考虑混合修形的非对称直齿轮副啮合特性与振动特性分析

皇甫一樊¹, 陈康康¹, 马辉^{1,2*}, 孙衍宁¹, 段田堂¹

1. 东北大学机械工程与自动化学院, 沈阳 110819;

2. 东北大学航空动力装备振动及控制教育部重点实验室, 沈阳 110819

* E-mail: mahui_2007@163.com

收稿日期: 2018-08-04; 接受日期: 2018-10-30; 网络版发表日期: 2018-12-04

国家自然科学基金(批准号: 11772089)、中央高校基本科研业务费专项资金(编号: N170308028, N160313004)和辽宁省高等学校创新人才支持计划(编号: LR2017035)资助项目

摘要 基于能量法与切片理论, 提出了一种非对称直齿轮副啮合特性及振动特性分析模型. 该模型将延长啮合、非线性赫兹接触、齿基刚度修正以及轮齿修形考虑在内, 能较为准确地分析非对称直齿轮副的啮合特性. 通过将解析方法得到的时变啮合刚度和接触应力与有限元方法得到的结果进行比较可以得知: 两种方法得到的啮合刚度和接触应力吻合很好, 并且解析方法的计算效率远远高于有限元方法; 随着工作侧压力角的增大, 齿面接触应力和齿轮副重合度减小, 啮合刚度增大. 在啮合特性分析模型的基础上, 建立了非对称直齿轮副动力学模型. 通过振动特性分析可知: 随着工作侧压力角的增大, 振动幅值增大, 系统的固有频率略微降低. 本文解析模型可以为非对称直齿轮副的设计提供理论依据.

关键词 非对称齿轮, 轮齿修形, 啮合刚度, 接触应力, 振动特性

1 引言

在许多传动设备中, 齿轮一般单向传递动力, 只有一侧的齿面参与啮合传动. 1984年, Yoerkie^[1]提出了双压力角非对称齿轮的概念. 增大压力角对减小齿根应力有较大的益处, 但是同时增大两侧的压力角会使齿轮的齿顶变尖, 承载能力降低, 引发崩角等故障. 早期的非对称齿轮设计将小压力角置于工作侧, 将大压力角置于非工作侧^[2]. 2000年, Kapelevich^[3]提出工作面采用较大压力角, 非工作面采用较小压力角的设计思

想, 并指出该种齿轮具有齿根弯曲强度大、体积小、振动及噪声低的特点. 对非对称齿轮的研究主要聚焦在以下三个方面: 非对称齿轮的设计方法^[3~6], 弯曲应力与接触应力^[7~15], 刚度特性与动力学特性^[16~19].

非对称齿轮的设计往往是以承载能力为主要关注对象, 因此非对称齿轮的弯曲应力和接触应力方面有着大量的研究成果. Muni等人^[7]进行了有关如何确定最佳非对称齿形以及最为有效地减少齿根应力的研究. Spitas等人^[9]对最佳非对称齿形展开了研究, 并且使用边界元方法和光弹性材料实验方法进行了验证.

引用格式: 皇甫一樊, 陈康康, 马辉, 等. 考虑混合修形的非对称直齿轮副啮合特性与振动特性分析. 中国科学: 技术科学, 2019, 49: 661–668
Huangfu Y F, Chen K K, Ma H, et al. A model for evaluating the meshing characteristics and vibration characteristics of asymmetric spur gears with tooth modifications (in Chinese). Sci Sin Tech, 2019, 49: 661–668, doi: 10.1360/N092018-00263

Li^[10]指出增大低重合度非对称齿轮的齿顶高会增大齿根弯曲应力, 但是对高重合度非对称齿轮则恰恰相反. 李秀莲^[11]给出了考虑齿面摩擦的非对称齿轮弯曲应力的求解方法, 同时利用实验测试了非对称齿轮副的动态性能. 肖望强等人^[13~15]对非对称齿轮的弯曲应力与接触应力做了较为系统性的研究, 同时也用实验的手段对所提出的方法进行了有效的验证.

Litvin等人^[16]运用轮齿接触分析方法计算非对称齿轮副的传递误差, 同时利用有限元方法计算了齿面接触应力. Karpat^[17]建立了非对称齿轮的动态模型, 进行了如何减小齿轮动态载荷的研究. 邓小禾等人^[18~20]利用有限元方法对修形非对称齿轮副的啮合刚度、传递误差以及接触应力做了较为细致的研究.

目前, 国内外对于对称齿轮的刚度特性与动力学特性的研究较为深入^[21~23], 然而对于非对称齿轮的刚度特性和动力学特性的研究却较为匮乏^[17]. 针对此方面的研究主要借助于有限元方法^[17~20], 利用解析方法分析混合修形非对称齿轮副啮合特性和振动特性的研究还未见报道. 为了填补以上不足, 本文提出了一种基于能量法的非对称直齿轮副啮合特性及响应特性的分析方法.

2 啮合特性模型

对于无修形或齿顶修形的直齿轮, 一般将其简化为平面问题进行处理. 但是对于鼓向修形的齿轮副, 由于沿齿宽方向有着不同的修形量, 因此一般采用切片思想进行等效处理. 将齿轮副沿齿宽方向分为 N 份, 每一个薄片的宽度为 L/N , 其中 L 为齿宽.

将非对称齿轮视为变截面悬臂梁, 其截面积为

$$A = (s_d + s_c)L / N, \quad (1)$$

式中, s_d 和 s_c 分别为工作侧和非工作侧的半齿厚(见图1), 其计算方法详见文献[14]. 截面惯性矩为

$$I = \frac{L(s_d + s_c)^3}{12N}. \quad (2)$$

利用能量法计算轮齿啮合刚度, 得到第 i 个齿轮对的啮合刚度:

$$k_{ui} = 1 / \left(\frac{1}{k_{bpi}} + \frac{1}{k_{spi}} + \frac{1}{k_{api}} + \frac{1}{k_{bgi}} + \frac{1}{k_{sgi}} + \frac{1}{k_{agi}} + \frac{1}{k_{hi}} \right), \quad (3)$$

图1 (网络版彩图)混合修形非对称齿轮切片模型

式中, k_b , k_s , k_a 分别代表弯曲刚度、剪切刚度和轴向压缩刚度, 这些刚度采用能量法进行计算, 计算方法与对称齿轮类似^[24]. 非对称齿轮与对称齿轮相比较, 改变了啮合侧的分度圆压力角以及轮齿的齿厚. 下标 p 和 g 代表主动齿轮和从动齿轮. k_{hi} 为第 i 对齿轮副接触刚度, 其表达式为

$$k_{hi} = \frac{E^{0.9}(L/N)^{0.8}(F \cdot lsr_i)^{0.1}}{1.275}, \quad (4)$$

式中, E 为弹性模量, F 为总啮合力, lsr_i 为第 i 对齿的载荷分配系数. 精确的载荷分配系数要通过公式(6)计算得到, 此处的载荷分配系数需要赋予一个初值. 在双齿区, 初值取0.5, 在单齿区, 初值取1.

静态传递误差可以表示为

$$E_r = \begin{cases} \frac{E_1 k_{t1} + E_2 k_{t2} + F}{k_{t1} + k_{t2}}, & \text{双齿啮合,} \\ \frac{(S_r + \max(E_i))k_{t1} + F}{k_{t1} + k_{t2}}, & \text{延长啮合,} \\ \frac{F}{k_{t2}}, & \text{单齿啮合,} \\ \frac{(S_a + \max(E_i))k_{t3} + F}{k_{t2} + k_{t3}}, & \text{提前啮合,} \end{cases} \quad (5)$$

式中, $E_i (i=1, 2, 3)$ 为第 i 对轮齿的齿廓误差, S_a 和 S_r 分别为接近距离和分离距离(如图2所示), 其计算方法与对称齿轮的计算方法类似(见文献[25]).

第 i 个齿轮对的载荷分配系数为

$$lsr_i = \frac{k_u(E_r - E_i)}{F}. \quad (6)$$

轮齿刚度为

图 2 (网络版彩图)非对称齿轮啮合过程示意图

$$k_{\text{tooth}} = \frac{F}{E_r - \min(E_1, E_2)}, \quad (7)$$

式中, E_1 , E_2 分别为第1对和第2对啮合轮齿的齿廓修形量. 第 n 片齿轮副的啮合刚度为

$$k^n = 1 / \left(\frac{1}{\lambda_p k_{fp}} + \frac{1}{k_{\text{tooth}}} + \frac{1}{\lambda_g k_{fg}} \right), \quad (8)$$

式中, λ_p 和 λ_g 分别为主动轮和从动轮的基体刚度修正系数, k_{fp} 和 k_{fg} 分别为主动轮和从动轮的基体刚度^[26].

总啮合刚度可以表示为^[27, 28]

$$K = \frac{F \cdot \sum_{n=1}^N k^n}{F + \sum_{n=1}^N (k^n E_c^n)}, \quad (9)$$

其中, E_c^n 为第 n 片的鼓向修形齿廓偏差.

为计算非对称齿轮的接触应力, 首先计算第 i 对齿的第 n 片的载荷分配系数:

$$lsr_i^n = lsr_i \left(1 - \frac{KE_c^n}{F} \right) \frac{k^n}{K}. \quad (10)$$

第 i 对齿的第 n 片的啮合点接触应力为

$$\sigma_H = \sqrt{\frac{E(\rho_p + \rho_g) F N lsr_i^n}{2(1 - \nu^2) \rho_p \rho_g L}}, \quad (11)$$

表 1 齿轮副基本参数^[18]

参数名称	主/从动轮	参数名称	主/从动轮
齿数 z	19/19	工作侧压力角 α_d (°)	变化的
模数 m (mm)	2.87	非工作侧压力角 α_c (°)	20
齿宽 L (mm)	16	弹性模量 E (GPa)	207
转数 n (r/min)	1500	泊松比 ν	0.25
内孔径 r_{int} (mm)	14.2/14.2	扭矩 T (N·m)	52.25

式中, ρ_p 和 ρ_g 分别为主动轮和从动轮的接触点曲率半径, ν 为材料的泊松比.

3 模型验证与参数影响

齿轮副的参数如表1所示. 建立非对称直齿轮副的有限元模型来验证本文解析方法的有效性(如图3). 齿轮实体采用 SOLID185 单元, 齿面接触关系用 TARGE170 和 CONTA174 单元建立接触对. 齿轮内孔节点与中心点(图3中的 O_1 , O_2) 刚性耦合. O_1 点施加扭矩, O_2 点约束全部自由度.

3.1 工作侧压力角对啮合刚度的影响

分别利用解析方法和有限元方法得到不同工作侧压力角下的时变啮合刚度. 从图4可以看出, 解析方法和有限元方法无论在变化趋势还是数值上均吻合很好, 这充分说明了解析方法具有较高的精度. 工作侧压力角表征了非对称齿轮副的不对称程度. 随着工作侧压力角的增大, 齿轮副的重合度降低. 同时, 随着不对称程度的增大, 齿轮的齿厚增大, 啮合刚度也随之增大. 在三种不同的工作侧压力角下, 本文解析方法相对于有限元方法的最大误差在5%以内(见表2). 而本文解析方法仅用时30 s, 相对于有限元方法的计算时间为6 h(所使用的计算机为4核(8线程)64位处理器, 中央处理单元为 Intel(R) Core(TM) i7-6700 CPU @ 3.40 GHz, 16 GB RAM), 在保证计算精度的同时大大提高了计算效率.

3.2 修形参数对啮合刚度的影响

本例中, 工作侧压力角 $\alpha_d = 28^\circ$, 齿顶修形长度 $L_a = 0.756$ mm, 齿顶修形量 $C_a = 11.5$ μm , 鼓向修形量 $C_p = 10$ μm . 不同修形类型的非对称齿轮副的啮合刚度如图5所示. 从图中可以看出, 解析方法能较为准确地模

图3 (网络版彩图)有限元模型

图4 (网络版彩图)工作侧压力角对啮合刚度的影响. (a) 本文解析方法; (b) 有限元方法

表2 啮合刚度误差对比

$\alpha_d (^{\circ})$	双齿区最大值			单齿区最大值		
	解析方法 ($\times 10^8$ N/m)	有限元方法 ($\times 10^8$ N/m)	误差 (%)	解析方法 ($\times 10^8$ N/m)	有限元方法 ($\times 10^8$ N/m)	误差 (%)
20	3.23	3.29	1.82	2.01	2.09	3.82
22.69	3.36	3.40	1.18	2.14	2.20	2.73
28	3.62	3.64	0.55	2.43	2.49	2.40

拟各种不同的修形类型对啮合刚度的影响。齿顶修形可以减小单双齿交替过程中的刚度变化，减缓齿数变化带来的啮合冲击。而鼓向修形会使啮合刚度整体下降，这主要是由于鼓向修形会使齿轮靠近端面部分的承载能力减弱。

3.3 工作侧压力角对接触应力的影响

利用解析方法和有限元方法分别计算了不同工作

侧压力角情况下的齿面接触应力(见图6)。接触应力在单齿区最大。随着工作侧压力角的增大，重合度降低，因此单齿区增大。同时，随着工作侧压力角的增大，综合曲率半径减小，因此最大接触应力减小。

4 动力学模型

如图7所示，建立12自由度弯扭轴摆耦合齿轮副啮

图 5 (网络版彩图)修形参数对啮合刚度的影响. (a) 本文解析方法; (b) 有限元方法

图 6 (网络版彩图)工作侧压力角对接触应力的影响. (a) 本文解析方法; (b) 有限元方法

图 7 (网络版彩图)非对称齿轮副动力学模型

合动力学模型. 广义坐标为

$$\mathbf{X}_{12} = [x_1 \ y_1 \ z_1 \ \theta_{x1} \ \theta_{y1} \ \theta_{z1} \ x_2 \ y_2 \ z_2 \ \theta_{x2} \ \theta_{y2} \ \theta_{z2}]^T. \quad (12)$$

齿轮副沿啮合线方向上位移为

$$p_{12}(t) = (x_1 \sin \alpha_d - x_2 \sin \alpha_d + y_1 \cos \alpha_d - y_2 \cos \alpha_d + r_{b1} \theta_{z1} + r_{b2} \theta_{z2}) - e_{12}(t). \quad (13)$$

建立齿轮副的动力学方程:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{X}}_{12} + (\mathbf{C} + \mathbf{G}) \dot{\mathbf{X}}_{12} + \mathbf{K} \mathbf{X}_{12} = \mathbf{F}_u, \quad (14)$$

式中, $\mathbf{M}$ 为质量矩阵, $\mathbf{C}$ 为阻尼矩阵, $\mathbf{G}$ 为陀螺矩阵, $\mathbf{K}$ 为刚度矩阵, $\mathbf{F}_u$ 为激振力列阵. 这些矩阵的计算方法详见文献[29]. 以时变啮合刚度为激励源, 将啮合特性模型计算得到的啮合刚度导入动力学模型.

图 8 为齿轮副的静态传递误差和动态传递误差 ($\alpha_d = 28^\circ$). 由于啮合齿对数的变化, 传递误差呈现出周期性变化. 动态传递误差在单双齿交替过程中呈现出明显的振荡衰减过程.

图 9 所示为主动齿轮 x 方向位移均方根值的幅频响应, 从图中可以看出, 除主共振峰 (f_1) 外, 还存在由时变

图 8 (网络版彩图)传递误差

刚度激励产生的超谐波共振峰($f_1/4$, $f_1/3$ 和 $f_1/2$)。随着非对称压力角的增大,重合度减小,单双齿之间啮合刚度差值增大,因此振幅增大。此外,随着工作侧压力角的增大,转子系统第一阶固有频率略微减小($\alpha_d=20^\circ$, 22.69° , 28° 时,以平均啮合刚度计算的第一阶固有频率 $f_1=2133.9$, 2121.3 , 2090.5 Hz),因此主共振峰左移。

5 结论

本文考虑非线性接触刚度,延长啮合和基体刚度修正,利用能量法和切片理论建立了混合修形非对称齿轮副的啮合特性和振动特性模型。通过与有限元方

图 9 (网络版彩图)主动齿轮x方向位移幅频响应

法得到的结果进行对比,验证了本文解析方法的有效性。

(1) 以有限元方法为基准,本文解析方法计算得到的啮合刚度误差在5%以内。然而,解析方法比有限元方法有更高的计算效率(啮合刚度计算时间分别为30 s和6 h)。

(2) 随着工作侧压力角的增大,齿面接触应力明显减小,重合度会有所降低,啮合刚度增大。齿顶修形可以缓解单双齿交替过程中的刚度突变,而齿向修形则会使啮合刚度整体减小。

(3) 随着非对称程度的增加,单双齿之间啮合刚度差值增大,系统振幅增大。此外,随着工作侧压力角的增大,第一阶固有频率略微减小,因此主共振峰左移。

参考文献

- 1 Yoerkie C A, Chory A G. Acoustic vibration characteristics of high contact ratio planetary gears. *J Am Helicopter Soc*, 1984, 40: 19–32
- 2 Deng G, Nakanishi T, Inoue K. Bending load capacity enhancement using an asymmetric tooth profile. *JSME Int J Ser C*, 2003, 46: 1171–1177
- 3 Kapelevich A. Geometry and design of involute spur gears with asymmetric teeth. *Mechanism Machine Theor*, 2000, 35: 117–130
- 4 Sekar R P, Muthuveerappan G. Load sharing based maximum fillet stress analysis of asymmetric helical gears designed through direct design—A parametric study. *Mechanism Machine Theor*, 2014, 80: 84–102
- 5 Marimuthu P, Muthuveerappan G. Design of asymmetric normal contact ratio spur gear drive through direct design to enhance the load carrying capacity. *Mechanism Machine Theor*, 2016, 95: 22–34
- 6 Pedersen N L. Improving bending stress in spur gears using asymmetric gears and shape optimization. *Mechanism Machine Theor*, 2010, 45: 1707–1720
- 7 Muni D V, Kumar V S, Muthuveerappan G. Optimization of asymmetric spur gear drives for maximum bending strength using direct gear design method. *Mech Based Des Struct Machines*, 2007, 35: 127–145
- 8 Cavdar K, Karpat F, Babalik F C. Computer aided analysis of bending strength of involute spur gears with asymmetric profile. *J Mech Des*, 2005, 127: 477–484
- 9 Spitas V A, Costopoulos T N, Spitas C A. Optimum gear tooth geometry for minimum fillet stress using BEM and experimental verification with

- photoelasticity. *J Mech Des*, 2006, 128: 1159–1164
- 10 Li S. Effect of addendum on contact strength, bending strength and basic performance parameters of a pair of spur gears. *Mechanism Machine Theor*, 2008, 43: 1557–1584
 - 11 李秀莲. 非对称渐开线齿轮传动特性及应用基础研究. 博士学位论文. 镇江: 江苏大学, 2012
 - 12 肖望强, 李威, 韩建友, 等. 非对称齿廓齿轮弯曲疲劳强度理论分析与试验. *机械工程学报*, 2008, 44: 44–50
 - 13 肖望强, 李威, 李梅. 双压力角非对称齿廓齿轮齿根弯曲应力的有限元分析. *北京科技大学学报*, 2006, 28: 570–575
 - 14 肖望强, 李威, 韩建友. 双压力角非对称齿廓齿轮的啮合机理分析. *农业机械学报*, 2008, 39: 169–173
 - 15 文威. 非对称渐开线行星齿轮传动强度研究. 硕士学位论文. 重庆: 重庆大学, 2015
 - 16 Litvin F L, Lian Q, Kapelevich A L. Asymmetric modified spur gear drives: reduction of noise, localization of contact, simulation of meshing and stress analysis. *Comput Methods Appl Mech Eng*, 2000, 188: 363–390
 - 17 Karpat F, Ekwaro-Osire S, Cavdar K, et al. Dynamic analysis of involute spur gears with asymmetric teeth. *Int J Mech Sci*, 2008, 50: 1598–1610
 - 18 Deng X, Hua L, Han X. Characteristic of involute slope modification of asymmetric spur gear. *J Cent South Univ*, 2015, 22: 1676–1684
 - 19 Deng X H, Hua L, Han X H. Research on the design and modification of asymmetric spur gear. *Math Probl Eng*, 2015, Article ID 897257, 13 pages
 - 20 邓小禾. 渐开线圆柱齿轮齿廓修形与啮合规律研究. 博士学位论文. 武汉: 武汉理工大学, 2015
 - 21 Chen Z, Shao Y. Dynamic simulation of spur gear with tooth root crack propagating along tooth width and crack depth. *Eng Failure Anal*, 2011, 18: 2149–2164
 - 22 Chen Z, Zhai W, Wang K. Dynamic investigation of a locomotive with effect of gear transmissions under tractive conditions. *J Sound Vib*, 2017, 408: 220–233
 - 23 Chen Z G, Shao Y M, Lim T C. Non-linear dynamic simulation of gear response under the idling condition. *Int J Automot Technol*, 2012, 13: 541–552
 - 24 Ma H, Pang X, Feng R, et al. Improved time-varying mesh stiffness model of cracked spur gears. *Eng Failure Anal*, 2015, 55: 271–287
 - 25 Tse D K, Lin H H. Separation distance and static transmission error of involute spur gears. In: 28th Joint Propulsion Conference and Exhibit. Nashville, 1992
 - 26 Ma H, Zeng J, Feng R, et al. An improved analytical method for mesh stiffness calculation of spur gears with tip relief. *Mechanism Machine Theor*, 2016, 98: 64–80
 - 27 Chen Z, Shao Y. Mesh stiffness calculation of a spur gear pair with tooth profile modification and tooth root crack. *Mechanism Machine Theor*, 2013, 62: 63–74
 - 28 Wang Q B, Zhang Y M. A model for analyzing stiffness and stress in a helical gear pair with tooth profile errors. *J Vib Control*, 2017, 23: 272–289
 - 29 Ma H, Yang J, Song R, et al. Effects of tip relief on vibration responses of a geared rotor system. *Proc Institution Mech Engineers Part C-J Mech Eng Sci*, 2014, 228: 1132–1154

A model for evaluating the meshing characteristics and vibration characteristics of asymmetric spur gears with tooth modifications

HUANGFU YiFan¹, CHEN KangKang¹, MA Hui^{1,2}, SUN YanNing¹ & DUAN TianTang¹

¹ School of Mechanical Engineering and Automation, Northeastern University, Shenyang 110819, China;

² Key Laboratory of Vibration and Control of Aero-Propulsion Systems Ministry of Education of China, Northeastern University, Shenyang 110819, China

Based on the potential energy method and slice assumption, an analytical model is proposed to evaluate the meshing characteristics and vibration characteristics of asymmetric spur gear pairs with tooth modifications. Considering the extended tooth contact, the nonlinear Hertzian contact, the revised foundation stiffness and the tooth modifications, the meshing characteristics of asymmetric spur gear pairs can be accurately evaluated. The time-varying mesh stiffness and contact stress obtained from the proposed method are compared with that obtained from the finite element method. The results show that the two methods are in good agreement but the computational efficiency of the proposed method is much higher than the finite element method. With the increase of the pressure angle on driving side, the contact ratio and the contact stress decrease and the mesh stiffness increases. On the basis of the meshing characteristics model, the dynamic model of asymmetric spur gear pairs is established to evaluate vibration characteristics. With the increase of the pressure angle on driving side, the amplitude of vibration increases and the first natural frequency decreases slightly. The proposed model can provide the theoretical basis for the parameter design of asymmetric spur gear pairs with tooth modifications.

asymmetric gear, tooth modification, mesh stiffness, contact stress, vibration characteristics

doi: [10.1360/N092018-00263](https://doi.org/10.1360/N092018-00263)