$\mathcal{Q}_K$ 乘子代数上的 Corona 定理和 Wolff 定理

李东行, 乌兰哈斯*

汕头大学数学系, 汕头 515063

E-mail: oio211@live.cn, wulan@stu.edu.cn

收稿日期: 2018-07-27; 接受日期: 2018-11-19; 网络出版日期: 2019-04-22; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11720101003) 资助项目

摘要 本文给出对数 K -Carleson 测度的一个新特征, 并以此为工具研究 $\mathcal{Q}_K$ 空间的乘子代数 $M(\mathcal{Q}_K)$, 给出乘子代数 $M(\mathcal{Q}_K)$ 的某些特征描述. 利用对数 K -Carleson 测度及 $\mathcal{Q}_K$ 空间的一个新特征, 建立乘子代数 $M(\mathcal{Q}_K)$ 上的 Corona 定理和 Wolff 定理.

关键词 $\mathcal{Q}_K$ 空间 Corona 定理 Wolff 定理 乘子代数 对数 K -Carleson 测度

MSC (2010) 主题分类 30H25, 30H30, 46E15

1 引言

Carleson^[1] 著名的 Corona 定理表明, 若 $f_1, f_2, \dots, f_n$ 属于 $H^\infty = H^\infty(\mathbb{D})$ (单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上的有界解析函数全体), 满足

$$\|f_j\|_\infty \leq 1, \quad |f_1(z)| + |f_2(z)| + \cdots + |f_n(z)| \geq \delta > 0, \quad z \in \mathbb{D}, \quad (1.1)$$

则存在 H^∞ 中的函数 $g_1, g_2, \dots, g_n$ 使得

$$f_1 g_1 + \cdots + f_n g_n = 1.$$

Nicolau 和 Xiao^[2] 证明了 Corona 定理在 Banach 代数 $H^\infty \cap \mathcal{Q}_p$ 上成立. Pau^[3,4] 在 $H^\infty \cap \mathcal{Q}_K$ 和 $\mathcal{Q}_p$ 的乘子代数 $M(\mathcal{Q}_p)$ 上也建立了类似的结果. 相关结果可参见文献 [5–8]. 我们自然要问, 如果将 (1.1) 中下界 δ 换为一个 H^∞ 函数, 相应的 Corona 定理是否仍然成立? 换句话说讲, 若 $f_1, f_2, \dots, f_n, g$ 属于 H^∞ 且满足

$$|f_1(z)| + \cdots + |f_n(z)| \geq |g(z)|, \quad z \in \mathbb{D}, \quad (1.2)$$

问是否总能找到 H^∞ 中的函数 $g_1, g_2, \dots, g_n$ 使得

$$f_1 g_1 + \cdots + f_n g_n = g?$$

英文引用格式: Li D X, Wulan H S. Corona and Wolff theorems for the multiplier algebras of $\mathcal{Q}_K$ spaces (in Chinese). Sci Sin Math, 2021, 51: 301–314, doi: 10.1360/SCM-2018-0523

遗憾的是, 答案是否定的 (参见文献 [9]). 然而, Wolff 的结果表明 (参见文献 [9, 10]) 证明了 (1.2) 蕴含着存在 H^∞ 中的函数 $g_1, g_2, \dots, g_n$ 使得

$$f_1 g_1 + \dots + f_n g_n = g^3.$$

最近, 文献 [11–13] 证明了 Wolff 定理可以分别推广到 Dirichlet 空间的乘子代数、Banach 代数 $H^\infty \cap \mathcal{Q}_p$ 和乘子代数 $M(\mathcal{Q}_p)$.

本文的主要目的是在乘子代数 $M(\mathcal{Q}_K)$ 上建立 Corona 定理和 Wolff 定理.

设 $K : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ 是右连续的非减函数. $H(\mathbb{D})$ 表示 $\mathbb{D}$ 上的解析函数全体. $\mathcal{Q}_K$ 空间由满足条件

$$\|f\|_{\mathcal{Q}_K}^2 = \sup_{a \in \mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 K(g(z, a)) dA(z) < \infty$$

的 $f \in H(\mathbb{D})$ 构成, 其中 $dA(z)$ 是 $\mathbb{D}$ 上规范的 Lebesgue 测度, $g(z, a)$ 是 $\mathbb{D}$ 内奇点在 $a \in \mathbb{D}$ 的 Green 函数. 由文献 [14] 知, $\mathcal{Q}_K$ 的半范数 $\|f\|_{\mathcal{Q}_K}$ 可以写成

$$\|f\|_{\mathcal{Q}_K}^2 \approx \sup_{a \in \mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 K(1 - |\varphi_a(z)|^2) dA(z) < \infty,$$

其中 $\varphi_a(z) = \frac{a-z}{1-\bar{a}z}$ 是 $\mathbb{D}$ 的 Möbius 变换. 显然, $\mathcal{Q}_K$ 是 Möbius 不变的, 即对任意的 $a \in \mathbb{D}$ 和 $f \in \mathcal{Q}_K$, 有 $\|f \circ \varphi_a\|_{\mathcal{Q}_K} = \|f\|_{\mathcal{Q}_K}$. 若取 $K(t) = t^p$, $0 < p < \infty$, 则 $\mathcal{Q}_K$ 与 $\mathcal{Q}_p$ 一致 (参见文献 [15, 16]). 特别地, $\mathcal{Q}_1$ 刚好是有界平均振动的解析函数空间 BMOA; $\mathcal{Q}_0$ 是经典 Dirichlet 空间 $\mathcal{D}$; 对任意的 $p \in (1, \infty)$, 空间 $\mathcal{Q}_p$ 与 Bloch 空间 $\mathcal{B}$ 是相同的, 其中 $\mathcal{B}$ 是满足 $\|f\|_{\mathcal{B}} = \sup_{z \in \mathbb{D}} (1 - |z|^2) |f'(z)| < \infty$ 的 $H(\mathbb{D})$ 的子集.

对于函数 $f \in L^2(\partial\mathbb{D})$, 如果

$$\|f\|_{\mathcal{Q}_K(\partial\mathbb{D})}^2 = \sup_{I \subset \partial\mathbb{D}} \int_I \int_I \left| \frac{f(\xi) - f(\eta)}{\xi - \eta} \right|^2 K\left(\frac{|\xi - \eta|}{|I|}\right) |d\xi| |d\eta| < \infty,$$

则称 f 属于单位圆周 $\partial\mathbb{D}$ 上的 $\mathcal{Q}_K$ 空间, 记为 $f \in \mathcal{Q}_K(\partial\mathbb{D})$.

记 $M(\mathcal{Q}_K)$ 为 $\mathcal{Q}_K$ 空间的乘子集合, 即

$$M(\mathcal{Q}_K) = \{g \in H(\mathbb{D}) : fg \in \mathcal{Q}_K, \forall f \in \mathcal{Q}_K\}.$$

注意到 $M(\mathcal{Q}_K)$ 是 $H^\infty \cap \mathcal{Q}_K$ 的子集, 也是 Banach 代数.

Bloch 空间的乘子 $M(\mathcal{B})$, 分别在文献 [17, 18] 中被刻画为 $H^\infty \cap \mathcal{B}^{\log}$, 其中对数 Bloch 空间 $\mathcal{B}^{\log}$ 由满足

$$\|g\|_{\mathcal{B}^{\log}} = \sup_{z \in \mathbb{D}} |g'(z)| (1 - |z|^2) \log \frac{2}{1 - |z|^2} < \infty \quad (1.3)$$

的 $g \in H(\mathbb{D})$ 构成. 另一方面, (1.3) 等价于当 $s > 1$ 时测度 $|g'(z)|^2 (1 - |z|^2)^s dA(z)$ 是 2- 对数 s -Carleson 测度 (参见文献 [19]). 对于 $0 < s < 1$, Pau 和 Peláez [20] 证明了 $M(\mathcal{Q}_s) = H^\infty \cap \mathcal{Q}_s^{\log}$, 其中 $\mathcal{Q}_s^{\log}$ 由 $|g'(z)|^2 (1 - |z|^2)^s dA(z)$ 是 2- 对数 s -Carleson 测度的 $g \in H(\mathbb{D})$ 构成. 对于 $s = 1$, $M(\mathcal{Q}_1) = M(\text{BMOA})$ 在文献 [21] 中被刻画.

由文献 [14, 定理 2.1], 不妨设 K 定义在区间 $[0, 1]$ 上. 若需要考虑 $t > 1$ 的情形, 可通过令 $K(t) = K(1)$ 将其延拓到 $[0, \infty)$. 为了刻画乘子代数 $M(\mathcal{Q}_K)$, 我们需要如下两个关于 K 的限制条件:

$$\int_0^1 \varphi_K(s) \frac{ds}{s} < \infty, \quad (1.4)$$

$$\int_1^\infty \varphi_K(s) \frac{ds}{s^2} < \infty, \quad (1.5)$$

其中

$$\varphi_K(s) = \sup_{0 < t \leq 1} \frac{K(st)}{K(t)}, \quad 0 < s < \infty.$$

在条件 (1.4) 和 (1.5) 下, $\mathcal{Q}_K$ 空间已经被深入研究 (参见文献 [14, 22–24]). 由文献 [22] 知, 若 K 满足条件 (1.4) 和 (1.5), 则 $f \in H^2$ 属于 $\mathcal{Q}_K$ 当且仅当其边界值 $\tilde{f}$ 属于 $\mathcal{Q}_K(\partial\mathbb{D})$.

我们约定函数 K 满足双倍条件, 即对任意的 $t \in (0, 1)$, 有 $K(2t) \approx K(t)$. 此外, 由文献 [22] 知, 当 K 满足一定条件后, 可存在与其可比较的 K_1 和 K_2 . 进一步, 存在充分小的常数 $0 < c < 1/2$ 使得 $t^{-c}K_1(t)$ 单调递增, $K_2(t)t^{c-1}$ 单调递减.

本文余下内容组织如下. 第 2 节首先给出 $\mathbb{D}$ 上 p -对数 K -Carleson 测度的一种刻画, 然后用 2-对数 K -Carleson 测度研究乘子代数 $M(\mathcal{Q}_K)$. 证明等式 $M(\mathcal{Q}_K) = H^\infty \cap \mathcal{Q}_K^{\log}$ 关于 Blaschke 乘积是成立的. 第 3 节给出乘子代数 $M(\mathcal{Q}_K)$ 的 Corona 定理. 第 4 节证明乘子代数 $M(\mathcal{Q}_K)$ 的 Wolff 定理.

本文中, 若存在常数 $C > 0$ 使得 $A \leq CB$, 则记 $A \lesssim B$. 符号 $A \approx B$ 表示 $A \lesssim B \lesssim A$.

2 对数 $\mathcal{Q}_K$ 空间与乘子代数 $M(\mathcal{Q}_K)$

对于弧 $I \subset \partial\mathbb{D}$, 记 $|I|$ 为弧 I 的标准弧长, 称

$$S(I) = \{z = re^{i\theta} : 1 - |I| \leq r < 1, e^{i\theta} \in I\}$$

为 Carleson 方块. 对于 $\mathbb{D}$ 上正 Borel 测度 μ , 若

$$\|\mu\|_K^2 = \sup_{I \subset \partial\mathbb{D}} \int_{S(I)} K\left(\frac{1-|z|}{|I|}\right) d\mu(z) < \infty,$$

则称 μ 为 K -Carleson 测度 (参见文献 [22]).

对于 $K(t) = t^s$, $s > 0$, 显然, μ 是 K -Carleson 测度当且仅当 $(1-|z|^2)^s d\mu(z)$ 是 s -Carleson 测度 (参见文献 [22]).

对于 $0 \leq p < \infty$ 与 $\mathbb{D}$ 上正 Borel 测度 μ , 若

$$\sup_{I \subset \partial\mathbb{D}} \left(\log \frac{2}{|I|} \right)^p \int_{S(I)} K\left(\frac{1-|z|}{|I|}\right) d\mu(z) < \infty, \quad (2.1)$$

则称 μ 为 p -对数 K -Carleson 测度 (参见文献 [25]).

对数 $\mathcal{Q}_K$ 空间 $\mathcal{Q}_K^{\log}$ 是由 $|f'(z)|^2 dA(z)$ 为 2-对数 K -Carleson 测度的那些 $f \in H(\mathbb{D})$ 构成的集合. 由文献 [25] 可知, 其等价于

$$\|f\|_{\mathcal{Q}_K^{\log}}^2 = \sup_{a \in \mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} \left(\log \frac{2}{|1-\bar{a}z|} \right)^2 |f'(z)|^2 K(1-|\varphi_a(z)|^2) dA(z) < \infty. \quad (2.2)$$

由文献 [25] 知, $Q_K^{\log} \subset \mathcal{B}^{\log}$. 因此, 对数 Carleson 测度在刻画 Möbius 不变函数空间的乘子问题中扮演关键角色.

本文的第一个结论是 $\mathbb{D}$ 上 p -对数 K -Carleson 测度的一种刻画, 这将使我们在 (2.2) 中定义的对数 Q_K 空间 $Q_K^{\log}$ 更加自然.

定理 2.1 设 μ 是 $\mathbb{D}$ 上的正 Borel 测度, K 满足条件 (1.4), $0 < p < \infty$, 则 μ 是 p -对数 K -Carleson 测度当且仅当

$$\sup_{a \in \mathbb{D}} \left(\log \frac{2}{1 - |a|^2} \right)^p \int_{\mathbb{D}} K(1 - |\varphi_a(z)|^2) d\mu(z) < \infty. \quad (2.3)$$

证明 对于弧 $I \subset \partial\mathbb{D}$, 设 $e^{i\theta}$ 为 I 的中点. 取 $a = e^{i\theta}(1 - |I|)$, 则有

$$\frac{1 - |z|}{|I|} \lesssim \frac{(1 - |a|^2)(1 - |z|)}{|1 - \bar{a}z|^2} \approx 1 - |\varphi_a(z)|^2, \quad z \in S(I).$$

从而,

$$\left(\log \frac{2}{|I|} \right)^p \int_{S(I)} K\left(\frac{1 - |z|}{|I|}\right) d\mu(z) \lesssim \left(\log \frac{2}{1 - |a|} \right)^p \int_{\mathbb{D}} K(1 - |\varphi_a(z)|^2) d\mu(z).$$

因此, 由 (2.3) 知, $d\mu(z)$ 是 p -对数 K -Carleson 测度.

反之, 不妨设 $d\mu$ 是 p -对数 K -Carleson 测度. 对于 $|a| \leq 3/4$, (2.3) 显然成立. 因而设 $|a| > 3/4$. 令 I_n 为 $\partial\mathbb{D}$ 上的弧使得 $a/|a|$ 是中点且弧长 $|I_n| = 2^n|I|$. 注意到 n 最大可能是 N , 其中 $N = [\log_2 \frac{2}{|I|}]$. 因此,

$$|\varphi'_a(z)| = \frac{1 - |a|^2}{|1 - \bar{a}z|^2} \lesssim \frac{1}{2^{2n}|I|}, \quad z \in S(I_n) \setminus S(I_{n-1}), \quad n = 2, \dots, N.$$

从而有

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{D}} K(1 - |\varphi_a(z)|^2) d\mu(z) &= \left\{ \int_{S(I)} + \sum_{n=2}^N \int_{S(I_n) \setminus S(I_{n-1})} \right\} K(1 - |\varphi_a(z)|^2) d\mu(z) \\ &\approx \int_{S(I)} K\left(\frac{1 - |z|}{|I|}\right) d\mu(z) + \sum_{n=2}^N \int_{S(I_n) \setminus S(I_{n-1})} K((1 - |z|^2)|\varphi'_a(z)|) d\mu(z) \\ &\lesssim \left(\log \frac{2}{|I|} \right)^{-p} + \sum_{n=2}^N \int_{S(I_n)} K\left(\frac{1 - |z|}{2^{2n}|I|}\right) d\mu(z). \end{aligned}$$

由于 μ 是 p -对数 K -Carleson 测度, 则有

$$\left(\log \frac{2}{2^n|I|} \right)^p \int_{S(I_n)} K\left(\frac{1 - |z|}{2^n|I|}\right) d\mu(z) \lesssim 1.$$

因此,

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^N \int_{S(I_n)} K\left(\frac{1 - |z|}{2^{2n}|I|}\right) d\mu(z) &\lesssim \sum_{n=2}^N \sup_{z \in S(I_n)} \frac{K(\frac{1 - |z|}{2^{2n}|I|})}{K(\frac{1 - |z|}{2^n|I|})} \int_{S(I_n)} K\left(\frac{1 - |z|}{2^n|I|}\right) d\mu(z) \\ &\lesssim \sum_{n=2}^N \left(\log \frac{2}{2^n|I|} \right)^{-p} \sup_{z \in S(I_n)} \frac{K(\frac{1 - |z|}{2^{2n}|I|})}{K(\frac{1 - |z|}{2^n|I|})}. \end{aligned}$$

代入 $\frac{1-|z|}{2^n|I|} = t$, 可得

$$\sup_{z \in S(I_n)} \frac{K\left(\frac{1-|z|}{2^n|I|}\right)}{K\left(\frac{1-|z|}{2^n|I|}\right)} \leq \sup_{0 < t < 1} \frac{K(2^{-n}t)}{K(t)} = \varphi_K(2^{-n}).$$

于是, 由 (1.4) 得

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^N \int_{S(I_n)} K\left(\frac{1-|z|}{2^n|I|}\right) d\mu(z) &\lesssim \sum_{n=2}^N \left(\log \frac{2}{2^n|I|}\right)^{-p} \varphi_K(2^{-n}) \\ &\lesssim \int_2^N \left(\log \frac{2}{2^s|I|}\right)^{-p} \varphi_K(2^{-s}) ds \\ &= \int_{2^{-N}}^{1/4} \left(\log \frac{2x}{|I|}\right)^{-p} \frac{\varphi_K(x)}{x} dx \\ &\lesssim \left(\log \frac{2}{|I|}\right)^{-p}. \end{aligned}$$

因此, (2.3) 成立. □

接下来研究 $M(\mathcal{Q}_K)$. 我们猜测

$$M(\mathcal{Q}_K) = H^\infty \cap \mathcal{Q}_K^{\log}. \quad (2.4)$$

考虑 Blaschke 乘积

$$B(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{z}_n}{|z_n|} \frac{z - z_n}{1 - \bar{z}_n z},$$

其中 $\{z_n\}$ 是满足必要条件 $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |z_n|^2) < \infty$ 的 B 的零点. 我们发现上述猜测对于 Blaschke 乘积是正确的. 为证明我们的结论, 需要下面一些引理.

引理 2.1 ^[22] 设 K 满足 (1.4) 和 (1.5), 且 B 是内函数, 则对任意的 $\delta \in [0, 1)$ 和几乎所有的 $e^{i\theta} \in \partial\mathbb{D}$, 有

$$\int_{\delta}^1 \left(\frac{1 - |B(re^{i\theta})|^2}{1 - r^2} \right)^2 K\left(\frac{1-r}{1-\delta}\right) dr \approx \int_{\delta}^1 |B'(re^{i\theta})|^2 K\left(\frac{1-r}{1-\delta}\right) dr.$$

引理 2.2 ^[23] 设 K 满足 (1.4) 和 (1.5). 若 $\frac{4-t}{2} \leq s \leq 1$, 则

$$\int_{\mathbb{D}} \frac{K(1 - |\varphi_a(w)|^2)}{(1 - |w|^2)^s |1 - \bar{w}z|^t} dA(w) \approx \frac{K(1 - |\varphi_a(z)|^2)}{(1 - |z|^2)^{s+t-2}}, \quad a, z \in \mathbb{D}.$$

定理 2.2 设 K 满足 (1.4) 和 (1.5), B 是零点为 $\{z_n\}$ 的 Blaschke 乘积. 下列各式是等价的:

- (i) $B \in M(\mathcal{Q}_K)$;
- (ii) $B \in H^\infty \cap \mathcal{Q}_K^{\log}$;
- (iii) 测度 $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{z_n}$ 是 2-对数 K -Carleson, 其中 δ_{z_n} 是在点 z_n 处的 Dirac 测度, 即

$$\sup_{a \in \mathbb{D}} \left(\log \frac{2}{1 - |a|^2} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} K(1 - |\varphi_a(z_n)|^2) < \infty. \quad (2.5)$$

证明 由文献 [25] 中结果, 容易验证 (i) $\Rightarrow$ (ii) 成立.

假设 (ii) 成立. 由定理 2.1, 有

$$\sup_{a \in \mathbb{D}} \left(\log \frac{2}{1-|a|^2} \right)^2 \int_{\mathbb{D}} |B'(z)|^2 K(1-|\varphi_a(z)|^2) dA(z) < \infty. \quad (2.6)$$

由引理 2.1 和 2.2, 有

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{D}} |B'(z)|^2 K(1-|\varphi_a(z)|^2) dA(z) &= \int_{\mathbb{D}} |(B \circ \varphi_a)'(z)|^2 K(1-|z|^2) dA(z) \\ &\approx \int_{\mathbb{D}} (1-|(B \circ \varphi_a)(z)|^2)^2 \frac{K(1-|z|^2)}{(1-|z|^2)^2} dA(z) \\ &\gtrsim \sum_{n=1}^{\infty} (1-|\varphi_a(z_n)|^2)^2 \int_{\mathbb{D}} \frac{K(1-|z|^2)}{|1-\overline{z}\varphi_a(z_n)|^4} dA(z) \\ &\approx \sum_{n=1}^{\infty} K(1-|\varphi_a(z_n)|^2). \end{aligned}$$

于是, 由 (2.6) 有

$$\sup_{a \in \mathbb{D}} \left(\log \frac{2}{1-|a|^2} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} K(1-|\varphi_a(z_n)|^2) \lesssim \sup_{a \in \mathbb{D}} \left(\log \frac{2}{1-|a|^2} \right)^2 \int_{\mathbb{D}} |B'(z)|^2 K(1-|\varphi_a(z)|^2) dA(z) < \infty.$$

这意味着 $d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{z_n}$ 是 2- 对数 K -Carleson 测度. 因此, (iii) 成立.

设条件 (iii) 成立, 即

$$\sup_{a \in \mathbb{D}} \left(\log \frac{2}{1-|a|^2} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} K(1-|\varphi_a(z_n)|^2) < \infty. \quad (2.7)$$

立即可得

$$\sup_{a \in \mathbb{D}} \sum_{n=1}^{\infty} K(1-|\varphi_a(z_n)|^2) < \infty. \quad (2.8)$$

为了得到 (i), 只需证明对任意的 $f \in \mathcal{Q}_K$ 有 $Bf \in \mathcal{Q}_K$. 由于

$$\int_{\mathbb{D}} |(fB)'(z)|^2 K(1-|\varphi_a(z)|^2) dA(z) \leq \|B\|_{\infty}^2 \|f\|_{\mathcal{Q}_K}^2 + \int_{\mathbb{D}} |(fB')(z)|^2 K(1-|\varphi_a(z)|^2) dA(z),$$

应用不等式

$$|B'(z)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-|z_n|^2}{|1-\overline{z_n}z|^2}$$

及 Cauchy-Schwarz 不等式可得

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{D}} |(fB)'(z)|^2 K(1-|\varphi_a(z)|^2) dA(z) \\ &\leq \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-|z_n|^2}{|1-\overline{z_n}z|^2} \right)^2 K(1-|\varphi_a(z)|^2) dA(z) \\ &\lesssim \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-|z_n|^2)^{1-c}(1-|z|^2)^{1-c}}{|1-\overline{z_n}z|^{2(1-c)}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-|z_n|^2)^{1+c}}{|1-\overline{z_n}z|^{2c+2}} \frac{K(1-|\varphi_a(z)|^2)}{(1-|z|^2)^{1-c}} dA(z). \end{aligned}$$

由 $\mathcal{Q}_K \subset \mathcal{B}$, 可得

$$|f(z)| \leq \log \left(\frac{2}{1-|z|^2} \right) \|f\|_{\mathcal{B}} \leq \log \left(\frac{2}{1-|z|^2} \right) \|f\|_{\mathcal{Q}_K}. \quad (2.9)$$

结合 (2.7)–(2.9) 和 $K(t)t^{c-1}$ 的递减性, 由引理 2.2 可得

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{D}} |(fB')(z)|^2 K(1-|\varphi_a(z)|^2) dA(z) \\ & \lesssim \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 \sum_{n=1}^{\infty} (1-|\varphi_z(z_n)|^2)^{1-c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-|z_n|^2)^{1+c}}{|1-\bar{z}_n z|^{2c+2}} \frac{K(1-|\varphi_a(z)|^2)}{(1-|z|^2)^{1-c}} dA(z) \\ & \lesssim \|f\|_{\mathcal{Q}_K}^2 \sup_{a \in \mathbb{D}} \sum_{n=1}^{\infty} K(1-|\varphi_a(z_n)|^2) \sup_{z \in \mathbb{D}} \left(\left(\log \frac{2}{1-|z|^2} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} (1-|\varphi_z(z_n)|^2)^{1-c} \right) \\ & \lesssim \|f\|_{\mathcal{Q}_K}^2. \end{aligned}$$

因此, $B \in M(\mathcal{Q}_K)$. 证毕. $\square$

注 2.1 我们猜测 (2.4) 在一般情形下成立.

3 乘子代数 $M(\mathcal{Q}_K)$ 的 Corona 定理

下面的结果是本文的主要定理之一.

定理 3.1 设 K 满足 (1.4) 和 (1.5). 若 $\{f_j\}_{j=1}^n \subset M(\mathcal{Q}_K)$ 且存在 $\delta > 0$ 满足

$$\max_j |f_j(z)| \geq \delta > 0, \quad z \in \mathbb{D},$$

则存在 $\{g_j\}_{j=1}^n \subset M(\mathcal{Q}_K)$ 使得

$$g_1 f_1 + g_2 f_2 + \cdots + g_n f_n = 1.$$

为了证明定理 3.1, 我们需要以下引理.

引理 3.1 ^[3] 设 K 满足 (1.4) 和 (1.5) 且设

$$T_g(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{|g(w)|}{|1-z\bar{w}|^2} dA(w).$$

若 $d\mu = |g|^2 dA$ 是 K -Carleson 测度, 则 $d\nu = |T_g|^2 dA$ 也是 K -Carleson 测度.

引理 3.2 ^[3] 设 K 满足 (1.4) 和 (1.5). 若 $d\mu = |g|^2 dA$ 是 K -Carleson 测度, 则 $\bar{\partial}F = g$ 具有解 $F \in \mathcal{Q}_K(\partial\mathbb{D}) \cap L^\infty(\partial\mathbb{D})$ 使得

$$\|F\|_{\mathcal{Q}_K(\partial\mathbb{D})} + \|F\|_{L^\infty(\partial\mathbb{D})} \lesssim \|\mu\|_K^{1/2}.$$

引理 3.3 设 K 满足 (1.4) 和 (1.5), $\tau, \sigma > -1$, 则 $f \in \mathcal{Q}_K$ 当且仅当

$$\sup_{a \in \mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} \frac{|f(z) - f(w)|^2}{|1 - z\bar{w}|^{4+\sigma+\tau}} \frac{(1-|z|^2)^\tau}{|1 - \bar{a}z|^{\tau-\sigma}} \frac{(1-|w|^2)^\sigma}{|1 - \bar{a}w|^{\sigma-\tau}} K(1-|\varphi_a(w)|^2) dA(z) dA(w) < \infty.$$

证明 由定义知, $f \in \mathcal{Q}_K$ 当且仅当

$$\sup_{a \in \mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} |(f \circ \varphi_a)'(z)|^2 K(1 - |z|^2) dA(z) < \infty.$$

由文献 [26] 可知, 引理中的式子等价于

$$\sup_{a \in \mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} \frac{|f \circ \varphi_a(z) - f \circ \varphi_a(w)|^2}{|1 - z\bar{w}|^{4+\sigma+\tau}} (1 - |z|^2)^\tau (1 - |w|^2)^\sigma K(1 - |w|^2) dA(z) dA(w) < \infty.$$

做变量替换, 可得

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} \frac{|f \circ \varphi_a(z) - f \circ \varphi_a(w)|^2}{|1 - z\bar{w}|^{4+\sigma+\tau}} (1 - |z|^2)^\tau (1 - |w|^2)^\sigma K(1 - |w|^2) dA(z) dA(w) \\ &= \int_{\mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} \frac{|f(z) - f(w)|^2 (1 - |\varphi_a(z)|^2)^\tau (1 - |\varphi_a(w)|^2)^\sigma}{|1 - \varphi_a(z)\overline{\varphi_a(w)}|^{4+\sigma+\tau}} K(1 - |\varphi_a(w)|^2) dA(\varphi_a(z)) dA(\varphi_a(w)) \\ &= \int_{\mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} |f(z) - f(w)|^2 (1 - |z|^2)^\tau (1 - |w|^2)^\sigma K(1 - |\varphi_a(w)|^2) \frac{|\varphi_a'(z)|^{\tau+2} |\varphi_a'(w)|^{\sigma+2}}{|1 - \varphi_a(z)\overline{\varphi_a(w)}|^{4+\sigma+\tau}} dA(z) dA(w). \end{aligned}$$

结合

$$\frac{|\varphi_a'(z)|^{\tau+2} |\varphi_a'(w)|^{\sigma+2}}{|1 - \varphi_a(z)\overline{\varphi_a(w)}|^{4+\sigma+\tau}} = \frac{|1 - \bar{a}z|^{\sigma-\tau} |1 - \bar{a}|^{\tau-\sigma}}{|1 - z\bar{w}|^{4+\sigma+\tau}},$$

可得所需. $\square$

引理 3.4 ^[22] 设 K 满足 (1.4) 和 (1.5). $f \in L^2(\partial\mathbb{D})$ 属于 $\mathcal{Q}_K(\partial\mathbb{D})$ 当且仅当 $|\nabla \hat{f}(z)|^2 dA(z)$ 是 K -Carleson 测度, 其中 $\hat{f}$ 是 f 的 Poisson 拓展.

定理 3.1 的证明 不失一般性, 不妨设 $\|f_j\|_\infty \leq 1$. 考虑方程 $\sum_{k=1}^n f_k h_k = 1$ 及其非解析解

$$h_j = \frac{\overline{f_j}}{\sum_{k=1}^n |f_k|^2}, \quad j = 1, \dots, n.$$

我们先认定 $\bar{\partial}$ -方程

$$\bar{\partial} b_{j,k} = h_j \bar{\partial} h_k, \quad 1 \leq j, k \leq n,$$

具有解 $b_{j,k} \in M(\mathcal{Q}_K)$.

容易验证, 函数

$$g_j = h_j + \sum_{k=1}^n (b_{j,k} - b_{k,j}) f_k, \quad j = 1, \dots, n,$$

满足

$$\sum_{j=1}^n f_j g_j = \sum_{j=1}^n f_j h_j = 1.$$

由于对所有的 $j = 1, 2, \dots, n$, 有

$$\bar{\partial} g_j = \frac{\partial h_j}{\partial \bar{z}} + \sum_{k=1}^n f_k \left(h_j \frac{\partial h_k}{\partial \bar{z}} - h_k \frac{\partial h_j}{\partial \bar{z}} \right) = 0,$$

所以, $g_j \in H(\mathbb{D})$.

由 $\max_j |f_j(z)| \geq \delta > 0$ 和 $\|f_j\|_\infty \leq 1$, 有

$$|h_j(z)| = \frac{|f_j(z)|}{\sum_{k=1}^n |f_k(z)|^2} \leq \delta^{-2}. \quad (3.1)$$

考虑到 $\bar{\partial} \bar{f}_j = \bar{f}'_j$, 有

$$\bar{\partial} h_j = \frac{\bar{f}'_j}{\sum_{k=1}^n |f_k|^2} - \bar{f}_j \frac{\sum_{k=1}^n f_k \bar{f}'_k}{(\sum_{k=1}^n |f_k|^2)^2} = \frac{\sum_{k=1}^n f_k (\overline{f_k f'_j} - \overline{f_j f'_k})}{(\sum_{k=1}^n |f_k|^2)^2}.$$

由 $\max_j |f_j(z)| \geq \delta > 0$, 得

$$|\bar{\partial} h_j|^2 \leq \frac{2(\sum_{k=1}^n |f_k|^2)^2 \sum_{k=1}^n |f'_k|^2}{(\sum_{k=1}^n |f_k|^2)^4} \leq 2\delta^{-4} \sum_{k=1}^n |f'_k|^2. \quad (3.2)$$

类似可得

$$|\partial h_j|^2 \leq \delta^{-4} \sum_{k=1}^n |f'_k|^2.$$

于是,

$$|\nabla h_j|^2 = 2(|\partial h_j|^2 + |\bar{\partial} h_j|^2) \leq 6\delta^{-4} \sum_{k=1}^n |f'_k|^2. \quad (3.3)$$

现在证明 $g_j \in M(\mathcal{Q}_K)$, 即对任意的 $f \in \mathcal{Q}_K$ 验证 $g_j f \in \mathcal{Q}_K$. 由于 $f \in \mathcal{Q}_K$, 由 (3.1) 有

$$\int_{S(I)} |h_j(z) \nabla f(z)| K\left(\frac{1-|z|}{|I|}\right) dA(z) \lesssim \int_{S(I)} |f'(z)| K\left(\frac{1-|z|}{|I|}\right) dA(z) < \infty.$$

对每一个 $f_k \in M(\mathcal{Q}_K) \subset \mathcal{Q}_K$, 由 (3.3) 得

$$\int_{S(I)} |\nabla h_j(z) f(z)|^2 K\left(\frac{1-|z|}{|I|}\right) dA(z) \lesssim \sum_{k=1}^n \int_{S(I)} |f(z) f'_k(z)|^2 K\left(\frac{1-|z|}{|I|}\right) dA(z) < \infty.$$

从而,

$$\begin{aligned} & \int_{S(I)} |\nabla(h_j f)(z)|^2 K\left(\frac{1-|z|}{|I|}\right) dA(z) \\ & \lesssim \int_{S(I)} (|\nabla h_j(z) f(z)|^2 + |h_j(z) \nabla f(z)|^2) K\left(\frac{1-|z|}{|I|}\right) dA(z) < \infty. \end{aligned}$$

因此, $|\nabla(h_j f)(z)|^2 dA(z)$ 是 K -Carleson 测度. 另一方面, 由于 $b_{j,k} f \in \mathcal{Q}_K$ 且 $f_k \in M(\mathcal{Q}_K)$, $1 \leq j, k \leq n$, 我们发现

$$\sum_{j=1}^n (b_{j,k} - b_{k,j}) f_k f \in \mathcal{Q}_K.$$

这表明

$$g_j f = h_j f + \sum_{j=1}^n (b_{j,k} - b_{k,j}) f_k f \in \mathcal{Q}_K.$$

剩下只需证明能找到方程 $\bar{\partial}b_{j,k} = h_j\bar{\partial}h_k$ 的一个解满足 $b_{j,k} \in M(\mathcal{Q}_K)$ 即可. 为此, 只需处理方程 $\bar{\partial}u = G$, 其中 $G = h_j\bar{\partial}h_k$.

应用 (3.1) 和 (3.2), 我们有

$$|G(z)|^2 = |h_j|^2 |\bar{\partial}h_k|^2 \leq 2\delta^{-8} \sum_{k=1}^n |f'_k(z)|^2 \leq 2\delta^{-8} \left(\sum_{k=1}^n |f'_k(z)| \right)^2. \quad (3.4)$$

由于 $|f'_k(z)|^2 dA(z)$ 是 K -Carleson 测度, 可得 $|G(z)|^2 dA(z)$ 也是 K -Carleson 测度. 由引理 3.2 知, 存在定义在 $\mathbb{D}$ 上的函数 u , 使得其边界值在 $\mathcal{Q}_K(\partial\mathbb{D}) \cap L^\infty(\partial\mathbb{D})$ 内且满足 $\bar{\partial}u = G$.

考虑 $\mathbb{D}$ 内的函数 (参见文献 [2])

$$v(z) = \frac{i}{\pi} \int_{\mathbb{D}} \frac{1 - |\xi|^2}{|1 - \bar{\xi}z|^2} \exp \left[\int_{|w| \geq |\xi|} \left(\frac{1 + \bar{w}\xi}{1 - \bar{w}\xi} - \frac{1 + \bar{w}z}{1 - \bar{w}z} \right) |G(w)| dA(w) \right] G(\xi) dA(\xi),$$

其与 zu 具有相同的边界值, 而且

$$|\nabla v(z)| \lesssim \int_{\mathbb{D}} \frac{|G(w)|}{|1 - z\bar{w}|^2} dA(w). \quad (3.5)$$

由于 K 满足 (1.4) 和 (1.5), 由文献 [22] 知, $v \in H^\infty \cap \mathcal{Q}_K$. 现在证明 $v \in M(\mathcal{Q}_K)$. 由于 $v \in H^\infty$ 且 $f \in \mathcal{Q}_K$, 我们发现 $|v\nabla f|^2 dA$ 是 K -Carleson 测度. 令

$$\int_{\mathbb{D}} \frac{G(w)}{|1 - z\bar{w}|^2} dA(w) = T_G(z).$$

由 (3.4) 和 (3.5), 有

$$\begin{aligned} \int_{S(I)} |f(z)\nabla v(z)|^2 K\left(\frac{1-|z|}{|I|}\right) dA(z) &\lesssim \int_{S(I)} |f(z)|^2 \left(\int_{\mathbb{D}} \frac{|G(w)|}{|1 - z\bar{w}|^2} dA(w) \right)^2 K\left(\frac{1-|z|}{|I|}\right) dA(z) \\ &\lesssim \int_{S(I)} |f(z)|^2 \left(\sum_{k=1}^n \int_{\mathbb{D}} \frac{|f'_k(z)|}{|1 - z\bar{w}|^2} dA(w) \right)^2 K\left(\frac{1-|z|}{|I|}\right) dA(z) \\ &\lesssim n \sum_{k=1}^n \int_{S(I)} |f(z)T_{|f'_k|}(z)|^2 K\left(\frac{1-|z|}{|I|}\right) dA(z). \end{aligned}$$

记 $fT_{|f'_k|} = (fT_{|f'_k|} - T_{f|f'_k|}) + T_{f|f'_k|}$. 由 $f_k \in M(\mathcal{Q}_K)$ 易知, $|ff'_k|^2 dA$ 是 K -Carleson 测度. 从而, 由引理 3.1 知, $|T_{f|f'_k|}|^2 dA$ 也是 K -Carleson 测度.

由文献 [22] 知, 当 K 满足 (1.5) 时存在某常数 $c \in (0, 1)$ 使得 $\mathcal{Q}_K \subset \mathcal{Q}_{1-c}$. 因此, $\|f\|_{\mathcal{Q}_{1-c}} \lesssim \|f\|_{\mathcal{Q}_K}$. 利用等式

$$f(z)T_{|f'_k|}(z) - T_{f|f'_k|}(z) = \int_{\mathbb{D}} (f(z) - f(w)) \frac{|f'_k(w)|}{|1 - \bar{w}z|^2} dA(w),$$

以及 Cauchy-Schwarz 不等式和 $f_k \in M(\mathcal{Q}_K) \subset \mathcal{Q}_K \cap H^\infty$, 得到

$$\begin{aligned} |f(z)T_{|f'_k|}(z) - T_{f|f'_k|}(z)|^2 &\leq \left(\int_{\mathbb{D}} \frac{(f(z) - f(w))|f'_k(w)|}{|1 - \bar{w}z|^2} dA(w) \right)^2 \\ &\leq \int_{\mathbb{D}} \frac{|f(z) - f(w)|^2}{|1 - \bar{w}z|^{2+2c}(1 - |w|^2)^{1-c}} dA(w) \int_{\mathbb{D}} |f'_k(w)|^2 \frac{(1 - |w|^2)^{1-c}}{|1 - \bar{w}z|^{2(1-c)}} dA(w) \end{aligned}$$

$$\leq \|f_k\|_{\mathcal{Q}_{1-c}}^2 \int_{\mathbb{D}} \frac{|f(z) - f(w)|^2}{|1 - \bar{w}z|^{2+2c}} (1 - |z|^2)^{c-1} (1 - |w|^2)^{c-1} dA(w).$$

由引理 3.3, 有

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{D}} |f(z)T_{|f'_k|}(z) - T_{|f'_k|}(z)|^2 K(1 - |\varphi_a(z)|^2) dA(z) \\ & \leq \|f_k\|_{\mathcal{Q}_{1-c}}^2 \int_{\mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} \frac{|f(z) - f(w)|^2}{|1 - \bar{w}z|^{2+2c}} (1 - |z|^2)^{c-1} (1 - |w|^2)^{c-1} K(1 - |\varphi_a(z)|^2) dA(w) dA(z) \\ & \lesssim \|f\|_{\mathcal{Q}_K}^2 \cdot \|f_k\|_{\mathcal{Q}_K}^2 < \infty. \end{aligned}$$

这样, 我们得到 $\bar{\partial}u = G$ 的一个解 $v \in M(\mathcal{Q}_K)$. 证毕. $\square$

4 乘子代数 $M(\mathcal{Q}_K)$ 的 Wolff 定理

我们证明 Wolff 定理在乘子代数 $M(\mathcal{Q}_K)$ 上也成立.

定理 4.1 设 K 满足 (1.4) 和 (1.5). 若 $g, f_1, \dots, f_n \in M(\mathcal{Q}_K)$ 满足

$$|g(z)|^2 \leq \sum_{j=1}^n |f_j(z)|^2, \quad z \in \mathbb{D}, \quad (4.1)$$

则存在 $g_1, \dots, g_n \in M(\mathcal{Q}_K)$ 使得

$$g_1 f_1 + g_2 f_2 + \dots + g_n f_n = g^3. \quad (4.2)$$

证明 正如文献 [9] 中经典 Wolff 定理的证明, 我们的证明也分为两步. 首先, 将方程 $\sum_{j=1}^n f_j g_j = g^3$ 的一光滑解转变为 $M(\mathcal{Q}_K)$ 解, 然后利用 K -Carleson 测度去控制相应函数的范数.

设 $f_1, \dots, f_n, g \in M(\mathcal{Q}_K)$ 且满足定理条件. 不失一般性, 不妨设 $g, f_1, \dots, f_n$ 是 $\mathbb{D}$ 上的解析函数且满足 $\|f_j\|_{\infty} \leq 1, \|g\|_{\infty} \leq 1, j = 1, 2, \dots, n$. 令

$$\psi_j(z) = \frac{g(z)\bar{f}_j(z)}{\sum_{k=1}^n |f_k(z)|^2}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

利用 $|g(z)|^2 \leq \sum_{j=1}^n |f_j(z)|^2$, 可知 ψ_j 是在 $\mathbb{D}$ 上满足 $|\psi_j(z)| \leq 1$ 的 C^∞ 函数, 而且 $\sum_{j=1}^n f_j \psi_j = g$. 假设能获得下面方程:

$$\bar{\partial}b_{j,k} = g\psi_j \bar{\partial}\psi_k = g^3 G_{j,k}, \quad 1 \leq j, k \leq n$$

的一个解 $b_{j,k} \in M(\mathcal{Q}_K)$ 且 $\|b_{j,k}\|_{\infty} \leq 1$. 这样,

$$g_j(z) = g^2(z)\psi_j(z) + \sum_{k=1}^n (b_{j,k}(z) - b_{k,j}(z))f_k(z), \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

满足

$$\sum_{j=1}^n f_j g_j = g^2 \sum_{j=1}^n f_j \psi_j = g^3. \quad (4.3)$$

由于

$$\bar{\partial}g_j = g^2 \frac{\partial \psi_j}{\partial \bar{z}} + \sum_{k=1}^n g f_k \left(\psi_j \frac{\partial \psi_k}{\partial \bar{z}} - \psi_k \frac{\partial \psi_j}{\partial \bar{z}} \right) = 0,$$

这表明 $g_j \in H(\mathbb{D})$. 进一步, 有

$$\|g_j\|_\infty \leq 1 + 2n < \infty,$$

即 $g_j \in H^\infty$. 由于 $\bar{\partial} \bar{f}_j = \bar{f}'_j$ 以及

$$\bar{\partial} \psi_j = \frac{g \bar{f}'_j}{\sum_{k=1}^n |f_k|^2} - g \bar{f}_j \frac{\sum_{k=1}^n f_k \bar{f}'_k}{(\sum_{k=1}^n |f_k|^2)^2} = g \frac{\sum_{k=1}^n f_k (\overline{f_k f'_j} - \overline{f_j f'_k})}{(\sum_{k=1}^n |f_k|^2)^2},$$

可得

$$|\bar{\partial} \psi_j|^2 \leq 2|g|^2 \frac{(\sum_{k=1}^n |f_k|^2)^2 \sum_{k=1}^n |f'_k|^2}{(\sum_{k=1}^n |f_k|^2)^4} = 2|g|^2 \frac{\sum_{k=1}^n |f'_k|^2}{(\sum_{k=1}^n |f_k|^2)^2} \leq 2 \frac{\sum_{k=1}^n |f'_k|^2}{\sum_{k=1}^n |f_k|^2}.$$

类似地,

$$|\partial \psi_j|^2 \leq 2 \frac{|g'|^2 \sum_{k=1}^n |f_k|^2}{(\sum_{k=1}^n |f_k|^2)^2} + 2|g|^2 \frac{\sum_{k=1}^n |f'_k|^2 (\sum_{k=1}^n |f_k|^2)^2}{(\sum_{k=1}^n |f_k|^2)^4} \leq 2 \frac{|g'|^2 + \sum_{k=1}^n |f'_k|^2}{\sum_{k=1}^n |f_k|^2}.$$

因此,

$$|\nabla \psi_j|^2 \leq 2|g|^2 (|\partial \psi_j|^2 + |\bar{\partial} \psi_j|^2) \leq 4|g'|^2 + 8 \sum_{k=1}^n |f'_k|^2. \quad (4.4)$$

现在, 我们需要证明 $g_j \in M(Q_K)$. 由定义, 对任意的 $f \in Q_K$ 证明 $g_j f \in Q_K$.

注意到 ψ_j 关于任意的 $j = 1, \dots, n$ 在 $\mathbb{D}$ 上是 C^∞ 函数, 并且

$$\begin{aligned} |\nabla(g^2 \psi_j f)|^2 &= 2(|\partial(g^2 \psi_j f)|^2 + |\bar{\partial}(g^2 \psi_j f)|^2) \\ &\lesssim (|2gg' \psi_j f|^2 + |g^2 \psi_j f'|^2 + |g^2 f \partial \psi_j|^2 + |g^2 f \bar{\partial} \psi_j|^2) \\ &\approx 8|gg' \psi_j f|^2 + 2|g^2 \psi_j f'|^2 + 2|g^2 f \nabla \psi_j|^2. \end{aligned}$$

对任意的 Carleson 方块 $S(I)$, 有

$$\int_{S(I)} |g^2(z) \psi_j(z) f'(z)|^2 K\left(\frac{1-|z|}{|I|}\right) dA(z) \lesssim \int_{S(I)} |f'(z)|^2 K\left(\frac{1-|z|}{|I|}\right) dA(z) < \infty.$$

由 $g \in M(Q_K)$ 可知, 对任意的 $f \in Q_K$, $|fg'|^2 dA$ 是 K -Carleson 测度. 因而,

$$\int_{S(I)} |g(z) g'(z) \psi_j(z) f(z)|^2 K\left(\frac{1-|z|}{|I|}\right) dA(z) \lesssim \int_{S(I)} |g'(z) f(z)|^2 K\left(\frac{1-|z|}{|I|}\right) dA(z) < \infty.$$

由 (4.4), 有

$$\begin{aligned} &\int_{S(I)} |g^2(z) \nabla \psi_j(z) f(z)|^2 K\left(\frac{1-|z|}{|I|}\right) dA(z) \\ &\lesssim 4 \int_{S(I)} |f(z) g'(z)|^2 K\left(\frac{1-|z|}{|I|}\right) dA(z) + 8 \sum_{j=1}^n \int_{S(I)} |f(z) f'_j(z)|^2 K\left(\frac{1-|z|}{|I|}\right) dA(z) \end{aligned}$$

$< \infty$.

同样地, 由于 $\{f_j\}_{j=1}^n \subset M(\mathcal{Q}_K)$, 于是有 $b_{j,k}f \in \mathcal{Q}_K$. 因而,

$$\sum_{k=1}^n (b_{j,k} - b_{k,j}) f_k f \in \mathcal{Q}_K.$$

这预示着

$$g_j f = g^2 \psi_j f + \sum_{k=1}^n (b_{j,k} - b_{k,j}) f_k f \in \mathcal{Q}_K,$$

即 $\{g_j\}_{j=1}^n \subset M(\mathcal{Q}_K)$.

现在, 只需证明下列方程:

$$\bar{\partial} b_{j,k} = g \psi_j \bar{\partial} \psi_k = g^3 G_{j,k}, \quad 1 \leq j, k \leq n$$

存在解

$$b_{j,k} \in M(\mathcal{Q}_K).$$

由于 $G = g \psi_j \bar{\partial} \psi_k$ 满足

$$|G|^2 = |g \psi_j \bar{\partial} \psi_k|^2 \lesssim |g|^2 \frac{\sum_{k=1}^n |f'_k|^2}{(\sum_{k=1}^n |f_k|^2)^2} \leq \sum_{k=1}^n |f'_k|^2, \quad (4.5)$$

因此, $|G|^2 dA$ 是 K -Carleson 测度. 类似于定理 3.1 的方法, 我们可以得到解 $v \in M(\mathcal{Q}_K)$ 满足定理要求. 证毕. $\square$

致谢 衷心感谢审稿人提出的宝贵意见.

参考文献

- 1 Carleson L. Interpolations by bounded analytic functions and the Corona problem. *Ann of Math* (2), 1962, 76: 547–559
- 2 Nicolau A, Xiao J. Bounded functions in Möbius invariant Dirichlet spaces. *J Funct Anal*, 1997, 150: 383–425
- 3 Pau J. Bounded Möbius invariant $\mathcal{Q}_K$ spaces. *J Math Anal Appl*, 2008, 338: 1029–1042
- 4 Pau J. Multipliers of $\mathcal{Q}_s$ spaces and the Corona theorem. *Bull Lond Math Soc*, 2008, 40: 327–336
- 5 Rao K. On a generalized Corona problem. *J Anal Math*, 1967, 18: 277–278
- 6 Treil S. Estimates in the Corona theorem and ideals of H^∞ : A problem of T. Wolff. *J Anal Math*, 2002, 87: 481–495
- 7 Trent T. An estimate for ideals in $H^\infty(\mathbb{D})$. *Integral Equations Operator Theory*, 2005, 53: 573–587
- 8 Trent T. A Corona theorem for multipliers on Dirichlet space. *Integral Equations Operator Theory*, 2004, 49: 123–139
- 9 Garnett J. *Bounded Analytic Functions*. New York: Academic Press, 1981
- 10 Gamelin T. Wolff's proof of the Corona theorem. *Israel J Math*, 1980, 37: 113–119
- 11 Banjade D, Trent T. Wolff's ideal problem in the multiplier algebra on weighted Dirichlet spaces. *Houston J Math*, 2015, 41: 915–932
- 12 Banjade D, Trent T. Wolff's problem of ideals in the multiplier algebra on Dirichlet space. *Complex Anal Oper Theory*, 2014, 8: 1707–1721
- 13 Banjade D. Wolff's ideal theorems on $\mathcal{Q}_p$ spaces. *arXiv:1309.0253*, 2013
- 14 Essén M, Wulan H. On analytic and meromorphic functions and spaces of $\mathcal{Q}_K$ -type. *Illinois J Math*, 2002, 46: 1233–1258
- 15 Aulaskari R, Lappan P. Criteria for an analytic function to be Bloch and a harmonic or meromorphic function to be normal. In: *Complex Analysis and Its Applications*. Pitman Research Notes in Mathematics, vol. 305. Harlow: Longman Scientific & Technical, 1994, 136–146

- 16 Aulaskari R, Xiao J, Zhao R. On subspaces and subsets of BMOA and UBC. *Analysis*, 1995, 15: 101–121
- 17 Zhu K. Multipliers of BMO in the Bergman metric with applications to Toeplitz operators. *J Funct Anal*, 1989, 87: 31–50
- 18 Brown L, Shields A. Multipliers and cyclic vectors in the Bloch space. *Michigan Math J*, 1991, 38: 141–146
- 19 Zhao R. On logarithmic Carleson measures. *Acta Sci Math (Szeged)*, 2003, 69: 605–618
- 20 Pau J, Peláez J. Multipliers of Möbius invariant $\mathcal{Q}_s$ spaces. *Math Z*, 2009, 261: 545–555
- 21 Ortega J, Fábrega J. Pointwise multipliers and Corona type decomposition in BMOA. *Ann Inst Fourier (Grenoble)*, 1996, 46: 111–137
- 22 Essén M, Wulan H, Xiao J. Several function-theoretic characterizations of Möbius invariant $\mathcal{Q}_K$ spaces. *J Funct Anal*, 2006, 230: 78–115
- 23 Wulan H, Zhu K. Möbius Invariant $\mathcal{Q}_K$ Spaces. Berlin: Springer-Verlag, 2017
- 24 Wulan H, Zhu K. Derivative-free characterizations of $\mathcal{Q}_K$ spaces. *J Aust Math Soc*, 2007, 82: 283–295
- 25 Li S, Wulan H. Volterra type operators on $\mathcal{Q}_K$ spaces. *Taiwanese J Math*, 2010, 14: 195–211
- 26 Bao G, Lou Z, Qian R, et al. On multipliers of Dirichlet type spaces. *Complex Anal Oper Theory*, 2015, 9: 1701–1732

Corona and Wolff theorems for the multiplier algebras of $\mathcal{Q}_K$ spaces

Dongxing Li & Hasi Wulan

Abstract In this paper, a new characterization of the logarithmic K -Carleson measure on $\mathbb{D}$ is given. We characterize the multiplier algebra $M(\mathcal{Q}_K)$ of $\mathcal{Q}_K$ spaces in terms of the logarithmic K -Carleson measure on $\mathbb{D}$ and obtain the corona theorem and the Wolff theorem for the multiplier algebra $M(\mathcal{Q}_K)$.

Keywords $\mathcal{Q}_K$ space, Corona theorem, Wolff theorem, multiplier algebra, logarithmic K -Carleson measure

MSC(2010) 30H25, 30H30, 46E15

doi: 10.1360/SCM-2018-0523