and almost global bearing-only formation stabilization. *IEEE Trans Automat Contr*, 2015, 61: 1255–1268
- 14 Park M C, Sun Z Y, Anderson B D O, et al. Distance-based control of K_n formations in general space with almost global convergence. *IEEE Trans Automat Contr*, 2018, 63: 2678–2685
- 15 Weinstein A, Cho A, Loianno G, et al. Visual inertial odometry swarm: An autonomous swarm of vision-based quadrotors. *IEEE Robot Autom Lett*, 2018, 3: 1801–1807
- 16 Aranda M, López-Nicolás G, Sagüés C, et al. Coordinate-free formation stabilization based on relative position measurements. *Automatica*, 2015, 57: 11–20
- 17 Tian Y P, Wang Q. Global stabilization of rigid formations in the plane. *Automatica*, 2013, 49: 1436–1441
- 18 Deghat M, Bishop A N. Distributed shape control and collision avoidance for multi-agent systems with bearing-only constraints. In: *2015 IEEE European Control Conference (ECC)*. Linz, 2015. 2342–2347
- 19 Trinh M H, Zhao S Y, Sun Z Y, et al. Bearing-based formation control of a group of agents with leader-first follower structure. *IEEE Trans Automat Contr*, 2018, 64: 598–613
- 20 Lin Z Y, Wang L L, Chen Z Y, et al. Necessary and sufficient graphical conditions for affine formation control. *IEEE Trans Automat Contr*, 2016, 61: 2877–2891
- 21 Peinado H G D M, Jayawardhana B, Cao M. Distributed algorithm for controlling scale-free polygonal formations. In: *2017 World Congress of the International Federation of Automatic Control (IFAC)*. Toulouse, 2017. 1760–1765
- 22 Han T R, Lin Z Y, Zheng R H, et al. A Barycentric coordinate-based approach to formation control under directed and switching sensing graphs. *IEEE Trans Cybern*, 2018, 48: 1202–1215
- 23 Zhang M M, Wei C. Multi-UAV formation control method based on edge Laplacian consensus (in Chinese). *Sci Sin Tech*, 2017, 47: 259–265 [张苗苗, 魏晨. 基于边Laplacian一致性的多无人机编队控制方法. *中国科学: 技术科学*, 2017, 47: 259–265]
- 24 Xu Y, Li D Y, Luo D L, et al. Affine formation maneuver tracking control of multiple second-order agents with time-varying delays. *Sci China Tech Sci*, 2019, 62: 665–676
- 25 Xu Y, Luo D L, You Y C, et al. Affine transformation based formation maneuvering for discrete-time directed networked systems. *Sci China Tech Sci*, 2020, 63: 73–85
- 26 Fathian K, Safaoui S, Summers T H, et al. Robust distributed planar formation control for higher-order holonomic and nonholonomic agents. ArXiv: [1807.11058](https://arxiv.org/abs/1807.11058), 2018
- 27 Boyd S, Vandenberghe L. *Convex Optimization*-Boyd and Vandenberghe. Cambridge: Cambridge University Press, 2004. 127–136
- 28 Liberzon D. *Switching in Systems and Control*. Boston: Springer Science & Business Media, 2012. 17–20
- 29 Fathian K, Rachinskii D I, Spong M W, et al. Distributed formation control via mixed Barycentric coordinate and distance-based approach. In: *2019 American Control Conference (ACC)*. Philadelphia, 2019. 51–58
- 30 Zhao S Y, Dimarogonas D V, Sun Z Y, et al. A general approach to coordination control of mobile agents with motion constraints. *IEEE Trans Automat Contr*, 2018, 63: 1509–1516

A gain matrix approach for robust distributed 3D formation control with second order swarm systems

XU Yang, LUO DeLin, ZHOU LuPeng, SHAO Jiang & YOU YanCheng

School of Aerospace Engineering, Xiamen University, Xiamen 361102, China

This article addresses the problem of shape formation and control in robust distributed second order swarm systems in 3D space. The control strategy described is based on a gain matrix approach and can be executed using only relative position measurements in each agent's local coordinate frame, which does not rely on inter-agent communication. First, a 3D formation shaping control method for second order swarm systems is proposed, and global stability is proved by constructing the candidate Lyapunov function. The gain matrix can be calculated by convex optimization, and the disturbance and input saturation is eliminated by the robustness of the proposed control law. Additionally, a heuristic algorithm for collision avoidance is introduced during the formation shaping process. After shaping the desired formation, the formation control law with required distances is proposed for maintaining a fixed formation shape in swarm systems. The control laws are then extended to 3D second order systems with leader–follower networks. Finally, the correctness of theoretical results is verified using simulations.

distributed formation control, second-order swarm systems, robustness, collision avoidance, leader-follower network

doi: [10.1360/SST-2019-0258](https://doi.org/10.1360/SST-2019-0258)