复杂网络上的同步斑图

王新刚*

陕西师范大学物理学与信息技术学院, 西安 710119

*联系人, E-mail: wangxg@snnu.edu.cn

收稿日期: 2019-04-15; 接受日期: 2019-05-24; 网络出版日期: 2019-09-18

国家自然科学基金(编号: 11875182)资助项目

摘要 作为非线性时空系统中特有的现象, 动力学斑图受到不同研究领域人们的共同关注. 近年来, 受网络科学发展的影响, 人们对复杂网络中的各种集体动力学行为进行了深入研究, 并在此过程中认识到网络结构对网络动力学的重要影响. 因时空斑图是众多复杂系统实现其功能的动力学基础, 又因复杂网络结构在现实复杂系统中普遍存在, 故复杂网络中的斑图行为受到人们的关注. 然而, 受技术和方法的限制, 目前人们对复杂网络中的斑图行为研究甚少. 本文以全同混沌振子组成的耦合复杂网络为例, 简要介绍了近年来人们在复杂网络同步斑图研究中所取得的一些进展, 包括同步斑图的动力学特征、网络对称性对同步斑图的影响、同步斑图的稳定性分析理论以及同步斑图的控制方法等. 同时, 文中还将围绕现实复杂网络中遇到的一些具体问题, 就目前复杂网络同步斑图研究中所存在的问题和面临的挑战进行简单的讨论.

关键词 复杂网络, 混沌同步, 集团同步, 时空斑图

PACS: 05.45.-a, 05.45.Xt, 89.75.Hc, 89.75.Fb

1 引言

作为非线性与复杂系统研究的核心问题之一, 耦合振子的集体动力学行为长期以来受到不同研究领域学者的共同关注^[1-5]. 而这其中, 同步现象更是因其在现实中的普遍存在被看作是耦合振子系统集体动力学行为的典型代表^[6,7]. 过去几十年中, 随着理论方法的发展和实验技能的提高, 人们对耦合振子系统同步行为的认识无论在深度(现象、方法、机制)还是广度(例举、实验、应用)上均取得了长足的进展^[6-8]. 特别是近年来, 得益于网络科学的快速

发展^[9-12], 耦合复杂网络系统中的同步问题更是受到人们极大的关注, 并成为当前非线性与复杂系统领域的研究热点之一^[13-16]. 有别于规则网络, 复杂网络同步研究着重强调耦合拓扑结构对系统集体动力学行为的影响, 是从一个全新的角度和参数空间(网络拓扑结构参数空间)对系统的动力学行为进行研究, 为此呈现出一批新的动力学现象, 同时在研究方法上也提出了新的挑战^[13-16].

耦合振子系统中发现的一个非常有意义的现象是集团同步^[17-25](Cluster Or Group Synchronization), 也称部分同步(Partial Synchronization). 当系

引用格式: 王新刚. 复杂网络上的同步斑图. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2020, 50: 010503

Wang X G. Synchronous patterns in complex networks (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, 2020, 50: 010503, doi: 10.1360/SSPMA-2019-0131

统处于集团同步态时, 同一集团内的振子运动行为有着非常强的关联, 而不同集团间的振子运动则关联非常弱甚至无关联; 同步的振子之间可以存在直接耦合, 也可能不存在直接的耦合, 而是通过第三者的间接耦合相互达到同步(也称远程同步(Remote Synchronization)或接力同步(Relay Synchronization))^[20,26-30]. 集团同步通常发生在同步过渡区域, 即当系统处于起始同步(Onset Of Synchronization)与完全同步(Global Synchronization)状态之间时. 集团同步的研究意义主要有二. 其一是探索非线性复杂系统的相变和分岔行为的重要手段^[6-8]. 从非平衡统计物理的角度来讲, 同步研究的主要任务是探索远离平衡态情况下系统随参数(如耦合强度)的变化如何从完全无序相转化到完全有序相. 截至目前, 绝大多数同步研究仅围绕在整个过渡过程的两个端点开展, 即起始同步和完全同步, 而对于整个中间过渡过程了解甚少. 集团同步研究所关心的恰恰是系统在过渡区域的行为, 包括对集团同步态的刻画(分岔)以及各集团同步态之间的转变(相变)等. 集团同步研究的另外一个意义在于对实际复杂系统中的斑图行为的认识^[5,31]. 由于存在空间上的特定结构, 集团同步本质可以看作是一种时空动力学斑图, 即同步斑图. 与传统动力学斑图相似, 同步斑图的产生大多与系统对称性有密切的关系, 但其具体同步形态却受到包括耦合强度、节点动力学和耦合形式在内的多个因素的共同调制^[17-22]. 正因如此, 同步斑图相比于传统斑图有着更加丰富的产生机制和空间结构, 并被看作是探索实际复杂系统行为和功能的重要途径之一^[32,33].

复杂网络科学的发展为同步斑图研究带来新的挑战. 因同步斑图的形成密切依赖于系统对称性的破缺, 故长期以来人们普遍认为只有规则网络上才能产生同步斑图, 譬如规则格子(Lattices)或全连通系统(Global Coupling)^[6-8]. 初期的数值结果也确实印证了这一点, 如人们发现如果在规则网络中增加长程随机连接的数目, 系统中的斑图将会变得逐渐模糊并最终消失^[34-37]. 然而复杂网络的实证研究却为我们展示了世界的另一面: 许多实际系统具有复杂网络结构的同时却能够产生稳定的动力学斑图^[31,38-44]. 其中一个典型的例

子是大脑神经网络^[45]. 近年来关于人类大脑的解剖和建模研究(如MR, DTI)均清楚地显示其结构具有典型的复杂网络特征^[46,47], 包括度分布的异质性(Heterogeneity)^[48]、小世界(Small-World)特征^[49]、社团结构(Community)等^[50]. 与此同时, 大脑成像技术(EEG, MEG, MEA)显示在大脑认知活动期间, 各功能区不仅其内部神经细胞之间的放电行为存在高度的关联, 部分功能区之间的放电行为也存在着非常强的联系, 从而在整体上呈现出具有某一独特空间分布的动力学斑图^[45,51,52]. 这些斑图的动力学行为在很大程度上决定了大脑的高级功能的实现与否, 包括感知、学习、记忆等. 显然, 现有的同步斑图理论并不能够对此做出解释.

理论和实践之间的冲突激发了人们对复杂网络系统中同步斑图的研究兴趣, 并于近年来取得了一些进展^[31,38-44]. 首先, 基于统计分析, 人们发现复杂网络在同步过渡区域存在明显的集团同步现象^[53-55]. 但是, 不同于规则网络, 这里发现的同步集团是一种粗粒化、统计意义上的描述, 不具有固定的空间结构且动力学上非常不稳定^[55]. 同时, 利用本征矢量分析方法, 人们在复杂网络同步临界点附近发现了稳定的退同步斑图^[40]. 但是该方法仅适用于刻画同步临界点附近的斑图行为, 无法推广到深度退同步(同步过渡)区域. 为了在同步过渡区域观测到稳定的同步斑图, 人们设计了含长程连接的小尺寸网络, 发现同步斑图的产生与网络的对称性密切相关^[26,56-62], 并在主稳定性方程(Master Stability Function)的基础上发展了一套相应的斑图稳定性分析方法^[56,58,63]. 由于该分析方法需要提前知道网络结构的所有对称性, 而大尺寸复杂网络的结构对称性分析本身又是一个数学上的难题, 故该方法不能直接应用于实际复杂网络的分析. 这一困难在2014年取得一定突破^[64]. 利用计算群论的方法, Pecora等人^[64]发展了一套能够计算复杂网络所有置换对称性(Permutation Symmetry)的方法, 并用其成功分析了实际电力网络中的同步斑图. 该方法提出后迅速引起人们的关注, 并成为当前研究复杂网络同步斑图行为的主要手段之一^[65-67]. 人们在研究过程中也发现, 虽然原则上利用计算群论方法能够找到复杂网络中的所有对称性, 但实际中由于计算

量过于庞大, 现有条件下很难对大尺寸复杂网络的对称性进行计算^[65,66]. 同时人们也注意到, 虽然复杂网络中存在着数目众多的置换对称性, 但能够产生稳定同步斑图的却寥寥无几^[64-67], 并由此带来了同步斑图的控制问题^[58,65,66,68]. 总体来讲, 虽然结构对称性为复杂网络同步斑图的研究提供了一个新的途径, 但目前该套方法仍处于发展阶段, 很多技术和理论问题尚待解决. 尤其在解决实际复杂系统中所遇到的具体问题上, 目前的理论与应用之间还有很大的距离.

大脑神经系统向来是同步研究的“主战场”, 而全脑尺寸上的同步斑图行为则被看作是高级神经活动的动力学基础. 当前认知神经科学研究中的一个共识是大脑的任何认知活动均建立在全脑范围内神经元的时空放电斑图基础之上^[45,51,52]. 在介观和宏观层次上, 这种时空行为更多地体现为大脑各功能区域之间的同步放电^[52,69-71]. 而如何从动力学角度对各种神经放电斑图的产生机制和演化规律进行分析已经成为当前神经科学研究的一个热点, 同时也是我国脑计划研究的核心内容^[72]. 以认知神经科学中的同步绑定(Binding-By-Synchrony)机制为例^[71], 当人的眼睛看到一个物体的时候, 该物体的不同属性, 包括大小、形状、颜色等, 均在视觉神经中枢的特定(空间离散)区域内引起神经元的同步放电, 而大脑对该物体的整体感知正是基于该同步斑图的空间和时间特征^[52,69-71]. 虽然同步绑定现象在实验上已经得到大量的证据, 但其背后的动力学机制(包括斑图的空间分布、产生条件、演化特征, 以及对刺激信号的依赖等)目前仍不清楚^[71]. 毫无疑问, 同步绑定的产生机制与人们在耦合复杂网络中观测到的同步斑图现象密切相关, 但由于方法和技术上的限制, 目前的同步斑图理论尚不能对同步绑定现象研究提供支持. 又以大脑的记忆功能为例, 实验显示无论是短时记忆(Working Memory)还是长时记忆(Long-Term Memory)都离不开不同脑区之间的同步放电行为^[73]. 更为有趣的是, 随着时间的演化或外界刺激信号的变化, 大脑能够在不同的同步放电斑图之间进行“切换”, 从而实现逻辑推理和创造性思维等其他高级功能^[52,69-71]. 然而目前关于复杂网络同步斑图的研究多集中于单一斑图(全局同

步)形式, 尚无法对斑图演化这一现象进行解释. 上述问题的存在为复杂网络同步斑图的研究提供了方向, 同时也使研究更加具体化和具有针对性.

需要说明的是, 虽然很多工程系统的功能依赖于全局同步, 但其部分同步的研究同样具有重要意义. 原因之一是研究部分同步可以加深人们对同步暂态(Transient)过程的理解, 从而可以判断达到全局同步需要的时间, 或者在此基础上寻找同步优化的策略; 原因之二是通过研究部分同步的产生机制, 可以找到避免部分同步发生的有效策略, 从而使得系统的全局同步状态变得更加稳定. 最后需要说明的是, 实际系统中的工程网络大多不是孤立存在的, 通常情况是不同功能的工程网络相互依存, 从而形成所谓的多层复杂网络(Multilayered Networks)^[74,75]. 在这种情况下, 同层网络中的节点具有相同的动力学并能够达到层内同步, 而不同层间则由于节点动力学属性的不同不可能达到同步. 即使对于单层工程网络, 现实生活中也经常会遇到部分同步情况. 以复杂电网为例, 虽然全局同步是电网正常工作的前提条件, 但这种同步往往局限于某一区域网络之内, 而不同的区域网络之间并未达到同步, 譬如日本电网中北部电网和南部电网虽然相互输电, 但分别工作在不同的频率并且其各自区域内达到频率同步. 无论是多层网络还是电力网络, 其明显的特征之一是网络的节点动力学存在差异性(电网中发电站和电机分别满足不同的动力学方程), 而关于非全同复杂网络中同步斑图的研究目前尚未涉及.

正如规则网络系统(连续介质)中的斑图行为一样, 复杂网络中的动力学斑图也丰富多彩. 除了同步斑图之外, 近年来人们还对复杂网络上的其他斑图行为进行了一系列研究, 如图灵斑图^[38]、行波^[43]、靶波^[41,42]以及螺旋波^[35-37]等. 虽然所研究的斑图的具体形式不同, 但人们所关心的问题却有一致性, 即时空系统的斑图行为如何受复杂网络结构的影响. 即使是同步斑图, 也存在着耦合相振子和混沌振子两类不同的网络模型, 其所关注的问题和采用的分析方法也大有不同. 本文所讨论的对象仅限于全同耦合混沌振子所组成的复杂网络, 研究的范围也仅限于同步斑图. 需要说明的是, 作为一个

新的方向, 复杂网络同步斑图的研究目前仍处于起步阶段, 不同的研究方法同时存在且均处于发展之中. 本文仅就所熟悉的同步斑图的矢量分析方法和网络结构对称性分析方法进行介绍.

2 理论模型

我们考虑如下由耦合振子构成的复杂网络模型 [6, 13, 14]:

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{F}_i(\rho_i, \mathbf{x}_i) + \varepsilon \sum_{j=1}^N w_{ij} [\mathbf{H}(\mathbf{x}_j) - \mathbf{H}(\mathbf{x}_i)], \quad (1)$$

其中 $i, j = 1, \dots, N$ 表示网络中节点(振子)的编号, N 为网络中所包含节点的数目(即网络尺寸), $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i(t)$ 表示网络中第 i 个振子在 t 时刻的状态. 在无耦合作用情况下, 第 i 个振子的演化动力学由方程 $\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{F}_i(\rho_i, \mathbf{x}_i)$ 决定. 其中 ρ_i 代表的是第 i 个振子的动力学参数. 我们可以通过调整 ρ_i 的取值使得该振子处于不同的动力学状态, 譬如周期或混沌态. 为了突出网络结构对系统动力学所带来的影响, 这里采用全同混沌振子, 即 $\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_j$ 并且 $\rho_i = \rho_j$. 振子之间的相互作用形式由耦合函数 $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ 描述, 相互作用强度统一设为 ε . 振子之间的相互作用关系, 即网络结构, 由矩阵 $\mathbf{W}$ 定义, 其中矩阵元 w_{ij} 表示连接振子 i 和 j 的边的权重. 因此, 振子 i 受到来自振子 j 的实际耦合强度为 εw_{ij} . 在矩阵 $\mathbf{W}$ 中, 所有对角元均设为 0, 即不考虑自耦合的情况(实际上, 由于采用了扩散耦合形式, 对角元的取值并不影响系统的动力学方程). 由于考虑的是全同振子和单一形式耦合函数, 方程(2)可以简化为

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{F}(\mathbf{x}_i) + \varepsilon \sum_{j=1}^N c_{ij} \mathbf{H}(\mathbf{x}_j), \quad (2)$$

其中 $\mathbf{C}$ 为行和为 0 的拉普拉斯矩阵(Laplacian Matrix), 其非对角元与矩阵 $\mathbf{W}$ 一致, 对角元为 $\mathbf{W}$ 对应矩阵元的行和的负值($c_{ii} = -\sum_j w_{ij}$). 如非特指, 接下来文章中将 $\mathbf{C}$ 称作系统的耦合矩阵.

方程(2)描述了一大类时空混沌系统的动力学行为, 在文献中被广泛采用 [6, 13, 14]. 需要指出的是, 虽然方程(2)中考虑的是扩散耦合, 但对于很多非线性

耦合的情况, 当仅考虑系统在其平衡态附近的行行为时, 仍然可以通过线性展开使得系统动力学近似满足方程(2). 另外一点需要说明的是, 由于采用了统一的耦合函数形式, 全局同步, 即 $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_j = \mathbf{x}_s$ 总是方程(2)的一个解(这里 $\mathbf{x}_s$ 表示系统同步后的流形, 其运动同样满足单个孤立振子的动力学方程, 但是某一时刻的具体状态则由所有耦合振子共同决定). 而至于这个同步解是否稳定, 则要受节点动力学、耦合函数、耦合矩阵以及耦合强度等因素的共同影响. 在研究同步问题时, 人们通常将其他因素固定, 而仅关注耦合强度对系统全局同步的影响. 本文接下来所要讨论的部分同步(同步斑图)则是另外一种同步状态, 其特点是系统中存在一个或者多个同步集团, 处于同一集团内的振子其行为之间存在很强的关联(完全同步), 而不同集团之间则不存在行为上的关联 [17–22]. 不同于全局同步, 对于给定的耦合系统可能存在多个部分同步态. 同时, 由于考虑的是具有复杂结构的网络, 这些部分同步态的解的形式大多情况下不能直接从方程(2)中直接得出. 本文的核心内容便是如何找到这些部分同步态, 并分析其稳定性.

3 全局同步临界点附近的同步斑图

由于部分同步通常发生在全局同步之前, 故此研究部分同步的一个策略可以是分析系统在全局同步临界点附近的行为. 对于一般耦合振子构成的复杂网络, 通常会存在某个特定的临界耦合强度 ε_c , 使得只有当耦合强度超过 ε_c 时, 系统才能够达到全局同步. 一个自然的想法是, 如果我们让耦合强度稍微低于 ε_c , 那么虽然全局同步态失稳, 但由于耦合强度很大, 振子之间仍然会存在很强的关联, 从而体现出部分同步(同步斑图)的特征.

基于上述想法, 文献[40]中对同步临界点附近处于退同步状态的复杂网络的集体动力学行为进行了分析, 发现虽然网络整体处于非同步状态, 但却乱中有序, 存在稳定的时空斑图. 文中采用常见的无标度网络(Scale-free Network)作为模型(网络大小 $N=800$, 节点平均度 $\langle k \rangle=16$), 节点动力学采用的是经典的混沌 Logistic 映射, 耦合函数取

为 $\mathbf{H}(x) = \mathbf{F}(x)$. 为将系统置于同步临界点附近, 首先需要找到临界耦合强度的大小, 其值可以通过经典的主稳定函数(Master Stability Function, MSF)方法得到. 因为接下来所要提出的同步分析方法是在MSF方法基础上发展得到的, 并且分析中需要区分不同的同步情景, 所以有必要首先对MSF方法做一简单介绍^[76-78].

3.1 主稳定函数分析方法

设系统已处于全局同步状态, 同步流形记为 x_s (对Logistic映射而言其维数为1). 对每个映射引入随机扰动 $\delta x_i = x_i - x_s$, 使得系统整体上稍微偏离全局同步状态. 如果随着时间的演化所有节点上的微扰都趋向于0, 那么就说该全局同步状态是稳定的, 否则判断为不稳定. 为此需要观察 δx_i 随时间的演化行为. 将 $x_i = x_s + \delta x_i$ 代入方程(2), 然后以 x_s 为参考态展开并保留到一阶小量(线性展开), 得到如下变分方程:

$$\delta \dot{x}_i = \mathbf{DF}(x_s) \delta x_i + \varepsilon \sum_{j=1}^N c_{ij} \mathbf{DH}(x_s) \delta x_j, \quad (3)$$

其中 $\mathbf{DF}$ 和 $\mathbf{DH}$ 为对应于同步流形 x_s 的雅可比矩阵. 将方程(3)变换到矩阵 $\mathbf{C}$ 所对应的本征空间, 得到如下新的变分方程:

$$\delta \dot{y}_i = [\mathbf{DF}(x_s) + \varepsilon \lambda_i \mathbf{DH}(x_s)] \delta y_i, \quad (4)$$

其中 $\delta \mathbf{Y} = (\delta y_1, \dots, \delta y_N)^T = \mathbf{T}^{-1} \delta \mathbf{X}$ 表示的是微扰在新空间中的各个模式 ($\mathbf{T}^{-1}$ 为空间变换矩阵, 其由矩阵 $\mathbf{C}$ 的本征矢量组成), λ_i 为矩阵 $\mathbf{C}$ 的第 i 个本征值. 方便起见, 我们将本征值进行排序, 使得 $0 = \lambda_1 > \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N$. 这样我们就将原来互相耦合的 N 个变分方程变为 N 个相互独立的模式. 不同模式的运动方程在形式上一致, 只有 λ_i 的取值不同. N 个模式中, $\lambda_1=0$ 对应的是同步流形本身的模式. 由于采用的是混沌振子, 其最大李雅普诺夫(Lyapunov)指数总为正. 其他 $N-1$ 个模式对应的是同步流形的切向空间的稳定性. 要使扰动后的轨道回到同步流形, 就需要 $\delta y_i (i = 2, \dots, N)$ 随时间演化趋向于0, 也即 $N-1$ 个切向模式所对应的最大李雅普诺夫指数全部小于0.

标记 Λ_i 为通过方程(6)计算得到的第 i 个模式的最大李雅普诺夫指数, 同步的条件则变为 $\Lambda_{2, \dots, N} < 0$. 定义新变量 $\sigma_i \equiv -\varepsilon \lambda_i$, 则方程(4)写为

$$\delta \dot{y}_i = [\mathbf{DF}(x_s) - \sigma_i \mathbf{DH}(x_s)] \delta y_i. \quad (5)$$

为使方程(5)适用于不同的网络结构(不依赖于具体的 σ_i), 进一步将其改写如下:

$$\delta \dot{y}_i = [\mathbf{DF}(x_s) - \sigma \mathbf{DH}(x_s)] \delta y_i, \quad (6)$$

其中 σ 定义为广义耦合强度. 方程(6)即判断耦合振子系统同步稳定性的主稳定函数. 这样, 对于任意给定结构的复杂网络, 判断其是否能够达到同步仅需要做两件事情: (1) 根据方程(6)数值计算得出其最大李雅普诺夫指数 Λ 随参数 σ 的变化关系; (2) 根据网络的耦合矩阵 $\mathbf{C}$ 计算出其本征值谱, 并观察是否所有的切向模式所对应的 σ 值均位于MSF函数的稳定区域 ($\Lambda < 0$). 显而易见, 对于大尺寸系统, 相比于直接数值求解方程(3), MSF方法的在计算复杂性得到了极大的降低.

这里对主稳定方程的应用做几点说明. 首先, 由于方程(3)是在同步流形附近线性化展开后得到的, 故此主稳定方程得到的仅是同步态的局域稳定性而非全局稳定性. 其次, 该方法仅用于判断系统最终是否能够达到同步, 但并不能判断同步时间; 此外, 对于非对称网络(网络连边具有权重和方向性), 耦合矩阵的本征值通常会为复数. 这种情况下就需要讨论方程(6)在 σ 所对应的复数空间的稳定性. 再次, 该方法原则上仅适用于扩散耦合(负反馈线性耦合). 对于其他耦合形式, 该方法需要做有针对性的改进. 最后, 该方法的分析对象仅为网络的全局完全同步态. 为此需要所耦合的振子具有相同的动力学, 即全同振子系统. 虽然如此, 数值研究表明当振子之间存在微小的参数失配时, 该方法仍然可以给出很好的近似解.

根据稳定区域 ($\Lambda < 0$) 的分布特点, 主稳定方程大致可以分为以下4类^[78]: 不存在稳定区域、半开放稳定区域 ($\sigma > \sigma_1$ 时 $\Lambda < 0$)、封闭稳定区域 ($\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$ 时 $\Lambda < 0$), 以及复杂多稳定区域. 4类之中, 又以封闭稳定区域最为常见. 图1中给出的是混沌Logistic映射 $x_{n+1} = x_n = 4x_n(1 - x_n)$ 在耦合函数

图 1 (网络版彩图)当节点动力学为混沌Logistic映射 $x_{n+1} = F(x_n) = 4x_n(1 - x_n)$, 耦合函数为 $H(x) = F(x)$ 时, 根据方程(6)计算得到的主稳定方程最大李雅普诺夫指数 Λ 随广义耦合强度 σ 的变化关系. 同步稳定区间为 (σ_1, σ_2) , 其中 $\sigma_1 = 0.5$, $\sigma_2 = 1.5$. 如图中所示, 仅当所有的切向模式 $\lambda_{2,\dots,N}$ 位于稳定区域时, 全局同步态才稳定

Figure 1 (Color online) For chaotic Logistic map described by equation $x_{n+1} = F(x_n) = 4x_n(1 - x_n)$ and by the coupling function $H(x) = F(x)$, the variation of the largest Lyapunov exponent, Λ , calculated from MSF with respect to the generalized coupling strength, σ . Λ is negative in the bounded region $\sigma \in (\sigma_1, \sigma_2)$, with $\sigma_1 = 0.5$ and $\sigma_2 = 1.5$. The global synchronization state is stable only when all the transverse modes $\lambda_{2,\dots,N}$ are locating inside the stable region, as the case shown in the figure.

取为 $H(x) = F(x)$ 时 Λ 随 σ 的变化关系, 即 MSF 曲线. 图中可以看到同步的稳定区域为 $\varepsilon \in (\sigma_1, \sigma_2)$, 其中 $\sigma_1 = 0.5$, $\sigma_2 = 1.5$ (由于混沌 Logistic 映射的态密度可以解析求得, 故 σ_1 和 σ_2 的值也可以解析求得). 我们把 σ_1 和 σ_2 分别叫做主稳定方程稳定区间的前边界和后边界. 有了图 1 后, 我们就可以通过计算网络耦合矩阵的本征值谱, 然后观察各个模式在 MSF 曲线中的分布就可以判断系统全局同步的稳定性. 图中所示例子中, 由于所有横向模式 $(\lambda_{2,\dots,N})$ 均处于稳定区域, 故同步态是稳定的. 因为 σ 正比于 ε , 故对于给定的耦合矩阵, 存在一个封闭的耦合强度区间 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, 使得系统只有在该区间内才能够保持同步. 根据同步条件 $-\varepsilon\lambda_2 > \sigma_1$, 我们有 $\varepsilon > \varepsilon_1 = -\sigma_1/\lambda_2$. 此外, 根据同步条件 $-\varepsilon\lambda_N < \sigma_2$, 我们有 $\varepsilon < \varepsilon_2 = -\sigma_2/\lambda_N$. 同理, 当 MSF 曲线给定后 (振子动力学和耦合函数均确定), 网络的

同步能力可以通过 λ_2 (决定了最小耦合强度 ε_1 的值) 和 λ_N/λ_2 (决定了耦合强度区间 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ 的大小) 来刻画.

3.2 数值结果

接下来分析系统在全局同步临界点附近的行为. 根据主稳定方程, 我们可以计算得到给定网络的临界耦合强度. 对于文献[40]中由混沌 Logistic 映射构成的无标度复杂网络 (耦合矩阵采用行归一化策略[79], 即矩阵对角元均为 -1, 非对角元为 $c_{ij} = a_{ij}/k_i$, 其中 $A = \{a_{ij}\}$ 为描述网络结构的紧邻矩阵, $k_i = \sum_j a_{ij}$ 为节点 i 的度), 其临界耦合强度分别为 $\varepsilon_1 \approx 0.94$ 和 $\varepsilon_2 \approx 1.02$, 即全局同步在区间 $\varepsilon \in (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ 内稳定. 为研究临界点附近的同步行为, 我们选取耦合强度 $\varepsilon = 0.935$. 主稳定方程分析显示, 在该耦合强度下系统的切向模式只有 λ_2 失稳 ($\Lambda_2 \approx 6 \times 10^{-3}$), 而其他 $N - 2$ 个切向模式仍然位于稳定区域. 图 2(a) 中显示的是某一时刻系统中各节点的同步误差. 这里节点的同步误差定义为 $\delta x'_i(t) = |x_i(t) - \bar{x}(t)|$, 其中 $\bar{x}_i = \sum_i x_i(t)/N$ 为系统中所有节点在时刻 t 的平均状态. 图中可以看到, 由于系统处于非完全同步状态, 节点的同步误差参差不齐. 大部分节点的同步误差很小 (中心区域), 而少部分节点的同步误差非常大 (边缘区域). 然而, 节点的同步误差分布并不是固定的, 而是随着时间的演化呈现剧烈的变化. 如图 2(b) 中所示, 某一时刻节点的同步误差很大, 但接下来的时刻该节点的同步误差可能会很小. 此外, 某一节点在某一时刻可能其同步误差大于大多数节点, 但下一时刻可能就会小于大多数节点. 整体来讲, 处于非同步状态条件下节点的同步误差演化呈现出复杂的时空变化, 而我们的研究目标就是如何从这看似混乱的时空演化中找到规律, 即同步斑图.

图 2(c) 中呈现的是系统整体同步误差, $\delta x'_{\text{net}} = \sum_i \delta x'_i / N$, 随着时间的演化. 从中可以看到, 虽然处于非同步状态, 但网络各节点整体上仍然具有很强的关联, 且呈现出明显的阵发 (Intermittency) 特征. 阵发现象在同步临界点附近普遍存在[54], 本质原因在于混沌轨道中存在大量的不稳定周期轨道, 而在

图 2 (网络版彩图) 当 $\varepsilon = 0.935 \leq \varepsilon_1 = 0.94$ 时, 处于临界同步状态下的无标度复杂网络的同步行为. (a) 某一时刻网络中各节点的同步误差分布. 图中节点大小正比于其同步误差. (b) 各节点同步误差随时间演化. (c) 网络整体同步误差 $\delta x'_{\text{net}} = \sum_i \delta x'_i / N$ 随时间演化. (d) 网络中所有节点的时间平均同步误差 ($\delta x'_{\text{tr}} = \sum_i \delta x'_i / T$) 分布. 本图摘自文献[40]

Figure 2 (Color online) The dynamics of slightly desynchronized network. (a) A snapshot of the distribution of node-synchronization-errors. (b) The time evolution of the node-synchronization-errors. (c) The time evolution of the global network synchronization error, $\delta x'_{\text{net}} = \sum_i \delta x'_i / N$. (d) The distribution of time-averaged node-synchronization-error, $\delta x'_{\text{tr}} = \sum_i \delta x'_i / T$. This figure is adopted, with permission, from ref. [40].

不稳定周期轨道附近更容易趋向同步. 鉴于系统的整体同步误差很小, 有理由相信同步的失稳是由一小部分节点造成的, 而大部分节点仍处于高度同步状态. 为了找出网络中的这一小部分不稳定的节点, 我们在图2(d)中画出每个节点的时间平均同步误差 $\delta x'_{\text{tr}} = \sum_i \delta x'_i / T$. 图中可以看到, 网络中确实存在小部分的不稳定节点, 其同步误差相比于其他节点明显高出很多. 由于耦合矩阵已经采用了归一化的策略[79], 每个节点的总的耦合强度是一致的. 既然如此, 那么导致节点同步误差差异的原因只能存在于节点在网络中的拓扑属性. 如果能够找到某个特殊的节点拓扑属性, 并能够建立起其与节点同步稳定性之间的一一对应关系, 那么就找到了一种新的节点排序方式, 从而使得图2(b)在新的节点排序下呈现出规律性的斑图. 同步斑图的本征适量分析方法正是基于这一想法而提出的.

3.3 同步斑图的本征矢量分析方法

由于切向模式中只有 λ_2 对应的模式失稳, 所以在模空间中分析系统的同步行为更为简便. 考虑到模空间的微扰矢量和节点空间的微扰矢量之间存在变换关系 $\delta \mathbf{Y} = \mathbf{T}^{-1} \delta \mathbf{X}$, 当仅有 λ_2 所对应的模式失稳时, 长时间演化后模空间的微扰矢量为 $\delta \mathbf{Y} = (\delta y_1, \delta y_2, \dots, 0)^T$. 因 δy_1 刻画的是同步流形本身的稳定性, 故系统的同步误差由 δy_2 决定. 根据模空间和节点空间的微扰矢量之间的变换关系, 我们有

$$\delta x_i = e_{2,i} \delta y_2, \quad (7)$$

其中 $\mathbf{e}_2 = (e_{2,1}, e_{2,2}, \dots, e_{2,N})$ 为系统耦合矩阵中与本征值 λ_2 所对应的本征矢量. 记 Λ_2 为模式 λ_2 所对应的最大李雅普诺夫指数(方程(6)), 则有关系

式 $\delta y_2(t) \propto \exp(\Lambda_2 t)$. 进一步, 当系统处于临界同步状态时 ($\varepsilon \leq \varepsilon_1$), 因 $\Lambda_2 \ll 1$, 上述关系式可近似写为 $\delta y_2(t) \propto \Lambda_2 t$. 代入方程(7), 可以得到任意时刻节点的同步误差

$$\delta x'_i = |\delta x_i| \propto |e_{2,i}|. \quad (8)$$

方程(8)的意义在于给出了一种度量网络中节点稳定性的判据, 即节点所对应的本征矢量分量 $|e_{2,i}|$ 的值越大, 其越不稳定. 以下通过数值模拟来验证方程(8)的正确性. 图3(a)中, 我们将图2(a)中最不稳定的8个节点分别找出, 然后分析这些节点所对应的本征矢量分量 $|e_{2,i}|$ 的值. 如图3(b)所示, 这8个最不稳定的节点恰恰是 $|e_{2,i}|$ 的值最大的8个节点. 为了进一步的检验方程(8)的准确性, 图3(c)中画出了网络中所有节点的时间平均同步误差 $\delta x'_i$ 和其所对应的 $|e_{2,i}|$ 值之间的关系. 图中可见, 不仅对于特别不稳定的节点, 方程(8)对于网络中的所有节点均成立. 如此, 我们就找到了一种可靠的刻画网络中节点同步稳定性的方法, 进而可以分析非同步状态下系统的同步斑图. 具体说来, 我们可以根据 $|e_{2,i}|$ 值的大小对节点进行重新排序, 使得 $|e_{2,1}| \geq |e_{2,2}| \geq \dots \geq |e_{2,i'}| \dots \geq |e_{2,N}|$, 然后根据新的节点序列 (i') 重新观察系统中所有节点的同步误差随时间演化. 根据这种方法, 我们将图2(b)进行了节点重排, 得到图3(d). 可以看到, 图3(d)的节点同步误差演化呈现出明显的规则性: 序号小的节点的同步误差总是比序号大的节点的同步误差大. 更为重要的是, 这种规则不随时间变化, 即该空间结构具有时间上的稳定性, 即 $\delta x'_{i'}(t) > \delta x'_{j'}(t)$ 当且仅当 $i' < j'$ 时. 我们将这种稳定的时空结构称为处于退同步状态下复杂网络中的同步斑图.

通过类似的分析也可以得到模式 λ_N 失稳情况下的同步斑图. 当网络中仅有 λ_N 所对应的模式不稳定时(即短波分岔情况), 可以得到关系式

$$\delta x'_i = |\delta x_i| \propto |e_{N,i}|, \quad (9)$$

其中 $\mathbf{e}_N = (e_{N,1}, e_{N,2}, \dots, e_{N,N})$ 为系统耦合矩阵中与本征值 λ_N 所对应的本征矢量. 取 $\varepsilon = 1.05 \geq \varepsilon_2 = 1.02$, 图3(e)中给出的是节点时间平均同步误差跟其所对应的 $|e_{N,i}|$ 之间的关系. 如方程(9)所预测的,

二者之间满足很好的线性关系. 根据 $|e_{N,i}|$ 的大小重新排列节点, 我们得到新节点序列下的同步误差演化(图3(f)). 图中可见, 与 λ_2 模式失稳情况类似(图3(d)), 重新排序后同步误差演化也呈现出稳定的时空结构, 即同步斑图.

3.4 本征矢量方法的推广及应用

从复杂网络耦合矩阵的角度来讲, 其中所包含的信息不仅包括本征值谱, 同时也包括每个本征值所对应的本征矢量. 在利用MSF方法分析网络同步行为时, 因只用到耦合矩阵中的部分本征值信息, 所以原则上讲并不能完整的刻画网络中的全部动力学行为, 如处于非完全同步状态下的网络动力学(值得指出的是, 目前关于复杂网络同步的研究中, 很多工作将网络的同步能力等同于网络耦合矩阵的一个或两个本征值, 如 λ_2 和 λ_N/λ_2 , 从而使得原本属于动力学的问题变成矩阵本征值的极值问题. 此过程虽然使得同步问题研究变得简化, 但也丢掉了全部的动力学信息, 包括节点动力学、同步过渡区域的系统行为以及同步暂态过程等. 此外, 即使是判断网络全局同步的稳定性, 有时仅考虑 λ_2 和 λ_N 两个模式仍然不够, 如当MSF函数中存在多个稳定区域的情况, 刻画网络同步就需要考虑除 λ_2 和 λ_N 之外更多的切向模式). 上述本征矢量分析方法显示, 当MSF方法在刻画系统的同步行为失效时, 我们有必要从耦合矩阵中引入新的信息对系统集体行为进行更深层次的刻画, 譬如某些特定的本征矢量. 从这一点上来讲, 通过引入耦合矩阵本征矢量信息, 也可能为研究复杂网络中的其他形式的一般集体动力学行为提供帮助, 如病毒传播、生态系统稳定性、图灵斑图等.

本文所提出的本征矢量分析方法具有一定的普适性, 并在改进后可以应用到更多网络同步问题的分析. 因为方程(8)和(9)在推导过程中并没有对网络结构、耦合策略、节点动力学和耦合函数等细节予以限制, 故该方法可用于分析方程(1)所描述的一般动力学系统的同步斑图问题. 例如, 文献[40]显示当采用非归一化的耦合策略时, 或采用其他形式的复杂网络模型时, 方程(8)和(9)仍然成立. 此外,

图 3 (网络版彩图)利用本征矢量方法分析非全局同步状态下复杂网络中的同步斑图. (a) $\varepsilon = 0.934 \leq \varepsilon_1$ 时, 某一时刻网络中节点的同步误差分布. 节点大小正比于同步误差. 图中标记出最不稳定的8个节点. (b) 对应于模式 λ_2 的本征矢量分量 $|e_{2,i}|$ 的分布. 图中标记出 $|e_{2,i}|$ 最大的8个分量, 其在网络中的位置与图(a)中的最不稳定的8个节点一一对应. (c) 模式 λ_2 失稳条件下网络中各个节点平均同步误差 $\delta x'_T$ 同本征矢量分量 $|e_{2,i}|$ 之间的关系. (d) 根据 $|e_{2,i}|$ 大小对节点重新排序后得到的节点同步误差演化. 图中任意时刻序号大的节点相对于序号小的节点拥有更小的同步误差. (e) 模式 λ_N 失稳条件下节点平均同步误差 $\delta x'_T$ 同本征矢量分量 $|e_{N,i}|$ 之间的线性关系. (f) 根据 $|e_{N,i}|$ 大小对节点重新排序后得到的节点同步误差演化图. 本图摘自文献[40]

Figure 3 (Color online) Identifying synchronous pattern in desynchronized complex networks by the method of eigenvector-based analysis. (a) The same as Figure 2(a), with the 8 most unstable nodes marked separately. (b) The distribution of the elements $|e_{2,i}|$ associated with the mode of λ_2 . (c) The linear relationship between the time-averaged node-synchronization-error, $\delta x'_T$, and the eigenvector element, $|e_{2,i}|$. (d) The spatiotemporal evolution of node synchronization errors with the reordered node index i' (by the decreasing order of $|e_{2,i}|$). (e) For coupling strength $\varepsilon = 1.05 > \varepsilon_2 = 1.02$, the linear relationship between the time-averaged node-synchronization-error, $\delta x'_T$, and the eigenvector element, $|e_{N,i}|$. (f) The spatiotemporal evolution of node synchronization errors with the reordered node index i' (by the decreasing order of $|e_{N,i}|$). This figure is adopted, with permission, from ref. [40].

文献[40]显示通过改进该方法, 还可用于分析具有社团结构复杂网络中的同步斑图. 对于具有社团结构的复杂网络, 其本征矢量分量具有阶梯式的分布特点, 而每一个阶梯对应于一个具体的社团[80,81]. 研究显示, 方程(8)和(9)在每个集团内部仍然成立.

方程(8)和(9)的意义在于指出了节点的同步动力学稳定性和网络结构所决定的本征矢量分量之间的一一对应关系. 利用该关系, 就可以在对网络动力学进行优化或调控的时候变得“有的放矢”. 譬如文献[82]中通过本征矢量方法找到不稳定节点, 然后对不稳定节点的局部网络结构进行小的变动就可

以有效地提高网络同步能力. 文献[83]则是考虑了本征矢量方法在网络升级上的应用. 通过对网络中最不稳定的单个节点进行升级, 可以用一个小的代价实现网络同步性能的最大程度上的提升. 一个有意义的发现是, 通过本征矢量方法所确定的升级节点不仅在性能上超过基于其他节点中心度(如度、介数(Betweenness)、紧密度(Closeness))所确定的节点, 同时也跟通过穷举方法数值计算得到的网络中的最优节点相一致. 此外需要指出的是本征矢量分析方法不仅可以用于同步优化, 同样可以用于同步抑制. 后者对于一些实际复杂网络的功能同样重要, 譬如大范围的同步可能导致癫痫病的发作[84,85], 而通过药物或外界刺激来诱导不稳定节点的退同步则可以有效抑制同步的发生.

虽然方程(8)和(9)的推导建立在单个模式失稳的假设基础上, 上述本征矢量分析方法原则上也可用于分析多个模式失稳的情况. 只要系统整体上处于临界同步点附近, 如 $\varepsilon \leq \varepsilon_1$, 系统的同步稳定性仍然受最不稳定性模式的主导. 数值结果显示[40], 对于图2中的网络系统, 即使存在多达20个失稳模式, 方程(8)和(9)仍然能够很好的成立. 同时, 数值结果也发现当系统处于深度退同步状态时(如 $\varepsilon \ll \varepsilon_1$), 本征矢量方法不再能够用于分析系统中的同步斑图行为. 接下来介绍近年来人们在研究深度退同步复杂网络斑图行为过程中发展的一套有效方法——基于网络对称性的同步斑图分析法.

4 对称性复杂网络中的同步斑图

4.1 同步斑图与网络结构对称性

当系统远离同步临界点时, 耦合振子之间仍然能够达到同步. 但此时同步仅局限于部分振子之间, 而系统整体上仍然处于非全局同步状态. 以往文献中将这种状态称之为部分同步或集团同步[17-22]. 由于此时系统在空间上呈现出非均匀特征, 因此部分同步也可看作是一类特殊的时空斑图, 即所谓的同步斑图. 对于规则网络, 同步斑图的产生源自于系统对称性的自发性破缺[17-22], 其斑图的空间特征一般可以通过失稳模式的特征来进行判断. 如图4(a)

中所示的由6个节点所组成的环形网络, 其结构满足旋转对称性 S . 如果系统动力学满足方程(1) (即通过扩散形式耦合的全同混沌振子)且MSF函数的稳定区间为有限(当 $\varepsilon \in (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ 时 $\Lambda < 0$), 那么当耦合强度足够大时($\varepsilon > \varepsilon_2$, 模式 λ_N 失稳)就可能产生图4(a)所示的部分同步态. 该部分同步态中, 节点1, 2, 6达到完全同步, 形成一个同步集团; 同时节点3, 4, 5也达到完全同步, 形成另外一个同步集团. 然而, 这两个同步集团之间并未达到同步. 如果用不同的字符来表示不同的同步流形, 并将字符按照节点序号进行排序, 那么图中所示的部分同步态就可以表示成 $\mathcal{P}_S = (a, a, b, b, b, a)$, 其中下标 S 表示网络结构所满足的对称性.

我们接下来讨论在图4(a)网络中加入长程随机连边后可能产生的部分同步态, 进而在此基础之上分析大尺寸复杂网络中的同步斑图. 不失一般性,

图4 (网络版彩图)(a) 一个6节点环形无权网络中可能出现的部分同步态. 网络结构满足旋转对称性 S . 此部分同步态中, 节点1, 2, 6达到完全同步; 节点3, 4, 5达到完全同步. 同步斑图标记为 $\mathcal{P}_S = (a, a, b, b, b, a)$. (b) 包含随机连边的6节点对称网络. 节点5和6之间的连边权重为0.8, 其他节点之间连边权重为1. 网络结构满足镜面对称 S_1 (左右对称)和 S_2 (上下对称), 以及180°旋转对称性 S_3 .

Figure 4 (Color online) The 6-node ring-structure network of rotation symmetry S , on which the partial synchronization state $\mathcal{P}_S = (a, a, b, b, b, a)$ can be observed. In this state, nodes 1, 2 and 6 are completely synchronized, and the synchronous manifold is denoted as a ; nodes 3, 4 and 5 are synchronized to another manifold, which is denoted as b . (b) The structure of a 6-node complex network. The link between nodes 5 and 6 has the weight 0.8, and the weights of other links are set as unity. The network structure possesses three symmetries: the reflection symmetries S_1 and S_2 , and the 180° rotation symmetry S_3 .

我们在图4(a)所示网络中引入3条随机长程连边. 新的网络结构如图4(b)所示. 考虑到实际复杂网络中边的权重特征, 我们将节点5和6之间的连边权重设为0.8, 而将其他连边的权重统一设为1. 由于引入了随机连边和权重边, 网络中原有的旋转对称性被破坏, 取而代之的是3个较低的对称性: 左右镜面对称 S_1 , 上下镜面对称 S_2 , 以及 180° 旋转对称 S_3 . 由于随机连边的出现, 网络结构的均匀性(Homogeneity)也被破坏, 因此图4(b)中网络的部分同步态并非通过系统对称性破缺产生, 而是依赖于网络中较低形式的对称结构, 包括 S_1 , S_2 和 S_3 . 一般意义上, 对于方程(1)所描述的系统, 网络结构上的任何对称性都对应着网络动力学的一个部分同步态的解. 以图4(b)中的左右镜面对称 S_1 为例, 如果节点1和2的初值相同, 同时节点3和4的初值相同, 那么无论耦合强度的大小如何, 在系统的演化过程中将一直保持在部分同步态 $\mathcal{P}_{S_1} = (a, a, b, b, c, d)$ 上. 这是因为对称节点总是有着相同的外部环境(如节点1和2), 导致其所受到的来自于其他节点的耦合信号完全一致. 鉴于对称性与部分同步态之间这种对应关系, 我们在研究复杂网络中的同步斑图时, 首先需要确定的就是网络中包含的所有可能的结构对称性.

对于类似于图4(b)所示的小尺寸复杂网络, 其结构对称性通过肉眼很容易就可以识别. 但对于大尺寸复杂网络, 其结构对称性的刻画却非常困难, 通常需要借助于数值方法, 譬如计算群论方法^[86]. 利用数值方法, 文献^[56, 58, 63]分析了复杂网络中的置换对称性, 并在此基础上研究了复杂网络中的部分同步行为. 在分析网络的置换对称性过程中, 首先需要找出网络中满足置换对称性的所有的节点对. 对于网络中的一对节点, 譬如 i 和 j , 其满足置换对称意味着在网络耦合矩阵中将这两个节点所对应的行列互换后矩阵保持不变. 这种行列互换操作可以通过一个置换矩阵来实现, 记为 g_{ij} (物理上, 这意味着如果将第 i 个节点的耦合信号与第 j 个节点的耦合信号互换, 网络动力学保持不变). 以对称节点所对应的置换矩阵以及由这些矩阵所衍生的矩阵为群元, 网络中所有的对称性则构成一个置换对称群 $\mathcal{G} = \{g_{ij}\}$. 进一步, 将相互关联节点组成节点链(链上的任意

两个节点之间可以通过一个或多个置换操作实现互换), 就可以将所有的群元分为不同的组. 这样就可以把网络中的所有节点分为不同的置换对称集团(Symmetric Cluster), 使得集团内部节点之间满足置换对称. 如果某个节点不存在置换节点, 我们将其称为孤立节点, 其自身组成一个单节点集团. 最后, 对应于一个具体的对称集团分布, 就可以找到网络动力学中所对应的一个部分同步态. 数值结果显示^[64], 对于无方向无权重的复杂网络, 其置换对称性数目随网络尺寸成指数关系增长, 即复杂网络中可能存在数目庞大的部分同步态.

网络对称性只是用来判断同步斑图的解的存在与否(即是否满足方程(1)), 但并不能判断同步斑图是否稳定. 接下来介绍近年来人们在研究复杂网络同步斑图问题中发展出来的一套用于分析对称性网络中同步斑图稳定性的理论方法^[56, 58, 63–66].

4.2 同步斑图稳定性分析

设网络中的节点划分为 M 个对称集团, 将第 m 个集团中所包含节点的集合记为 V_m , 其中所包含的节点数目为 n_m ($\sum_m n_m = N$), 则处于集团 m 中的第 i 个节点的运动方程写为

$$\dot{x}_i = F(x_i) + \varepsilon \sum_{j \in V_m} c_{ij} H(x_j) + \varepsilon \sum_{j \notin V_m} c_{ij} H(x_j). \quad (10)$$

方程(10)右边的第二项表示的是节点 i 受到的来自于同一集团内部其他节点的耦合信号, 第三项表示的是节点 i 受到的来自于其他集团节点的耦合信号. 根据对称集团分布可以构造集团(部分)同步态, 使得同一集团内的节点达到完全同步, 并记 $\mathcal{X}_m$ 为集团 m 的同步流形, 则方程(10)改写为

$$\dot{\mathcal{X}}_m = F(\mathcal{X}_m) + \varepsilon \sum_{m'=1}^M c'_{mm'} [H(\mathcal{X}_{m'}) - H(\mathcal{X}_m)], \quad (11)$$

其中 $c'_{mm'} = \sum_{i \in V_m} c_{im'}$ 为集团 m 内的任意一个节点受到来自于集团 m' 中所有节点的总的耦合强度. 如果将每个对称集团看作一个超级节点, 以 $\mathcal{C}' = \{c'_{mm'}\}$ 为连接这些超级节点的耦合矩阵, 则可构成一个包含 M 个节点的小尺寸网络, 其节点动力学由方程(11)描述. 我们称这个小尺寸网络为原来 N 个

节点的大尺寸网络所对应的商网络(Quotient Network)^[87], 其定义了同步流形所满足的运动方程, 描述的是原高维系统的一个低维子流形. 引入随机微扰 $\delta \mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i - \mathcal{X}_m$, 使得系统偏离此部分同步态, 则在部分同步态附近线性化近似后可得到微扰随时间演化的变分方程

$$\begin{aligned} \delta \dot{\mathbf{x}}_i = & \mathbf{D}\mathbf{F}(\mathcal{X}_m)\delta \mathbf{x}_i + \varepsilon \sum_{j \in V_m} c_{ij} \mathbf{D}\mathbf{H}(\mathcal{X}_m)\delta \mathbf{x}_j \\ & + \varepsilon \sum_{m' \neq m} \sum_{l \in V_{m'}} c_{il} [\mathbf{D}\mathbf{H}(\mathcal{X}_{m'})\delta \mathbf{x}_l - \mathbf{D}\mathbf{H}(\mathcal{X}_m)\delta \mathbf{x}_i], \end{aligned} \quad (12)$$

其中 $\mathbf{D}\mathbf{F}$ 和 $\mathbf{D}\mathbf{H}$ 为定义在集团同步流形 $\mathcal{X}_m$ 上的雅可比矩阵. 要使上述部分同步态稳定, 则必要条件为所有同步集团的切向(垂直于同步流形方向)微扰 $\delta \mathbf{x}_i$ 随时间演化都趋向于0.

根据网络结构对称性 $\mathbf{S}$ 可构造置换矩阵 $\mathbf{R}_S$, 我们接下来将方程(12)变换到 $\mathbf{R}_S$ 所对应的本征空间, 重新讨论部分同步态的稳定性. 矩阵 $\mathbf{R}_S$ 的维数为 $N \times N$, 其具体构造如下: 如果网络中节点 i 和 j 满足置换对称, 则设 $r_{ij} = r_{ji} = 1$, 否则设 $r_{ij} = r_{ji} = 0$; 如果 i 为孤立节点(即无相应的对称节点), 则设 $r_{ii} = 1$, $r_{ij} = 0$. 标记 $\mathbf{T}_s$ 为 $\mathbf{R}_S$ 的本征矩阵(由矩阵 $\mathbf{R}_S$ 的本征矢量构成), 则将 $\mathbf{T}_s$ 作用于耦合矩阵 $\mathbf{C}$ 后可得到块状矩阵

$$\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{T}_s^{-1} \mathbf{C} \mathbf{T}_s = \begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{pmatrix}, \quad (13)$$

其中子矩阵 $\mathbf{D}$ 的维数为 $M \times M$, 其表征的是同步流形所在的子空间(即方程(11)所在空间). 子矩阵 $\mathbf{B}$ 具有维数 $(N-M) \times (N-M)$, 其表征的是与同步流形所在的空间相切的子空间. 数值上, 可以通过观察矩阵 $\mathbf{D}$ 和 $\mathbf{B}$ 的本征值来区分同步子空间和切向子空间: 矩阵 $\mathbf{D}$ 包含本征值0而矩阵 $\mathbf{B}$ 不包含. 需要说明的是, 矩阵 $\mathbf{C}$ 和 $\hat{\mathbf{C}}$ 为相似矩阵, 其本征值谱相同, 只是 $\hat{\mathbf{C}}$ 中将所有的本征值有针对性的分为两部分, 分别对应于子矩阵 $\mathbf{D}$ (同步空间)和 $\mathbf{B}$ (切向空间).

在将方程(12)变换到 $\mathbf{R}_S$ 的本征空间后, 部分同步态的稳定条件变为切空间所有模式随时间演化趋向于0. 由于存在 M 个同步集团, 所以切空间进一

步可以分为 M 个相互独立的切向子空间, 使得每一个切向子空间对应于一个集团的同步流形. 对于集团 m , 其切向子空间维数(切向模式个数)为 $n_m - 1$, 其中模式 l 所满足的变分方程为

$$\delta \dot{\mathbf{y}}_l^m = \mathbf{D}\mathbf{F}(\mathcal{X}_m)\delta \mathbf{y}_l^m + \varepsilon \sum_{j=1}^{n_m-1} b_{lj}^m \mathbf{D}\mathbf{H}(\mathcal{X}_m)\delta \mathbf{y}_j^m. \quad (14)$$

这里 $\mathbf{B}^m = \{b_{ij}^m\}$ 为集团 m 所对应的切向子空间耦合矩阵, 满足关系式 $\mathbf{B} = \sum_m \oplus \mathbf{B}^m$. 模空间微扰矢量 $\Delta \mathbf{Y} = (\delta \mathbf{y}_1, \dots, \delta \mathbf{y}_M, \delta \mathbf{y}_{M+1}, \dots, \delta \mathbf{y}_N)^T$ 和原空间微扰矢量 $\Delta \mathbf{X} = (\delta \mathbf{x}_1, \dots, \delta \mathbf{x}_N)^T$ 通过关系式 $\Delta \mathbf{Y} = \mathbf{T}_s^{-1} \Delta \mathbf{X}$ 建立联系. 现在部分同步态的稳定条件变为所有集团中的切向扰动稳定, 即 $\delta \mathbf{y}_l^m \rightarrow 0$. 观察方程(14)可以发现, 第 m 个切向子空间的稳定性只与该集团的同步流形 $\mathcal{X}_m$ 和子矩阵 $\mathbf{B}^m$ 相关, 故空间变换的实际意义是将各个同步集团的切向空间进行解耦, 从而使得每个切向子空间的稳定性可以独立分析. 这样, 我们就可以将一个 N 维空间的稳定性分析问题分为 M 个独立的子空间的稳定性问题进行分析, 从而实现空间维数的降低.

由于集团内部节点之间达到完全同步, 故其所对应的切向模式的稳定性可以通过传统的MSF方法进行分析. 将方程(14)进一步变换到矩阵 $\mathbf{B}^m$ 的本征空间, 可以得到如下变分方程:

$$\delta \dot{\mathbf{z}}_l^m = [\mathbf{D}\mathbf{F}(\mathcal{X}_m) + \varepsilon \lambda_l^m \mathbf{D}\mathbf{H}(\mathcal{X}_m)]\delta \mathbf{z}_l^m, \quad (15)$$

其中 $\delta \mathbf{z}_l^m$ 为 $\mathbf{B}^m$ 本征空间的第 l 个模式, $0 > \lambda_1^m \geq \lambda_2^m \geq \dots \geq \lambda_{n_m-1}^m$ 为矩阵 $\mathbf{B}^m$ 的本征值. 定义广义耦合强度 $\sigma \equiv -\varepsilon \lambda$, 我们就可以根据MSF方法具体的讨论每个集团的稳定条件. 如果MSF函数的稳定区间是封闭的(图1), 每个集团将在耦合参数空间存在一个稳定区域 $\varepsilon \in (\varepsilon_1^m, \varepsilon_2^m)$, 使得在该区间内集团 m 达到同步(这里 $\varepsilon_1^m = -\sigma_1/\lambda_2^m$ 和 $\varepsilon_2^m = -\sigma_2/\lambda_{n_m-1}^m$ 与MSF方法中的定义一致). 要使网络中的所有集团同时达到同步, 即产生稳定的同步斑图, 其条件自然为所有集团稳定区域的交集 $\varepsilon \in (\hat{\varepsilon}_1, \hat{\varepsilon}_2)$, 其中 $\hat{\varepsilon}_1 = \max\{\varepsilon_1^m\}$, $\hat{\varepsilon}_2 = \min\{\varepsilon_2^m\}$, 而 m 则表示遍历所有集团.

由此可见, 同步斑图的稳定性分析可以分为两部分. 首先是确定系统同步流形所满足的运动方程, 即方程(11); 然后是分析该同步流形所对应的切

空间的各个模式的稳定性, 即方程(15). 与此相对应, 分析中需要做两次空间变换: (1) 首先变换到网络对称矩阵所对应的模空间, 从而实现集团之间的解耦; (2) 其次是变换到每个集团所对应的本征空间, 从而分析每个集团的切向稳定性. 需要说明的是, 虽然集团之间没有达到同步, 但是当节点动力学对耦合强度不敏感的时候, 可以近似认为各集团的同步流形与单个孤立混沌振子有着相同的吸引子, 即 $\mathcal{X}_m$ 和 $\mathcal{X}(\mathbf{x})$ 具有相同的统计特征. 这时在判断同步斑图的稳定性时就可以略去方程(11), 而直接通过方程(15)统一分析各个集团的稳定区域, 从而使理论分析变得更加简便. 接下来我们通过一个具体的例子来说明如何应用该套理论分析方法, 并通过数值模拟来验证该方法的有效性.

4.3 数值结果

仍然采取图4(b)中的网络结构, 但采用混沌洛伦兹振子描述节点的动力学. 我们首先通过数值方法研究系统在同步过渡过程中可能出现的各种部分同步态. 单个洛伦兹振子的动力学方程为 $(dx/dt, dy/dt, dz/dt)^T = [\alpha(y-x), rx-y-xz, xy-bz]^T$. 参数取为 $(\alpha, r, b) = (10, 35, 8/3)$, 此时单个振子呈现混沌运动. 耦合函数的形式为 $\mathbf{H}([x, y, z]^T) = [0, x, 0]^T$, 即变量 x 耦合到变量 y . 图5(a) 中画出的是系统全局同步误差 δ 随耦合强度 ε 的变化关系. 此处全局同步误差定义为 $\delta = \langle \sum_i |x_i - \bar{x}| \rangle$, 其中 $\bar{x}$ 为系统平均状态, $\langle \cdots \rangle$ 表示时间平均. 可以看到随着 ε 的增加 δ 逐渐变小, 并在 $\varepsilon_c \approx 13.1$ 处达到 0, 即当 $\varepsilon > \varepsilon_c$ 时系统处于全局同步. 对于耦合函数 $\mathbf{H}([x, y, z]^T) = [0, x, 0]^T$, MSF 曲线存在半开放的稳定区域, 即当 σ 大于某一临界值 σ_c 后 $\Lambda < 0$. 对图4(b)中所示网结构, 其耦合矩阵的最大非 0 本征值为 $\lambda_2 = -0.63$. 同时, 根据方程(6)可得 MSF 的稳定区域为 $\sigma > \sigma_c \approx 8.3$. 故理论预测的全局同步临界耦合强度为 $\varepsilon_c = -\sigma_c/\lambda_2 \approx 13.2$. 此理论预测与数值结果能够很好地吻合.

图5(a)中观测到的另外一个现象是在同步过渡区域 δ 出现两次突然降低. 一次发生在 $\varepsilon \approx 6.5$ 附近, 另一次发生在 $\varepsilon \approx 10$ 附近. 为了进一步研究系统在同步过渡区域的行为, 我们以节点2的状态为参考,

在图5(b)中画出了相对同步误差 $\delta x_i = \langle x_i - x_2 \rangle$ 随着耦合强度的变化关系. 可以看到在 $\varepsilon_1 \approx 8.1$ 附近 $\delta x_1 = 0$, 即节点1和2达到完全同步. 与此同时, $\delta x_3 = \delta x_4$, 即节点3和4也达到完全同步, 但不与节点1或2同步; 而节点5和6不与其他任何节点同步. 根据前述定义, 此时网络处于部分同步态 $\mathcal{P}_{S_1} = (a, a, b, b, c, d)$, 此处下标表示此部分同步态满足镜面对称 S_1 . 然后在 $\varepsilon_c \approx 13.1$ 处, 所有相对同步误差均为 0, 因而系统达到完全同步. 结合图5(b)中的结果, 我们可以看到图5(a)中 δ 突然降低的地方分别对应于系统从非同步到部分同步态的转变 (ε_1 附近) 以及系统从部分同步态到完全同步的转变 (ε_c 附近). 取 $\varepsilon = 8.4$ 和随机

图 5 (网络版彩图)网络结构同图4(b), 节点为混沌洛伦兹振子. (a) 系统全局同步误差 δ 随耦合强度 ε 的变化关系. 网络在 $\varepsilon_c \approx 13.1$ 处达到全局同步. (b) 相对同步误差 $\delta x_i = \langle x_i - x_2 \rangle$ 随着耦合强度的变化关系. 在区间 $\varepsilon \in (\varepsilon_1, \varepsilon_c)$ 内网络处于部分同步态 $\mathcal{P}_{S_1} = (a, a, b, b, c, d)$, 其中 $\varepsilon_1 \approx 8.1$. (c) 取 $\varepsilon = 8.4$ 时, 归一化后的节点相对同步误差 $\Delta x_i = (x_i - \bar{x})/\Delta x_{ave}$ ($\Delta x_{ave} = \sum_i |x_i - \bar{x}|/N$) 随时间的变化关系. 系统在时刻 $t \approx 29$ 附近达到部分同步态 $\mathcal{P}_{S_1}$. 本图摘自文献[63]

Figure 5 (Color online) For the same network structure shown in Figure 4(b) and employing chaotic Lorenz oscillator as the local dynamics, the transition of network synchronization with respect to coupling strength. (a) The variation of global-synchronization-error, δ , with respect to coupling strength, ε . Global synchronization is achieved at $\varepsilon_c \approx 13.1$. (b) The variations of the relative synchronization error, $\delta x_i = \langle x_i - x_2 \rangle$, with respect to ε . The network reaches the cluster synchronization state $\mathcal{P}_{S_1} = (a, a, b, b, c, d)$ when $\varepsilon \in (\varepsilon_1, \varepsilon_c)$, with $\varepsilon_1 \approx 8.1$. (c) For $\varepsilon = 8.4$, the time evolution of the normalized synchronization error, Δx_i , with respect to ε . Cluster synchronization state $\mathcal{P}_{S_1}$ is emerged at $t \approx 29$. This figure is modified, with permission, from ref. [63].

初值, 图5(c)中画出了归一化后的节点相对同步误差 $\Delta x_i = (x_i - \bar{x}) / \Delta x_{\text{ave}}$ ($\Delta x_{\text{ave}} = \sum_i |x_i - \bar{x}| / N$) 随时间的变化关系. 图中可见在 $t \approx 29$ 附近, 系统从非同步状态进入 $\mathcal{P}_{S_1}$ 对应的部分同步态.

我们接下来用上节提出的理论方法来分析产生部分同步态 $\mathcal{P}_{S_1}$ 所需的临界耦合强度 ε_1 , 以及为什么同步过渡区域没有观测到 S_2 和 S_3 所对应的部分同步态. S_1 所对应的对称矩阵的具体形式为

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (16)$$

其所对应的变换矩阵为

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

将 $\mathbf{T}$ 作用于耦合矩阵 $\mathbf{C}$, 可将 $\mathbf{C}$ 变为方程(13)所表述的块状矩阵 $\hat{\mathbf{C}}$, 其中的两个子矩阵分别为

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -4/3 & -1/3 \\ -1/3 & -4/3 \end{pmatrix}, \quad (18)$$

和

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} -1 & 2/7 & 5/7\sqrt{2} & 0 \\ 2/7 & -1 & 0 & 5/7\sqrt{2} \\ \sqrt{2}/3 & 0 & -2/3 & 1/3 \\ 0 & \sqrt{2}/3 & 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}. \quad (19)$$

对于子矩阵 $\mathbf{B}$, 其本征值为 $(\lambda_1^{\text{tr}}, \lambda_2^{\text{tr}}) = (-1, -1.67)$; 对于子矩阵 $\mathbf{D}$, 其本征值为 $(\lambda_1^{\text{sy}}, \lambda_2^{\text{sy}}, \lambda_3^{\text{sy}}, \lambda_4^{\text{sy}}) = (0, -0.63, -1.05, -1.65)$. 因为本征值 $\lambda = 0$ 由子矩阵 $\mathbf{D}$ 产生, 故 $\mathbf{D}$ 所对应的空间为同步流形所在的相空间, 而 $\mathbf{B}$ 所对应的则为切向空间(这里用上

标 $\mathbf{sy}$ 和 $\mathbf{tr}$ 分别来表示同步子空间和切向子空间的本征值).

因 MSF 曲线的稳定区域为 $\sigma > \sigma_c \approx 8.3$, 故要使切向模式稳定, 必要条件为 $\sigma = -\varepsilon \lambda_{1,2}^{\text{tr}} > \sigma_c$. 又因 $\lambda_1^{\text{tr}} > \lambda_2^{\text{tr}}$, 故可得产生部分同步态 $\mathcal{P}_{S_1} = (a, a, b, b, c, d)$ 所需的临界耦合强度为 $\varepsilon_1 = -\sigma_c / \lambda_1^{\text{tr}} \approx 8.3$. 这一理论预测值与数值模拟得到的结果 ($\varepsilon_1 \approx 8.1$) 能够很好地吻合. 这也验证了此前关于各集团同步流形具有相同的吸引子的假设, 从而使得在理论分析中各同步集团的稳定性可以统一通过方程(15)进行分析.

利用该理论方法, 我们也可以解释为什么 S_2 和 S_3 所对应的同步斑图没有在同步过渡区域出现. 对于 S_2 对称, 在将耦合矩阵变为块状矩阵后(方程(13)), 矩阵 $\mathbf{D}$ 的本征值为 $(\lambda_1^{\text{sy}}, \lambda_2^{\text{sy}}, \lambda_3^{\text{sy}}) = (0, -1, -1.05)$, 矩阵 $\mathbf{B}$ 的本征值为 $(\lambda_1^{\text{tr}}, \lambda_2^{\text{tr}}, \lambda_3^{\text{tr}}) = (-0.63, -1.65, -1.67)$. 因此同步斑图 $\mathcal{P}_{S_2} = (a, b, a, b, c, c)$ 稳定的条件为 $\varepsilon > -\sigma_c / \lambda_1^{\text{tr}} \approx 13.2 = \varepsilon_c$, 而此时系统已经达到全局同步. 这就解释了为什么图5(b)中在同步过渡区域观测不到斑图 $\mathcal{P}_{S_2}$. 同样的情况也发生在 S_3 对称所对应的同步斑图上, 即斑图 $\mathcal{P}_{S_3} = (a, b, b, a, c, c)$ 稳定的同时系统也已经达到全局同步.

利用对称性方法分析网络中的同步斑图, 核心在于将集团的切向子空间进行解耦. 而要实现这一步, 就需要将耦合矩阵 $\mathbf{C}$ 变换到对称矩阵 $\mathbf{R}$ 的本征空间. 由于 $\mathbf{R}$ 矩阵依赖于网络结构中的具体对称性, 故解耦操作要针对具体的同步斑图进行分析. 这一点与其他本征值分析方法有明显区别, 如 MSF 方法^[76-78]. 其次, 因在理论推导过程中并未对网络结构、耦合策略、节点动力学形式以及耦合函数作出限制, 故该套理论方法可用于分析一般耦合网络中的同步斑图行为. 最后, 由于大尺寸复杂网络中的置换对称性可以通过计算群论方法找到, 故该套方法原则上也可以用于分析大尺寸复杂网络中的同步斑图.

5 复杂网络中同步斑图的控制

对于大尺寸复杂网络, 数值结果显示其对称性

的数目随网络尺寸成指数增长(例如, 一个11节点的复杂网络, 其置换对称性数目就多达6000个^[64]). 由于网络对称性与同步斑图之间存在一一对应关系, 因此大尺寸复杂网络中存在着数目庞大的同步斑图解. 然而, 数值结果却显示绝大多数的同步斑图态是不稳定的(如11节点的复杂网络的6000多个置换对称中仅有一个能够产生稳定的同步斑图^[64]). 考虑到同步斑图在实际复杂系统中的普遍存在及其对于系统功能的重要意义, 人们自然希望能够通过控制的方法将网络中不稳定的同步斑图变得稳定. 接下来我们介绍近年来在复杂网络同步斑图研究中所提出的两种不同的控制同步斑图的方法: 钉扎(Pinning)控制方法和拓扑控制方法^[58,65,66].

5.1 同步斑图的钉扎控制

5.1.1 方法及理论

钉扎控制是控制时空系统动力学行为的一种有效手段^[88-91]. 该方法的特点有二. 一是能够通过控制少量的变量影响整个系统的行为, 譬如通过控制一个变量就可以实现时空混沌的控制^[90]. 二是在控制目标态的选择上有很大的灵活性. 目标态不仅可以是空间均匀态, 也可以是具有复杂空间结构的动力学斑图^[91]. 近年来, 该方法被用于控制复杂网络上的动力学行为, 如通过钉扎实现网络的全局同步(也称牵引同步)^[92,93]. 在复杂网络的钉扎同步研究中, 由于控制子具有和网络节点相同的动力学且目标态为全局同步, 故其本质上可以归类为网络同步问题(将控制子看作网络中的一个独特节点, 其单向耦合到网络中的部分节点), 因而可以通过MSF方法分析其控制条件. 然而, 如果目标态为具有空间结构的动力学斑图, 现有的网络钉扎方法不再适用.

借鉴时空混沌控制中的钉扎策略, 文献^[65]中提出了一种针对复杂网络同步斑图的钉扎方法. 如图6所示, 该方法中控制系统不再是一个单独的节点, 而是对应于网络中具体某一同步斑图态的商网络(图中上层网络). 施加控制时, 商网络中的每一个节点负责钉扎网络中的一个对称集团中的所有节点(图中下层网络). 研究显示, 通过这种商网络的钉扎控制方法, 可以成功地使任何一个网络对称性所

图 6 (网络版彩图)钉扎控制复杂网络同步斑图示意图. 图中下层为被控制网络, 其节点依据对称性划分为3个对称集团. 图中上层为对应于网络对称性的商网络, 其动力学满足方程(11). 商网络中的每个节点单向耦合到其所对应对称集团的全部节点. 当控制强度 η 大于临界值 η'_c 时, 原不稳定同步斑图将变得稳定; 当控制强度 η 大于临界值 η_c 时, 同步斑图被控制到商网络多对应的同步态. η_c 和 η'_c 的值分别由方程26和28解析给出. 本图摘自文献^[65]

Figure 6 (Color online) A schematic plot of the pinning scheme. The lower layer is the original network, which consists of 3 symmetric clusters and supports potentially a 3-cluster synchronous pattern. The pattern, however, is unstable. The upper layer is the control network, which is quotient network associated to the synchronous pattern and its dynamics follows eq. (11). All nodes inside the same cluster are pinned by the same node in the quotient network by the pinning strength η . The unstable pattern is stabilized when $\eta > \eta'_c$, and is controlled to the dynamics of the quotient network when $\eta > \eta_c$. Both the values of η_c and η'_c can be analyzed. This figure is adopted, with permission, from ref. ^[65].

对应的同步斑图变得稳定. 接下来我们对该控制方法的进行简单介绍.

首先对控制条件下的同步斑图的稳定性进行理论分析. 控制网络(上层网络)的动力学仍然由方程(11)决定, 但钉扎作用下网络中的节点动力学变为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_i = & \mathbf{F}(\mathbf{x}_i) + \varepsilon \sum_{j=1}^N c_{ij} \mathbf{H}(\mathbf{x}_j) \\ & + \eta \varepsilon \sum_{m=1}^M \delta_{im} [\mathbf{H}(\mathbf{x}_m) - \mathbf{H}(\mathbf{x}_i)], \end{aligned} \quad (20)$$

其中 η 表示控制强度, $m = 1, \dots, M$ 表示控制网络中的节点, 同时也表示受控网络中的对称集团. δ_{im} 为克罗内克函数: 如果节点 i 位于集团 m 中(即 $i \in V_m$), 则 $\delta_{im} = 1$, 否则 $\delta_{im} = 0$. 联合方程(11)和方程(20)则

构成一个包含 $N + M$ 个节点的双层网络, 而控制的目的是通过钉扎将受控网络(图6中下层网络)中的不稳定同步斑图变得稳定. 将控制网络(图6中上层网络)作为整个网络的同步流形, 则同步斑图的可控条件可由整个双层网络的同步稳定性来判断. 此时, 受控网络的动力学全部位于同步流形的切空间, 网络可控的前提条件是所有切空间的微扰矢量随时间演化趋向于0. 以控制网络为同步参考态(即定义 $\mathbf{x}_m \equiv \mathcal{X}_m$), 则受控网络中位于第 m 个集团中的节点 i 的同步微扰矢量的演化遵循变分方程

$$\delta \dot{\mathbf{x}}_i^m = [\mathbf{D}\mathbf{F}(\mathbf{x}_m) - \eta \varepsilon \mathbf{D}\mathbf{H}(\mathbf{x}_m)] \delta \mathbf{x}_i^m + \varepsilon \sum_{j=1}^N c_{ij} \mathbf{D}\mathbf{H}(\mathbf{x}_{m'}) \delta \mathbf{x}_j^{m'}, \quad (21)$$

其中 $j \in V_{m'}$, $\mathbf{x}_{m'}$ 为节点 j 所对应的控制网络中的第 m' 个节点. 将上述 N 个变分方程通过方程(13)变换到受控网络的对称矩阵所对应的模空间, 则方程(21)变为

$$\delta \dot{\mathbf{y}}_i^m = [\mathbf{D}\mathbf{F}(\mathbf{x}_m) - \eta \varepsilon \mathbf{D}\mathbf{H}(\mathbf{x}_m)] \delta \mathbf{y}_i^m + \varepsilon \sum_{j=1}^{n_m} b_{ij}^m \mathbf{D}\mathbf{H}(\mathbf{x}_{m'}) \delta \mathbf{y}_j^{m'}. \quad (22)$$

此处 $\mathbf{B}^m = \{b_{ij}^m\}$ 为集团 m 的切空间矩阵, 其维数为 $n_m \times n_m$ (n_m 为受控网络第 m 个集团的节点数). 这样就将集团 m 从网络中解耦出来, 可以单独讨论其可控性. 进一步将方程(22)变换到矩阵 $\mathbf{B}^m$ 的模空间, 得到

$$\delta \dot{\mathbf{z}}_l^m = [\mathbf{D}\mathbf{F}(\mathbf{x}_m) + \varepsilon(\lambda_l^m - \eta) \mathbf{D}\mathbf{H}(\mathbf{x}_m)] \delta \mathbf{z}_l^m, \quad (23)$$

其中 $\delta \mathbf{z}_l^m$ 为 $\mathbf{B}^m$ 本征空间的第 l 个模式, $0 > \lambda_1^m \geq \lambda_2^m \geq \dots \geq \lambda_{n_m}^m$ 为矩阵 $\mathbf{B}^m$ 的本征值. 如此, 我们就可以根据MSF方法具体的讨论每个集团的稳定条件. 为了方便讨论, 我们这里仅考虑MSF函数的稳定区间为半开放的情况(即当 $\sigma > \sigma_c$ 时 $\Lambda < 0$). 此时集团 m 被成功控制到目标态 $\mathbf{x}_m$ 的条件为 $-\varepsilon(\lambda_1^m - \eta) > \sigma_c$, 即

$$\eta_m > \sigma_c / \varepsilon + \lambda_1^m. \quad (24)$$

如要同时将所有的集团控制到目标态(控制网络所定义的同步流形), 则所需最小控制强度为

$$\eta_c = \max\{\eta_m\} = \sigma_c / \varepsilon + \max\{\lambda_1^m, m = 1, \dots, M\}. \quad (25)$$

又因 $\max\{\lambda_1^m, m = 1, \dots, M\} = \lambda_1 = 0$ (耦合矩阵 $\mathbf{C}$ 的最大本征值), 所以将网络中所有集团同时控制到目标态的最终条件为

$$\eta > \eta_c = \sigma_c / \varepsilon. \quad (26)$$

在集团 m 被控制到流形 $\mathbf{x}_m$ 之前, 该集团有可能先达到同步. 这种情况下, 集团的同步流形 $\mathcal{X}_m$ 不同于控制流形 $\mathbf{x}_m$. 此时的临界控制强度由 $\mathbf{B}^m$ 本征空间中与 λ_2^m 所对应的模式决定 (λ_1^m 描述的是平行于同步流形 $\mathcal{X}_m$ 方向的运动). 该情况下的集团同步条件为 $-\varepsilon(\lambda_2^m - \eta) > \sigma_c$, 由此可以得到集团 m 的同步条件

$$\eta > \eta'_m = \sigma_c / \varepsilon + \lambda_2^m, \quad (27)$$

而让所有集团同时达到同步的条件为

$$\eta > \eta'_c = \sigma_c / \varepsilon + \max\{\lambda_2^m, m = 1, \dots, M\}. \quad (28)$$

此时虽然受控网络中产生了稳定的同步斑图, 但该斑图所对应的同步流形与控制网络所定义的同步流形尚未达到同步. 因此在区间 $\eta \in (\eta'_c, \eta_c)$ 内控制的效果实际上是将同步斑图从非同步状态中给诱导出来, 而非控制到控制网络所定义的目标态.

方程(26)–(28)是我们得到的关于钉扎作用下同步斑图稳定性的主要理论结果. 接下来我们通过具体的网络模型对该方法的使用进行介绍, 并通过数值模拟对该理论的有效性进行检验.

5.1.2 数值结果

图7(a)中显示的是尼泊尔电力网络^[64], 其中共有15个节点. 根据置换对称性, 15个节点共被分为5个置换对称集团: $V_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $V_2 = \{6, 7, 8\}$, $V_3 = \{9, 10, 11, 12, 13\}$, $V_4 = \{14\}$, $V_5 = \{15\}$, 其中集团14和15为孤立节点集团. 仍然采用图5中使用的混沌洛伦兹振子作为节点动力学, 并采用相同的耦合函数 ($\mathbf{H}([\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}]^T) = [0, x, 0]^T$), 我们首先通过数值计算观察在没有施加控制的情况下网络的同步行为. 如图7(b)所示, 随着耦合强度的增加, 集团2, 3和1分别在临界耦合强度 $\varepsilon_1 \approx 0.4$, $\varepsilon_2 \approx 0.8$ 和 $\varepsilon_3 \approx 1.1$ 处达到集团同步, 而整个网络在临界耦合强度 $\varepsilon_4 \approx 8.9$ 处达到全局同步. 选取耦合

强度 $\varepsilon = 0.3 < \varepsilon_1$, 使得网络处于非同步状态, 我们接着通过施加控制重新观察网络的同步行为. 控制网络如图 7(c) 所示, 其中每个节点钉扎控制其所对应的图 7(a) 中集团的所有节点. 图 7(d) 中显示, 随着控制强度 η 的增加, 集团 2, 3 和 1 分别在临界控制强度 $\eta_1 \approx 13$, $\eta_2 \approx 15$ 和 $\eta_3 \approx 16$ 处达到集团同步(但未被控制到目标态), 而整个网络则在临界控制强度 $\eta_4 \approx 29$ 处被控制到目标网络所定义的同步

斑图态.

图 7(b) 中所观测到的集团同步临界耦合强度 $\varepsilon_{1,2,3}$ 可以根据网络对称性通过方程(11)和(15)求得, 其分析过程与图 5(b) 中分析过程一样, 这里略去不提, 而仅分析施加控制后网络的动力学分岔点 $\eta_{1,2,3,4}$. 将控制网络和受控网络看作一个包含 20 个节点的双层网络, 该网络的对称性与原网络一致, 只是新增了来自控制网络的 5 个孤立节点. 具体说来,

图 7 (网络版彩图)钉扎方法控制尼泊尔电力网络中的同步斑图. (a) 尼泊尔电力网络结构. 15 个节点根据对称性分为 5 个置换对称集团: $V_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $V_2 = \{6, 7, 8\}$, $V_3 = \{9, 10, 11, 12, 13\}$, $V_4 = \{14\}$, $V_5 = \{15\}$. (b) 无控制情况下, 网络同步行为随耦合强度的变化关系. 集团 2, 3 和 1 分别在临界耦合强度 $\varepsilon_1 \approx 0.4$, $\varepsilon_2 \approx 0.8$ 和 $\varepsilon_3 \approx 1.1$ 处达到集团同步. 整个网络在临界耦合强度 $\varepsilon_4 \approx 8.9$ 处达到全局同步. (c) 根据网络对称性构建的控制网络, 其定义了图(a)中网络所要达到的同步斑图满足的流形. (d) 取耦合强度 $\varepsilon = 0.3 < \varepsilon_1$ (即网络处于非同步状态), 施加控制后网络的同步行为. 集团 2, 3 和 1 分别在临界控制强度 $\eta_1 \approx 13$, $\eta_2 \approx 15$ 和 $\eta_3 \approx 16$ 处达到集团同步. 整个网络在临界控制强度 $\eta_4 \approx 29$ 处被控制到目标态. 本图摘自文献[65]

Figure 7 (Color online) Controlling synchronous pattern in the Nepal power-grid network. (a) The network structure. The nodes are partitioned into three nontrivial symmetric clusters ($V_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ (red), $V_2 = \{6, 7, 8\}$ (blue), and $V_3 = \{9, 10, 11, 12, 13\}$ (green)) and two trivial clusters ($V_4 = \{14\}$ (pink) and $V_5 = \{15\}$ (yellow)). (b) The variations of the cluster synchronization errors, $\delta \hat{x}_l$, with $l = 1, 2, 3$, and the network synchronization error, $\delta \hat{x}_{net}$, as a function of the coupling strength, ε . Clusters 2, 3, and 1 are synchronized at $\varepsilon_1 \approx 0.4$, $\varepsilon_2 \approx 0.8$, and $\varepsilon_3 \approx 1.1$, respectively. For $\varepsilon > \varepsilon_4 \approx 8.9$, the network is globally synchronized. (c) The control network. Controller l' is coupled unidirectionally to all oscillators in cluster m of the original network. (d) For $\varepsilon = 0.3$, the variations of the cluster synchronization errors, $\delta \hat{x}_l$, as a function of the controlling strength, η . Synchronization is induced in clusters 2, 3, and 1 at $\eta_1 \approx 13$, $\eta_2 \approx 15$, $\eta_3 \approx 16$, respectively. Dashed lines: the variation of the cluster-controller synchronization errors, $\delta \hat{x}_l$, with respect to η . For $\eta > \eta_4 \approx 29$, $\delta \hat{x}_l = 0$, indicating that the synchronous pattern is controlled to the desired synchronous pattern. This figure is adopted, with permission, from ref. [65].

双层网络的对称矩阵可写为如下形式:

$$\hat{\mathbf{R}} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_N & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_M \end{pmatrix}, \quad (29)$$

其中 $\mathbf{R}_N$ 为受控网络(图7(a))所对应的对称矩阵, $\mathbf{I}_M$ 为 $M \times M$ 维的单位矩阵. 将双层网络所对应的耦合矩阵变换到 $\hat{\mathbf{R}}$ 的本征空间后($\hat{\mathbf{C}} = T^{-1}\mathbf{C}T$), 得到的块状矩阵形式如下:

$$\hat{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} \mathbf{B} - \eta\mathbf{I}_N & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{D} - \eta\mathbf{I}_M & \eta\mathbf{I}_M \\ 0 & 0 & \mathbf{C}_M \end{pmatrix}, \quad (30)$$

其中 $\mathbf{I}_N$ 为 $N \times N$ 维的单位矩阵, 而子矩阵 $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{D}$ 分别为

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -14 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -14 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}, \quad (31)$$

和

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} -9 & 1 & 1.73 & 0 & 2.24 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1.73 & 0 & -11 & 3.87 & 3.87 \\ 0 & 0 & 3.87 & -3 & 0 \\ 2.24 & 0 & 3.87 & 0 & -4 \end{pmatrix}. \quad (32)$$

矩阵 $\hat{\mathbf{C}}$ 中的子矩阵 $\mathbf{C}_M$ 为图7(a)所示控制(商)网络所对应的耦合矩阵, 写为

$$\mathbf{C}_M = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -11 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & -9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (33)$$

根据受控网络中的集团分布, 子矩阵 $\mathbf{B}$ 可写成如下形式:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{B}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{B}_3 \end{pmatrix}, \quad (34)$$

其中 $\mathbf{B}_{1,2,3}$ 分别对应于受控网络中的第1, 2和3集团. 对于子矩阵 $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$ 和 $\mathbf{B}_3$, 其最大本征值分别为 $\lambda_2^1 = -8$, $\lambda_2^2 = -14$ 和 $\lambda_2^3 = -9$. 将其代入方程(27)并令 $\varepsilon = 0.3$ (图7(d)), 可得集团2, 3, 1的临界控制强度分别为 $\eta_1 = \sigma_c/\varepsilon + \lambda_2^2 \approx 14$, $\eta_2 \approx 19$ 和 $\eta_3 \approx 20$. 这些理论预测结果与图7(d)中的数值结果能够很好地符合. 特别是在集团的同步次序上, 能够很好地刻画各集团之间的差异. 此外, 根据方程(26)可知受控网络的控制条件为 $\eta_4 \approx 28$, 这一理论预测与图7(d)中的数值结果($\eta_4 \approx 29$)也能够很好的对应.

5.1.3 钉扎诱导孤立退同步态

根据方程(27), 各个对称集团的同步条件相互独立. 鉴于此, 我们可以仅控制一个集团中的节点, 通过选取适当的控制强度使得网络中仅出现一个同步集团, 而网络中的其他节点仍然处于非同步状态^[66]. 标记 $\lambda_2^{m'} = \min\{\lambda_2^m, m = 1, \dots, M\}$, 则随着控制强度的增加, 集团 m' 将首先达到同步. 文献[64, 66]中将这种同步集团和非同步节点共存的状态称为孤立退同步态(Isolated-desynchronization state). 从现象上来讲, 该态同近年来耦合复杂系统中观测到的奇米拉态(Chimera State)非常类似^[94, 95], 都是同步集团和非同步节点共存. 不同之处在于传统奇米拉态中的同步集团的产生机制为系统对称性的自发破缺, 而孤立退同步态的产生源自网络结构的内在对称性(此外, 奇米拉态研究中的节点动力学通常为全同相振子或极限环, 而非混沌系统. 近年来部分研究将奇米拉态推广到非全同系统和复杂网络, 但其产生机制已经与自发性对称破缺无关). 当然, 通过控制两个或多个集团, 我们也可以将网络控制到多同步集团和非同步节点共存的孤立退同步态^[66]. 下面我们以一个尺寸随机网络为例, 讨论如何将非同步复杂网络控制到孤立退同步态.

随机网络的产生方法如下. 首先构建一个尺寸为 $N = 100$ 的全连网络, 然后随机删除其中的 19 条边. 同样, 选取全同混沌洛伦兹振子来描述节点的动力学, 耦合函数为变量 x 耦合到变量 y . 为了保持系统动力学的稳定性, 这里采用归一化的耦合策略, 即 $c_{ij} = a_{ij}/k_i$, 其中 $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$ 为网络的紧邻矩阵, k_i 为节点 i 的度. 通过计算群论方法分析网络对称性, 发现网络中的节点共分为 4 个对称集团, 其中集团 1 包含 66 个节点 (节点 1 到 66), 集团 2 包含 22 个节点 (节点 78 到 100). 耦合强度设为 $\varepsilon = 4.4$, 使得无控制情况下网络处于非同步状态 (无任何同步集团出现). 首先我们对集团 1 施加控制. 由于此时的控制目标是只包含单个同步集团 (集团 1) 的孤立同步态, 因此控制子选为单个振子 (而非商网络), 且其动力学与网络中节点一致. 受控条件下集团 1 中的节点动力学方程为

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{F}(\mathbf{x}_i) + \varepsilon \sum_{j=1}^N c_{ij} \mathbf{H}(\mathbf{x}_j) + \eta \varepsilon [\mathbf{H}(\mathbf{x}_T) - \mathbf{H}(\mathbf{x}_i)], \quad (35)$$

其中 $\mathbf{x}_T$ 为控制子的状态, 满足与网络中的节点相同的动力学方程 $\dot{\mathbf{x}}_T = \mathbf{F}(\mathbf{x}_T)$. 而对于网络中的其他节点, 则没有方程右侧的最后一项. 当钉扎控制网络中的两个集团时, 另外一个受钉扎集团中的节点也满足方程 (35), 只是目标态由另外一个独立的控制子定义, 如 $\dot{\mathbf{x}}_{T'} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_{T'})$. 需要强调的是, 不同于同步斑图的钉扎控制, 这里两个控制子之间没有耦合. 正因如此, 控制的效果只能是在网络中诱导出集团同步, 但并不能将集团的同步流形控制到控制子所定义的流形上.

关于受控集团的同步稳定性分析, 其过程跟商网络控制下同步斑图的稳定性分析基本相同, 临界控制强度仍然由方程 (27) 给出. 这时方程 (27) 中的 λ_2^m 特指受控集团的第二个最大本征值. 如果同时控制两个或多个同步集团, 其他集团的临界控制强度可由同样方法确定. 对于上述包含 $N = 100$ 个节点的随机网络, 分析发现集团 1 的第二个最大本征值为 $\lambda_2^1 = -1.01$. 将其代入方程 (27) 得到诱导集团 1 同步所需的临界控制强度为 $\eta_{c1} = \sigma_c/\varepsilon + \lambda_2^1 \approx 0.88$. 对于第二个集团, 我们有 $\lambda_2^2 = -1$, 因此理论上得到的诱导集团 2 同步所需的临界控制强度为 $\eta_{c2} \approx 0.89$.

此理论结果同图 8 中的数值结果能够很好地符合 (数值结果为 $\eta_{c1} \approx 0.86$, $\eta_{c2} \approx 0.91$).

5.2 同步斑图的拓扑控制

有关复杂网络动力学的研究让人们认识到网络行为对网络结构的敏感依赖 [13, 14, 96]. 如果将网络结构视为复杂系统的一个可调参数, 并将复杂系统动力学同混沌动力学做类比, 一个自然的想法是通过网络结构的微调可能会实现网络动力学的显著变化, 正如同混沌系统中的 OGY 控制方法一样 [97]. 考虑到复杂网络中存在着丰富的对称性, 并且每个对称性原则上都对应着一个特定的同步斑图态, 那么是否可以通过网络结构的微调实现同步斑图的控制呢, 比如添加或删除网络中的一条边使得网络从一个同步斑图变到另外一个完全不同的同步斑图? 基于此想法, 文献 [58] 提出了复杂网络中同步斑图的拓扑控制方法, 并通过数值模拟对其可行性进行了验证. 接下来, 我们通过一个具体的例子对该控制方法进行简单介绍.

仍然以耦合全同洛伦兹振子为例, 但振子之间通过变量 x 耦合. 网络结构如图 9(a) 所示, 其通过随机删除 5 个节点全连网络的 2 条边产生, 且网络中的所有连边的权重统一设为 1. 该网络结构满足图中所示的镜面对称 S_0 . 因网络所对应的耦合矩阵的最大非零本征值为 $\lambda_2 = -1$, 故根据 MSF 方法可以判断网络达到全局同步所需的临界耦合强度为 $\varepsilon_c = -\sigma_c/\lambda_2 \approx 10$. 取 $\varepsilon = 10.8 > \varepsilon_c$, 该网络经过一段暂态后将会达到全局同步, 如图 9(d) 所示. 现在我们的任务是通过改变网络的一条边, 使得网络从全局同步态变为集团同步态. 作为尝试, 我们删除节点 1 和 3 之间的连边. 新的网络结构如图 9(b) 所示. 我们看到, 原有的 S_0 对称被破坏, 新的网络满足镜面对称 S_1 . S_1 对称所支持的部分同步态为 $\mathcal{P}_{S_1} = (a, b, c, b, a)$, 即节点 1 和 5 同步, 节点 2 和 4 同步. 根据前述提出的同步斑图稳定性分析方法, 我们可以得到斑图 $\mathcal{P}_{S_1}$ 的稳定区间为 $\varepsilon \in (10, 11.63)$. 因 $\varepsilon = 10.8$ 位于此区间内, 故部分同步态 $\mathcal{P}_{S_1}$ 能够产生, 如图 9(e) 所示. (在数值模拟中, 为避免计算精度造成的假同步现象, 我们对每个振子一直施加一个

图 8 (网络版彩图)利用钉扎方法从包含100个节点的非全局同步随机复杂网络中诱导包含两个同步集团的孤立退同步态. (a) 集团同步误差随控制强度变化关系. 集团1和2分别在 $\eta_{c1} \approx 0.86$ 和 $\eta_{c2} \approx 0.91$ 处达到同步. (b) $\eta = 0.8 < \eta_{c1}$ 时系统动力学时空演化图. 系统中无同步集团产生. (c) $\eta = 0.95$ 时系统动力学时空演化图. 系统中产生两个同步集团. (d) $\eta = 0.8$, $t = 20$ 时刻节点状态分布图. 图中无同步集团产生. (e) $\eta = 0.95$, $t = 20$ 时刻节点状态分布图. 图中集团1和集团2分别达到集团同步, 而其他节点则处于非同步状态. 本图摘自文献[66]

Figure 8 (Color online) Inducing the isolated-desynchronization states in random network of $N=100$ chaotic Lorenz oscillators. The coupling strength is fixed as $\varepsilon=4.4$, with which the network is asynchronous in the absence of control. (a) The variation of the time-averaged cluster-synchronization errors, $\langle \delta x_{1,2} \rangle$, as a function of the pinning strength η . $\langle \delta x_1 \rangle$ and $\langle \delta x_2 \rangle$ reach 0 at $\eta_{c1} \approx 0.86$ and $\eta_{c2} \approx 0.91$, respectively. The spatiotemporal evolution of the network under the pinning strengths (b) $\eta = 0.8$ and (c) $\eta = 0.95$. The snapshots of the network taken at $t = 20$ for (d) $\eta = 0.8$ and (e) $\eta = 0.95$. $\Delta x_i = x_i - \bar{x}$, with $\bar{x}$ the network-averaged state. This figure is adopted, with permission, from ref. [66].

小的噪声扰动). 接着, 我们将节点1和4之间的连边进行重连, 使得另一个末端从节点4移到节点3, 如图9(c)所示. 此时网络结构满足镜面对称 S_2 , 其支持的同步斑图变成 $\mathcal{P}_{S_2} = (a, a, b, c, b)$. 由于图9(b)跟图9(c)结构相同(二者可以通过旋转操作相互变换), 故新的同步斑图 $\mathcal{P}_{S_2}$ 也是稳定的, 如图9(f)所示. 这样, 我们就实现了通过删除一条边将网络从全局同步变到同步斑图 $\mathcal{P}_{S_1}$, 然后又通过重连一条边使得网络从同步斑图 $\mathcal{P}_{S_1}$ 变为同步斑图 $\mathcal{P}_{S_2}$.

5.3 实验结果

考虑到同步斑图的对系统对称性的严格要求以及实际系统中节点参数误差和噪声的存在, 能否在实际复杂网络中观测到稳定的同步斑图仍然具有很大的不确定性. 为此, 文献[98]中通过神经元电路实验对上述拓扑控制方法的有效性做了检验. 实验中的节点采用的是混沌Hindmarsh-Rose神经元电路(电子元件参数误差约为5%左右), 节点之间通过变量 x 耦合(膜电位). 网络结构仍然如图9(a)所示. 同理论研究中采用的方法一致, 实验中首先通过调整耦合强度使得网络达到全局同步, 然后删除节点1和3之间的连边(新的网络结构如图10(a)所示). 图10(b)中画出的是删除一条边后对称节点1和5以及2和4之间的同步关系, 可以看到节点1和5达到完全同步, 节点2和4达到完全同步. 而图10(c)则显示节点1和2之间的未同步, 同时图10(d)也显示节点1和3之间也未达到同步. 故此得到结论, 在删除节点1和3之间的连边后, 图10(a)中网络达到同步斑图态 $\mathcal{P}_{S_2} = (a, b, c, b, a)$.

6 讨论和展望

相比于规则网络系统, 复杂网络中的斑图行为更加丰富. 其原因在于网络中斑图的产生不仅依赖于节点动力学的属性, 同时还受到网络结构的调制. 本文分别从两个角度, 即耦合矩阵本征矢量和网络对称性, 对网络结构和同步斑图之间的关系进行了探讨, 但也仅仅揭示了复杂网络中斑图行为的一个侧面, 而更加丰富的斑图行为有待进一步的研究. 由

图 9 (网络版彩图)同步斑图的拓扑控制. (a) 初始网络结构. (d) 网络从随机初值出发, 经过暂态过程后达到全局同步. (b) 删除节点1和3之间的连边后得到的网络结构, 其满足镜面对称 S_1 . (e) 网络受到扰动后从全局同步逐渐转变到部分同步态 $\mathcal{P}_{S_1} = (a, b, c, b, a)$. (c) 重连节点1和4之间的连边后得到的新的网络结构, 其满足镜面对称 S_2 . (f) 网络从部分同步态 $\mathcal{P}_{S_1}$ 转变到新的部分同步态 $\mathcal{P}_{S_2}$. 图(d,e,f)中 $\Delta x_i = x_i - \bar{x}$ 为节点同步误差, 其中 $\bar{x}$ 为系统平均状态. 本图摘自文献[58]

Figure 9 (Color online) Topological control of synchronization pattern by adjust a single link. (a) The structure of the original network, which reaches global synchronization from random initial conditions. (d) The time evolution of the node-synchronization errors, $\Delta x_i = x_i - \bar{x}$. (b) The new network structure when the link between nodes 1 and 3 is removed. (e) The network dynamics is switched from global synchronization to synchronization pattern, $\mathcal{P}_{S_1} = (a, b, c, b, a)$, associated with reflection symmetry S_1 . (c) The network structure obtained by rewiring the link between nodes 1 and 4, which satisfies the reflection symmetry S_2 . (f) The network is switched from pattern $\mathcal{P}_{S_1}$ to pattern $\mathcal{P}_{S_2} = (a, a, b, c, b)$ after a transient period. This figure is adopted, with permission, from ref. [58].

于网络结构和耦合矩阵存在一一对应关系, 故网络结构对斑图的影响直接体现在耦合矩阵的属性上, 包括矩阵的本征值谱和本征矢量集合. 在实际问题分析中, 如本文所涉及同步斑图分析, 往往只需提取耦合矩阵的一部分信息, 如最不稳定的模式所对应的本征值和本征矢量, 但具体选择哪部分信息则需要根据具体问题进行具体分析. 当然, 随着所研究斑图的复杂性的增加, 所需要提取的耦合矩阵信息必然也会随之增多, 从而使得理论分析变得更加复杂. 值得一提的是, 虽然复杂网络中斑图种类很多, 但其动力学机制以及分析方法却有很多的相似之处. 在此意义上, 我们相信本文所提出的两种同步斑图分析方法对其他复杂网络斑图行为(如图灵斑图、病毒传播、网络博弈、震荡死亡等)的研究也会有所帮助.

本文讨论的对象仅限于耦合全同混沌系统, 且同步的定义为混沌振子的完全同步. 采用全同混沌

振子的优点是可以明确地定义同步集团, 从而可以精确地刻画同步过渡区域中的各个分岔点的位置. 由于采用了全同振子, 在给定节点动力学和耦合函数的条件下系统同步斑图的特征仅受到网络结构的影响. 这一特点与耦合相振子系统(如Kuramoto及其推广模型)中的部分同步现象有着明显的区别. 相振子复杂网络中的节点动力学通常存在参数上的差异(动力学异质性), 这使得同步集团的形成同时受到网络结构和节点参数的影响, 且同步集团很难精确定义(通常利用统计量建立振子之间的关联, 如平均频率). 研究方法上, 混沌振子部分同步的研究多基于本征模式的线性稳定性分析(如MSF方法), 而相振子系统多基于连续极限条件下的统计分布的演化方程(如Ott-Antonsen假设[99,100]). 虽然如此, 二者在动力学现象和研究方法上仍然可以相互借鉴. 比如耦合相振子网络中的爆炸同步现象, 其产生机制(一阶相变和磁滞现象)本质上依赖于同步暂态过

图 10 (网络版彩图)基于神经元电路实验的同步斑图拓扑控制. 原始网络结构如图9(a)所示, 节点为混沌Hindmarsh-Rose神经元电路. 原始网络处于全局同步状态. (a) 删除节点1和3之间的连边后得到的网络. (b) 节点1和5之间的状态关系. 子图中显示的是节点2和4之间的状态关系. 节点1和5达到同步; 节点2和4达到同步. (c) 节点1和2之间的状态关系. 二者未达到同步. (d) 节点1和3之间的状态关系. 二者未达到同步. 故此判断, 网络中出现的同步斑图为 $\mathcal{P}_{S_2} = (a, b, c, b, a)$. 本图摘自文献[58]

Figure 10 (Color online) Experimental results on topological control of synchronization pattern in networked neuronal circuits. The local dynamics is represented by chaotic Hindmarsh-Rose circuits, and the original network, with the structure the same as Figure 9(a), is globally synchronized. (a) The new network generated by removing the link between nodes 1 and 3 in the original network. (b) The synchronization relationship between nodes 1 and 5, and nodes 2 and 4. Nodes 1 and 5 are synchronized, and nodes 2 and 4 are synchronized. (c) Nodes 1 and 2 are not synchronized. (d) Nodes 1 and 3 are not synchronized. The network reaches the synchronization pattern $\mathcal{P}_{S_2} = (a, b, c, b, a)$. This figure is adopted from ref. [58].

程中的同步集团的形成[16, 101]. 从部分同步的角度研究混沌振子复杂网络中的爆炸同步将是一个非常有意义的问题.

总体上来讲, 当前关于复杂网络斑图行为的研究还处于起步阶段. 就本文所讨论的同步斑图而言, 以下几个问题值得作进一步研究.

6.1 大尺寸神经复杂网络的结构对称性的计算问题

从数学角度讲, 网络结构的任何一个对称性均意味着系统动力学维度之间的关联, 从而存在一个对应的同步斑图解. 因此, 要研究网络系统的同步斑图, 首要任务是找到网络所有结构对称性, 然

后才是对该同步态的稳定性展开分析. 对小尺寸复杂网络, 其对称性往往可以通过肉眼直接观察得到. 但对于类似于电力系统的大尺寸复杂网络, 其对称性只有通过数值方法得到. 关于网络对称性的数值计算, 目前普遍采用的是Pecora等人[64]根据计算群论理论发展的一套方法. 但该方法能够处理的网络尺寸非常有限($N \sim 1000$), 无法应用于大尺寸网络. 因此, 要研究大尺寸神经网络中的同步斑图, 当务之急是如何有效地分析网络的对称性.

本文中在研究同步临界点附近同步行为时所采用的本征矢量分析方法可能为大尺寸网络的对称性分析提供一个新的思路[40]. 由于网络中的对称节点具有相同的本征矢量分量, 理论上可以通过分析耦合矩阵的本征矢量找到网络的所有对称

性. 相比于计算群论方法, 该方法算法成熟(矩阵本征矢量计算), 计算量也会有显著降低(可以处理尺寸为 $N \sim 10000$ 的网络). 但该方法也有很多问题有待解决, 比如对于孪生集团(Twin-cluster)的处理^[63]. 孪生集团中的节点具有相同的本征矢量分量, 但集团之间并未达到同步. 另外一个问题是如何处理带有方向性连接的复杂网络. 本文所讨论的内容仅限于无方向网络连边, 而如何将该套方法推广到方向性网络还有待于进一步研究.

利用节点结构相似性来刻画大尺寸复杂网络中对称性提供了另外一个不同的思路. 同步斑图的产生机制在于同一集团内部的节点受到相同的来自于集团外的耦合信号, 即处于相同的环境之下. 基于这一特征, 我们可以尝试利用节点的结构相似性(Topology Similarity)来获取对称性信息^[61], 即如果两个节点在所有网络距离上的邻居集合均相同(相似), 则这两个节点在结构上具有(近似)对称性. 由于该方法基于节点的局域结构, 计算更为简便. 但也正因如此, 所找到的对称性只是局部的, 而非全局对称性. 其实, 利用节点的结构相似性分析网络行为已经在文献中有所提及, 譬如社团网络中的同步行为^[80]. 在社团网络中位于同一集团内部的节点相比于不同集团的节点在局域结构上更加相似, 而这种相似性会对集团同步产生显著影响^[40](如下面将要讨论的, 社团网络也可以看作粗粒化意义上的一种对称网络).

6.2 非严格对称复杂神经网络中的同步斑图

理论分析中我们采用的是全同振子模型, 并且网络结构要求具有严格的对称性, 而实际复杂网络中不存在全同振子和严格的结构对称. 下面以神经网络为例来具体表述实际网络中所面临的对称性问题^[45-47]. 首先, 从节点动力学角度来讲, 即使同一功能区块内部, 不同神经元之间也存在着明显的差别, 如兴奋性和抑制性神经元. 其次, 从网络连接角度来讲, 神经元或神经区块之间的连接不仅有权重属性, 同时还有功能上的区别, 如化学突触和电突触. 最后, 由于神经网络存在空间距离的概念, 信号

在传播过程中会产生时延(Time-delay), 从而使得神经连接同时具有时延属性. 上述特征使得实际神经网络不存在理论上产生同步斑图所要求的严格对称性, 只可能存在近似的、非严格的对称性. 为此, 如何分析非严格对称网络中的同步斑图便成为当前研究所面临另一个挑战.

就节点动力学的差异性对同步斑图的影响而言, 现有研究表明, 当网络中节点的参数失配不是很严重时, 网络可近似看作由全同振子组成, 仍然可以产生较为稳定的同步斑图^[102, 103]. 此外, 当网络中的节点动力学存在很大差异时, 比如分属于不同类型的系统, 初步研究显示通过节点和振子之间的合理匹配, 仍然可以产生稳定的同步斑图¹⁾. 例如, 当网络中的节点分别属于多类不同的系统且同类系统的参数一致情况下, 如果将具有相同动力学的振子配置在同一对称集团内, 则仍然可以产生与对称集团分布相对应的稳定的同步斑图. 而多层网络正符合这一特点^[75]. 多层网络中, 处于同一层内的节点动力学相同, 而层之间节点动力学存在明显差别. 利用网络的对称性, 完全可以在多层复杂网络中产生稳定的同步斑图. 但是, 对于更一般的情况, 比如振子的动力学参数在一个大的范围内随机分布, 如何实现部分同步或孤立退同步态仍然是一个挑战.

6.3 同步斑图的演化

本文讨论的同步斑图具有固定的空间结构, 而脑电实验显示大脑在认知过程中神经系统会在不同的同步放电斑图之间进行动态演化^[45]. 进一步证据显示, 根据任务不同, 系统停留在各个斑图的时间长短不一, 其间通过非同步态(Scattering Phase)进行过渡^[51, 52, 69, 70, 73]. 这就要求我们在研究中不仅要关注稳定的同步斑图, 同时也要关注斑图的动力学演化. 这种演化可能是系统在外界刺激作用下作出的反应, 也可能是系统内源性的自主行为. 对于同步斑图的自主演化, 利用神经连接的可塑性(Plasticity)或许会有所帮助, 但具体的实现方式和动力学机制仍有待于进一步的研究. 此外, 如何通过外界刺激信号来诱导和控制复杂网络中的同步斑图演化也是非常

1) Wang Y F, Wang L, Fan H, et al. Cluster synchronization in networked nonidentical chaotic oscillators (preprint)

有意义的课题.

6.4 同步斑图实验研究及潜在应用

目前关于复杂网络同步斑图的实验研究很少. 文献[64]中利用全同光电子器件实现了小尺寸复杂网络上的部分同步, 但振子之间的耦合是通过计算机辅助来实现的. 文献[98]中采用耦合混沌Hindmarsh-Rose神经元电路也实现了小尺寸复杂网络上的部分同步, 但是否能够在在大尺寸复杂网络上产生稳定的同步斑图仍然未知. 此外, 由于电路系统的特殊性, 相关现象能否在其他复杂网络中观察到仍然有待验证, 比如物理系统和生物系统.

根据振子运动的关联程度不同, 同步可以有很多的形态, 如完全同步、相位同步、延时同步、广义同步等^[6]. 本文仅以完全同步为例讨论复杂网络中同步斑图, 但相关研究完全可以推广到其他同步形式所定义的斑图. 这种推广使得在非严格对称网络中也可能探测到稳定的同步斑图. 当网络结构不满足严格对称时, 同一集团内部的节点原则上不可能达到完全同步(至少对无方向复杂网络如此). 但如果弱化对同步的要求, 比如只考虑相位同步, 则仍然可能发现稳定的同步斑图. 一个特例是具有明显社团结构的网络, 虽然处在社团内部的节点并不满足严格的对称性, 但节点之间仍然存在非常强的关联, 从而网络整体上呈现出粗粒化意义上的同步斑图. 此外, 虽然同步斑图中的各个同步集团之间没有达到完全同步, 但由于集团之间存在很强的耦合, 其同步流形之间肯定存在某种关联. 如何刻画和调

控这种同步集团之间的关联对于同步斑图在实际复杂系统中的应用具有非常重要的意义, 如大脑认知过程中的特征绑定(Feature Binding)和记忆功能.

除了大脑神经网络以外, 同步斑图对于工程网络、生物网络以及社会网络的研究都有借鉴意义. 对于实际大尺寸复杂系统, 其功能的实现离不开个体之间的协作, 即广义上的同步行为. 与此同时, 要实现高级和复杂的功能, 则需要这种协作行为能够在空间和时间上呈现丰富的变化, 即时空斑图. 在此意义上, 复杂网络同步斑图的研究对于探索一般复杂系统的时空行为有一定的普遍意义. 此外, 随着网络科学的深入, 多层网络及其动力学行为也受到人们越来越多的关注, 对其同步斑图行为进行研究也非常有意义.

7 总结

同步问题由来已久, 且受到不同领域研究学者的长期关注. 特别是近年来受网络科学发展的影响, 人们对复杂网络的同步行为进行了大量的研究, 但多着眼于网络的全局同步而非同步斑图. 就实际复杂系统的功能而言, 同步斑图的研究可能比全局同步研究更有意义. 复杂网络为研究时空系统的斑图行为提供了一个全新的视角, 很多问题需要重新审视并值得深入思考. 本文尝试从集团同步角度对耦合混沌振子组成的复杂网络中的斑图行为进行介绍, 旨在抛砖引玉, 希望能够引起大家对该问题的关注并取得重要研究成果.

参考文献

- 1 Turing A M. The Chemical Basis of Morphogenesis. *Phil Trans R Soc Lond B*, 1952, 237: 37–72
- 2 Kuramoto Y. Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence. Berlin: Springer, 1984
- 3 Winfree A T. Timing of Biological Clocks. New York: W H Freeman & Co, 1987
- 4 Kaneko K. Theory and Application of Coupled Map lattice. Chichester: Wiley, 1993
- 5 Cross M C, Greenside H. Pattern Formation and Dynamics in Nonequilibrium Systems. Cambridge: Cambridge University Press, 2009
- 6 Pikovsky A S, Rosenblum M G, Kurths J. Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Science. Cambridge: Cambridge University Press, 2001
- 7 Strogatz S. Sync: The Emerging Science of Spontaneous Order. New York: Hyperion, 2003
- 8 Acebrón J A, Bonilla L L, Pérez Vicente C J, et al. The Kuramoto model: A simple paradigm for synchronization phenomena. *Rev Mod Phys*, 2005, 77: 137–185
- 9 Watts D J, Strogatz S H. Collective dynamics of “small-world” networks. *Nature*, 1998, 393: 440–442

- 10 Barabási A-L, Albert R. Emergence of scaling in random networks. *Science*, 1999, 286: 509–512
- 11 Albert R, Barabási A L. Statistical mechanics of complex networks. *Rev Mod Phys*, 2002, 74: 47–97
- 12 Newman M E J. The structure and function of complex networks. *SIAM Rev*, 2003, 45: 167–256
- 13 Boccaletti S, Latora V, Moreno Y, et al. Complex networks: Structure and dynamics. *Phys Rep*, 2006, 424: 175–308
- 14 Arenas A, Díaz-Guilera A, Kurths J, et al. Synchronization in complex networks. *Phys Rep*, 2008, 469: 93–153
- 15 Rodrigues F A, Peron T K D, Ji P, et al. The Kuramoto model in complex networks. *Phys Rep*, 2016, 610: 1–98
- 16 Boccaletti S, Almendral J A, Guan S, et al. Explosive transitions in complex networks' structure and dynamics: Percolation and synchronization. *Phys Rep*, 2016, 660: 1–94
- 17 Hansel D, Mato G, Meunier C. Clustering and slow switching in globally coupled phase oscillators. *Phys Rev E*, 1993, 48: 3470–3477
- 18 Hasler M, Maistrenko Y, Popovych O. Simple example of partial synchronization of chaotic systems. *Phys Rev E*, 1998, 58: 6843–6846
- 19 Hu G, Zhang Y, Cerdeira H A, et al. From low-dimensional synchronous chaos to high-dimensional desynchronous spatiotemporal chaos in coupled systems. *Phys Rev Lett*, 2000, 85: 3377–3380
- 20 Zhang Y, Hu G, Cerdeira H A, et al. Partial synchronization and spontaneous spatial ordering in coupled chaotic systems. *Phys Rev E*, 2001, 63: 026211
- 21 Pikovsky A, Popovych O, Maistrenko Y. Resolving clusters in chaotic ensembles of globally coupled identical oscillators. *Phys Rev Lett*, 2001, 87: 044102
- 22 Heisler I A, Braun T, Zhang Y, et al. Experimental investigation of partial synchronization in coupled chaotic oscillators. *Chaos*, 2003, 13: 185–194
- 23 Williams C R S, Murphy T E, Roy R, et al. Experimental observations of group synchrony in a system of chaotic optoelectronic oscillators. *Phys Rev Lett*, 2013, 110: 064104
- 24 Yang K, Wang X, Qu S X. Cyclic synchronous patterns in coupled discontinuous maps. *Phys Rev E*, 2015, 92: 022905
- 25 Zhang J, Yu Y Z, Wang X G. Synchronization of coupled metronomes on two layers. *Front Phys*, 2017, 12: 120508
- 26 Nicosia V, Valencia M, Chavez M, et al. Remote synchronization reveals network symmetries and functional modules. *Phys Rev Lett*, 2013, 110: 174102
- 27 Gambuzza L V, Cardillo A, Fiasconaro A, et al. Analysis of remote synchronization in complex networks. *Chaos*, 2013, 23: 043103
- 28 Gambuzza L V, Frasca M, Fortuna L, et al. Inhomogeneity induces relay synchronization in complex networks. *Phys Rev E*, 2016, 93: 042203
- 29 Zhang L, Motter A E, Nishikawa T. Incoherence-mediated remote synchronization. *Phys Rev Lett*, 2017, 118: 174102
- 30 Leyva I, Sendiña-Nadal I, Sevilla-Escoboza R, et al. Relay synchronization in multiplex networks. *Sci Rep*, 2018, 8: 8629
- 31 Abrams D M, Pecora L M, Motter A E. Introduction to focus issue: Patterns of network synchronization. *Chaos*, 2016, 26: 094601
- 32 Heagy J F, Pecora L M, Carroll T L. Short wavelength bifurcations and size instabilities in coupled oscillator systems. *Phys Rev Lett*, 1995, 74: 4185–4188
- 33 Pecora L M. Synchronization conditions and desynchronizing patterns in coupled limit-cycle and chaotic systems. *Phys Rev E*, 1998, 58: 347–360
- 34 Park K, Huang L, Lai Y C. Desynchronization waves in small-world networks. *Phys Rev E*, 2007, 75: 026211
- 35 Sinha S, Saramäki J, Kaski K. Emergence of self-sustained patterns in small-world excitable media. *Phys Rev E*, 2007, 76: 015101(R)
- 36 D. He, G. Hu, M. Zhan, W. Ren, and Z. Gao, Pattern formation of spiral waves in an inhomogeneous medium with small world connections. *Phys Rev E*, 2002, 65: 055204(R)
- 37 Wang Y, Song D, Gao X, et al. Effect of network structural perturbations on spiral wave patterns. *Nonlin Dyn*, 2018, 93: 1671–1680
- 38 Nakao H, Mikhailov A S. Turing patterns in network-organized activator-inhibitor systems. *Nat Phys*, 2010, 6: 544–550
- 39 Kouvaris N E, Hata S, Guiler A D. Pattern formation in multiplex networks. *Sci Rep*, 2015, 5: 10840
- 40 Fu C, Zhang H, Zhan M, et al. Synchronous patterns in complex systems. *Phys Rev E*, 2012, 85: 066208
- 41 Qian Y, Huang X, Hu G, et al. Structure and control of self-sustained target waves in excitable small-world networks. *Phys Rev E*, 2010, 81: 036101
- 42 Liao X, Xia Q, Qian Y, et al. Pattern formation in oscillatory complex networks consisting of excitable nodes. *Phys Rev E*, 2011, 83: 056204
- 43 Brockmann D, Helbing D. The hidden geometry of complex, network-driven contagion phenomena. *Science*, 2013, 342: 1337–1342
- 44 Crutchfield J P. Between order and chaos. *Nat Phys*, 2012, 8: 17–24
- 45 Basar E. Brain Function and Oscillation. New York: Springer, 1998
- 46 Sporns O. Networks of the Brain. Cambridge: MIT Press, 2010
- 47 Bassett D S, Sporns O. Network neuroscience. *Nat Neurosci*, 2017, 20: 353–364
- 48 Eguíluz V M, Chialvo D R, Cecchi G A, et al. Scale-free brain functional networks. *Phys Rev Lett*, 2005, 94: 018102

- 49 Sporns O, Zwi J D. The small world of the cerebral cortex. *NI*, 2004, 2: 145–162
- 50 Milo R. Network motifs: Simple building blocks of complex networks. *Science*, 2002, 298: 824–827
- 51 Singer W. Neuronal synchrony: A versatile code for the definition of relations? *Neuron*, 1999, 24: 49–65
- 52 Varela F, Lachaux J P, Rodriguez E, et al. The brainweb: Phase synchronization and large-scale integration. *Nat Rev Neurosci*, 2001, 2: 229–239
- 53 Zhou C, Kurths J. Hierarchical synchronization in complex networks with heterogeneous degrees. *Chaos*, 2006, 16: 015104
- 54 Wang X, Guan S, Lai Y C, et al. Desynchronization and on-off intermittency in complex networks. *Europhys Lett*, 2009, 88: 28001
- 55 Wang X. Pattern evolution in non-synchronizable scale-free networks. *Eur Phys J B*, 2010, 75: 285–297
- 56 Ao B, Zheng Z. Partial synchronization on complex networks. *Europhys Lett*, 2006, 74: 229–235
- 57 Russo G, Slotine J J E. Symmetries, stability, and control in nonlinear systems and networks. *Phys Rev E*, 2011, 84: 041929
- 58 Fu C, Deng Z, Huang L, et al. Topological control of synchronous patterns in systems of networked chaotic oscillators. *Phys Rev E*, 2013, 87: 032909
- 59 Golubitsky M, Stewart I. Recent advances in symmetric and network dynamics. *Chaos*, 2015, 25: 097612
- 60 Nishikawa T, Motter A E. Network-complement transitions, symmetries, and cluster synchronization. *Chaos*, 2016, 26: 094818
- 61 Schaub M T, O'Clery N, Billeh Y N, et al. Graph partitions and cluster synchronization in networks of oscillators. *Chaos*, 2016, 26: 094821
- 62 Siddique A B, Pecora L, Hart J D, et al. Symmetry- and input-cluster synchronization in networks. *Phys Rev E*, 2018, 97: 042217
- 63 Fu C, Lin W, Huang L, et al. Synchronization transition in networked chaotic oscillators: The viewpoint from partial synchronization. *Phys Rev E*, 2014, 89: 052908
- 64 Pecora L M, Sorrentino F, Hagerstrom A M, et al. Cluster synchronization and isolated desynchronization in complex networks with symmetries. *Nat Commun*, 2014, 5: 4079
- 65 Lin W, Fan H, Wang Y, et al. Controlling synchronous patterns in complex networks. *Phys Rev E*, 2016, 93: 042209
- 66 Lin W, Li H, Ying H, et al. Inducing isolated-desynchronization states in complex network of coupled chaotic oscillators. *Phys Rev E*, 2016, 94: 062303
- 67 Sorrentino F, Pecora L M, Hagerstrom A M, et al. Complete characterization of the stability of cluster synchronization in complex dynamical networks. *Sci Adv*, 2016, 2: e1501737
- 68 Hart J D, Zhang Y, Roy R, et al. Topological control of synchronization patterns: Trading symmetry for stability. *Phys Rev Lett*, 2019, 122: 058301
- 69 Hipp J F, Engel A K, Siegel M. Oscillatory synchronization in large-scale cortical networks predicts perception. *Neuron*, 2011, 69: 387–396
- 70 Rodriguez E, George N, Lachaux J P, et al. Perception's shadow: Long-distance synchronization of human brain activity. *Nature*, 1999, 397: 430–433
- 71 Roskies A L. The binding problem. *Neuron*, 1999, 24: 7–9
- 72 Poo M, Du J, Ip N Y, et al. China brain project: Basic neuroscience, brain diseases, and brain-inspired computing. *Neuron*, 2016, 92: 591–596
- 73 Fell J, Axmacher N. The role of phase synchronization in memory processes. *Nat Rev Neurosci*, 2011, 12: 105–118
- 74 Buldyrev S V, Parshani R, Paul G, et al. Catastrophic cascade of failures in interdependent networks. *Nature*, 2010, 464: 1025–1028
- 75 Boccaletti S, Bianconi G, Criado R, et al. The structure and dynamics of multilayer networks. *Phys Rep*, 2014, 544: 1–122
- 76 Pecora L M, Carroll T L. Master stability functions for synchronized coupled systems. *Phys Rev Lett*, 1998, 80: 2109–2112
- 77 Hu G, Yang J, Liu W. Instability and controllability of linearly coupled oscillators: Eigenvalue analysis. *Phys Rev E*, 1998, 58: 4440–4453
- 78 Huang L, Chen Q, Lai Y C, et al. Generic behavior of master-stability functions in coupled nonlinear dynamical systems. *Phys Rev E*, 2009, 80: 036204
- 79 Wang X, Lai Y C, Lai C H. Enhancing synchronization based on complex gradient networks. *Phys Rev E*, 2007, 75: 056205
- 80 Huang L, Lai Y C, Park K, et al. Synchronization in complex clustered networks. *Front Phys China*, 2007, 2: 446–459
- 81 Wang X, Huang L, Lai Y C, et al. Optimization of synchronization in gradient clustered networks. *Phys Rev E*, 2007, 76: 056113
- 82 He Z, Wang X, Zhang G Y, et al. Control for a synchronization-desynchronization switch. *Phys Rev E*, 2014, 90: 012909
- 83 Fan H, Wang Y, Yang K, et al. Enhancing network synchronizability by strengthening a single node. *Phys Rev E*, 2019, 99: 042305
- 84 Kandel E R, Schwartz J H, Jessell T M. Principle of Neural Science. Norwalk: Appleton and Lange, 1991
- 85 Schiff S J. Forecasting brain storms. *Nat Med*, 1998, 4: 1117–1118
- 86 SAGE: Software for Algebra and Geometry Experimentation. Version 8. Washington DC: William Stein, 2013
- 87 Aguiar M A D, Dias A P S, Golubitsky M, et al. Bifurcations from regular quotient networks: A first insight. *Phys D-Nonlin Phenomen*, 2009, 238: 137–155
- 88 Gang H, Qu Z L. Controlling spatiotemporal chaos in coupled map lattice systems. *Phys Rev Lett*, 1994, 72: 68–71

- 89 Grigoriev R O, Cross M C, Schuster H G. Pinning control of spatiotemporal chaos. *Phys Rev Lett*, 1997, 79: 2795–2798
- 90 Xiao J, Hu G, Yang J, et al. Controlling turbulence in the complex ginzburg-landau equation. *Phys Rev Lett*, 1998, 81: 5552–5555
- 91 Liu P, Yang L, Deng Z, et al. Regulating drift-wave plasma turbulence into spatiotemporal patterns by pinning coupling. *Phys Rev E*, 2011, 84: 016207
- 92 Wang X F, Chen G. Pinning control of scale-free dynamical networks. *Phys A-Statist Mech its Appl*, 2002, 310: 521–531
- 93 Yang L, Wang X, Li Y, et al. On the pinning strategy of complex networks. *Europhys Lett*, 2010, 92: 48002
- 94 Kuramoto Y, Battogtokh D. Coexistence of coherence and incoherence in nonlocally coupled phase oscillators. *Nonlin Phenom Complex Syst*, 2002, 5: 380. arXiv: [cond-mat/0210694](https://arxiv.org/abs/cond-mat/0210694)
- 95 Abrams D M, Strogatz S H. Chimera states for coupled oscillators. *Phys Rev Lett*, 2004, 93: 174102
- 96 Nishikawa T, Sun J, Motter A E. Sensitive dependence of optimal network dynamics on network structure. *Phys Rev X*, 2017, 7: 041044
- 97 Ott E, Grebogi C, Yorke J A. Controlling chaos. *Phys Rev Lett*, 1990, 64: 1196–1199
- 98 Cao B, Wang Y F, Wang L, et al. Cluster synchronization in complex network of coupled chaotic circuits: An experimental study. *Front Phys*, 2018, 13: 130505
- 99 Ott E, Antonsen T M. Low dimensional behavior of large systems of globally coupled oscillators. *Chaos*, 2008, 18: 037113
- 100 Ott E, Antonsen T M. Long time evolution of phase oscillator systems. *Chaos*, 2009, 19: 023117
- 101 Gómez-Gardeñes J, Gómez S, Arenas A, et al. Explosive synchronization transitions in scale-free networks. *Phys Rev Lett*, 2011, 106: 128701
- 102 Sun J, Bollt E M, Nishikawa T. Master stability functions for coupled nearly identical dynamical systems. *Europhys Lett*, 2009, 85: 60011
- 103 Sorrentino F, Pecora L. Approximate cluster synchronization in networks with symmetries and parameter mismatches. *Chaos*, 2016, 26: 094823

Synchronous patterns in complex networks

WANG XinGang*

School of Physics and Information Technology, Shaanxi Normal University, Xi'an 710119, China

As a unique phenomenon in spatiotemporal nonlinear systems, dynamical patterns have been broadly interested by researchers from different fields. Recently, stimulated by the rapid progress in network science, the collective behaviors of coupled oscillators in complex networks have received continuous interest, in which the crucial roles of network structure on dynamics have been revealed and emphasized. Despite the significance of dynamical patterns to the functionality of realistic systems, it remains not very clear how patterns are generated in complex networks. Here, from the standpoint of cluster synchronization, we give a brief introduction on the recent progress achieved on the formation of robust dynamical patterns in complex networks of coupled chaotic oscillators, including the identification of synchronous patterns, their dynamical properties, the impact of network symmetry on pattern generation, the theoretical framework for analyzing pattern stability, and methods for controlling synchronous patterns. Implications of synchronous patterns to the functionality of realistic systems will be also discussed, as well as the open questions to be addressed.

complex network, chaos synchronization, cluster synchronization, spatiotemporal pattern

PACS: 05.45.-a, 05.45.Xt, 89.75.Hc, 89.75.Fb

doi: [10.1360/SSPMA-2019-0131](https://doi.org/10.1360/SSPMA-2019-0131)